Série n$^\circ$ 1

Exercice 1 ......

Exercice 2 ......

Exercice 3 .....

Exercice 4 ....

Série n° 1

Indication 1 ......

Série n$^\circ$ 1

Correction 1 1. Montrons que : $1 = 0,999\cdots 9\cdots$ (déjà vu en cours).

2. Trouver a et b dans $\mathbb{N}$ tel que $\frac{a}{b} = 5,173636\cdots 36\cdots$
   Soit

$$\begin{aligned}
\mathrm{x} &= 5,173636\cdots \\
&= \frac{517}{100} + \frac{36}{10^4} + \frac{36}{10^6} + \frac{36}{10^8} + \cdots \\
&= \frac{517}{100} + \frac{36}{10^4}\left(1 + \frac{1}{10^2} + \left(\frac{1}{10^2}\right)^2 + \cdots\right) \\
&= \frac{517}{100} + \frac{36}{10^4}\frac{1}{1-\frac{1}{10^2}} \quad \text{car} \quad \left|\frac{1}{10^2}\right| < 1 \\
&= \frac{517}{100} + \frac{36}{10^4 - 10^2} \\
&= \frac{517}{100} + \frac{36}{9900}.
\end{aligned}$$

   Donc $a = 517 \times 99 + 36 = 51219$ et $b = 9900$.

Correction 2 Resoudre dans $\mathbb{R}$

1.

$$\begin{aligned}
|\mathrm{x}+3| < 0,1 &\iff -0,1 < \mathrm{x}+3 < 0.1 \\
&\iff -3,1 < \mathrm{x} < -2,9 \\
&\iff S = \left]-3,1;-2,9\right[.
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
|\mathrm{x}-3| \geqslant 10 &\iff \mathrm{x}-3 \geqslant 10 \quad \text{ou} \quad \mathrm{x}-3 \leqslant -10 \\
&\iff \mathrm{x} \geqslant 13 \quad \text{ou} \quad \mathrm{x} \leqslant -7 \\
&\iff S = \left]-\infty;-7\right] \cup \left[13;+\infty\right[.
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
|\mathrm{x}| > |\mathrm{x}+5| &\iff (\mathrm{x}+5)^2 < \mathrm{x}^2 \\
&\iff \mathrm{x}^2 + 10\mathrm{x} + 25 < \mathrm{x}^2 \\
&\iff \mathrm{x} < -\frac{25}{10} = -\frac{5}{2} \\
&\iff S = \left]-\infty;-5/2\right[.
\end{aligned}$$

Correction 3 Soient A et B deux parties non vides bornées de $\mathbb{R}$

1. Montrons que : $A \cup B$ est bornée de $\mathbb{R}$
   Si $s \in A \cup B$ alors $x \in A$ ou $x \in B$,
   et on a si $x \in A$ alors $\min(\inf A, \inf B) \leqslant \inf A \leqslant \mathrm{x} \leqslant \sup A \leqslant \max(\sup A, \sup B)$,
   et si $x \in B$ alors $\min(\inf A, \inf B) \leqslant \inf B \leqslant \mathrm{x} \leqslant \sup B \leqslant \max(\sup A, \sup B)$,
   Donc $\forall \mathrm{x} \in A \cup B$ on a $\min(\inf A, \inf B) \leqslant \mathrm{x} \leqslant \max(\sup A, \sup B)$,
   d'où $A \cup B$ est bornée.

2. (a) Montrons que : $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$
d'après 1) on a x $\leqslant \max(\sup A, \sup B)$, $\forall x \in A \cup B$.
Donc $\max(\sup A, \sup B)$ est un majorant de $A \cup B$.
Or $\sup(A \cup B)$ est le plus petit des majorants de $A \cup B$.
Donc $\sup(A \cup B) \leqslant \max(\sup A, \sup B)$.
D'autre part on a

$$A \subseteq A \cup B \Rightarrow \sup A \leqslant \sup(A \cup B),$$

$$B \subseteq A \cup B \Rightarrow \sup B \leqslant \sup(A \cup B).$$

Donc $\max(\sup A, \sup B) \leqslant \sup(A \cup B)$.
Par conséquent $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$.

(b) Montrons que : $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$
d'après 1) on a x $\leqslant \min(\inf A, \inf B)$, $\forall x \in A \cup B$.
Donc $\min(\inf A, \inf B)$ est un minorant de $A \cup B$.
Or $\inf(A \cup B)$ est le plus grand des minorants de $A \cup B$.
Donc $\min(\inf A, \inf B) \leqslant \inf(A \cup B)$.
D'autre part on a

$$A \subseteq A \cup B \Rightarrow \inf(A \cup B) \leqslant \inf A,$$

$$B \subseteq A \cup B \Rightarrow \inf(A \cup B) \leqslant \inf B.$$

Donc $\inf(A \cup B) \leqslant \min(\inf A, \inf B)$.
Par conséquent $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$.

3. On a si A est borné alors $\inf A \leqslant a \leqslant \sup A$, $\forall a \in A$,
et si B est borné alors $\inf B \leqslant b \leqslant \sup B$, $\forall b \in B$.
Donc $\inf A + \inf B \leqslant x \leqslant \sup A + \sup B$, $\forall x \in A + B$.
Donc $A + B$ est borné.

4. (a) Soit $x \in A + B$ donc $\exists a \in A$ et $\exists b \in B$ tel que : $x = a + b$.
D'après 3) on a $x \leqslant \sup A + \sup B$, $\forall x \in A + B$.
Donc $\sup A + \sup B$ est un majorant de $A + B$. Et puisque $\sup(A+B)$ est le plus petit des majorant, alors :

$$\sup(A + B) \leqslant \sup A + \sup B. \tag{1}$$

D'autre part : $\forall x = a + b \in A + B$, on a :

$$\begin{aligned} x = a + b \leqslant \sup(A + B) \quad &\Rightarrow \quad a \leqslant \sup(A + B) - b, \quad \forall a \in A, \\ &\Rightarrow \quad \sup(A + B) - b \quad \text{est un majorant de} \quad A, \\ &\Rightarrow \quad \sup A \leqslant \sup(A + B) - b, \\ &\Rightarrow \quad b \leqslant \sup(A + B) - \sup A, \quad \forall b \in B, \\ &\Rightarrow \quad \sup(A + B) - \sup A \quad \text{est un majorant de} \quad B, \\ &\Rightarrow \quad \sup B \leqslant \sup(A + B) - \sup A. \end{aligned}$$

Donc

$$\sup A + \sup B \leqslant \sup(A + B). \tag{2}$$

Finalement d'après (1) et (2), on obtient $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

(b) Montrons que : $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$.
D'après 3) on a :

$$\inf(A + B) \geqslant \inf A + \inf B. \tag{3}$$

D'autre part ; $\forall (a, b) \in A \times B$, on a :

$$\begin{aligned} a + b \geqslant \inf(A + B) \quad &\Rightarrow \quad a \geqslant \inf(A + B) - b, \quad \forall a \in A, \\ &\Rightarrow \quad \inf(A + B) - b \quad \text{est un minorant de} \quad A, \\ &\Rightarrow \quad \inf A \geqslant \inf(A + B) - b, \\ &\Rightarrow \quad b \geqslant \inf(A + B) - \inf A, \quad \forall b \in B, \\ &\Rightarrow \quad \inf(A + B) - \inf A \quad \text{est un minorant de} \quad B, \\ &\Rightarrow \quad \inf B \geqslant \inf(A + B) - \sup A. \end{aligned}$$

Donc
$$\inf A + \inf B \geqslant \inf(A+B). \tag{4}$$
Finalement ; d'après (3) et (4), on obtient $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$.

Correction 4 Déterminer les bornes supérieures et inférieures quand elles existent de

1. $A = \left\{\frac{2n-1}{2n+1}, \quad n \in \mathbb{N}\right\} \neq \emptyset$.
   on a $\quad -1 \leqslant \frac{2n-1}{2n+1} \leqslant 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
   Donc A est borné, d'où l'existence de $\sup A$ et $\inf A$.
   $\sup A = 1$?
   (i) 1 est un majorant de A.
   (ii) $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists ? n_0 \in \mathbb{N}$ tel que
   $$\begin{aligned} 1-\varepsilon < \frac{2n_0-1}{2n_0+1} \quad &\iff \quad 1 - \frac{2n_0-1}{2n_0+1} < \varepsilon, \\ &\iff \quad \frac{1}{2n_0+1} < \varepsilon. \end{aligned}$$
   Puisque $\frac{2}{2n_0+1} \leqslant \frac{2}{2n_0}$ il suffit que $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$ c'est-à-dire $\frac{1}{\varepsilon} < n_0$
   $\sup A \in A$?
   Si oui : $\sup A = 1 = \frac{2n-1}{2n+1}$ avec $n \in \mathbb{N}$ c'est-à-dire $2n+1 = 2n-1$,
   donc $-1 = 1$ ce qu'est impossible donc $\sup A \notin A$.

   $\inf A = -1$:

   (i) -1 est un minorant de A.
   (ii) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists ? n_0 \in \mathbb{N}$ tel que
   $$\begin{aligned} -1+\varepsilon > \frac{2n_0-1}{2n_0+1} \quad &\iff \quad 1 + \frac{2n_0-1}{2n_0+1} < \varepsilon, \\ &\iff \quad \frac{4n_0}{2n_0+1} < \varepsilon. \end{aligned}$$
   Puisque $\frac{4n_0}{2n_0+1} \leqslant 4n_0$ il suffit que $4n_0 < \varepsilon$ c'est-à-dire $n_0 < \varepsilon/4$.
   On a $-1 = \frac{2\times 0-1}{2\times 0+1}$ donc $\inf A = -1 \in A$ d'où $\min A = -1$.
2. $B = \left\{\frac{n^2-1}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N}^*\right\} \neq \emptyset$.
   on a $\quad 0 \leqslant \frac{n^2-1}{n^2} \leqslant 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.
   Donc B est borné, d'où l'existence de $\sup B$ et $\inf B$.
   $\sup B = 1$?
   (i) 1 est un majorant de B.
   (ii) $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists ? n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que
   $$\begin{aligned} 1-\varepsilon < \frac{n_0^2-1}{n_0^2} \quad &\iff \quad 1 - \frac{n_0^2-1}{n_0^2} < \varepsilon, \\ &\iff \quad \frac{1}{n_0^2} < \varepsilon, \\ &\iff \quad \frac{1}{\varepsilon} < n_0^2, \\ &\iff \quad \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} < n_0. \end{aligned}$$

   $\sup B = 1 \in B$?
   Si oui : $\sup B = 1 = \frac{n^2-1}{n^2}$ avec $n \in \mathbb{N}$ c'est-à-dire $n^2 = n^2 - 1$,
   donc $0 = -1$ ce qu'est impossible donc $\sup B \notin B$.

   $\inf B = 0$

(i) 0 est un minorant de B.

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists ? n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\begin{aligned} \varepsilon > \frac{n_0^2 - 1}{n_0^2} \quad &\Longleftrightarrow \quad n_0^2 \varepsilon > n_0^2 - 1, \\ &\Longleftrightarrow \quad n_0^2(\varepsilon - 1) > -1, \\ &\Longleftrightarrow \quad n_0^2(1 - \varepsilon) < 1. \end{aligned}$$

Si $1 < \varepsilon$ alors n_0 est quelconque dans $\mathbb{N}^*$.
Si $1 > \varepsilon > 0$ alors $n_0^2 < \frac{1}{1-\varepsilon}$ c'est-à-dire $n_0 < \sqrt{\frac{1}{1-\varepsilon}}$.
Si $\varepsilon = 1$ alors $\forall n_0 \in \mathbb{N}^*$, $\quad \frac{n_0^2 - 1}{n_0^2} < 1$.

D'autre part $0 = \frac{1^2 - 1}{1^2}$ donc $0 \in B$ d'où $\min B = 0$.

3. $C = \left\{ \frac{1}{n} + (-1)^n, \quad n \in \mathbb{N}^* \right\} = C_1 \cup C_2$,
avec $C_1 = \left\{ \frac{1}{2n} + 1, \quad n \geqslant 1 \right\}$ et $C_2 = \left\{ \frac{1}{2n+1} - 1, \quad n \geqslant 0 \right\}$,
on a $1 \leqslant \frac{1}{2n} + 1 \leqslant 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ et $-1 \leqslant \frac{1}{2n+1} - 1 \leqslant 0$.
Donc les $C_i, (i = 1, 2)$ sont bornés et non vides.
Donc d'après l'exercice 3, $C_1 \cup C_2$ est bornés et on a
$\sup(C_1 \cup C_2) = \max(\sup C_1, \sup C_2)$ et $\inf(C_1 \cup C_2) = \min(\inf C_1, \inf C_2)$,
avec $\inf C_1 = 1$ et $\sup C_1 = 3/2$ et $\inf C_2 = -1$ et $\sup C_2 = 0$.

4. $D = \{e^n, \quad n \in \mathbb{N}\}$
D est non majoré car $\lim\limits_{n \to +\infty} e^n = +\infty$.
D'autre part $\forall n \in \mathbb{N}, \quad e^n \geqslant 1$, donc D est minoré, d'où l'existence de $\inf D$.
$\inf D = 1$

(i) 1 est un minorant de D.

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists ? n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$1 + \varepsilon > e^{n_0} \quad \Longleftrightarrow \quad n_0 < \ln(1 + \varepsilon).$$

$1 = e^0$ c'est-à-dire $1 \in D$ d'où $\min D = 1$.