Série n° 2

Correction 1 1. On a $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \dfrac{(-3)^n}{n}$.

$a_{2n} = \dfrac{3^{2n}}{2n} = \dfrac{e^{2n\ln 3}}{2n\ln 3}\ln 3 \longrightarrow +\infty$ donc (a_n) diverge.

2. On a $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n = \dfrac{n-(-1)^n}{n+(-1)^n} = \dfrac{n(1-(-1)^n/n)}{n(1+(-1)^n/n)} = \dfrac{1-(-1)^n/n}{1+(-1)^n/n} \longrightarrow 1$.
   Car $\dfrac{(-1)^n}{n} \longrightarrow 0$
3. On a $\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \dfrac{3^n-2^n}{3^n+2^n} = \dfrac{3^n(1-(2/3)^n)}{3^n(1+(2/3)^n)} = \dfrac{1-(2/3)^n}{1+(2/3)^n} \longrightarrow 1$.
   Car $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n \longrightarrow 0$
4. On a $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad d_n = \dfrac{\sin n + \cos n}{n}$
   $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad -2/n \leqslant d_n \leqslant 2/n$
   et on a $-2/n \longrightarrow 0$ et $2/n \longrightarrow 0$ donc $d_n \longrightarrow 0$.
5. On a $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad x_n = (\sin(1/n))^{1/n}$
   donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a
$$\begin{aligned} x_n = (\sin(1/n))^{1/n} &= e^{(1/n)\ln|\sin(1/n)|}, \\ &= e^{(1/n)\ln\left(\left|\frac{\sin(1/n)}{1/n}\right|\frac{1}{n}\right)}, \\ &= e^{(1/n)\ln\left(\frac{\sin(1/n)}{1/n}\right)+\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right)}, \\ &= e^{(1/n)\ln\left(\frac{\sin(1/n)}{1/n}\right)}e^{\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right)}, \end{aligned}$$
   et on a $e^{(1/n)\ln\left(\frac{\sin(1/n)}{1/n}\right)} \longrightarrow e^{0\ln 1} = 1$ et $e^{\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right)} \longrightarrow e^0 = 1$.
   Donc $x_n \longrightarrow 1$.
6. On a $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad y_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$
   Multiplions par l'expression conjuguée, on obtient
   $y_n = \dfrac{2n}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}} = \dfrac{2}{\sqrt{1/n^2+1/n+1}+\sqrt{1/n^2-1/n+1}}$.
   Donc $y_n \longrightarrow \dfrac{2}{2} = 1$.
7. On a $\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_n = \dfrac{2^n+3^n}{a^n}$
   donc $z_n = \dfrac{3^n}{a^n}(1+(2/3)^n) = \left(\dfrac{3}{a}\right)^n(1+(2/3)^n)$
   (a) Si $|3/a| > 1$ alors : (z_n) diverge.
   (b) Si $|3/a| < 1$ alors $\lim(3/a)^n = 0$ donc $\lim z_n = 0$.
   (c) Si $|3/a| = 1$ alors $|a| = 3$.
      i. Si $a = 3$ alors $z_n = 1 + (2/3)^n \longrightarrow 1$.
      ii. Si $a = -3$ alors $z_n = (-1)^n(1+(2/3)^n)$
      donc $z_{2n} \longrightarrow 1$ et $z_{2n+1} \longrightarrow -1$.
      Donc (z_n) diverge.
8. On a $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \omega_n = \dfrac{n!}{n^n}$.
   Donc $\omega_n = \dfrac{n \times (n-1)\cdots 2 \times 1}{n \times n \cdots n \times n} = \dfrac{n}{n}\dfrac{n-1}{n}\dfrac{n-2}{n}\cdots\dfrac{2}{n}\dfrac{1}{n}$.
   Et on a $\dfrac{k}{n} \leqslant 1$, pour tout entier $2 \leqslant k \leqslant n$
   donc $0 \leqslant \omega_n \leqslant 1/n$. Donc $\omega_n \longrightarrow 0$.

Correction 2
- Montrons que : $|u_n| \longrightarrow |l|$.
  Soit $\varepsilon > 0$,
  puisque $u_n \longrightarrow l$ donc $\exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad |u_n - l| < \varepsilon$.
  Or $||u_n| - |l|| \leqslant |u_n - l|$.
  Donc $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad$ on a $\quad ||u_n| - |l|| < \varepsilon$,
  donc $|u_n| \longrightarrow |l|$.
- La réciproque est en général fausse.
  Pour $u_n = (-1)^n$, on a $|u_n| \longrightarrow 1$,
  mais (u_n) diverge.

Correction 3 Soit $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n^3+k)^{1/3}} = \frac{1}{(n^3+1)^{1/3}} + \frac{1}{(n^3+2)^{1/3}} + \cdots + \frac{1}{(n^3+n)^{1/3}}$.
On a :

$$\begin{aligned} 1 \leqslant k \leqslant n \quad &\Rightarrow \quad n^3+1 \leqslant n^3+k \leqslant n^3+n, \\ &\Rightarrow \quad (n^3+1)^{1/3} \leqslant (n^3+k)^{1/3} \leqslant (n^3+n)^{1/3}, \\ &\Rightarrow \quad \frac{1}{(n^3+n)^{1/3}} \leqslant \frac{1}{(n^3+k)^{1/3}} \leqslant \frac{1}{(n^3+1)^{1/3}}, \\ &\Rightarrow \quad \frac{n}{(n^3+n)^{1/3}} \leqslant u_n \leqslant \frac{n}{(n^3+1)^{1/3}}. \end{aligned}$$

Et on a $\dfrac{n}{(n^3+n)^{1/3}} \longrightarrow 1$ et $\dfrac{n}{(n^3+1)^{1/3}} \longrightarrow 1$
donc $u_n \longrightarrow 1$.

Correction 4 Soit $u_n = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$.

1. Montrons que : $\dfrac{1}{n!} \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}} \quad \forall n \geqslant 1$. (Par récurrence)
2. On a : $\forall 1 \leqslant k \leqslant n$

$$\begin{aligned} \frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{2^{k-1}} \quad &\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}}, \\ &\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}, \\ &\Rightarrow \quad u_n \leqslant 1 + \frac{1-(1/2)^n}{1-1/2} = 1 + 2(1-(1/2)^n), \\ &\Rightarrow \quad u_n \leqslant 3. \end{aligned}$$

   donc $(u_n)_n$ est majorée.
   De plus $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)!}$ donc $(u_n)_n$ est strictement croissante.
   Par conséquent $(u_n)_n$ est convergente.

Correction 5 Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
Montrons que $(u_n)_n$ est divergente. (Par absurde)
Si $(u_n)_n$ converge vers l on a aussi $\lim u_{2n} = l$
alors $\lim(u_{2n} - u_n) = l - l = 0$.
D'autre part : $u_{2n} - u_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{n+n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$

$$\begin{aligned} 1 \leqslant k \leqslant n \quad &\Rightarrow \quad n+1 \leqslant n+k \leqslant 2n, \\ &\Rightarrow \quad \frac{1}{2n} \leqslant \frac{1}{n+k} \leqslant \frac{1}{n+1}, \\ &\Rightarrow \quad \frac{1}{2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = u_{2n} - u_n, \\ &\Rightarrow \quad \frac{1}{2} \leqslant \lim(u_{2n} - u_n) = 0. \end{aligned}$$

ce qui est absurde.

Correction 6 Soit

$$\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}, \quad \omega_n = \sum_{k=2}^{n} \ln(1 - 1/k^2) = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right) = \sum_{k=2}^{n} [\ln(k-1) - 2\ln k + \ln(k+1)]$$

$k = 2$: $\quad \ln(1) - 2\ln(2) + \ln(3)$
$k = 3$: $\quad \ln(2) - 2\ln(3) + \ln(4)$
$k = 4$: $\quad \ln(3) - 2\ln(4) + \ln(5)$
.
.
.
$k = n-2$: $\quad \ln(n-3) - 2\ln(n-2) + \ln(n-1)$
$k = n-1$: $\quad \ln(n-2) - 2\ln(n-1) + \ln(n)$
$k = n$: $\quad \ln(n-1) - 2\ln(n) + \ln(n+1)$
Après sommation on a : $u_n = -\ln(2) - \ln(n) + \ln(n+1) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \ln(2)$.
Donc $u_n \longrightarrow -\ln 2$.

Correction 7 Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n + \ln k}$.

$$\begin{aligned} 1 \leqslant k \leqslant n \quad &\Rightarrow \quad 0 \leqslant \ln(k) \leqslant \ln(n), \\ &\Rightarrow \quad n \leqslant n + \ln(k) \leqslant n + \ln(n), \\ &\Rightarrow \quad \frac{1}{n+\ln(n)} \leqslant \frac{1}{n+\ln(k)} \leqslant \frac{1}{n}, \\ &\Rightarrow \quad \frac{n}{n+\ln(n)} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+\ln(k)} = u_n \leqslant \frac{n}{n} = 1. \end{aligned}$$

et $\lim \frac{n}{n+\ln(n)} = 1$ donc $\lim u_n = 1$.

Correction 8 Soit

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1/2^n} \geqslant 0, \quad \forall n \geqslant 2 \end{cases}$$

1. On a $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n^2 + 1/2^n} - u_n = \dfrac{u_n^2 + 1/2^n - u_n^2}{u_{n+1} + u_n} = \dfrac{1/2^n}{u_{n+1} + u_n} \geqslant 0$, donc (u_n) est croissante.
2. On a $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1/2^n}{u_{n+1} + u_n}$,
et $u_{n+1} + u_n \geqslant u_n \geqslant u_1 = 1$,
donc $\quad \forall n \geqslant 1, \quad \dfrac{1}{u_{n+1} + u_n} \leqslant 1 \quad$ c'est-à-dire $\quad u_{n+1} - u_n \leqslant 1/2^n$,
donc $\quad u_{n+1} \leqslant u_n + 1/2^n, \quad \forall n \geqslant 1$, et on a

$$\begin{aligned} u_n &\leqslant u_{n-1} + 1/2^{n-1}, \\ &\leqslant u_{n-2} + 1/2^{n-2} + 1/2^{n-1}, \\ &\leqslant . \\ &\leqslant . \\ &\leqslant u_1 + 1/2 + 1/2^2 + \cdots + 1/2^{n-2} + 1/2^{n-1}, \qquad (u_1 = 1) \\ &\leqslant \frac{1 - 1/2^n}{1 - 1/2} \leqslant \frac{1}{1 - 1/2} = 2. \end{aligned}$$

Donc (u_n) est majoree par 2.

3. On a (u_n) est strictement croissante et majorée, donc elle converge. Et on a

$$\begin{array}{rcl} u_n^2 & = & u_{n-1}^2 + 1/2^{n-1}, \\ & = & u_{n-2}^2 + 1/2^{n-2} + 1/2^{n-1}, \\ & = & \cdot \\ & = & \cdot \\ & = & u_1^2 + 1/2 + 1/2^2 + \cdots + 1/2^{n-2} + 1/2^{n-1}, \qquad (u_1 = 1) \\ & = & \dfrac{1 - 1/2^n}{1 - 1/2} = 2(1 - 1/2^n). \end{array}$$

c'est-à-dire $\lim u_n^2 = 2$, donc $\lim u_n = \sqrt{2}$ car $u_n \geqslant 0$.