Les nombres réels

Cours de MIP
Analyse 1

A. Hafidi
FST-Errachidia

November 30, 2020

Plan

Propriétés de base

Intervalle de $\mathbb{R}$

Valeur absolue

Propriétés de la borne supérieure

Plan

Propriétés de base

Intervalle de $\mathbb{R}$

Valeur absolue

Propriétés de la borne supérieure

Propriétés de base

Le corps des nombres réels est la base de l'analyse réelle. Nous allons dans ce chapitre donner ses propriétés fondamentales. Nous allons commencer par énoncer trois propriétés de base à partir desquelles nous allons déduire les autres.

Propriétés de base

Le corps des nombres réels est la base de l'analyse réelle. Nous allons dans ce chapitre donner ses propriétés fondamentales. Nous allons commencer par énoncer trois propriétés de base à partir desquelles nous allons déduire les autres.

$\mathbb{R}$ est corps commutatif

L'ensemble des nombres réels possède deux lois de composition internes, l'addition et la multiplication vérifiant les proppriétés suivantes:

Propriétés de base

Le corps des nombres réels est la base de l'analyse réelle. Nous allons dans ce chapitre donner ses propriétés fondamentales. Nous allons commencer par énoncer trois propriétés de base à partir desquelles nous allons déduire les autres.

$\mathbb{R}$ est corps commutatif

L'ensemble des nombres réels possède deux lois de composition internes, l'addition et la multiplication vérifiant les proppriétés suivantes:

1. $(\mathbb{R},+)$ est un **groupe commutatif**,
   a) l'addition est associative :
   $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad (x+y)+z = x+(y+z).$

Propriétés de base

Le corps des nombres réels est la base de l'analyse réelle. Nous allons dans ce chapitre donner ses propriétés fondamentales. Nous allons commencer par énoncer trois propriétés de base à partir desquelles nous allons déduire les autres.

$\mathbb{R}$ est corps commutatif

L'ensemble des nombres réels possède deux lois de composition internes, l'addition et la multiplication vérifiant les proppriétés suivantes:

1. $(\mathbb{R},+)$ est un **groupe commutatif**,
   a) l'addition est associative :
   $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad (x+y)+z = x+(y+z)$.
   b) l'addition admet un élément neutre qui est 0: $\forall x \in \mathbb{R}$
   $x+0 = 0+x = x$.

Propriétés de base

Le corps des nombres réels est la base de l'analyse réelle. Nous allons dans ce chapitre donner ses propriétés fondamentales. Nous allons commencer par énoncer trois propriétés de base à partir desquelles nous allons déduire les autres.

$\mathbb{R}$ est corps commutatif

L'ensemble des nombres réels possède deux lois de composition internes, l'addition et la multiplication vérifiant les proppriétés suivantes:

1. $(\mathbb{R},+)$ est un **groupe commutatif**,
   a) l'addition est associative :
      $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad (x+y)+z = x+(y+z)$.
   b) l'addition admet un élément neutre qui est 0: $\forall x \in \mathbb{R}$
      $x+0 = 0+x = x$.
   c) Tout élément $x \in \mathbb{R}$ admet un symétrique $-x$:
      $x+(-x) = (-x)+x = 0$.

Propriétés de base

Le corps des nombres réels est la base de l'analyse réelle. Nous allons dans ce chapitre donner ses propriétés fondamentales. Nous allons commencer par énoncer trois propriétés de base à partir desquelles nous allons déduire les autres.

$\mathbb{R}$ est corps commutatif

L'ensemble des nombres réels possède deux lois de composition internes, l'addition et la multiplication vérifiant les proppriétés suivantes:

1. ($\mathbb{R}$,$+$) est un **groupe commutatif**,
   a) l'addition est associative :
   $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad (x + y) + z = x + (y + z)$.
   b) l'addition admet un élément neutre qui est 0: $\forall x \in \mathbb{R}$
   $x + 0 = 0 + x = x$.
   c) Tout élément $x \in \mathbb{R}$ admet un symétrique $-x$:
   $x + (-x) = (-x) + x = 0$.
   d) l'addition est commutative:
   $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x + y = y + x$.

.2 la multiplication est associative:
$\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad (x \times y) \times z = x \times (y \times z)$.

.2 la multiplication est associative:
$\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad (x \times y) \times z = x \times (y \times z)$.

.3 la multiplication admet un élément neutre qui est 1:
$\forall x \in \mathbb{R} \quad x \times 1 = 1 \times x = x$.

.2 la multiplication est associative:
$\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad (x \times y) \times z = x \times (y \times z)$.

.3 la multiplication admet un élément neutre qui est 1:
$\forall x \in \mathbb{R} \quad x \times 1 = 1 \times x = x$.

.4 Tout élément non nul x admet un inverse $\frac{1}{x}$:
$x \times \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \times x = 1$.

.2 la multiplication est associative:
$\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad (x \times y) \times z = x \times (y \times z)$.

.3 la multiplication admet un élément neutre qui est 1:
$\forall x \in \mathbb{R} \quad x \times 1 = 1 \times x = x$.

.4 Tout élément non nul x admet un inverse $\frac{1}{x}$:
$x \times \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \times x = 1$.

.5 la multiplication est distributive par rapport à l'addition:
$\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad x \times (y + z) = x \times y + x \times z$.

.2 la multiplication est associative:
$\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad (x \times y) \times z = x \times (y \times z)$.

.3 la multiplication admet un élément neutre qui est 1:
$\forall x \in \mathbb{R} \quad x \times 1 = 1 \times x = x$.

.4 Tout élément non nul x admet un inverse $\frac{1}{x}$:
$x \times \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \times x = 1$.

.5 la multiplication est distributive par rapport à l'addition:
$\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad x \times (y + z) = x \times y + x \times z$.

.6 la multiplication est commutative:
$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x \times y = y \times x$.

.2 la multiplication est associative:
$\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad (x \times y) \times z = x \times (y \times z)$.

.3 la multiplication admet un élément neutre qui est 1:
$\forall x \in \mathbb{R} \quad x \times 1 = 1 \times x = x$.

.4 Tout élément non nul x admet un inverse $\frac{1}{x}$:
$x \times \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \times x = 1$.

.5 la multiplication est distributive par rapport à l'addition:
$\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad x \times (y + z) = x \times y + x \times z$.

.6 la multiplication est commutative:
$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x \times y = y \times x$.

Toutes ces propriétés constituent la première propriété fondamentale de $\mathbb{R}$.

.2 la multiplication est associative:
$\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad (x \times y) \times z = x \times (y \times z)$.

.3 la multiplication admet un élément neutre qui est 1:
$\forall x \in \mathbb{R} \quad x \times 1 = 1 \times x = x$.

.4 Tout élément non nul x admet un inverse $\frac{1}{x}$:
$x \times \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \times x = 1$.

.5 la multiplication est distributive par rapport à l'addition:
$\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad x \times (y + z) = x \times y + x \times z$.

.6 la multiplication est commutative:
$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x \times y = y \times x$.

Toutes ces propriétés constituent la première propriété fondamentale de $\mathbb{R}$.

Proposition

$(\mathbb{R}, +, \times)$ est un **corps commutatif**.

Règles de calcul

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k} \quad \text{où} \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Règles de calcul

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k} \quad \text{où} \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$x^n - y^n = (x-y) \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k-1} y^k.$$

$\mathbb{R}$ est un corps totalement ordonné

L'ensemble des nombres réels possède aussi une relation $\leq$ qui vérifie les proppriétéés suivantes :

$\mathbb{R}$ est un corps totalement ordonné

L'ensemble des nombres réels possède aussi une relation $\leq$ qui vérifie les proppriétéés suivantes :

1. la relation $\leq$ est une relation d'ordre :

$\mathbb{R}$ est un corps totalement ordonné

L'ensemble des nombres réels possède aussi une relation $\leq$ qui vérifie les proppriétéés suivantes :

1. la relation $\leq$ est une relation d'ordre :

    a) Réflexivité :
    $\forall x \in \mathbb{R} \quad x \leq x$.

$\mathbb{R}$ est un corps totalement ordonné

L'ensemble des nombres réels possède aussi une relation $\leq$ qui vérifie les proppriétéés suivantes :

1. la relation $\leq$ est une relation d'ordre :

   a) Réflexivité :
   $\forall x \in \mathbb{R} \quad x \leq x.$

   b) Anti-symétrique:
   $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad (x \leq y \text{ et} y \leq x) \Longrightarrow x = y.$

$\mathbb{R}$ est un corps totalement ordonné

L'ensemble des nombres réels possède aussi une relation $\leq$ qui vérifie les proppriétéés suivantes :

1. la relation $\leq$ est une relation d'ordre :

   a) Réflexivité :
   $\forall x \in \mathbb{R} \quad x \leq x$.

   b) Anti-symétrique:
   $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad (x \leq y \text{ et} y \leq x) \Longrightarrow x = y$.

   c) Transitivité:
   $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad (x \leq y \text{ et} y \leq z) \Longrightarrow x \leq z$.

2. la relation $\leq$ est une relation d'ordre total:
   $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad (x \leq y)$ ou $(y \leq x)$.

2. la relation $\leq$ est une relation d'ordre total:
   $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad (x \leq y)$ ou $(y \leq x)$.

3. la relation $\leq$ est compatible avec l'addition:
   $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, \quad (x \leq y) \Longrightarrow x + z \leq y + z$.

2. la relation $\leq$ est une relation d'ordre total:
   $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad (x \leq y)$ ou $(y \leq x)$.

3. la relation $\leq$ est compatible avec l'addition:
   $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, \quad (x \leq y) \Longrightarrow x + z \leq y + z$.

4. la relation $\leq$ est positivement compatible avec la multiplication:
   $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad (0 \leq x$ et $0 \leq y) \Longrightarrow 0 \leq x \times y$.

2. la relation $\leq$ est une relation d'ordre total:
   $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad (x \leq y)$ ou $(y \leq x)$.

3. la relation $\leq$ est compatible avec l'addition:
   $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, \quad (x \leq y) \Longrightarrow x + z \leq y + z$.

4. la relation $\leq$ est positivement compatible avec la multiplication:
   $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad (0 \leq x$ et $0 \leq y) \Longrightarrow 0 \leq x \times y$.

Toutes ces propriétés constituent la deuxième propriété fondamentale de $\mathbb{R}$:

2. la relation $\leq$ est une relation d'ordre total:
   $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad (x \leq y)$ ou $(y \leq x)$.

3. la relation $\leq$ est compatible avec l'addition:
   $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, \quad (x \leq y) \Longrightarrow x + z \leq y + z$.

4. la relation $\leq$ est positivement compatible avec la multiplication:
   $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad (0 \leq x$ et $0 \leq y) \Longrightarrow 0 \leq x \times y$.

Toutes ces propriétés constituent la deuxième propriété fondamentale de $\mathbb{R}$:

Proposition

$(\mathbb{R}, +, \times, \leq)$ est un **corps totalement ordonné**

Le corps $\mathbb{R}$ vérifie la propriété de la borne supériure

Proposition

Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide majorée admet une borne supérieure.

Plan

Intervalle de $\mathbb{R}$

Définition Pour $a \leq b$, le segment, $[a, b]$ est défini par :

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}.$$

. On utilise souvent la propriété :

$$c \in [a, b] \Longleftrightarrow \exists t \in [0, 1] \ \ c = ta + (1-t)b.$$

Intervalle de $\mathbb{R}$

Définition Pour $a \leq b$, le segment, $[a, b]$ est défini par :

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}.$$

. On utilise souvent la propriété :

$$c \in [a, b] \Longleftrightarrow \exists t \in [0, 1] \;\; c = ta + (1 - t)b.$$

On définit de même les autres types d'intervalles :

$]a, b[$, $[a, b[$, $]a, b]$, $]a, +\infty[$, $[a, +\infty[$, $]-\infty, b[$, $]-\infty, b]$, $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

Intervalle de $\mathbb{R}$

Proposition [caractéristique] Une partie A de $\mathbb{R}$ est un intervalle si, et seulement si :

$$\forall a \in A\ \forall b \in A\ a < c < b \Longrightarrow c \in A.$$

Intervalle de $\mathbb{R}$

Proposition [caractéristique] Une partie A de $\mathbb{R}$ est un intervalle si, et seulement si :

$$\forall a \in A \ \forall b \in A \ a < c < b \Longrightarrow c \in A.$$

Voisinage d'un point Soit $a \in \mathbb{R}$. Une partie V de $\mathbb{R}$ est un voisinage de a si elle contient un intervalle ouvert centré sur a, soit du type $]a-\beta, a+\beta[$ avec $\beta > 0$.

Plan

Valeur absolue

Définition On appelle **valeur absolue** de $x \in \mathbb{R}$ le réel positif défini par

$$|x| = \max(-x, x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

Valeur absolue

Définition On appelle **valeur absolue** de $x \in \mathbb{R}$ le réel positif défini par

$$|x| = \max(-x, x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

Proposition

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$

Valeur absolue

Définition On appelle **valeur absolue** de $x \in \mathbb{R}$ le réel positif défini par

$$|x| = \max(-x, x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

Proposition

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |x.y| = |x|.|y|.$

Valeur absolue

Définition On appelle **valeur absolue** de $x \in \mathbb{R}$ le réel positif défini par

$$|x| = \max(-x, x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

Proposition

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x| = 0 \iff x = 0.$
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |x.y| = |x|.|y|.$
3. $\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \quad |\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}.$

Valeur absolue

Définition On appelle **valeur absolue** de $x \in \mathbb{R}$ le réel positif défini par

$$|x| = \max(-x, x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

Proposition

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x| = 0 \iff x = 0$.
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |x.y| = |x|.|y|$.
3. $\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \quad |\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$.
4. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |-x| = |x|$.

Valeur absolue

Définition On appelle **valeur absolue** de $x \in \mathbb{R}$ le réel positif défini par

$$|x| = \max(-x, x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

Proposition

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |x.y| = |x|.|y|.$
3. $\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \quad |\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}.$
4. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |-x| = |x|.$
5. $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall r \in \mathbb{R}^+, \quad |x| \leq r \Longleftrightarrow -r \leq x \leq r.$

Valeur absolue

Définition On appelle **valeur absolue** de $x \in \mathbb{R}$ le réel positif défini par

$$|x| = \max(-x, x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

Proposition

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x| = 0 \iff x = 0.$
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |x.y| = |x|.|y|.$
3. $\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \quad |\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}.$
4. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |-x| = |x|.$
5. $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall r \in \mathbb{R}^+, \quad |x| \leq r \iff -r \leq x \leq r.$
6. $\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad |x + y| \leq |x| + |y|.$

Valeur absolue

Définition On appelle **valeur absolue** de $x \in \mathbb{R}$ le réel positif défini par

$$|x| = \max(-x, x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

Proposition

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x| = 0 \iff x = 0$.
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |x.y| = |x|.|y|$.
3. $\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \quad |\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$.
4. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |-x| = |x|$.
5. $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall r \in \mathbb{R}^+, \quad |x| \leq r \iff -r \leq x \leq r$.
6. $\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad |x + y| \leq |x| + |y|$.
7. $\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad ||x| - |y|| \leq |x - y|$.

Plan

Propriétés de base

Intervalle de $\mathbb{R}$

Valeur absolue

Propriétés de la borne supérieure

Bornes supérieures, inférieures, maximum et minimum

Bornes supérieures, inférieures, maximum et minimum

Définition Soit E une partie non vide de $\mathbb{R}$. On dit que

1. E est **majorée** s'il existe un nombre réel M (pas forcément dans E) tel que pour tout $x \in E$, $x \leq M$. Un tel nombre (qui n'est pas nécessairement unique), est appelé majorant de E.

Bornes supérieures, inférieures, maximum et minimum

Définition Soit E une partie non vide de $\mathbb{R}$. On dit que

1. E est **majorée** s'il existe un nombre réel M (pas forcément dans E) tel que pour tout $x \in E$, $x \leq M$. Un tel nombre (qui n'est pas nécessairement unique), est appelé majorant de E.

2. E est **minorée** s'il existe un nombre réel m (pas forcément dans E) tel que pour tout $x \in E$, $m \leq x$. Un tel nombre (qui n'est pas nécessairement unique), est appelé mainorant de E.

Bornes supérieures, inférieures, maximum et minimum

Définition Soit E une partie non vide de $\mathbb{R}$. On dit que

1. E est **majorée** s'il existe un nombre réel M (pas forcément dans E) tel que pour tout $x \in E$, $x \leq M$. Un tel nombre (qui n'est pas nécessairement unique), est appelé majorant de E.
2. E est **minorée** s'il existe un nombre réel m (pas forcément dans E) tel que pour tout $x \in E$, $m \leq x$. Un tel nombre (qui n'est pas nécessairement unique), est appelé mainorant de E.
3. E est **bornée** s'il est à la fois majorée et minorée, en'dautre terme s'il existe un réel positif r tel que pour tout $x \in E$ on ait $|x| \leq r$.

Bornes supérieures, inférieures, maximum et minimum

Définition Soit E une partie non vide de $\in \mathbb{R}$. On dit que $M \in \mathbb{R}$ est **la borne supérieure** de E que l'on note $M = \sup(E)$ si et seulement si

Bornes supérieures, inférieures, maximum et minimum

Définition Soit E une partie non vide de $\in \mathbb{R}$. On dit que $M \in \mathbb{R}$ est **la borne supérieure** de E que l'on note $M = \sup(E)$ si et seulement si

1. M est un majorant de E, c'est à dire que pour tout $x \in E$, $x \leq M$,

Bornes supérieures, inférieures, maximum et minimum

Définition Soit E une partie non vide de $\in \mathbb{R}$. On dit que $M \in \mathbb{R}$ est **la borne supérieure** de E que l'on note $M = \sup(E)$ si et seulement si

1. M est un majorant de E, c'est à dire que pour tout $x \in E$, $x \leq M$,
2. si M' est un majorant de E, alors $M \leq M'$, autrement dit, M est le plus petit des majorants.

Bornes supérieures, inférieures, maximum et minimum

Définition Soit E une partie non vide de $\in \mathbb{R}$. On dit que $M \in \mathbb{R}$ est **la borne supérieure** de E que l'on note $M = \sup(E)$ si et seulement si

1. M est un majorant de E, c'est à dire que pour tout $x \in E$, $x \leq M$,
2. si M' est un majorant de E, alors $M \leq M'$, autrement dit, M est le plus petit des majorants.

De même $m \in \mathbb{R}$ est **la borne inférieure** de E que l'on note $m = \inf(E)$ si et seulement si

1. m est un **minorant** de E, c'est à dire que pour tout $x \in E$, $m \leq x$,

Bornes supérieures, inférieures, maximum et minimum

Définition Soit E une partie non vide de $\in \mathbb{R}$. On dit que $M \in \mathbb{R}$ est **la borne supérieure** de E que l'on note $M = \sup(E)$ si et seulement si

1. M est un majorant de E, c'est à dire que pour tout $x \in E$, $x \leq M$,
2. si M' est un majorant de E, alors $M \leq M'$, autrement dit, M est le plus petit des majorants.

De même $m \in \mathbb{R}$ est **la borne inférieure** de E que l'on note $m = \inf(E)$ si et seulement si

1. m est un **minorant** de E, c'est à dire que pour tout $x \in E$, $m \leq x$,
2. si m' est un **minorant** de E, alors $m \geq m'$, autrement dit, m est le plus grand des minorants.

Bornes supérieures, inférieures, maximum et minimum

Proposition Soit $E \subset \mathbb{R}$ non vide.

1. Soit $M \in R$. Alors $M = \sup(E)$ si et seulement si

$$M = \sup(E) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in E \quad ; \quad x \leq M \\ (\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists x \in E); \quad M - \varepsilon < x. \end{cases}$$

Bornes supérieures, inférieures, maximum et minimum

Proposition Soit $E \subset \mathbb{R}$ non vide.

1. Soit $M \in R$. Alors $M = \sup(E)$ si et seulement si

$$M = \sup(E) \Leftrightarrow \begin{cases} \quad \forall x \in E & ; \quad x \leq M \\ (\forall \varepsilon > 0) & (\exists x \in E); \quad M - \varepsilon < x. \end{cases}$$

2. Soit $m \in R$. Alors $m = \inf(E)$ si et seulement si

$$m = \inf(E) \Leftrightarrow \begin{cases} \quad \forall x \in E & ; \quad x \geq m \\ (\forall \varepsilon > 0) & (\exists x \in E); \quad m + \varepsilon > x. \end{cases}$$

Exercice Soient $A; B$ deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. On pose $A+B=\{a+b; a\in A, b\in B\}$.

i) Montrer que $A+B$ majorée, non vide et que $\sup(A+B)=\sup(A)+\sup(B)$.

Exercice Soient $A; B$ deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. On pose $A + B = \{a + b; a \in A, b \in B\}$.

i) Montrer que $A + B$ majorée, non vide et que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

ii) Montrer que $A \cup B$ admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$ et $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$.

Exercice Soient $A; B$ deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. On pose $A+B=\{a+b; a\in A, b\in B\}$.

i) Montrer que $A+B$ majorée, non vide et que $\sup(A+B)=\sup(A)+\sup(B)$.

ii) Montrer que $A\cup B$ admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$ et $\sup(A\cup B)=\max(\sup(A),\sup(B))$.

iii) Donner deux resultats similaires pour les bornes inférieures.

Exercice Soient $A; B$ deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. On pose $A + B = \{a + b; a \in A, b \in B\}$.

i) Montrer que $A + B$ majorée, non vide et que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

ii) Montrer que $A \cup B$ admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$ et $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$.

iii) Donner deux resultats similaires pour les bornes inférieures.

Définition Soit $E \subset \mathbb{R}$

On dit que M est **le maximum** de E, que l'on note $M = \max(E)$ si $M = \sup(E)$ et $M \in E$.

Exercice Soient $A; B$ deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. On pose

$A + B = \{a + b; a \in A, b \in B\}$.

i) Montrer que $A + B$ majorée, non vide et que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

ii) Montrer que $A \cup B$ admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$ et $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$.

iii) Donner deux resultats similaires pour les bornes inférieures.

Définition Soit $E \subset \mathbb{R}$

On dit que M est **le maximum** de E, que l'on note $M = \max(E)$ si $M = \sup(E)$ et $M \in E$.

On dit que m est **le minimum** de E, que l'on note $m = \min(E)$ si $m = \inf(E)$ et $m \in E$.

Proposition Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée admet une borne supérieure.

Proposition Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée admet une borne supérieure.

Corollaire Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide minorée admet une borne inférieure.
De plus $\inf(A) = -\sup(-A)$.

Proposition Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée admet une borne supérieure.

Corollaire Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide minorée admet une borne inférieure.
De plus $\inf(A) = -\sup(-A)$.

Proposition Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$

Si A admet une borne supérieure alors (-A)admet une borne inférieure et on a de plus $\inf(-A) = -\sup(A)$.

Proposition Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée admet une borne supérieure.

Corollaire Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide minorée admet une borne inférieure.
De plus $\inf(A) = -\sup(-A)$.

Proposition Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$

Si A admet une borne supérieure alors (-A)admet une borne inférieure et on a de plus $\inf(-A) = -\sup(A)$.

Si A admet une borne inférieure alors (-A)admet une borne supérieure et on a de plus $\sup(-A) = -\inf(A)$.

Propriété d'Achimède

Proposition $\mathbb{R}$ est **archimédien**, c'est à dire,

$$\forall x > 0, \forall y \geq 0, \quad \exists n \in \mathbb{N}, \quad y \leq nx.$$

Propriété d'Achimède

Proposition $\mathbb{R}$ est **archimédien**, c'est à dire,

$$\forall x > 0, \forall y \geq 0, \quad \exists n \in \mathbb{N}, \quad y \leq nx.$$

Preuve Faisons une démonstration par l'absurde en supposant, pour $x \in \mathbb{R}_+^\star$ et $y \in \mathbb{R}$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad nx < y.$$

Propriété d'Achimède

Proposition $\mathbb{R}$ est **archimédien**, c'est à dire,

$$\forall x > 0, \forall y \geq 0, \quad \exists n \in \mathbb{N}, \quad y \leq nx.$$

Preuve Faisons une démonstration par l'absurde en supposant, pour $x \in \mathbb{R}_+^\star$ et $y \in \mathbb{R}$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad nx < y.$$

L'ensemble $A = \{nx | n \in \mathbb{N}\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ qui possède donc une borne supérieure a.

Propriété d'Achimède

Proposition $\mathbb{R}$ est **archimédien**, c'est à dire,

$$\forall x > 0, \forall y \geq 0, \quad \exists n \in \mathbb{N}, \quad y \leq nx.$$

Preuve Faisons une démonstration par l'absurde en supposant, pour $x \in \mathbb{R}_+^\star$ et $y \in \mathbb{R}$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad nx < y.$$

L'ensemble $A = \{nx | n \in \mathbb{N}\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ qui possède donc une borne supérieure a.
On a $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)x \leq a$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, \quad nx \leq a - x$ ce qui signifie que $a - x$ est majorant de A strictement inférieur à a ce qui contredit le fait que a est le plus petit des majorants de A.

Partie entière

Partie entière

Proposition Étant donnés $x \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$, il existe un unique entier relatif n tel que $na \leq x < (n+1)a$, c'est á dire:

$$x = na + r; \quad 0 \leq r < a.$$

Partie entière

Proposition Étant donnés $x \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$, il existe un unique entier relatif n tel que $na \leq x < (n+1)a$, c'est á dire:

$$x = na + r; \quad 0 \leq r < a.$$

Preuve **Unicité** si n et n' sont deux entiers répondant à la question, on a:

▷ $n \leq \frac{x}{a} < n' + 1$ donc $n - n' < 1$ c'est-à-dire $n - n' \leq 0$,

Partie entière

Proposition Étant donnés $x \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$, il existe un unique entier relatif n tel que $na \leq x < (n+1)a$, c'est á dire:

$$x = na + r; \quad 0 \leq r < a.$$

Preuve **Unicité** si n et n' sont deux entiers répondant à la question, on a:

▷ $n \leq \frac{x}{a} < n' + 1$ donc $n - n' < 1$ c'est-à-dire $n - n' \leq 0$,

▷ $n' \leq \frac{x}{a} < n + 1$ donc $n' - n < 1$ c'est-à-dire $n' - n \leq 0$.

On en déduit $n = n'$

Existence $\mathbb{R}$ étant archimédien ,on peut trouver

▷ Un entier n_1 tel que $x \leq an_1$

Existence $\mathbb{R}$ étant archimédien ,on peut trouver

- Un entier n_1 tel que $x \leq an_1$
- Un entier n_2 tel que $-x \leq an_2$.

Existence $\mathbb{R}$ étant archimédien ,on peut trouver

- ▷ Un entier n_1 tel que $x \leq an_1$
- ▷ Un entier n_2 tel que $-x \leq an_2$.

L'ensemble $\{k \in \mathbb{Z} | ka \leq x\}$ étant une partie non vide de $\mathbb{Z}$ (elle contient $-n_2$) et majorée (par n_1). Elle contient donc un plus grand élément n vérifiant $na \leq x$.

Existence $\mathbb{R}$ étant archimédien ,on peut trouver

- Un entier n_1 tel que $x \leq an_1$
- Un entier n_2 tel que $-x \leq an_2$.

L'ensemble $\{k \in \mathbb{Z} | ka \leq x\}$ étant une partie non vide de $\mathbb{Z}$ (elle contient $-n_2$) et majorée (par n_1). Elle contient donc un plus grand élément n vérifiant $na \leq x$.
Puisque l'entier $n+1$ n'appartient pas à cet ensemble on a $x < (n+1)a$ ce qui prouve que n convient.

Définition Si x un nombre réel. l'unique entier relatif n vérifiant $n \leq x < n+1$ s'appelle **la partie entière** de x et se note $E(x)$ ou $[x]$.

Existence $\mathbb{R}$ étant archimédien ,on peut trouver

- Un entier n_1 tel que $x \leq an_1$
- Un entier n_2 tel que $-x \leq an_2$.

L'ensemble $\{k \in \mathbb{Z} | ka \leq x\}$ étant une partie non vide de $\mathbb{Z}$ (elle contient $-n_2$) et majorée (par n_1). Elle contient donc un plus grand élément n vérifiant $na \leq x$.
Puisque l'entier $n+1$ n'appartient pas à cet ensemble on a $x < (n+1)a$ ce qui prouve que n convient.

Définition Si x un nombre réel. l'unique entier relatif n vérifiant $n \leq x < n+1$ s'appelle **la partie entière** de x et se note $E(x)$ ou $[x]$.

Proposition

1. $\forall k \in \mathbb{Z}, \quad E(k) = k.$

Existence $\mathbb{R}$ étant archimédien ,on peut trouver

- ▷ Un entier n_1 tel que $x \leq an_1$
- ▷ Un entier n_2 tel que $-x \leq an_2$.

L'ensemble $\{k \in \mathbb{Z} | ka \leq x\}$ étant une partie non vide de $\mathbb{Z}$ (elle contient $-n_2$) et majorée (par n_1). Elle contient donc un plus grand élément n vérifiant $na \leq x$.
Puisque l'entier $n + 1$ n'appartient pas à cet ensemble on a $x < (n + 1)a$ ce qui prouve que n convient.

Définition Si x un nombre réel. l'unique entier relatif n vérifiant $n \leq x < n + 1$ s'appelle **la partie entière** de x et se note $E(x)$ ou $[x]$.

Proposition

1. $\forall k \in \mathbb{Z}, \quad E(k) = k$.
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x > y \Longrightarrow E(x) \geq E(y)$.

Existence $\mathbb{R}$ étant archimédien ,on peut trouver

- $\triangleright$ Un entier n_1 tel que $x \leq an_1$
- $\triangleright$ Un entier n_2 tel que $-x \leq an_2$.

L'ensemble $\{k \in \mathbb{Z} | ka \leq x\}$ étant une partie non vide de $\mathbb{Z}$ (elle contient $-n_2$) et majorée (par n_1). Elle contient donc un plus grand élément n vérifiant $na \leq x$.

Puisque l'entier $n+1$ n'appartient pas à cet ensemble on a $x < (n+1)a$ ce qui prouve que n convient.

Définition Si x un nombre réel. l'unique entier relatif n vérifiant $n \leq x < n+1$ s'appelle **la partie entière** de x et se note $E(x)$ ou $[x]$.

Proposition

1. $\forall k \in \mathbb{Z}, \quad E(k) = k$.
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x > y \Longrightarrow E(x) \geq E(y)$.
3. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad E(x+y) \geq E(x) + E(y)$.

Existence $\mathbb{R}$ étant archimédien ,on peut trouver

- Un entier n_1 tel que $x \leq an_1$
- Un entier n_2 tel que $-x \leq an_2$.

L'ensemble $\{k \in \mathbb{Z} | ka \leq x\}$ étant une partie non vide de $\mathbb{Z}$ (elle contient $-n_2$) et majorée (par n_1). Elle contient donc un plus grand élément n vérifiant $na \leq x$.
Puisque l'entier $n+1$ n'appartient pas à cet ensemble on a $x < (n+1)a$ ce qui prouve que n convient.

Définition Si x un nombre réel. l'unique entier relatif n vérifiant $n \leq x < n+1$ s'appelle **la partie entière** de x et se note $E(x)$ ou $[x]$.

Proposition

1. $\forall k \in \mathbb{Z}, \quad E(k) = k$.
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x > y \Longrightarrow E(x) \geq E(y)$.
3. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad E(x+y) \geq E(x) + E(y)$.
4. $\forall (x, k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}, \quad E(x+k) = E(x) + k$.

Approximation décimale dun réel à 10^{-n} prés par défaut ou éxcés

Approximation décimale dun réel à 10^{-n} prés par défaut ou éxcés

Proposition $\forall (x,n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$, $\exists ! p \in \mathbb{Z}$ tel que $p10^{-n} \leq x < (p+1)10^{-n}$.

Approximation décimale dun réel à 10^{-n} prés par défaut ou éxcés

Proposition $\forall (x,n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$, $\exists! p \in \mathbb{Z}$ tel que $p10^{-n} \leq x < (p+1)10^{-n}$.

(a) $p10^{-n}$ s'appelle la valeur décimale à 10^{-n} près par défaut de x.

Approximation décimale dun réel à 10^{-n} prés par défaut ou excés

Proposition $\forall(x,n) \in \mathbb{R}\times\mathbb{N}$, $\exists! p \in \mathbb{Z}$ tel que

$p10^{-n} \leq x < (p+1)10^{-n}$.

(a) $p10^{-n}$ s'appelle la valeur décimale à 10^{-n} près par défaut de x.

(b) $(p+1)10^{-n}$ s'appelle la valeur décimale à 10^{-n} près par excés de x.

Approximation décimale dun réel à 10^{-n} prés par défaut ou excés

Proposition $\forall (x,n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$, $\exists ! p \in \mathbb{Z}$ tel que $p10^{-n} \leq x < (p+1)10^{-n}$.

(a) $p10^{-n}$ s'appelle la valeur décimale à 10^{-n} près par défaut de x.

(b) $(p+1)10^{-n}$ s'appelle la valeur décimale à 10^{-n} près par excés de x.

Exercice

- Trouver la valeur décimale à 10^{-1} près par défaut de $\sqrt{2}$.

Approximation décimale dun réel à 10^{-n} prés par défaut ou excés

Proposition $\forall (x,n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$, $\exists! p \in \mathbb{Z}$ tel que

$p10^{-n} \leq x < (p+1)10^{-n}$.

(a) $p10^{-n}$ s'appelle la valeur décimale à 10^{-n} près par défaut de x.

(b) $(p+1)10^{-n}$ s'appelle la valeur décimale à 10^{-n} près par excés de x.

Exercice

- Trouver la valeur décimale à 10^{-1} près par défaut de $\sqrt{2}$.
- Trouver la valeur décimale à 10^{-2} près par défaut de $\sqrt{2}$.

Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$, ce qui signifie :

Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$, ce qui signifie :

Proposition Étant donnés $x, y \in \mathbb{R}$ vérifiant $x < y$, il existe au moins un rationnel et un irrationnel dans l'intervalle $]x, y[$.

Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$, ce qui signifie :

Proposition Étant donnés $x, y \in \mathbb{R}$ vérifiant $x < y$, il existe au moins un rationnel et un irrationnel dans l'intervalle $]x, y[$.

Preuve $\triangleright$ Prenons $q = E(\frac{1}{y-x}) + 1$ puis $p = E(qx)$. On a alors:

$$\frac{1}{q} < y - x \quad \text{et} \quad \frac{p}{q} \leq x < \frac{p+1}{q}$$

Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$, ce qui signifie :

Proposition Étant donnés $x, y \in \mathbb{R}$ vérifiant $x < y$, il existe au moins un rationnel et un irrationnel dans l'intervalle $]x, y[$.

Preuve $\triangleright$ Prenons $q = E(\frac{1}{y-x}) + 1$ puis $p = E(qx)$. On a alors:

$$\frac{1}{q} < y - x \quad \text{et} \quad \frac{p}{q} \leq x < \frac{p+1}{q}$$

et donc:

$$x < \frac{p+1}{q} \leq x + \frac{1}{q} < x + (y - x) = y$$

Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$, ce qui signifie :

Proposition Étant donnés $x, y \in \mathbb{R}$ vérifiant $x < y$, il existe au moins un rationnel et un irrationnel dans l'intervalle $]x, y[$.

Preuve $\triangleright$ Prenons $q = E(\frac{1}{y-x}) + 1$ puis $p = E(qx)$. On a alors:

$$\frac{1}{q} < y - x \quad \text{et} \quad \frac{p}{q} \leq x < \frac{p+1}{q}$$

et donc:

$$x < \frac{p+1}{q} \leq x + \frac{1}{q} < x + (y - x) = y$$

ce qui prouve que le rationnel $r = \frac{p+1}{q}$ vérifie $x < r < y$.

Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$, ce qui signifie :

Proposition Étant donnés $x, y \in \mathbb{R}$ vérifiant $x < y$, il existe au moins un rationnel et un irrationnel dans l'intervalle $]x, y[$.

Preuve $\triangleright$ Prenons $q = E(\frac{1}{y-x}) + 1$ puis $p = E(qx)$. On a alors:

$$\frac{1}{q} < y - x \quad \text{et} \quad \frac{p}{q} \leq x < \frac{p+1}{q}$$

et donc:

$$x < \frac{p+1}{q} \leq x + \frac{1}{q} < x + (y - x) = y$$

ce qui prouve que le rationnel $r = \frac{p+1}{q}$ vérifie $x < r < y$.
$\triangleright$ D'après la propriété précédente, on peut trouver un rationnel r apprtenant à l'intervalle $]x + \sqrt{2}, y + \sqrt{2}[$.

Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$, ce qui signifie :

Proposition Étant donnés $x, y \in \mathbb{R}$ vérifiant $x < y$, il existe au moins un rationnel et un irrationnel dans l'intervalle $]x, y[$.

Preuve ▷ Prenons $q = E(\frac{1}{y-x}) + 1$ puis $p = E(qx)$. On a alors:

$$\frac{1}{q} < y - x \quad \text{et} \quad \frac{p}{q} \leq x < \frac{p+1}{q}$$

et donc:

$$x < \frac{p+1}{q} \leq x + \frac{1}{q} < x + (y - x) = y$$

ce qui prouve que le rationnel $r = \frac{p+1}{q}$ vérifie $x < r < y$.
▷ D'après la propriété précédente, on peut trouver un rationnel r apprtenant à l'intervalle $]x + \sqrt{2}, y + \sqrt{2}[$. le nombre $r - \sqrt{2}$ est donc un irrationnel apprtenant à l'intervalle $]x, y[$.