MASTER PHYSIQUE APPLIQUEE ET INGENIERIE PHYSIQUE (PAIP)

Semestre 2 : 2019-2020

Module : Magnétisme dans les solides
Série N° 1- Corrigé

<u>Exercice 1</u>

1) Moment magnétique - moment cinétique -rapport gyromagnétique

▪ Moment magnétique:

Il est définit pour une spire caractérisée par le vecteur surface $\vec{S}$ parcourue par un courant I, dû au mouvement d'un électron, par la relation :

$$\vec{\mu} = iS\vec{n} = i\pi r^2\vec{n} = -\frac{e}{2}\mu_0 r^2\vec{n} \quad \text{avec } i = -\frac{e}{T}\;,\; T = \frac{2\pi r}{v} \text{ et } \mu_0 = \frac{v}{r}$$

▪ <u>Moment cinétique</u>

Il est définit par la relation :

$$\vec{L} = \vec{r}\Lambda m_e\vec{v}$$

où $\vec{v}$ est le vecteur vitesse linéaire, de module v, de l'électron et $\vec{r}$ le vecteur position.

Soit :

$$\vec{L} = -m_e v r\vec{n} = -m_e \mu r^2\vec{n}$$

$\vec{\mu}$ et $\vec{L}$ sont colinéaires mais en sens inverses.

▪ <u>Rapport gyromagnétique</u>

Le moment magnétique et le moment cinétique sont liés par la relation de proportionnalité suivante :

$$\vec{\mu} = \gamma_e\vec{L} \quad \text{d'où } \gamma_e = -\frac{e}{2m_e}$$

2) Mouvement de précession

Le théorème du moment cinétique nous donne:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\mu}\Lambda\vec{B} = \mu_0\vec{\mu}\Lambda\vec{H} = \mu_0\gamma_e\vec{L}\Lambda\vec{H}$$

soit avec $\vec{\mu}(\mu_x,\mu_y,\mu_z)$ et $\vec{H}(0,0,H)$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = -\mu_0\gamma_e\vec{H}\Lambda\vec{L} = -\mu_0\gamma_e\left|\begin{matrix} L_y H \\ -L_x H \\ 0 \end{matrix}\right.$$

D'où $L_z = Cte$

En dérivant les deux équations par rapport au temps on obtient

$$\frac{d^2L_x}{dt^2} = -\mu_0\gamma_e H\frac{dL_y}{dt} = -(\mu_0\gamma_e H)^2 L_x$$

$$\frac{d^2L_y}{dt^2} = «_0¥_e H \frac{dL_x}{dt} = -(\mu_0\gamma_e H)^2 L_y$$

Ces équations différentielles admettent des solutions de la forme:

$$L_{x,y} = A\cos(\mu_p + ¤)$$

A étant une constante et $\mu_p = -¥_e «_0 H$.

La projection du moment cinétique $\vec{L}$ dans le plan (x, y) suit donc un mouvement de rotation alors que sa projection sur l'axe Oz est constante, on à un mouvement de précession de $\vec{L}$ autour de Oz c'est à dire de la direction du champ $\vec{H}$.

3) Moment cinétique et moment magnétique dus au mouvement de précession

Il est donné par la relation :

$$\vec{L}_p = \vec{r}_0 \Lambda m_e \vec{v}_p$$

où $\vec{v}_p = \mu_p r_0 \vec{e}_y$ est la vitesse linéaire de l'orbite électronique autour de Oz et r_0, de module $\vec{r}_0$, la projection du rayon de la trajectoire de l'électron dans le plan (x, y). On a donc:

$$\vec{L}_p = m_e r^2 \sin^2 - \mu_p \vec{e}_z = -m_e r^2 \sin^2 - ¥_e «_0 \vec{H}$$

$\vec{e}_z$ étant le vecteur unitaire selon la direction de $\vec{H}$.

On en déduit le moment magnétique correspondant :

$$«_p = ¥_e \vec{L}_p = -m_e r^2 ¥_e^2 «_0 \sin^2 - \vec{H} = -\frac{«_0 e^2 r^2 \sin^2 -}{4m_e} \vec{H}$$

4) Atome à Z électrons

Si l'atome possède Z orbites électroniques uniformément distribuées dans l'espace, de rayon moyen R, le moment magnétique devient :

$$«_p = m_e r^2 ¥_e^2 «_0 Z < \sin^2 - > \vec{H} = -\frac{«_0 e^2 r^2 Z < \sin^2 - >}{4m_e} \vec{H}$$

où $< \sin^2 - >$ est la valeur moyenne de $\sin^2 -$. En supposant que les orbites sont distribuées uniformément dans l'espace, la probabilité de trouver $\vec{L}$ dans l'intervalle [θ, θ+dθ] est dΩ/4π, avec l'angle solide dΘ = 2πsinθdθ. La valeur moyenne < $\sin^2\theta$ > est donc donnée par:

$$< \sin^2 - > = \int_0^{®} \sin^2 - \frac{1}{2} \sin - d - = \frac{2}{3}$$

et le moment magnétique de l'atome par:

$$«_p = -\frac{«_0 e^2 R^2 Z}{6m_e} \vec{H}$$

5) Susceptibilité diamagnétique

Si n est le nombres d’atomes par unité de volume, l'aimantation du système est donnée par:

$$\vec{M} = n«_p = -\frac{«_0 n e^2 R^2 Z}{6m_e} \vec{H} = ¡_m \vec{H}$$

où $¡_m$ est la susceptibilité diamagnétique, d'où

$$¡_m = -\frac{«_0 n e^2 R^2 Z}{6m_e}$$

Exercice 2

1) Energie magnétostatique

L'énergie magnétostatique d'un dipôle magnétique de moment $\vec{«}$ dans un champ magnétique $\vec{H}$ est donnée par la relation :

$$¶ = -\vec{«}.\vec{B} = -«_0 \vec{«}.\vec{H}$$

Dans le cas où seules deux orientations, parallèle et antiparallèle au champ, sont possibles et où les interactions entre dipôles sont négligées ont a donc:

- dipôle parallèle au champ $¶_1 = -«_0 «H$
- dipôle antiparallèle au champ $¶_2 = «_0 «H$

avec $\vec{«} = «\vec{u}$ et $\vec{H} = H\vec{u}$, ($\vec{u}$ vecteur unitaire selon la direction du champ $\vec{H}$)

2) Equilibre thermodynamique

A l'équilibre thermodynamique, les dipôles satisfaisant à la statistique de Maxwell-Boltzmann, le nombre de dipôles respectivement d'énergies $¶_1$ et $¶_2$ sont:

$$\mathrm{N_1 = N\exp(«H«_0 / kT)} \qquad \mathrm{N_2 = N\exp-(«H«_0 / kT)}$$

Comme il n'y a que deux états possibles, en appelant N le nombre de dipôles par unité de volume on a aussi:

$$\mathrm{N_1 + N_2 = N}$$

on en déduit:

$$\mathrm{N_1} = \frac{\mathrm{N}e^X}{e^X + e^{-X}} \qquad \mathrm{N_2} = \frac{\mathrm{N}e^{-X}}{e^X + e^{-X}}$$

avec $X = \mathrm{«H«_0 / kT}$

3) Aimantation

Le vecteur aimantation $\vec{\mathrm{M}}$ est alors : $\vec{\mathrm{M}} = (\mathrm{N_1 - N_2})\vec{«} = \mathrm{NthX}.\vec{«}$

4) Susceptibilité magnétique dans le domaine de validité de la loi de Curie

Le domaine de validité de la loi de Curie est celui pour lequel $\mathrm{H/T} << 1$.
On a alors $X << 1$ et $\mathrm{thX \approx X}$. On a donc :

$$\vec{\mathrm{M}} \approx \mathrm{NX}\vec{«} = \frac{«_0 «^2 \mathrm{N}}{\mathrm{kT}} \vec{\mathrm{H}} = ¡_m \vec{\mathrm{H}}$$

avec $¡_m = \frac{«_0 «^2 \mathrm{N}}{\mathrm{kT}}$ la susceptibilité magnétique du matériau.

On retrouve la loi de Curie en $\chi = \mathrm{C / T}$, avec $C = \frac{«_0 «^2 \mathrm{N}}{\mathrm{k}}$

Exercice 3

1) Energie des électrons

L'énergie d'un moment magnétique électronique $\vec{«}(«_x, «_y, «_z)$ dans une induction magnétique orientée selon Oz, $\vec{\mathrm{B}}(0,0,\mathrm{B_Z})$ est donnée par la relation:

$$¶ = -\vec{«}_s.\vec{B} = -«_{sz}.B_z$$

Dans le cas d'un électron, la projection sur Oz du moment de spin S ne pouvant prendre que 2 valeurs,

$$S_z = m_s\hbar = \pm\frac{1}{2}\hbar$$

Le rapport gyromagnétique correspondant est sensiblement le double de celui relatif au moment cinétique $\vec{\mathrm{L}}$: $¥ \approx 2¥_e$. La projection du moment magnétique de spin suivant Oz, est :

$$«_{sz} \approx 2¥_e S_z = -2m_s «_\mathrm{B} = \pm«_\mathrm{B}$$

d'où

$$¶_1 = -\vec{«}_s.\vec{B} = «_B.B_z \qquad ¶_2 = -«_B.B_z$$

E_1: $\vec{«} = -«_B\vec{e}_z$ $\vec{«}$ antiparallèle à $\vec{\mathrm{B}}$

E_2: $\vec{«} = «_B\vec{e}_z$ $\vec{«}$ parallèle à $\vec{\mathrm{B}}$

$\vec{e}_z$ étant le vecteur unitaire selon Oz

2) Statistique de Maxwell Boltzmann

a) Aimantation du milieu

Si on suppose que la population des deux niveaux d'énergie est donnée par la statistique de Maxwell-Boltzmann, les nombres de systèmes respectivement dans les états d'énergie E_1 et E_2 sont:

$$\mathrm{N_1} = \exp(\text{-}\mathrm{E_1}/\mathrm{kT}) = e^{-X} \qquad \mathrm{N_2} = \exp(\text{-}\mathrm{E_2}/\mathrm{kT}) = e^{X}$$

avec $\mathrm{X} = \dfrac{«_\mathrm{B}\mathrm{B_z}}{\mathrm{kT}}$ $x = \mu_B B_z / kT$

Comme il n'y a que deux états possibles, en appelant N le nombre d'atomes par unité de volume on a aussi:

$$\mathrm{N_1} + \mathrm{N_2} = \mathrm{N}$$

on en déduit:

$$\mathrm{N_1} = \frac{\mathrm{N}e^{-X}}{e^X + e^{-X}} \qquad \mathrm{N_2} = \frac{\mathrm{N}e^{X}}{e^X + e^{-X}}$$

Le vecteur aimantation $\vec{\mathrm{M}}$ est alors : $\vec{\mathrm{M}} = (\mathrm{N_2} - \mathrm{N_1})\vec{«} = \mathrm{NthX}.\vec{«} = \mathrm{N}«_\mathrm{B}\mathrm{thX}.\vec{e}_z$

b) <u>Susceptibilité magnétique dans le domaine de validité de la loi de Curie (B/T)<<1</u>

Lorsque $\mathrm{B/T} << 1$ on a alors $X << 1$ et $\mathrm{thX} \approx \mathrm{X}$ et :

$$\vec{\mathrm{M}} \approx \mathrm{N}«_\mathrm{B}\mathrm{X}\vec{\mathrm{e}}_\mathrm{z}\vec{«} = \frac{«_B^2\mathrm{NB_z}\vec{e}_z}{\mathrm{kT}} = \frac{«_B^2\mathrm{N}}{\mathrm{kT}}\vec{\mathrm{B}} = \frac{«_B^2\mathrm{N}}{\mathrm{kT}}«_0\mathrm{H} = ¡_m\vec{\mathrm{H}}$$

avec $\vec{B}_0 = «_0\vec{H}$

D’où la susceptibilité magnétique du milieu $¡_m = \dfrac{«_0«_B^2 N}{kT}$.

On retrouve la loi de Curie en $\chi = C / T$, avec $C = \dfrac{«_0«_B^2 N}{k}$

<u>Exercice 4</u>

1) Probabilité pour une orientation dans l'angle solide d t

Notons ¯ l’angle entre « et $\vec{B}$. L'énergie du moment magnétique est donnée par :

$$¶ = -\vec{«}.\vec{B} = -«B\cos¯$$

Si le système suit la statistique de Maxwell-Boltzmann, la probabilité de trouver le moment magnétique dans l'angle solide dΩ est de la forme :

$$dP = Ce^{-\ E}d\Omega$$

où C est une constante de normalisation et β = 1/ kT (k constante de Boltzmann)

$$d\Omega = 2® \sin¯ d¯$$

En intégrant sur toutes les valeurs de ¯ :

$$P = \iint Ce^{-\ E}d\Omega = 2®C\int_0^® e^{-\ E}\sin¯ d¯ = 2®C\int_0^® e^{\ «B\cos¯}\sin¯ d¯$$

Posons $h = \cos¯$, alors $dh = d(\cos¯) = -\sin¯ d¯$.

Lorsque ¯ varie de 0 à ®, h varie de 1 à -1.

$$P = -2®C\int_1^{-1} e^{\ «Bh}dh = \frac{2®C}{«B}\left[e^{\ «B} - e^{-\ «B}\right] = \frac{4®C}{«B}sh(\ «B) = 1$$

Soit :

$$C = \frac{«B}{4®sh(\ «B)} \quad ; \quad dP = \frac{«B}{4®sh(\ «B)}e^{-\ «B\cos¯}d\Omega$$

2) Valeur moyenne de la composante selon $\vec{e}_z$ du moment magnétique

Pour N atomes, le moment magnétique a pour composante moyenne selon $\vec{e}_z$ **:**

$$«_z = N < «_z >= N« < \cos¯ >$$

en posant $X = \ «B$

$$«_z = N«\int\cos¯ dP = \frac{N«X}{4®shX}\int\cos¯ e^{X\cos¯}d\Omega = \frac{N«X}{4®shX}2®\int_0^®\cos¯ e^{X\cos¯}\sin¯ d¯$$

$$= \frac{N«X}{4®shX}2®\int_{-1}^{1}\cos¯ e^{X\cos¯}d(\cos¯) = \frac{N«X}{2®shX}\frac{\partial}{\partial X}\int_{-1}^{1}e^{X\cos¯}d(\cos¯)$$

$$= \frac{N«X}{2®shX}\frac{\partial}{\partial X}\left[\frac{e^{X\cos¯}}{X}\right] = \frac{N«X}{shX}\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{shX}{X}\right) = N«\left(\coth X - \frac{1}{X}\right)$$

soit $«_z = N«L(X)$

$L(X)$ est la fonction de Langevin définie par $L(X) = \coth X - \dfrac{1}{X}$

3) Aimantation en champ faible ou haute température

Les conditions du champ faible ou haute température sont équivalentes à $X << 1$. On a alors:

$$\coth X \approx \frac{1}{X} + \frac{X}{3}$$

Dans ce cas, l'aimantation volumique selon la direction Oz s'écrit :

$$M_z = \frac{N}{V}\text{«}L(X) = \frac{N}{V}\text{«}\left[\coth X - \frac{1}{X}\right] \approx \frac{N}{V}\text{«}\frac{X}{3} = \frac{N}{V}\frac{\text{«}^2 B}{3k_B T}$$

de la forme $M_z = \dfrac{C}{T}$ avec $C = \dfrac{N}{V}\dfrac{\text{«}^2 B}{3k_B}$

V étant le volume du matériau.

4) Aimantation en champ intense ou basse température

Lorsque l'induction magnétique est très intense ou la température est très basse, c'est le cas où $X >> 1$, $\coth X \approx 1$, $\dfrac{1}{X} \approx 0$, et $M_z \approx \dfrac{N}{V}\text{«}$. Le matériau est aimanté à saturation.

<u>Exercice 5</u>

1) Fonction de partition du système

Le système étant décrit par la statistique de Maxwell-Boltzmann, sa fonction de partition est de la forme ZN, où N est le nombre d'atomes constituant le système et

$$Z = \sum_{m=-j}^{j} e^{-\ \text{¶}m} = \sum_{m=-j}^{j} e^{-mX} = e^{-jX}\frac{1-e^{(2j+1)X}}{1-e^{X}}$$

$$= \frac{e^{-\frac{j+1}{2}X} - e^{\frac{j+1}{2}X}}{e^{-\frac{X}{2}} - e^{\frac{X}{2}}} = \frac{sh\frac{j+1}{2}X}{sh\frac{X}{2}} = \frac{sh(\frac{j+1}{2})g\text{«}_B\ B}{sh(\frac{g\text{«}_B\ B}{2})}$$

2) Probabilité pour qu'un atome soit dans l'état d'énergie ¶_m

D'après la statistique de Maxwell-Boltzmann, cette probabilité est donnée par:

$$P_m = \frac{e^{-\ \text{¶}m}}{Z} = \frac{e^{-mX}}{Z}$$

3) Module de l'aimantation volumique

Le champ étant appliqué selon $\vec{e}_z$ l'aimantation est elle même dirigée selon $\vec{e}_z$. Sa composante est alors:

$$\vec{M} = M\vec{e}_z = n < \text{«}_z > \vec{e}_z$$

n étant le nombre d'atomes par unité de volume et «_z le moment magnétique d'un de ces atomes. Soit,

$$\mathrm{M_Z} = n\sum_{m=-j}^{j}(-mg«_{\mathrm{B}})\frac{e^{-mX}}{Z} = \frac{ng«_{\mathrm{B}}}{\mathrm{Z}}\sum_{m=-j}^{j}(-m)e^{-mX} = \frac{ng«_{\mathrm{B}}}{\mathrm{Z}}\frac{\partial}{\partial X}\sum_{m=-j}^{j}e^{-mX}$$

$$= \frac{ng«_{\mathrm{B}}}{\mathrm{Z}}\frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial X} = ng«_{\mathrm{B}}\frac{\partial(\ln Z)}{\partial X} = ng«_{\mathrm{B}}\left[(j+\frac{1}{2})\left(\coth(j+\frac{1}{2})X - \frac{1}{2}\coth\frac{X}{2}\right)\right]$$

en introduisant la fonction de Brillouin :

$${}_j(X) = \frac{2j+1}{2j}\left(\coth\frac{2j+1}{2j}X - \frac{1}{2}\coth\frac{X}{2j}\right)$$

$$M_z = ng«_{\mathrm{B}}j\ \ {}_j(X) \quad \text{avec} \quad X = \frac{jg«_B B}{k_B \mathrm{T}}$$

4) Aimantation en champ fort ou basse température

Ce cas correspond à $X >> 1$. On fait donc le développement limité suivant :

$$\coth\frac{2j+1}{2j}X \approx \coth\frac{X}{2j} \approx 1,$$

L'aimantation volumique suivant Oz est $M_z \approx jng«_{\mathrm{B}}$

Elle correspond à l'aimantation à saturation.

5) Aimantation en champ faible ou haute température

Ce cas correspond à $X >> 1$. Ce qui permet d'écrire $\coth\mathrm{X} \approx \frac{1}{\mathrm{X}} + \frac{\mathrm{X}}{3}$

d'où

$${}_j(X) = \frac{2j+1}{2j}\left(\coth\frac{2j+1}{2j}X - \frac{1}{2}\coth\frac{X}{2j}\right) \approx \frac{1}{X} + \left(\frac{2j+1)}{2j}\right)^2\frac{X}{3} - \frac{1}{X} - \frac{1}{(2j)^2}\frac{X}{3} = \frac{j+1}{j}\frac{X}{3}$$

$$M_z = \frac{ng«_B(j+1)}{3}X = \frac{ng^2«_B^2 j(j+1)}{3k_B\mathrm{T}}B$$

On retrouve donc la loi de Curie : $M_z = \frac{C}{T}$

avec $C = \frac{ng«_B^2 j(j+1)}{3k_B}B$