

MASTER PHYSIQUE APPLIQUEE ET INGENIERIE PHYSIQUE (PAIP)

Module : Magnétisme dans les solides
 Série N° 2- Corrigé

Exercice 1

1) Le ferromagnétisme se produit dans des corps constitués d'éléments dont une couche électronique interne est incomplète. Suivant l'expérience de Einstein, le ferromagnétisme est essentiellement lié au couplage de spins non appariés. Pour rendre compte de ce couplage, Pierre Weiss a introduit la notion phénoménologique de champ moléculaire (voir question suivante)

2) Calcul de l'aimantation du milieu

L'énergie d'un moment magnétique $\vec{\mu}_j$ placé dans champ s'écrit :

$$E_j = -\vec{\mu}_j \cdot (\vec{B} + \vec{B}_m) \quad (1)$$

\vec{B} est le champ appliqué et \vec{B}_m le champ moléculaire de Weiss.

Les moments magnétiques vont avoir tendance à s'aligner dans la direction de ce champ. Le calcul est identique à celui fait pour le paramagnétisme (exercice 3, TDN°1), en remplaçant dans les expressions obtenues le champ \vec{B} par $\vec{B} + \vec{B}_m$.

Soient N_1 et N_2 les densités de population des deux niveaux d'énergie susceptibles d'être occupés par ces dipôles (spins orientés suivant le champ et spins dans le sens contraire de ce champ) (statistique de Maxwell-Boltzman), et soit N la densité de population totale ($N = N_1 + N_2$).

$$N_1 = \frac{N \cdot e^X}{e^X + e^{-X}} \quad \text{et} \quad N_2 = \frac{N \cdot e^{-X}}{e^X + e^{-X}}$$

avec $X = \mu_B \frac{B + B_m}{K_B \cdot T}$

Les deux niveaux d'énergie possibles sont :

$$E_1 = -\mu_B (B + B_m) \quad \text{et} \quad E_2 = \mu_B (B + B_m)$$

Pour $B = 0$:

$$E_1 = -\mu_B B_m = -\mu_B H_m = -\mu_B M \quad \text{ou} \quad E_2 = \mu_B B_m = \mu_B H_m = \mu_B M$$

On en déduit une expression de l'aimantation M :

$$M = \frac{X \cdot K_B \cdot T}{\mu_B} \quad (2)$$

Elle est représentée par la droite sur la figure ci-dessous.

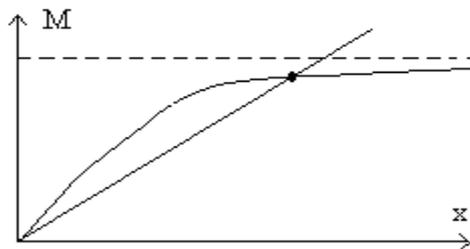
En plus, en considérant la contribution des populations N_1 et N_2 à l'aimantation, on a :

$$\vec{M} = N_1 \cdot \vec{z} - N_2 \cdot \vec{z} = (N_1 - N_2) \cdot \vec{z}$$

Soit :

$$M = N \frac{e^X - e^{-X}}{e^X + e^{-X}} \cdot \mu_B \quad (3)$$

Elle est représentée par la courbe sur la figure ci-dessous.



On obtient la température de Curie en égalant les deux expressions (2) et (3) de l'aimantation, et en se plaçant aux hautes températures, c'est-à-dire pour $X \ll 1$:

$$M = N \cdot \mu_B \frac{e^X - e^{-X}}{e^X + e^{-X}} = N \cdot \mu_B \cdot thX = \frac{X \cdot K_B \cdot T}{\mu_B} \quad (4)$$

Comme $X \ll 1$, on a $thX \approx X$, donc:

$$N \cdot \mu_B \cdot X = \frac{X \cdot K_B \cdot T_c}{\mu_B}$$

D'où l'expression de la température de Curie :

$$T_c = \frac{N \mu_B^2 X}{K_B} \quad (5)$$

3) Expression du champ moléculaire de Weiss :

A saturation $X \gg 1$, on fait l'approximation $thX \approx 1$ et l'aimantation $M \approx N \cdot \mu_B$,

$$B_m = \mu_0 H_m = \mu_0 M = \mu_0 N \mu_B = \frac{T_c k_B}{\mu_B}$$

A.N. $T_c = 520$ K, $k_B = 1.380649 \cdot 10^{-23}$ J.K⁻¹, $\mu_B = 9.27400949 \cdot 10^{-24}$ J.T⁻¹

$$B_m = \frac{520 \times 1.380649 \cdot 10^{-23}}{9.27400949 \cdot 10^{-24}} = 774.14 \text{ T}$$

4) Expression de la susceptibilité magnétique loin de la saturation :

La susceptibilité est obtenue à partir de l'expression : $M = \chi_m H = \chi_m \frac{B}{\mu_0}$

Soit :
$$\chi_m = \frac{\mu_0 M}{B}$$

Loin de la saturation $X \ll 1$, on fait l'approximation $\tanh X \approx X$ et l'aimantation s'écrit :

$$M \approx N \mu_B X$$

avec
$$X = \mu_B \frac{B + B_m}{k_B T} = \mu_B \frac{B + \mu_0 M}{k_B T}$$

Nous allons d'abord expliciter l'expression de l'aimantation. Pour cela, remplaçons l'expression de X dans celle de l'aimantation :

$$\begin{aligned} M &= N \mu_B X = N \mu_B^2 \frac{B + \mu_0 M}{k_B T} \\ &= \frac{N \mu_B^2 B}{k_B T} + \frac{N \mu_B^3 \mu_0 M}{k_B T} \end{aligned}$$

Factorisons par M :

$$M \left(1 - \frac{N \mu_B^3 \mu_0}{k_B T} \right) = \frac{N \mu_B^2 B}{k_B T}$$

Faisons apparaître la température de Curie (expression 5) $T_c = \frac{N \mu_B^3 \mu_0}{k_B}$

$$M \left(1 - \frac{N \mu_B^3 \mu_0}{k_B T} \right) = \frac{N \mu_B^2 B}{k_B T}$$

$$M \left(1 - \frac{T_c}{T} \right) = \frac{N \mu_B^2 B}{k_B T}$$

Soit :
$$M = \frac{N \mu_B^2 B}{k_B (T - T_c)} \quad (6)$$

D'où l'expression de la susceptibilité magnétique :

$$\chi_m = \frac{\mu_0 M}{B} = \frac{N \mu_B^2 \mu_0}{k_B (T - T_c)} \frac{C}{T - T_c} \quad (7)$$

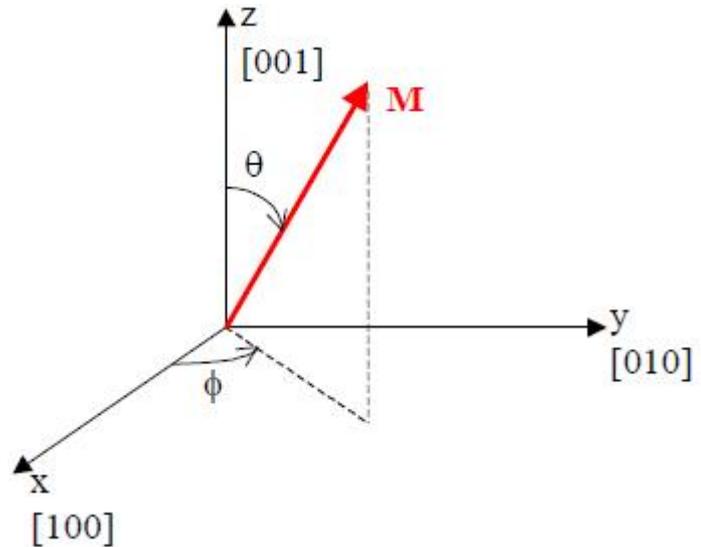
$C = \frac{N \mu_B^2 \mu_0}{k_B}$ est la constante de Curie

Exercice 2 : Anisotropie magnéto-cristalline

a) Pour montrer pourquoi les axes [100], [010] et [001] sont des directions faciles d'aimantation dans le monocristal à structure cubique du fer pur, on doit calculer la densité d'énergie d'anisotropie magnéto-cristalline E_{mc} suivant ces trois directions.

$$\begin{cases} r_1 = \sin \theta \cos \phi \\ r_2 = \sin \theta \sin \phi \\ r_3 = \cos \theta \end{cases}$$

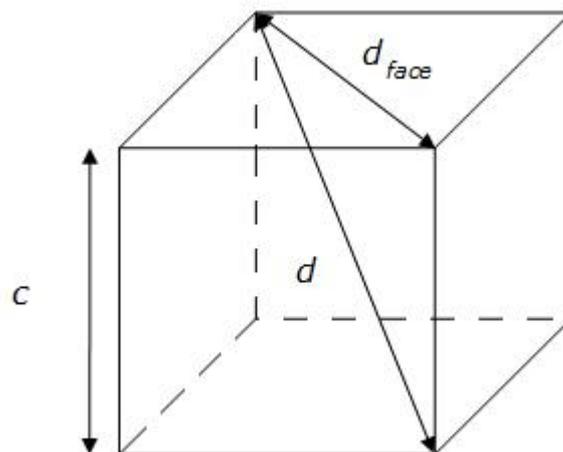
r_1, r_2 et r_3 sont les cosinus directeurs de l'aimantation par rapport aux axes cubiques.



La densité d'énergie anisotrope est donnée par l'expression :

$$E_{mc} = K_1(r_1^2 r_2^2 + r_2^2 r_3^2 + r_1^2 r_3^2) + K_2 r_1^2 r_2^2 r_3^2$$

$$K_1 = 4.8 \cdot 10^4 \text{ J/m}^3 \text{ et } K_2 = 1.2 \cdot 10^2 \text{ J/m}^3$$



Longueur de la grande diagonale : $d = c \cdot \sqrt{3}$

Longueur de la petite diagonale : $d_{face} = c \cdot \sqrt{2}$

Axe [001] ; l'aimantation \vec{M} est suivant l'axe Oz : $\theta = 0$; $\phi = 0$; $r_1 = r_2 = 0$, $r_3 = 1$

$$E_{mc} = 0 \text{ J/m}^3$$

Axe [010] ; l'aimantation \vec{M} est suivant l'axe Oy : $\alpha = \frac{f}{2}$; $\beta = \frac{f}{2}$; $r_1 = r_3 = 0$, $r_2 = 1$
 $E_{mc} = 0 \text{ J/m}^3$

Axe [100] ; l'aimantation \vec{M} est suivant l'axe Ox : $\alpha = \frac{f}{2}$; $\beta = 0$; $r_2 = r_3 = 0$, $r_1 = 1$
 $E_{mc} = 0 \text{ J/m}^3$

Les trois énergies sont égales et nulles, donc les trois directions sont favorisées.

b) Suivant les directions [111] et [110] :

Avec toujours $\alpha = (\vec{M}, Oz)$

Axe [111] ; l'aimantation \vec{M} est suivant la grande diagonale du cube de longueur d.

$$\cos \alpha = \frac{c}{d} \frac{c}{c\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} ; \text{ soit } \sin \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \quad \text{et } \sin \beta = \frac{c}{d_{face}} \frac{c}{c\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ce qui donne $r_1 = r_2 = r_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $r_3 = 1$

$$E_{mc} = 4.8 \cdot 10^4 \left[\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \right] + 1.2 \cdot 10^2 \left[\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \right]$$

$$= \frac{4.8 \cdot 10^4}{3} + \frac{1.2 \cdot 10^2}{27} = 16 \text{ kJ/m}^3$$

Axe [110] ; l'aimantation \vec{M} est suivant la petite diagonale de la face du cube de longueur d_{face} .

$\alpha = \frac{f}{2}$; soit $\cos \alpha = 0$; $\sin \alpha = 1$

$\beta = \frac{f}{4}$; soit $\cos \beta = \sin \beta = \frac{c}{d_{face}} = \frac{c}{c\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

ce qui donne $r_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$; $r_2 = 1 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $r_3 = 0$

$$E_{mc} = 4.8 \cdot 10^4 \left[(\sqrt{2})^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + (\sqrt{2})^2 \cdot (0)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot (0)^2 \right] + 1.2 \cdot 10^2 \left[(\sqrt{2})^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot (0)^2 \right]$$

$$= 4.8 \cdot 10^4 \cdot \frac{2}{2} = 48 \text{ kJ/m}^3$$

En conclusion :

Pour aligner l'aimantation dans la direction de ces deux axes [111] et [110] il faut fournir une énergie plus grande. Ces deux axes sont donc des directions difficiles aimantation.

Exercice 3 : Aimant permanent

Avant de traiter l'exercice 3, je voudrais vous rappeler quelques informations utiles sur les aimants permanents, qui vous aideront à comprendre l'exercice.

Nature :

Les aimants permanents sont des matériaux ferromagnétiques durs

Utilité :

Les aimants permanents sont utilisés pour générer des champs magnétiques, dans un circuit magnétique, sans utilisation de On utilise l'aimant permanent pour générer un champ magnétique

Utilisation :

On les retrouve dans les machines à courant continu et synchrones (moteurs ou génératrices), ils sont aussi utilisés dans les haut-parleurs et microphones, pour la fermeture de portes ou la suspension magnétique, pour la conversion d'énergie mécanique en énergie thermique (freins), ...

Exemple d'un aimant torique à entrefer (c'est le cas de l'exercice 3)

Les aimants permanents sont soumis à des règles de fabrication précises, dont le seul but est de produire une induction magnétique B_e donnée dans l'entrefer avec un minimum de volume de matériau; puisque le prix du matériau est proportionnel à son volume et, par suite, à son poids. Pour cela, il faut utiliser le matériau dans lequel le produit $B \times H$, de l'induction magnétique par l'excitation magnétique, est le plus grand possible. Ce produit est une caractéristique du matériau. Cette remarque a été faite pour la première fois par Evershed.

Critère d'Evershed :

Le volume $V = S.L$ (S est la section et L la longueur de l'aimant) du matériau est minimal lorsque le produit $B \times H$, dans le matériau est maximal.

En général, les catalogues des fabricants d'aimants indiquent la valeur du produit $B \times H$ ainsi que les valeurs de l'induction rémanente B_r et du champ coercitif H_c . D'autre part, Waston a montré que pour les aciers à aimants, le cycle d'hystérésis dans la région où H est négatif et B positif est une branche d'hyperbole; cette portion du cycle est appelée courbe de désaimantation. Il est donc de montrer que le maximum du produit $B \times H$ correspond au point de rencontre de la courbe d'hystérésis avec la diagonale du rectangle de hauteur B_r et de largeur H_c (droite passant par l'origine à pente négative).

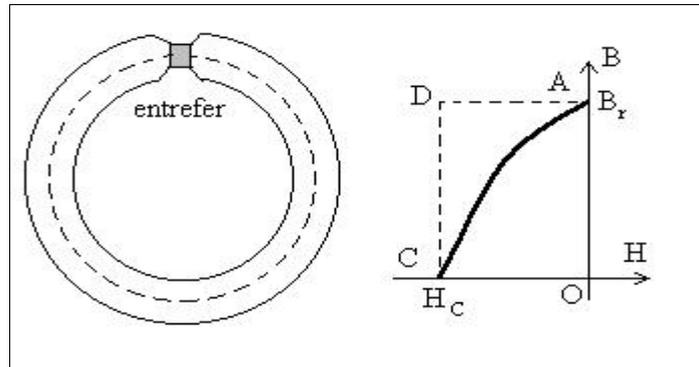
Le point de fonctionnement :

Le point de fonctionnement d'un aimant est situé sur la portion du cycle d'hystérésis correspondant à la courbe de désaimantation ($H < 0$ et $B > 0$).

Pour un entrefer donné (s, ℓ) et un matériau aimant donné (L, S), le point de fonctionnement I est connu si l'on se donne le cycle d'hystérésis du matériau, il suffit de tracer la droite

$B = -\frac{L \cdot s}{\ell \cdot S} \cdot H$ de pente $a = -\frac{L \cdot s}{\ell \cdot S}$, passant par le point O (Voit exercice 3). Son intersection avec la courbe de désaimantation donne le point de fonctionnement I . Autrement dit, cette droite doit passer par ce point précis si on veut un minimum de matériau ferromagnétique.

Exercice 3 : Aimant permanent



1) Choix du point de fonctionnement

La conservation du flux de \vec{B} permet d'écrire :

$$\oint_{S'} \vec{B} \cdot d\vec{S}' = \iint_{S_i} \vec{B}_i \cdot d\vec{S}_i + \iint_{S_e} \vec{B}_e \cdot d\vec{S}_e = 0$$

Où B_i et B_e sont, respectivement, les inductions magnétiques dans le matériau et dans l'entrefer.

S et s les sections respectives du matériau et de l'entrefer

En tenant compte que les modules de B_i et B_e sont supposés constants, on obtient l'égalité :

$$B_i S = B_e s \quad (1)$$

Le Théorème d'Ampère généralisé appliqué à un contour moyen (Γ), de centre O (centre du tore) et de rayon r , s'écrit :

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_{(\Gamma_i)} \vec{H}_i \cdot d\vec{\ell}_i + \int_{(\Gamma_e)} \vec{H}_e \cdot d\vec{\ell}_e = 0 \quad (2)$$

Où (Γ_i) est la portion du contour (Γ) de longueur L , située dans le matériau, et (Γ_e) est la portion de longueur ℓ située dans l'entrefer.

En tenant compte que les modules de H_i et H_e sont constants, on obtient :

$$H_i L + H_e \ell = 0 \quad (3)$$

à partir des relation (1) on tire la relation :

$$B_e = \mu_0 H_e = \frac{B_i S}{s}$$

Soit
$$H_e = \frac{B_i S}{\mu_0 s} \quad (4)$$

et à partir des relation (2) on tire la relation :

$$H_e = -\frac{H_i L}{\ell} \quad (5)$$

Le produit de (4) et (5) donne :

$$H_e^2 = -\frac{B_i H_i S L}{\sim_0 s \ell} = -\frac{B_i H_i}{\sim_0} u \quad (6)$$

Avec $u = \frac{S.L}{s.\ell}$

On voudrait choisir le point de fonctionnement de telle sorte que le champ H_e dans l'entrefer soit maximal, donc H_e^2 aussi.

D'après la relation (6), le maximum de H_e^2 correspond à un maximum de $|B_i H_i|$, soit :

$$\frac{d(B_i H_i)}{dH_i} = H_i \frac{dB_i}{dH_i} + B_i = 0 \quad (7)$$

à partir de l'équation (7), on peut écrire :

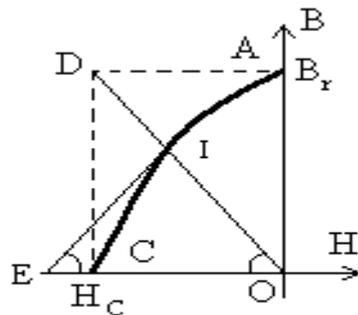
$$\frac{dB_i}{dH_i} = -\frac{B_i}{H_i} = -\frac{\sim_0 s L}{S \ell} = -\frac{\sim_0 s^2 S L}{S^2 s \ell} = -\sim_0 u \frac{s^2}{S^2} \quad (8)$$

Le point de fonctionnement I (voir figure) est donné par l'intersection avec la courbe de désaimantation, de la droite, passant par le point O, d'équation :

$$B_i = -\frac{\sim_0 s L}{S \ell} \cdot H_i = -\sim_0 u \frac{s^2}{S^2} \cdot H_i$$

dont la pente est négative égale à $-\frac{\sim_0 s L}{S \ell}$.

Ainsi donc, les dimensions (L, S) et (s, ℓ) déterminent la position du point de fonctionnement.



Commentaire :

Au point de fonctionnement pour H_e^2 maximum. Pour repérer avec précision le point d'Evershed (point de fonctionnement I), on démontre mathématiquement que le produit $B \times H$ est maximal en I, si le point I est tracé tel que (EI) tangente en I au cycle d'hystérésis et la droite OI qui passe par l'origine O, forment un triangle un triangle EIO isocèle.

$$2) B_i = \frac{aH_i + b}{cH_i + d} \text{ avec } B(H=0) = B_r \text{ et } B(H=H_c) = 0$$

$$\text{Pour } H_i = 0 : B_i = B_r = \frac{b}{d} \quad (9)$$

$$\text{Pour } B_i = 0 : H_i = H_c = -\frac{b}{a} \quad (10)$$

$$\text{Le rapport } \frac{(10)}{(9)} \text{ donne : } \frac{H_c}{B_r} = -\frac{d}{a}$$

La fonction $B_i = \frac{aH_i + b}{cH_i + d}$ s'écrit en factorisant par la constante a au numérateur :

$$B_i = \frac{a(H_i + \frac{b}{a})}{cH_i + d} = \frac{H_i + \frac{b}{a}}{\frac{c}{a}H_i + \frac{d}{a}} = \frac{H_i - H_c}{kH_i - \frac{H_c}{B_r}} \quad (11)$$

$$\text{avec } k = \frac{c}{a}$$

L'exercice propose que le point de fonctionnement I soit tel que $\frac{B_i}{H_i} = \frac{B_r}{H_c}$

En divisant l'équation (11) par H_i on obtient :

$$\frac{B_i}{H_i} = \frac{H_i - H_c}{H_i(kH_i - \frac{H_c}{B_r})} = \frac{B_r}{H_c} \quad (12)$$

à partir de la dernière égalité de l'équation (12) on obtient l'équation suivante en H_i :

$$k \frac{B_r}{H_c} H_i^2 - 2H_i + H_c = 0 \quad (13)$$

D'autre part, nous voulons un point de fonctionnement I tel que (équation 8 ; condition pour avoir $|B_i H_i|$ maximum) :

$$\left(\frac{dB_i}{dH_i} \right)_I = - \left(\frac{B_i}{H_i} \right)_I$$

Dérivons l'équation (11) et égalisons-la avec l'équation (12) :

$$\frac{dB_i}{dH_i} = \frac{d}{dH_i} \left[\frac{H_i - H_c}{H_i(kH_i - \frac{H_c}{B_r})} \right] = \frac{kH_c - H_c / B_r}{\left(kH_i - \frac{H_c}{B_r}\right)^2} = - \frac{H_i - H_c}{H_i \left(kH_i - \frac{H_c}{B_r}\right)} \quad (14)$$

En considérant la dernière égalité de (14), on retrouve la relation (13)

$$k \frac{B_r}{H_c} H_i^2 - 2H_i + H_c = 0.$$

Donc les deux propositions $\frac{B_i}{H_i} = \frac{B_r}{H_c}$ et $\left(\frac{dB_i}{dH_i} \right)_I = - \left(\frac{B_i}{H_i} \right)_I$ sont vérifiées.

Le point de fonctionnement I se trouve, donc, à l'intersection de la diagonale du rectangle OADC, de hauteur B_r et de largeur H_c avec la branche de la courbe d'hystérésis (voir figure).

A.N. :

$$B_i = \frac{B_r}{H_c} H_i = \frac{0.60}{-3.10^4} H_i = -2.10^{-5} H_i$$

$$H_e^2 = \frac{B_e^2}{\sim 0} = -\frac{B_i H_i}{\sim 0} u = -\frac{(-2.10^{-5} H_i^2)}{4.f.10^{-7}} 20 = 16f.10^{-11} H_i^2$$

$$B_e^2 = -\sim 0 B_i H_i u = (-4.f.10^{-7}) \times (-2.10^{-5} H_i^2) 20 = 16f.10^{-11} H_i^2$$