Université Moulay Ismail

Faculté des Sciences

Meknès

Année Universitaire

2019-2020

Masters : (MASI & MMP)

# Série n° : 1 (Révision)

## Exercice 1

1- Est ce que l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$ est une tribu ?

2- Si F et G sont deux tribus, est ce que $F \cup G$ est toujours une tribu ?

3- Considérons un lancer de deux pièces successives. Soit $P$ la mesure de probabilité correspondant au cas de deux lancers indépendants et $Q$ la mesure de probabilité obtenue lorsque la deuxième pièce est biaisée et donne le même résultat que la première. Est-ce que $\{ A \in \Omega : P(A) = Q(A) \}$ est une tribu ?

## Exercice 2.

Prouver que $B(\mathbb{R}^2) = B(\mathbb{R}) \otimes B(\mathbb{R})$. On pourra admettre que si $O(\mathbb{R}^2)$ désigne l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$, on a :

$$O(\mathbb{R}^2) = \{ \bigcup_{i \in I} U_i \times V_i \ ; U_i \times V_i \text{ ouverts de } \mathbb{R}, \quad I \text{ d\'enombrable}.\}$$

## Exercice 3. (Question de quelques étudiants)

Soit $(An)_{n \geq 0}$ une suite de parties d'un ensemble $\Omega$.

On appelle limite supérieure des An et on note : $\overline{\lim} A_n$ ou $\limsup_n A_n$ , l'ensemble des éléments de $\Omega$ qui appartiennent à une infinité de $A_n$ .

On appelle limite inférieure des An et on note : $\underline{\lim} A_n$ ou $\lim \inf_n An$ l'ensemble des éléments de $\Omega$ qui appartiennent à tous les $A_n$ sauf à un nombre fini d'entre eux.

1. Soit A et B deux parties de $\Omega$ et la suite $(A_n)$ définie par : $A_0 = A_2 = \cdots \ldots \ldots A$ et $A_1 = A_3 \ldots \ldots \ldots \ldots . = B$.
   Déterminer les limites sup et inf des $A_n$ .

2. Ecrire les définitions de $\overline{\lim} A_n$ et $\underline{\lim} A_n$ à l'aide des quantificateurs logiques $\exists$ et $\forall$. Les traduire en termes ensemblistes à l'aide des symboles $\cup$ et $\cap$ .

3. Déterminer $\overline{\lim} A_n$ et $\underline{\lim} A_n$ dans les situations suivantes :

$$A_n = ]-\infty, n] \text{ avec } n \geq 0 \text{ . } b) \ A_n = ]-\infty, -n] \text{ avec } n \geq 0 \ \ c) \ A_n = ]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$$

**Exercice 4.** *(Lemme de Borel-Cantelli).*

*Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\geq 0}$une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ .*

*1- Par la caractérisation ensembliste de la limite sup, dire pourquoi A appartient à .*

*2- Considérons la suite d'ensembles $D_n = \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$ . Montrer qu'elle est décroissante.*

*3- On suppose que $\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) < +\infty$ . Montrer que $Lim P(D_n) = 0$.*

*Et en déduire que $P(\overline{lim} A_n) = 0$. Traduire ce résultat concrètement.*

*4- Réciproquement, montrer que si les $A_n$ sont des événements deux à deux indépendants*

*et $\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = +\infty$ , alors $P(\overline{lim} A_n) = 1$.*

**Exercice 5.**

*On considère une urne contenant n jetons numérotés de $1$ à $n$. On tire successivement $N$ fois un jeton, avec remise entre les tirages, et on note le numéro à chaque fois. Soit k un entier naturel fixé entre $1$ et $n$.*

1. *Quelle est la probabilité $P_k$ que le plus petit des numéros obtenus soit supérieur ou égal à k ?*
2. *En déduire la probabilité $P_k$ que le plus petit des numéros obtenus soit égal à $k$.*
3. *On suppose maintenant que $N \leq n$. Que deviennent ces résultats si on ne fait pas de remise entre les N tirages ?*

**Exercice 6.**

*On lance deux dés équilibrés. On note $U_1$ et $U_2$ les variables aléatoires correspondant aux résultats obtenus.*

1. *Rappeler la loi de $U_1$, son espérance et sa variance.*
2. *On appelle $X = (U_1 + U_2)$ la somme et $Y = (U_1 - U_2)$ la différence des deux résultats. Que valent $E[X]$ et $E[Y]$ ? Montrer que $E[XY] = 0$.*
3. *En déduire que X et Y sont dé-corrélées. Sont-elles indépendantes ?*

***Exercice 7.***

***Soit*** $X_1 \sim \mathcal{G}(p_1)$ où $p_1 \in ]0,1[$ **et** $X_2 \sim \mathcal{G}(p_2)$ où $p_2 \in ]0,1[$ **avec** $X_1$ ***et*** $X_2$ **indépendantes. Notons** $X = min(X_1, X_2)$ **le minimum de ces deux variables.**

1. **Quelles sont les valeurs que peut prendre la variable aléatoire X ?**
2. **Soit** $n \in \mathbb{N}$ **, exprimer** $P(X > n)$ **en fonctions de** $p_1$ **,** $p_2$ ***et*** $n$**. En déduire la loi de X.**
3. **Application : on a en main deux dés qu'on lance en même temps jusqu'à ce qu'apparaisse le numéro 2 sur au moins l'un des deux dés. Quel est le nombre moyen de " doubles lancers "nécessaires ?**
4. **Généralisation : soit n variables indépendantes** $X_1, \ldots, X_n$ **suivant des lois géométriques de paramètres respectifs** $p_1, \ldots, p_n$, **avec** $p_i \in ]0,1[$ **pour tout** $i \in \{1, \ldots, n\}$ **. Donner la loi de la variable aléatoire** $X = min(X_1, \ldots, X_n)$.

***Exercice 8.***

***Un canal de transmission ne peut traiter que des 0 et des 1. En raison des perturbations sur ce canal, un 0 peut être transformé en 1 et un 1 en 0 lors d'une transmission, et ce avec la même probabilité p = 0, 2 indépendamment à chaque instant. Pour diminuer la probabilité d'erreur, on décide de transmettre 00000 à la place de 0 et 11111 à la place de 1 (codage dit redondant). Si le récepteur décode suivant la règle de la majorité, quelle est la probabilité que le message soit mal interprété ?***

***Exercice 9.***

***Soit*** $n \in \mathbb{N}^*$ ***fixé et X une variable aléatoire à valeurs dans*** $\{1, \ldots, n\}$.

***1- Justifier la formule***

$$E(X) = P(X \geq 1) + P(X \geq 2) + + \cdots + P(X \geq n) = \sum_{k=1}^{n} P(X \geq k)$$

***2- On lance 4 dés équilibrés simultanément et on appelle X le minimum obtenu sur ces 4 lancers.***

***a- Quelles valeurs peut prendre la variable aléatoire X.***

***b- Calculer*** $P(X \geq i)$ ***pour chaque valeur i que peut prendre X. En déduire E[X].***

***c- Soit S la somme des 3 plus gros scores. Déterminer E[S].***

# Série n° : 2

## Exercice 10.

*Déterminer la fonction de répartition de* $W = -\frac{1}{\lambda} ln(V)$ *et sa densité dans le cas où* $V \sim U(0,1)$. *De quelle loi s'agit-il?*

## Exercice 11.

*Soit* $X$ *une variable aléatoire distribuée suivant la loi de Weibull de paramètres* $\alpha > 0$ *et* $\beta > 0$. *La densité de X est donc définie par la fonction*

$$f(x) = \begin{cases} \left(\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\right) Exp^{\left(\frac{-x}{\alpha}\right)^{\beta}} & si \ x > 0 \\ 0 & si\, non \end{cases}$$

*Soit* $Y = \left(\frac{X}{\alpha}\right)^{\beta}$, *déterminer la fonction de densité de Y. De quelle loi s'agit-il ?*

## Exercice 12.

Soit X une variable aléatoire distribuée suivant la loi de Cauchy de densité

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2} \qquad x \in \mathbb{R}$$

Soit $Y = \frac{1}{X}$ . Déterminer la densité de Y. Que remarquez-vous ?

## Exercice 13

*Trouver la fonction de répartition de* $Y = X^2$ *et sa densité dans le cas où X ~N (0,1). Représenter graphiquement cette densité. Cette distribution est appelée une loi de* $\chi_1^2$ . *(chi carré à un degré de liberté).*

## Exercice 14

Soit $X \sim \chi_1^2$ et définissons $Y = ln(X)$. Trouver la fonction de répartition de Y et sa densité.

***Exercice 15.***

*Soit X une variable distribuée selon une loi normale centrée réduite* $N\ (0, 1)$.

*Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *un entier naturel non nul. Si* $X_1, \ldots, X_n$ *sont des variables indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi normale centrée réduite, on dit que la variable*

$S_n = X_1^2 + \cdots + X_n^2$ *suit une loi du khi-deux à n degrés de liberté, noté* $S_n \sim \chi_n^2$

*Calculer la moyenne et la variance de* $S_n$.

***Exercice 16.***

*Soit une variable aléatoire X de fonction de répartition* $F_X$ *supposée bijective.*

*Montrer que* $U = F_X\,(X\,)$ *suit une loi uniforme sur un intervalle à déterminer et que* $F_X$ *est la fonction de répartition de* $F_X^{-1}(U)$.

***Exercice 17.***

*Soient n variables indépendantes* $X_1\,, \ldots, X_n$ *suivant une loi uniforme dans [0, 1]. Calculer la fonction de répartition et la densité de Y =* $Min\,(X_1\,, \ldots, X_n)$.

***Exercice 18.***

*On lance deux dés équilibrés. On note* $U_1$ *et* $U_2$ *les variables aléatoires correspondant aux résultats obtenus. On appelle* $X = min(U_1, U_2)$ *le minimum et* $Y = max(U_1, U_2)$ *le maximum des deux dés.*

1- *Donner la loi de X. En déduire* $E(X)$.
2- *Exprimer* $X + Y$ *en fonction de* $U_1$ *et* $U_2$*. En déduire* $E(Y)$.
3- *Exprimer XY en fonction de* $U_1$ *et* $U_2$*. En déduire* $E(XY)$ *et* $Cov(X, Y)$.

***Exercice 19.***

*Soit* $X$ *une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur le segment* $[0, 1]$ *et soit* $Y = 1 - X$.

1- *Donner la fonction de répartition de Y. En déduire la densité de* $Y$.
2- *Est-ce que la variable aléatoire* $Z = (X + Y)$ *admet une densité ?*
3- *On construit une variable aléatoire* $X$ *en commençant par lancer une pièce équilibrée : si on obtient Pile, alors* $X = 1$ *; si on obtient Face, X est le résultat d'un tirage uniforme dans le segment* $[0, 1]$*. Donner la fonction de répartition de X*

***Exercice 20.***

***Soit $U$ une variable aléatoire distribuée suivant une loi uniforme sur $]0,1]$.***

1- ***Rappeler ce que vaut la fonction de répartition $F_U$ de $U$.***
2- ***On considère maintenant la variable aléatoire $X = \sqrt{-2\ln U}$.***
   ***Déterminer la loi $X$. (Loi de Rayleigh de paramètre 1).***

***Exercice 21.***

***On considère deux variables aléatoires indépendantes $X_1$ et $X_2$ exponentielles de paramètres respectifs $\lambda_1$ et $\lambda_2$. Soit Y = $Min(X_1, X_2)$ le minimum de ces deux variables.***

1- ***Déterminer $P(Y > y)$ puis la fonction de répartition $F$ de la variable Y.***
2- ***Deux guichets sont ouverts à une banque : le temps de service au premier (respectivement au second) guichet suit une loi exponentielle de moyenne 20 (respectivement 30) minutes. Ali et Saïd arrivent ensemble à la banque : Ali choisit le guichet 1er, Saïd le 2ème. En moyenne, au bout de combien de temps sort le premier ?***
3- ***En moyenne, combien de temps faut-il pour que les deux soient sortis ?***

***Exercice 22.***

***Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle $\mathcal{G}(1)$, et $Y = [X]$ la variable égale à sa partie entière supérieure.***

***1. Quelle est la loi $Y$ ?***

***2. Soit alors $Z = Y - X$. Dans quel intervalle $Z$ prend-elle ses valeurs ? Déterminer sa fonction de répartition $F$ et en déduire sa densité.***

***3. Préciser $E(Z)$.***

***Exercice 23.***

***Soit $m$ et $\sigma$ deux réels, avec $\sigma > 0$. On dit que X suit une loi log-normale, ou de Galton, de paramètres $(m, \sigma^2)$, notée $X \sim \mathcal{L}N(m, \sigma^2)$, si $Y = \ln X$ suit une loi normale $N(m, \sigma^2)$. Cette loi intervient lors de la multiplication d'un grand nombre de variables indépendantes et positives. En linguistique, elle sert à modéliser le nombre de mots dans une phrase.***

***1. Supposons que $X \sim \mathcal{L}N(0,1)$. Exprimer sa fonction de répartition F à l'aide de la fonction de répartition $\Phi$ de la loi normale centrée réduite.***

***2. En déduire que sa densité.***

***3. Calculer $E(X)$ et $Var(X)$.***

**Exercice 24**

***Si $X$ est une variable aléatoire réelle admettant une densité $f$, on appelle entropie de $X$ la quantité (si elle est définie) :***

$$\boldsymbol{H(X) = E\big(-Log f(X)\big) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) Log(x) dx}$$

***Grosso modo, l'entropie d'une variable aléatoire mesure le degré d'incertitude qu'on a sur l'issue d'un tirage de cette variable aléatoire.***

1- ***Supposons que $X \sim N(0,1)$, loi normale centrée réduite. Montrer qu'elle a pour entropie : $H(X) = \frac{1}{2}\,(1 + Log(2\pi))$ .***
2- ***Supposons que $X \sim N(m, \sigma^2)$. Montrer qu'elle a pour entropie :***

$$\boldsymbol{H(X) = \frac{1}{2}(1 + Log(2\pi\sigma^2))} .$$

***Ainsi, au moins pour les lois normales, l'entropie est d'autant plus grande que la variance est grande. On va montrer dans la suite que, parmi les variables aléatoires de variance donnée, celles qui ont la plus grande entropie sont celles qui suivent une loi normale.***

3- ***Soit donc $X_1 \sim N(0, \sigma^2)$, dont la densité est notée $\phi$, et $X_2$ une variable aléatoire centrée de densité f et de variance $\sigma^2$ .***

   a- ***Vérifier que (sous réserve d'existence des intégrales) :***

$$\boldsymbol{H(X_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) Log\left(\frac{\phi(x)}{f(x)}\right) dx - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) Log(\phi(x)) dx}$$

   b- ***Montrer que***

$$\boldsymbol{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) Log\left(\frac{\phi(x)}{f(x)}\right) dx \leq 0}$$

   c- ***Montrer que :***

$$\boldsymbol{-\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) Log(\phi(x)) dx = \frac{1}{2}(1 + Log(2\pi\sigma^2))}$$

   d- ***En déduire que $H(X_2) \leq H(X_1)$.***

**Exercice 25**

***Soit X une variable aléatoire gaussienne de moyenne ⍰ et d'écart-type $\sigma > 0$.***

a) ***Montrer que l'on a***

$$\boldsymbol{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad avec \qquad a = \frac{1}{2\sigma^2}}$$

b) ***En déduire les moments centrés $E\big((X - ⍰)^k\big)$ d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$***

***Exercice 26***

*Pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, on définit :* $f_n(x) = \begin{cases} 1 - cos(2\pi nx) & pour\ 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$

*1- Vérifier que* $f_n$ *est une densité de probabilité.*

2. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, calculer la fonction de répartition* $F_n$ *associée à* $f_n$*.*
1- *Montrer que pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *,* $F_n(x)$ *tend vers la fonction de répartition de la loi uniforme sur* $[0, 1]$.
2- *Pour* $x \in \mathbb{R}$*, est-ce que* $f_n(x)$ *converge lorsque n tend vers l'infini ? Conclure.*

***Exercice 27***

*On appelle fonction de Marcum, ou queue de la gaussienne, la fonction définie pour tout réel x par :*

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} e^{\frac{-t^2}{2}} dt$$

*Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite* $N(0, 1)$.

1- *Représenter la densité de X, puis Q(x) sur ce même dessin.*
2- *Soit F la fonction de répartition de X : donner la relation entre* $F(x)$ *et* $Q(x)$.
3- *Soit* $x > 0$ *fixé. Montrer qu'on a :* $Q(x) \leq \frac{1}{2} e^{\frac{-x^2}{2}}$.
4- *Trouver un équivalent de* $Q(x)$ *en* $+\infty$ .

***Exercice 28***

1- *Vérifier que la fonction f définie pour tout réel x par* $f(x) = e^{-x-e^{-x}}$ *est une densité.*
2- *Soit* $X_1$ *et* $X_2$ *des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi exponentielle de paramètre 1, et soit* $M = max(X_1, X_2)$ *la variable aléatoire correspondant au maximum de ces deux variables.*
   *Calculer* $P(M \leq x)$ *pour tout réel x.*
3- *En déduire la densité de M.*
4- *On note* $M_n = max(X_1, \dots, X_n)$, où $X_1, \dots, X_n$ *sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi exponentielle de paramètre 1. Calculer pour tout réel* $x$, $F_n(x) = P(M_n \leq x)$*.*
5- *En déduire que pour tout réel* $x$, $\mathrm{Lim}_{n \to +\infty} F_n(x + Logn)$

**Exercice 29.**

*Soit $Y$ une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ :*

*On considère la variable aléatoire $X = e^{Y}$ .*

1. *Montrer que X admet pour densité $f_X$ à déterminer.*
2. *Calculer $E[X]$ en fonction de $\lambda$.*
3. *On suppose que $\lambda > 1$. Soit Z une variable aléatoire réelle indépendante de $X$ et de loi uniforme sur $]0,1[$. Déterminer la densité de la variable aléatoire $\frac{Z}{X}$.*

**.Exercice 30.**

A. *Soit X une variable aléatoire réelle de densité $f_X$ . La variable aléatoire $Y = 2X$ admet pour densité :*

1- $\frac{1}{2}f_X(x)$.

2- $\frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right)$.

3- $2f_X(x)$.

4- $2f_X(2x)$.

B. *Soit X une variable aléatoire réelle de densité $f_X$ . La variable aléatoire $Y = X + 1$ admet pour densité :*

1- $f_X(y+1)$.

2- $1 + f_X(y)$.

3- $1 - f_X(y)$.

4- $f_X(y-1)$.

C. *On note $F_X$ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite (pour une variable aléatoire réelle). On a pour tout $x \in \mathbb{R}$ :*

1- $F_X(-x) = -F_X(x)$

2- $F_X(-x) = 1 - F_X(x)$

3- $F_X(-x) = F_X(x)$

D. *Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Alors $X + Y$ et $Y$ sont indépendantes ?*

E. *Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires réelles de densités respectives $f_X$ $(x)$ et $f_Y$ $(y)$. Alors la densité de $X + Y$ se calcule en faisant le produit de convolution entre $f_X$ et $f_Y$ .*

1- *Oui.*

2- *Non (ou dans certains cas seulement)*

# Série n° : 3

## Exercice 31.

Soit $(X, Y)$ un couple de variables aléatoires indépendantes. On suppose que $X$ suit une loi uniforme sur $[0,1]$ et $Y$ une loi exponentielle de paramètre $\lambda$ sur $[0,+\infty[$ $(\lambda > 0)$. On construit un nouveau couple de variables aléatoires $(U,V)$ définies par :

$$U = X + Y \text{ et } V = X - Y$$

1. Déterminer la densité de probabilité conjointe du couple $(U,V)$.
2. En déduire les lois marginales de $U$ et $V$.
3. Calculer les matrices de covariance de $[X\ Y]^t$ et de $[U\ V]^t$.

## Exercice 32.

Soit $(X,Y)$ un vecteur aléatoire sur $\mathbb{R}^2$ dont la loi admet la densité

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

Déterminer les lois de $Y$, $X+Y$, $X^2+Y^2$.

## Exercice 33.

Soit $(X,Y)$ un vecteur aléatoire de densité

$$f(x,y) = \mathbb{I}_{[0,1]^2}(x,y)$$

Déterminer les lois de $X, Y$ et $Z = XY$.

## Exercice 34.

Soient $X$ et $Y$ deux v.a.r. indépendantes, de même loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.

Déterminer la loi du couple $(U,V)$ et étudier l'indépendance des v.a.r. $U$ et $V$

dans les cas suivants:

1. $U = X + Y$ et $V = \frac{X}{Y}$
2. $U = X + Y$ et $V = \frac{X}{X+Y}$

***Exercice 35.***

***Soit $(X,Y)$ un couple aléatoire de densité jointe***

$$f(x,y) := \alpha e^{-y}\mathbb{I}_{\{0<2x<y\}}$$

***1- Montrer que $\alpha = 2$***

***2. Calculer les densités marginales. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ? Justifier.***

***3. Calculer $E[X], E[Y]$ et $Cov(X,Y)$.***

***4. On pose $T = 2X - Y$. Calculer la densité de $T$.***

***Exercice 36.***

***Soit $(U,V)$ un couple indépendant de variables aléatoires réelles dont la loi de chaque composante est la loi uniforme $U([0,1])$ .On définit les variables aléatoires***

$$X = \sqrt{-2LogU}\ cos(2\pi v) \quad et \quad X = \sqrt{-2LogU}\ sin(2\pi v)$$

1- ***Montrer que le vecteur aléatoire $(X,Y)$ suit une loi normale sur $\mathbb{R}^2$.***
2- ***Montrer que les variables aléatoires réelles X et Y ont toutes les deux pour loi $N(0,1)$. En déduire que $X$ et $Y$ sont indépendantes.***

***Exercice 37.***

***Soient X une variable aléatoire réelle de loi $N(0,1)$. et " $\mathcal{E}$ une variable aléatoire réelle indépendante de X de loi : $\frac{1}{2}(\delta_{-1} + \delta_1)$***

1- ***Montrer que la variable aléatoire réelle Y : = $\mathcal{E}$ X est de loi $N(0,1)$.***
2- ***Prouver que les v.a.r. X ,Y vérifient la relation $E(XY) = E(X)E(Y)$ mais $X$ et $Y$ ne sont pas indépendantes***

***Exercice 38.***

***On considère une variable aléatoire $(X,Y)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ dont la loi $P_{(X,Y)}$ admet pour densité la fonction dénie par :***

$$f(x,y) := \alpha(1-x^2)\mathbb{I}_{[0,1]}(x)ye^{-3y}\mathbb{I}_{[0,+\infty[}$$

***1- Déterminer la valeur du réel $\alpha$***

***2. Déterminer les lois marginales du couple $(X,Y)$.***

***3. Calculer $P(0 < X < 2, Y \geq 1)$***

***Exercice 39.***

*On considère une variable aléatoire $Z = (X, Y)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ dont la densité est donnée par :*

$$f_Z(X,Y) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{\sqrt{xy}} & si \quad 0 < x \leq y < 1 \\ 0 & si\ non \end{cases}$$

1- *Déterminer $\alpha$.*
2- *Calculer les densités marginales.*
3- *Calculer $P(A)$ où $A = ]-2, \frac{1}{4}[ \times ]-1, 3/2[$.*
4- *Les variables aléatoires $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes ? Justifier.*

***Exercice 40.***

*Soit $X = (X_1, X_2)$ un vecteur aléatoire de loi uniforme le domaine D.*

$$D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ tel\ que\ 0 < x_2 < x_1 < 1\}$$

1- *Représenter le support de X sur un graphique.*
2- *Quelle est la densité de X ?*
3- *Calculer les densités marginales.*
4- *Les variables $X_1$ et $X_2$ sont-elles indépendantes ?*
5- *Calculer l'espérance $X_1$ .*
6- *Calculer la médiane de $X_1$.*

***Exercice 40. (Facultatif)***

*On note $\Gamma$ la fonction définie pour $x > 0$ par :*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

1- *Calculer la mesure image de la mesure.*

$$x^{a-1} y^{b-1} e^{-(x+y)} \ \mathbb{I}_{\{x, y \geq 0\}} \ dx\, dy$$

*Par l'application qui*

$$\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \quad ?$$

$$(x, y) \longrightarrow (x + y, \frac{x}{x + y})$$

2- *En déduire*

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \int_0^{+\infty} t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt$$

# *Série n° : 4*

## ***Exercice 41***

***Soient*** $X \backsim N(m_X, K_X)$, $A \in \mathbb{R}^{p,n}$ ***et*** $Z \in \mathbb{R}^p$.

***On pose*** $Y = AX + Z$

***Montrer que :*** $Y \backsim N(m_Y, K_Y)$ ***où***

$$m_Y = Z + Am_X \text{ et } K_Y = AK_XA^t$$

***Application :***

***Soit*** $X = (X_1, X_2, X_3, X_4)^t$ ***un vecteur gaussien tel que***

$$m_X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Gamma_X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1- ***Montrer que*** $Y = (X_1 + 2X_2 + 1, X_2 - X_3)^t$ ***est un vecteur gaussien.***
2- ***Donner*** $m_Y$ ***et*** $\Gamma_Y$.

## ***Exercice 42***

***Soient*** $m \in \mathbb{R}^n$ ***et*** $\Gamma \in \mathbb{R}^{p,n}$ ***une matrice symétrique définie positive.***

***Montrer qu'il existe un vecteur gaussien*** $X \backsim N(m, \Gamma)$

## ***Exercice 43***

***Soit*** $X = (X_1, X_2, X_3, \dots\dots, X_n)^t$ ***un vecteur gaussien.***

***Montrer que les variables aléatoires*** $X_1, X_2, X_3, \dots\dots$ ***et*** $X_n$ ***sont indépendantes si et seulement si la matrice de covariance*** $\Gamma_X$ ***de*** $X$ ***est diagonale.***

***Application :***

***Soit*** $X = (X_1, X_2, X_3)^t$ ***un vecteur gaussien de matrice de covariance***

$$\Gamma_X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

***Montrer que*** $X_1$ ***et*** $X_2 - X_3$ ***sont indépendantes.***

***Exercice 44***

***Soient*** $X \backsim N(0,1)$ ***et*** $T$ ***la variable aléatoire définie par***

$$P(T = 1) = P(T = -1) = 1/2$$

***On suppose que*** $X$ ***et*** $T$ ***sont indépendantes***

***On définit la variable aléatoire*** $Y = TX$.

1- ***Montrer que*** $Y \backsim N(0,1)$.
2- ***Montrer que le vecteur*** $(X, Y)$ ***est non gaussien.***
3- ***En déduire que*** $X$ ***et*** $Y$ ***ne sont pas indépendantes.***

***Exercice 45.***

***Soit*** $X = (X_1, X_2)^t$, ***un vecteur aléatoire réel centré, à deux dimensions, de loi Gaussienne et de matrice de covariance***

$$\Gamma_X = \begin{pmatrix} 3 & \rho\sqrt{3} \\ \rho\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

***avec*** $|\rho| < 1$. ***On definit un nouveau vecteur aleatoire*** $(Y_1, Y_2)^t$ ***:***

$$\begin{cases} Y_1 = \dfrac{X_1}{\sqrt{3}} - X_2 \\ Y_2 = \dfrac{X_1}{\sqrt{3}} + X_2 \end{cases}$$

1- ***Calculer la variance*** $Var(X_1)$ ***et la covariance*** $Cov(X_1, X_2)$ ***?***
2- ***Dans quel cas, les deux variables*** $X_1$ ***et*** $X_2$ ***sont-elles indépendantes ?***
3- ***Calculer la covariance*** $Cov(Y_1, Y_2)$ ***du couple*** $(Y_1, Y_2)$ ***.***
4- ***Calculer les variances des variables aléatoires*** $Y_1$ ***et*** $Y_2$ ***.***
5- ***Les deux variables*** $Y_1$ ***et*** $Y_2$ ***sont-elles indépendantes ? Justifier***

***Exercice 46.***

***Soit*** $X = (X_1, X_2)^t$, ***un vecteur aléatoire de densité définie par :***

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2 - xy + y^2)} \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

1. ***Montrer que*** $(X, Y)^t$ ***est un vecteur gaussien, puis déterminer son espérance et sa matrice de variance covariance.***

2. ***Déterminer les lois des marginalesX et Y.***
3. ***Soit*** $a \in \mathbb{R}$ ***et soit*** $U = Y - aX$. ***Quelle est la loi du vecteur*** $(U, X)$ ***?***
4. ***Pour quelle(s) valeur(s) de*** $a$ ***les variables aléatoires*** $U$ ***et*** $X$ ***sont-elles indépendantes ?***

**Exercice 47.**

Soit $(X_1, X_2)^t$ un vecteur gaussien admettant une densité f définie par

$$f(x, y) = \alpha e^{\frac{-3x^2+2xy+3y^2}{8}} \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

1- Déterminer la constante $\alpha$, l'espérance et la matrice de variance-covariance de (X, Y).
2- Déterminer la loi des variables marginales X et Y. Ces variables sont-elles indépendantes ?
3- On pose $U = X + Y$ et $V = X - Y$. Quelle est la loi du couple $(U, V)$ ? Conclure.

**Exercice 48.**

Soit $X = (X_1, X_2)^t$ un vecteur gaussien d'espérance $\mathbb{E}_X = (0, 1)^t$ et de matrice de variance-covariance $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$

1- Déterminer $V[X_1]$, $V[X_2]$ et $Cov(X_1, X_2)$.

2. Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre $X_1$ et $X_2$

3. On pose $U = 3X_1 + 1$ et $V = X_1 - 2X_2$.

(a) Le vecteur $(U, V)^t$ est-il gaussien ?

(b) Calculer l'espérance et la matrice de variance covariance de $(U, V)^t$.

(c) Les variables aléatoires $U$ et $V$ sont-elles indépendantes ?

**Exercice 49.**

Soit $(X, Y)^t$ un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^2$ admettant pour densité :

$$f(x, y) = \beta\, e^{-\frac{1}{2}(2x^2-2xy+y^2)} \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Le vecteur $(X, Y)^t$ est-il un vecteur gaussien ? Si oui, préciser son espérance, sa matrice de variance-covariance ainsi que la valeur de $\beta$. Si non, justifier brièvement.

**Exercice 50**

Soit $(X, Y)$ un vecteur gaussien de densité :

$$f(x, y) = ke^{-\frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{2x(y+5)}{4} + \frac{(y+5)^2}{4}\right)}$$

1- Déterminer la matrice de covariance du vecteur $(X, Y)$.
2- En déduire k.
3- Donner les lois marginales de $X$ et $Y$.