Département de mathématiques
Errachidia

Année Universitaire: 2020/2021
MIP S3, Module: M 135
Responsables: M. TAOUS & S.M. DOUIRI

Correction de la série de TD n°1

Exercice 1. Soit d une distance sur $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que l'application d' définie sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ par $d'(x,y) = \sqrt{d(x,y)}$ est une distance sur $\mathbb{R}^n$.
2. On définit sur $\mathbb{R}^n$ la distance suivante : $d'(x,y) = \sqrt{||x-y||}$. La distance d' est-elle associée à une norme?

Solution. 1. Par définition, l'application d' définie sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ par $d'(x,y) = \sqrt{d(x,y)}$ est positive. vérifie-elle les 3 propriétés d'une distance?

i) La séparation : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\ d'(x,y) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{d(x,y)} = 0 \Leftrightarrow d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, puisque d est une distance.

ii) La symétrie : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\ d'(x,y) = \sqrt{d(x,y)} = \sqrt{d(y,x)} = d'(y,x)$.

iii) L'inégalité triangulaire : Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et puisque d est une distance, on a $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$. Or la fonction usuelle de la racine $t \mapsto \sqrt{t}$ est croissante, alors on a $\sqrt{d(x,y)} \leq \sqrt{d(x,z) + d(z,y)}$. En utilisant le fait que $\sqrt{t+t'} \leq \sqrt{t} + \sqrt{t'}$ (à vérifier), on déduit que $\sqrt{d(x,z)+d(z,y)} \leq \sqrt{d(x,z)} + \sqrt{d(z,y)}$. Par conséquence, $\sqrt{d(x,y)} \leq \sqrt{d(x,z)} + \sqrt{d(z,y)}$. D'où $d'(x,y) \leq d'(x,z) + d'(z,y)$.

Finalement, l'application d' vérifie bien les 3 conditions d'une distance. Donc, d' est une distance sur $\mathbb{R}^n$.

2. Sur $\mathbb{R}^n$ et pour n'importe quelle norme $||\ ||$, l'application d définie par $d(x,y) = ||x-y||$ est la distance associée à cette norme. D'après la première question, l'application d' définie par $d'(x,y) = \sqrt{||x-y||}$ est aussi une distance sur $\mathbb{R}^n$. Supposons que cette distance d' est induite par une norme N sur $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire qu'il existe une norme N telle que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n,\ d'(x,y) = N(x-y)$. En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ on a $d'(x,0) = N(x)$. Ce qui entraine que

$$\sqrt{2}\sqrt{||x||} = \sqrt{2||x||} = \sqrt{||2x||} = d'(2x,0) = N(2x) = 2N(x) = 2d'(x,0) = 2\sqrt{||x||},$$

qui est une contradiction puisque le vecteur x est non nul. Par conséquent, la distance d' n'est associée à aucune norme sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 2. On sait que $||\ ||_1$, $||\ ||_2$ et $||\ ||_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{R}^n$. Plus généralement, pour $p \in [1, +\infty[$ et $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ on pose

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

1. Montrer que $\| \ \|_p$ définit une norme sur $\mathbb{R}^n$.
   Indication: Utiliser l'inégalité de Minkowski suivante

   $$(|x_1+y_1|^p+\cdots+|x_n+y_n|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (|x_1|^p+\cdots+|x_n|^p)^{\frac{1}{p}}+(|y_1|^p+\cdots+|y_n|^p)^{\frac{1}{p}}$$

   pour tous réels $x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n$.

2. Montrer que pour tout $p\in[1,+\infty[$ les normes $\| \ \|_p$ et $\| \ \|_\infty$ sont équivalentes.

3. Déduire que pour tout $x\in\mathbb{R}^n$ on a

   $$\lim_{p\to\infty}\|x\|_p=\|x\|_\infty.$$

Solution. 1. Par définition, l'application $\| \ \|_p$ définie sur $\mathbb{R}^n$ par $\|x\|_p=(\sum_{i=1}^n|x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ est positive. vérifie-elle les 3 propriétés d'une norme?

$i)$ La séparation : Pour tout $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}\|x\|_p=0 \Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^n|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}=0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n|x_i|^p=0\\ \Leftrightarrow |x_i|=0,\forall i\in\{1,\ldots,n\} \Leftrightarrow x_i=0,\forall i\in\{1,\ldots,n\}\\ \Leftrightarrow x=0_{\mathbb{R}^n}.\end{aligned}$$

$ii)$ L'homogénéité : Pour tous $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ et $\lambda\in\mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned}\|\lambda x\|_p&=\left(\sum_{i=1}^n|\lambda x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\sum_{i=1}^n|\lambda|^p|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\&=\left(|\lambda|^p\sum_{i=1}^n|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}=|\lambda|\left(\sum_{i=1}^n|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\&=|\lambda|\|x\|_p.\end{aligned}$$

$iii)$ L'inégalité triangulaire : Pour tous $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ et $y=(y_1,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^n$, on a

$$\begin{aligned}\|x+y\|_p&=\left(\sum_{i=1}^n|x_i+y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}=(|x_1+y_1|^p+|x_2+y_2|^p+\cdots+|x_n+y_n|^p)^{\frac{1}{p}}\\&\leq(|x_1|^p+|x_2|^p+\cdots+|x_n|^p)^{\frac{1}{p}}+(|y_1|^p+|y_2|^p+\cdots+|y_n|^p)^{\frac{1}{p}}\quad\text{(Inég. de Minkowski)},\\&=\left(\sum_{i=1}^n|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^n|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\|x\|_p+\|y\|_p.\end{aligned}$$

Finalement, l'application $\| \ \|_p$ vérifie bien les 3 conditions d'une norme. Donc, $\| \ \|_p$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

2. Soit $p \in [1, +\infty[$. Montrons que les deux normes $\| \ \|_p$ et $\| \ \|_\infty$ sont équivalentes, c'est-à-dire qu'il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que

$$\alpha \|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq \beta \|x\|_\infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Soit $x \in \mathbb{R}^n$, il existe $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ tel que

$$\|x\|_\infty = \sup_{i \in \{1,\ldots,n\}} |x_i| = \sup(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|) = |x_{i_0}|.$$

On a $|x_{i_0}|^p \leq \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p$, alors

$$\|x\|_\infty = |x_{i_0}| = (|x_{i_0}|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

D'où $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p$, et par suite on peut choisir $\alpha = 1$.
Maintenant, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ on a $|x_i| \leq \|x\|_\infty$. Alors,

$$|x_i|^p \leq \|x\|_\infty^p, \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Donc,

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \leq \sum_{i=1}^{n} \|x\|_\infty^p,$$

c'est-à-dire,

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \leq n \|x\|_\infty^p,$$

ce qui implique que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq (n \|x\|_\infty^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Par conséquence, $\|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty$. Alors, on peut prendre $\beta = n^{\frac{1}{p}}$. Finalement, on a

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Ce qui signifie que les deux normes $\| \ \|_p$ et $\| \ \|_\infty$ sont équivalentes.

3. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. D'après la question précédente, on a $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty$, $\forall p \in [1, +\infty[$. Par passage à la limite, on a

$$\lim_{p \to \infty} \|x\|_\infty \leq \lim_{p \to \infty} \|x\|_p \leq \lim_{p \to \infty} \left(n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty \right).$$

Or $\lim\limits_{p \to \infty} \|x\|_\infty = \|x\|_\infty$ et $\lim\limits_{p \to \infty} \left(n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty \right) = \left(\lim\limits_{p \to \infty} n^{\frac{1}{p}} \right) \|x\|_\infty = \|x\|_\infty$ puisque $\lim\limits_{p \to \infty} n^{\frac{1}{p}} = \lim\limits_{p \to \infty} \exp(\frac{1}{p} \ln n) = 1$. Par suite,

$$\lim_{p \to \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty.$$

<u>Exercice</u> 3. Soient a et b deux réels strictement positifs. On pose

$$N(x,y)=\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}, \qquad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

1. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
2. Prouver que les normes N et $\|\ \|_2$ sont équivalentes.
3. Déterminer et dessiner les boules fermées unitées pour les normes N et $\|\ \|_2$.

Solution. 1. Pour tout $X=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ on a $N(X)=N(x,y)=\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\geq 0$. Reste à montrer que l'application N satisfait les 3 propriétés d'une norme sur $\mathbb{R}^2$. Pour simplifier les calculs, on peut remarquer que $N(x,y)=\|(\frac{x}{a},\frac{y}{b})\|_2$ et on utilise le fait que $\|\ \|_2$ est une norme.

i) La séparation : Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned}N(x,y)=0 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}=0 &\Leftrightarrow \|(\frac{x}{a},\frac{y}{b})\|_2=0\\ &\Leftrightarrow (\frac{x}{a},\frac{y}{b})=(0,0)\Leftrightarrow \frac{x}{a}=\frac{y}{b}=0\\ &\Leftrightarrow x=y=0\Leftrightarrow (x,y)=(0,0)=0_{\mathbb{R}^2}\end{aligned}$$

ii) L'homogénéité : Pour tous $X=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et $\lambda\in\mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned}N(\lambda X)&=N(\lambda(x,y))=N(\lambda x,\lambda y)=\|(\frac{\lambda x}{a},\frac{\lambda y}{b})\|_2\\ &=\|\lambda(\frac{x}{a},\frac{y}{b})\|_2=|\lambda|\|(\frac{x}{a},\frac{y}{b})\|_2=|\lambda|N(x,y)=|\lambda|N(X).\end{aligned}$$

Alors $N(\lambda X)=|\lambda|X,\ \ \forall X\in\mathbb{R}^2$.

iii) L'inégalité triangulaire : Pour tous $X=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et $X'=(x',y')\in\mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned}N(X+X')&=N((x,y)+(x',y'))=N(x+x',y+y')\\ &=\|(\frac{x+x'}{a},\frac{y+y'}{b})\|_2=\|(\frac{x}{a},\frac{y}{b})+(\frac{x'}{a},\frac{y'}{b})\|_2\\ &\leq \|(\frac{x}{a},\frac{y}{b})\|_2+\|(\frac{x'}{a},\frac{y'}{b})\|_2\\ &=N(x,y)+N(x',y')\\ &=N(X)+N(X').\end{aligned}$$

Finalement, l'application N vérifie bien les 3 conditions d'une norme. Donc, N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

2. Posons $\alpha = \max(a,b)$ et $\beta = \min(a,b)$, alors
$$\frac{1}{\alpha} \leq \frac{1}{a} \leq \frac{1}{\beta} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\alpha} \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{\beta},$$
ce qui entraine que
$$\frac{x^2}{\alpha^2} \leq \frac{x^2}{a^2} \leq \frac{x^2}{\beta^2} \quad \text{et} \quad \frac{y^2}{\alpha^2} \leq \frac{y^2}{b^2} \leq \frac{y^2}{\beta^2}, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$
Par sommation terme à terme on obtient
$$\frac{x^2+y^2}{\alpha^2} \leq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq \frac{x^2+y^2}{\beta^2}, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$
et par suite
$$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{\alpha^2}} \leq \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{\beta^2}}, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$
c'est-à-dire,
$$\frac{1}{\alpha}\|(x,y)\|_2 \leq N(x,y) \leq \frac{1}{\beta}\|(x,y)\|_2, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$
Ce qui signifie que les deux normes N et $|| \ ||_2$ sont équivalentes.

3. Pour la norme $\| \ \|_2$, la boule fermée unité est $B'_{\| \ \|_2}(0_{\mathbb{R}^2}, 1)$ et on a
$$\begin{aligned} B'_{\| \ \|_2}(0_{\mathbb{R}^2}, 1) = B'_{\| \ \|_2}((0,0),1) &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \ ||(x,y)||_2 \leq 1\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \ \sqrt{x^2+y^2} \leq 1\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \ x^2+y^2 \leq 1\} \end{aligned}$$
qui représente le disque de centre $(0,0)$ et de rayon 1.

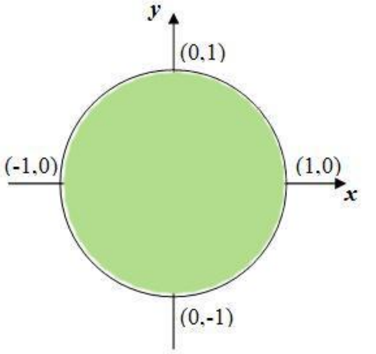


Figure 1: Boule fermée unité pour la norme $\| \ \|_2$

Pour la norme N, la boule fermée unité est $B'_N(0_{\mathbb{R}^2}, 1)$ et on a

$$\begin{aligned} B'_N(0_{\mathbb{R}^2}, 1) = B'_N((0,0), 1) &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ N(x,y) \leq 1\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} \leq 1\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\} \end{aligned}$$

qui représente l'ellipse de centre $(0,0)$ et de demi-axes a et b.

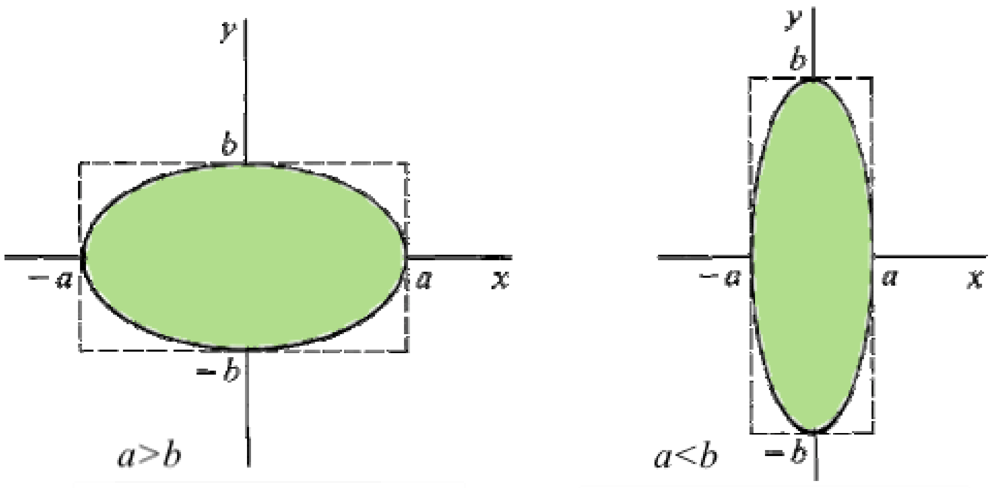


Figure 2: Boule fermée unité pour la norme N

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ muni de deux normes **équivalentes** N_1 et N_2. Montrer qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E converge vers l pour la norme N_1 si, et seulement si, elle converge vers l pour la norme N_2.

Solution. N_1 et N_2 sont deux normes équivalentes sur l'espace vectoriel normé E, alors il existe deux réels strictement positifs $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que

$$\alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x), \quad \forall x \in E.$$

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E qui converge vers l pour la norme N_1, alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0 \ \text{ on a } \ N_1(x_n - l) < \frac{\varepsilon}{\beta}.$$

Ce qui implique que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0 \ \text{ on a } \ \beta N_1(x_n - l) < \varepsilon.$$

D'après l'équivalence entre les deux normes N_1 et N_2, on a $N_2(x_n - l) \leq \beta N_1(x_n - l)$ et par suite

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0 \ \text{ on a } \ N_2(x_n - l) < \varepsilon.$$

Ce qui signifie que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers l pour la norme N_2.
Réciproquement, Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E qui converge vers l pour la norme N_2, alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0 \ \text{ on a } \ N_2(x_n - l) < \alpha\varepsilon.$$

D'après l'équivalence entre les deux normes N_1 et N_2, on a $\alpha N_1(x_n - l) \leq N_2(x_n - l)$ et par suite

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0 \ \text{ on a } \ \alpha N_1(x_n - l) < \alpha\varepsilon.$$

c'est-à-dire,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0 \ \text{ on a } \ N_1(x_n - l) < \varepsilon.$$

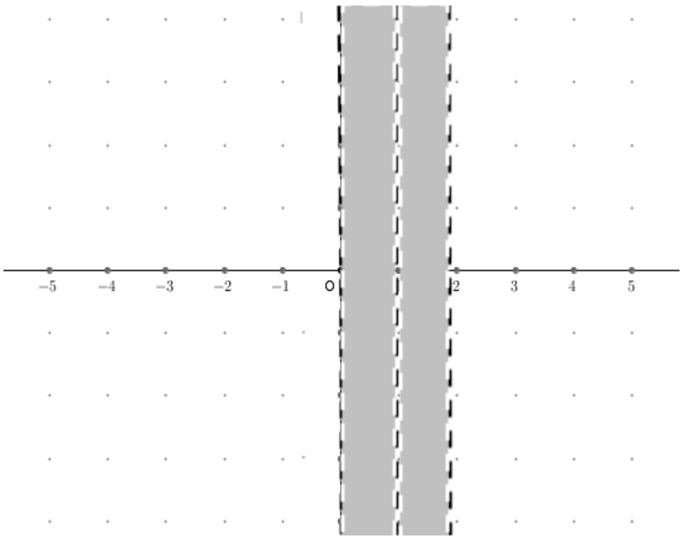
Ce qui signifie que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers l pour la norme N_1. D'où la notion de la convergence ne change pas si on change une norme par une autre norme équivalente.

Exercice 5. Déterminer si les ensembles suivants sont ouverts ou fermés :

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < |x-1| < 1\}$ $\quad$ $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq y\}$
$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1 \text{ et } |y| \leq 1\}$ $\quad$ $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Q} \text{ et } y \in \mathbb{Q}\}$
$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \notin \mathbb{Q} \text{ ou } y \notin \mathbb{Q}\}$ $\quad$ $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\}$.

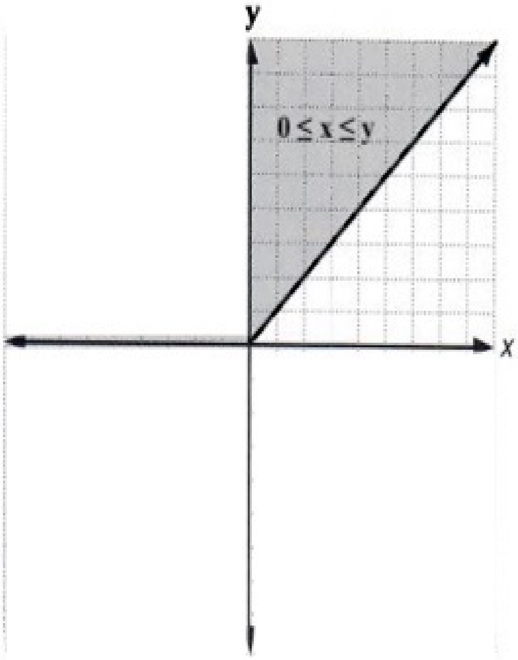
Solution.

$\star$
$$\begin{aligned} A &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < |x-1| < 1\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x-1 < 0 \ \text{ ou } \ 0 < x-1 < 1\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1 \ \text{ ou } \ 1 < x < 2\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in]0,1[\cup]1,2[\} \end{aligned}$$



A est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. En effet, pour tout $(a,b) \in A$, on a $a \in]0,1[\cup]1,2[$. Or $]0,1[\cup]1,2[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\subset]0,1[\cup]1,2[$. Montrons que $B_{\mathbb{R}^2,\|\ \|_\infty}((a,b),\varepsilon) \subset A$. Soit $(x,y) \in B_{\mathbb{R}^2,\|\ \|_\infty}((a,b),\varepsilon)$, alors $\|(x,y)-(a,b)\|_\infty < \varepsilon$, c'est-à-dire, $\|(x-a, y-b)\|_\infty < \varepsilon$. Donc, $|x-a| < \varepsilon$, ce qui entraine que $x \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$, d'où $x \in]0,1[\cup]1,2[$ et par suite $(x,y) \in A$. Alors, pour tout $(a,b) \in A$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B_{\mathbb{R}^2,\|\ \|_\infty}((a,b),\varepsilon) \subset A$, ce qui signifie que A est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Maintenant, est-il un fermé de $\mathbb{R}^2$? Remarquons que $(\frac{1}{n}, 0)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite dans A qui converge vers $(0,0)$ (à vérifier), mais la limite $(0,0) \notin A$. Alors cette partie n'est pas fermée dans $\mathbb{R}^2$.

⋆ $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq y\}$



B est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$. En effet, soit $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans B qui converge vers une limite (a,b). Donc $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ et $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$.
Comme $(x_n, y_n) \in B$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors

$$0 \leq x_n \leq y_n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

ce qui implique que

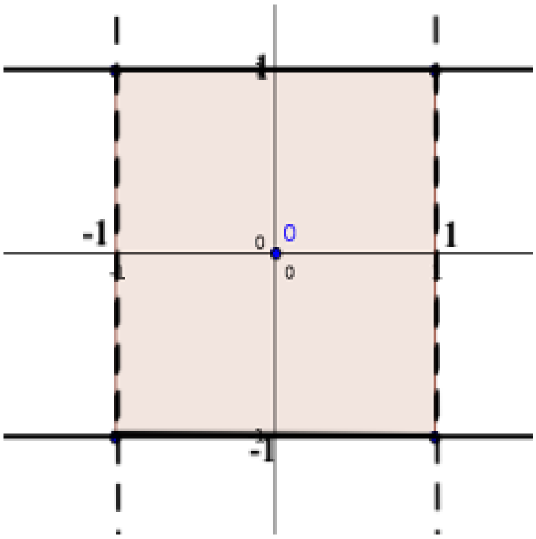
$$0 \leq \lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n,$$

c'est-à-dire,

$$0 \leq a \leq b.$$

Ce qui entraine que $(a,b) \in B$, et par suite la partie B est fermée dans $\mathbb{R}^2$.
Par contre, le point $(0,0) \in B$ et pour tout $\varepsilon > 0$ on a $B_{\mathbb{R}^2,\|\ \|_\infty}((0,0),\varepsilon) \nsubseteq B$, puisque $(-\frac{\varepsilon}{2}, 0) \in B_{\mathbb{R}^2,\|\ \|_\infty}((0,0),\varepsilon)$ et $(-\frac{\varepsilon}{2}, 0) \notin B$. D'où, la partie B n'est pas un ouvert dans $\mathbb{R}^2$.

⋆ $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1 \text{ et } |y| \leq 1\}$
$\quad = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < 1 \text{ et } -1 \leq y \leq 1\}$



La partie C n'est pas ouvert. Il suffit de trouver un point de C tel que toute boule de centre ce point n'est pas inclue dans C. le point $(0,1) \in C$ et pour tout $\varepsilon > 0$ on a $B_{\mathbb{R}^2, \|\ \|_\infty}((0,1),\varepsilon) \nsubseteq C$. En effet, on a $(0, 1+\frac{\varepsilon}{2}) \in B_{\mathbb{R}^2, \|\ \|_\infty}((0,1),\varepsilon)$ mais $(0, 1+\frac{\varepsilon}{2}) \notin C$.
La partie C n'est pas fermée. Il suffit de trouver une suite dans C qui converge vers une limite, mais cette limite n'appartient pas à C. on considère la suite $(1-\frac{1}{n}, 0)_{n\in\mathbb{N}^*}$, elle converge vers le point $(1,0)$, puisque

$$\lim_{n\to\infty} \|(1-\frac{1}{n},0)-(1,0)\|_{\|\ \|_\infty} = \lim_{n\to\infty} \|(-\frac{1}{n},0)\|_{\|\ \|_\infty} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Par contre le point $(1,0) \notin C$.

⋆ $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Q} \text{ et } y \in \mathbb{Q}\}$.
On sait que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire, pour tous $a < b$ dans $\mathbb{R}$, il existe $r \in \mathbb{Q}$ et $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ tels que $a < r < b$ et $a < x < b$. Montrons que D n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Prenons le point $(0,0) \in D$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ tel que $0 < x < \varepsilon$. Alors $(x,0) \in B_{\|\ \|_1}((0,0),\varepsilon)$, puisque $\|(x,0)-(0,0)\|_1 < \varepsilon$, mais on a $(x,0) \notin D$ et par suite $B_{\|\ \|_1}((0,0),\varepsilon) \nsubseteq D$.
La partie D est aussi non fermée. En effet, d'après la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{Q}$ qui converge vers le nombre irrationnel $\sqrt{2}$. Alors $(r_n, 0)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans D qui converge vers $(\sqrt{2}, 0)$, mais $(\sqrt{2}, 0) \notin D$. Ce qui entraine que D n'est pas fermée dans $\mathbb{R}^2$.

⋆ $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \notin \mathbb{Q} \text{ ou } y \notin \mathbb{Q}\}$.
On a $E = \complement_{\mathbb{R}^2}^{D}$ et comme D n'est ni ouvert, ni fermé. Alors, il en est de même pour E, il n'est ni ouvert, ni fermé.

⋆ $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\}$.

$$\begin{aligned} &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2+y^2} < 2\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)\|_2 < 2\} \\ &= B_{\|\ \|_2}((0,0),2) \end{aligned}$$

La partie F est la boule ouverte, pour la norme euclidienne $\| \|_2$, de centre $(0,0)$ et de rayon 2. Alors F est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Est-elle fermée? La suite $(2-\frac{1}{n},0)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite dans F qui converge vers $(2,0)$, mais cette limite $(2,0)\notin F$. Ce qui implique que F n'est pas fermée.

<u>Exercice</u> 6.

1. Montrer que toute Sphère de $\mathbb{R}^n$ est un fermé. Est-elle compacte?

2. Prouver que toute partie finie A de $\mathbb{R}^n$ est fermée. Est-elle compacte?

Solution.

1. Soit $S(a,r)$ une sphère de $\mathbb{R}^n$ pour une norme $\| \|$, c'est-à-dire,
$$\begin{aligned} S(a,r) =& \ \{x\in\mathbb{R}^n/\|x-a\|=r\}\\ =& \ \{x\in\mathbb{R}^n/\|x-a\|\geq r \text{ et } \|x-a\|\leq r\}\\ =& \ \{x\in\mathbb{R}^n/\|x-a\|\leq r\}\cap\{x\in\mathbb{R}^n/\|x-a\|\geq r\}\\ =& \ B'(a,r)\cap\{x\in\mathbb{R}^n/\|x-a\|<r\}^C\\ =& \ B'(a,r)\cap\complement_{\mathbb{R}^n}^{B(a,r)}\\ S(a,r) =& \ B'(a,r)\backslash B(a,r)\end{aligned}$$
On a la boule ouverte $B(a,r)$ est un ouvert, alors son complémentaire $\complement_{\mathbb{R}^n}^{B(a,r)}$ est un fermé. Comme la boule fermée $B'(a,r)$ est un fermé, alors $B'(a,r)\cap\complement_{\mathbb{R}^n}^{B(a,r)}$ est aussi un fermé de $\mathbb{R}^n$. Par conséquence, la sphère $S(a,r)$ est fermée dans $\mathbb{R}^n$. Est-elle compacte? En effet, pour tout $x\in S(a,r)$ on a $\|x-a\|=r$. Or, $|\|x\|-\|a\||\leq\|x-a\|$, alors $\|x\|\leq r+\|a\|$. D'où, il existe $M>0$ (on peut choisir $M=r+\|a\|$) tel que pour tout $x\in S(a,r)$ on a $\|x\|\leq M$, c'est-à-dire, la sphère $S(a,r)$ est bornée. Par conséquent, elle est compacte.

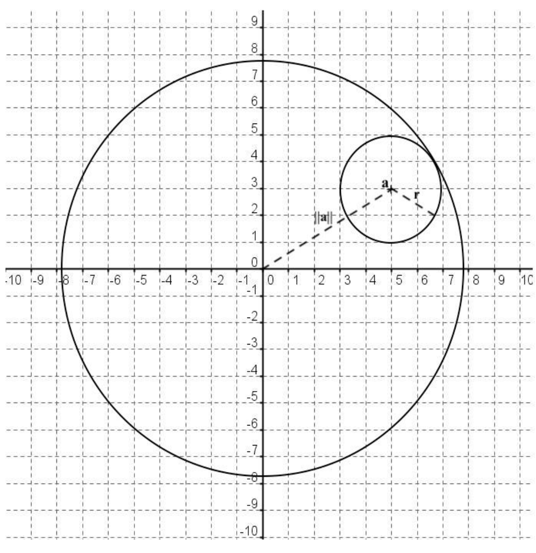


Figure 3: Schéma explicative pour l'espace $\mathbb{R}^2$

2. Soit $A = \{a_1, a_2, \dots, a_p\}$ une partie finie de $\mathbb{R}^n$, alors $A = \cup_{i=1}^{p}\{a_i\}$. Il suffit de montrer que chaque singleton $\{a_i\}$ est fermé. Soit $\{a\}$ un singleton de $\mathbb{R}^n$, pour tout $x \in \{a\}^C$, on a $x \neq a$, c'est-à-dire, $\|x-a\| > 0$, donc il existe ε tel que $0 < \varepsilon < \|x-a\|$. Montrons que $B(x,\varepsilon) \subset \{a\}^C$. En effet, soit $y \in B(x,\varepsilon)$, alors $\|x-y\| < \varepsilon$. Or, $\|x-a\| \leq \|x-y\| + \|y-a\|$, alors

$$\begin{aligned}\|y-a\| &\geq \|x-a\| - \|x-y\| \\ &> \|x-a\| - \varepsilon \\ &> 0\end{aligned}$$

D'où $y \neq a$, c'est-à-dire, $y \in \{a\}^C$. Par conséquence, $\{a\}^C$ est un ouvert, ce qui signifie que le singleton $\{a\}$ est un fermé, et par suite, toute partie fine est fermé comme réunion finie des singletons. Reste à montrer que la partie finie A est bornée pour déduire sa compacité. Soit $M = \sup_{i=1,\dots,p} \|a_i\|$, alors pour tout point a_i de A on a $\|a_i\| \leq M$, donc la partie A est bornée, et par suite elle est compacte.

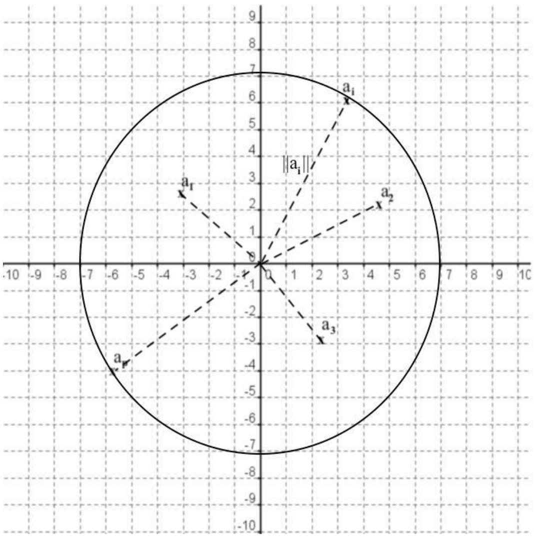


Figure 4: Schéma explicative pour l'espace $\mathbb{R}^2$