Série de TD n°1

Exercice 1. Soit d une distance sur $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que l'application d' définie sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ par $d'(x,y) = \sqrt{d(x,y)}$ est une distance sur $\mathbb{R}^n$.

2. On définit sur $\mathbb{R}^n$ la distance suivante : $d'(x,y) = \sqrt{||x-y||}$. La distance d' est-elle associée à une norme?

Exercice 2. On sait que $||\ ||_1$, $||\ ||_2$ et $||\ ||_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{R}^n$. Plus généralement, pour $p \in [1, +\infty[$ et $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ on pose

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

1. Montrer que $\|\ \|_p$ définit une norme sur $\mathbb{R}^n$.
   Indication: Utiliser l'inégalité de Minkowski suivante

   $$(|x_1+y_1|^p + \cdots + |x_n+y_n|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} + (|y_1|^p + \cdots + |y_n|^p)^{\frac{1}{p}}$$

   pour tous réels $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$.

2. Montrer que pour tout $p \in [1, +\infty[$ les normes $\|\ \|_p$ et $\|\ \|_\infty$ sont équivalentes.

3. Déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a

   $$\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty.$$

Exercice 3. Soient a et b deux réels strictement positifs. On pose

$$N(x,y) = \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}, \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

2. Prouver que les normes N et $||\ ||_2$ sont équivalentes.

3. Déterminer et dessiner les boules fermées unitées pour les normes N et $||\ ||_2$.

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ muni de deux normes **équivalentes** N_1 et N_2. Montrer qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E converge vers l pour la norme N_1 si, et seulement si, elle converge vers l pour la norme N_2.

Exercice 5. Déterminer si les ensembles suivants sont ouverts ou fermés :

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < |x-1| < 1\}$
$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq y\}$
$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1 \text{ et } |y| \leq 1\}$
$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Q} \text{ et } y \in \mathbb{Q}\}$
$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \notin \mathbb{Q} \text{ ou } y \notin \mathbb{Q}\}$
$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\}$.

Exercice 6.

1. Montrer que toute Sphère de $\mathbb{R}^n$ est un fermé. Est-elle compacte?

2. Prouver que toute partie finie A de $\mathbb{R}^n$ est fermée. Est-elle compacte?