جامعة مولاي إسماعيل
UNIVERSITÉ MOULAY ISMAÏL
كلية العلوم والتقنيات
FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES
Département de mathématiques
Errachidia

Année Universitaire: 2020/2021
MIP S3, Module: M 135
Responsables: S.M. DOUIRI & M. TAOUS

Série de TD n°2

Exercice 1. Étudier l'existence d'une limite en $(0,0)$ pour les fonctions suivantes :

1) $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$ **2)** $f(x,y) = \dfrac{1-\cos(xy)}{y^2}$ **3)** $f(x,y) = \dfrac{\left(x^2+y^2\right)^2}{x^2-y^2}$

4) $f(x,y) = \dfrac{\sin(xy)}{|x|+|y|}$ **5)** $f(x,y) = \dfrac{2x^2+xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Exercice 2. 1. Soit f la fonction définie par $f(x,y) = \frac{1+x^2+y^2}{y}\sin y$.

a) f est-elle continue sur son domaine de définition?

b) Peut-on prolonger f par continuité sur $\mathbb{R}^2$?

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On définit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$F(x,y) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} & \text{si } x \neq y \\ f'(x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démontrer que F est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3. Soient $m \in \mathbb{N}$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^m y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.
2. Calculer les dérivées partielles de f en chaque point de $\mathcal{D}$ et pour tout $m \in \mathbb{N}$.
3. Justifier pourquoi f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$ et pour tout $m \in \mathbb{N}$.
4. La fonction f est-elle différentiable sur $\mathcal{D}$?
5. Dans cette question, nous étudions f en $(0,0)$.
   (a) Étudier suivant m la continuité de f en $(0,0)$.
   (b) Étudier l'existence des dérivées partielles de f en $(0,0)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.
   (c) Pour quelles valeurs de m, f est-elle différentiable en $(0,0)$?
   (d) Selon les valeurs de m, déterminer le plus grand ouvert de $\mathbb{R}^2$ sur lequel f est de classe $\mathcal{C}^1$.
6. Pour $m = 0$, on considère la fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $g(t) = (t, -t)$. Montrer que $g \circ f$ est différentiable sur $\mathcal{D}$ et calculer la matrice jacobienne de $g \circ f$.

UNIVERSITÉ MOULAY ISMAÏL
FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES
Département de mathématiques
Errachidia

Année Universitaire: 2020/2021
MIP S3, Module: M 135
Responsables: S.M. DOUIRI & M. TAOUS

Exercice 4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \begin{cases} x^2y^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

1. Calculer les dérivées partielles de f sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
3. La fonction f est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 5. Déterminer les extrema locaux et globaux des fonctions $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes:

1. $f(x,y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2$
2. $f(x,y) = y(x^2 + (\ln y)^2)$
3. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$

Exercice 6. Afin de traiter une infection bactérienne, l'utilisation conjointe de deux composés chimiques est proposée. Des études ont montré que la durée de l'infection pouvait être modélisée par

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 18x - 24y + 2xy + 120,$$

où x est le dosage en mg du premier composé et y est le dosage en mg du second. Comment minimiser la durée de l'infection?

Exercice 7.

1. Montrer que la condition $e^{xy} + y^2 = xy - 2x + 3y - 1$ définit y comme fonction de x au voisinage de $(0,1)$.
2. Montrer que cette fonction admet un développement limité à tout ordre au voisinage de 0 et donner ce développement limité à l'ordre 2.