Université Moulay Ismaïl
Faculté des Sciences
Département de Physique
Meknès

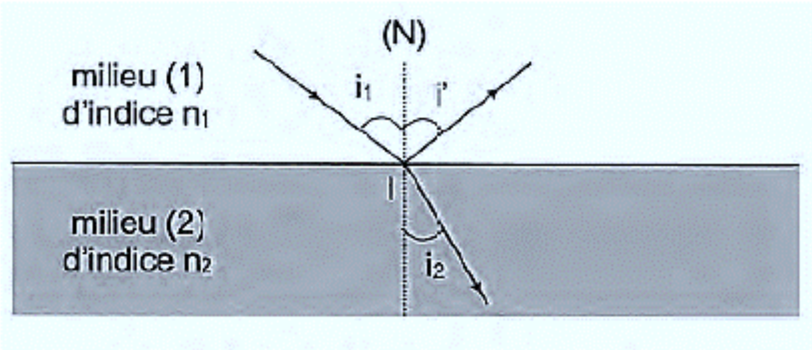
Filière : SMP 6
TD : Propagations Guidées
Année Universitaire : 2019/2020

Série 2

Transmission optique

1. Propagation guidée de la lumière

On considère un dioptre plan séparant deux milieux transparents et homogènes : le milieu (1) d'indice n_1 et le milieu (2) d'indice n_2 . De la lumière se propage du milieu (1) vers le milieu (2) . On isole un rayon frappant le dioptre en I et formant un angle i_1 avec (N), normale au dioptre en I . On observe l'existence d'un rayon réfléchi dans le milieu (1) formant un angle i' avec (N) et éventuellement d'un angle i_2 avec (N). Les angles sont non orientés.

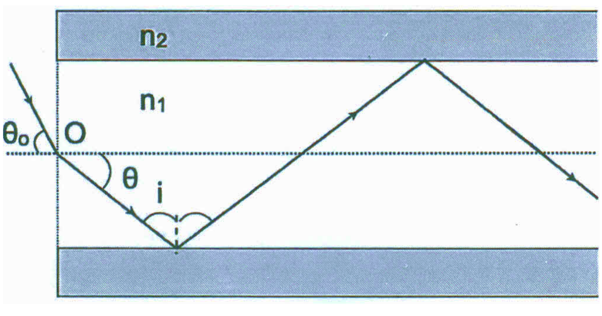


Question préliminaire :
Décrire le phénomène de réflexion totale : on précisera notamment la condition sur les indices et la condition sur l'angle i_1 .

A. Fibre optique à saut d'indice

Une fibre optique est un cylindre de verre, capable de guider la lumière sur de longues distances. Un rayon lumineux rentrant à une extrémité de la fibre reste piégé à l'intérieur par réflexion totale interne.

Une fibre optique à saut d'indice est constituée d'un cœur cylindrique d'indice n_1 d'un diamètre d'environ 50 μm, entouré par une gaine d'indice $n_2 < n_1$.



Coupe dans le plan méridien d'une fibre à saut d'indice

1. Montrer que tout rayon situé dans un plan contenant l'axe de la fibre et formant dans la fibre un angle θ avec l'axe peut se propager dans le cœur en restant dans ce plan si $\theta < \theta_c$, avec

$$\theta_c = Arcos\left(\frac{n_2}{n_1}\right).$$

2. Que risque -t-il de se passer si on courbe trop la fibre ? On pourra illustrer au moyen d'un schéma.

3. On définit l'ouverture numérique ON de la fibre par $ON = n_1 sin\theta_c$.

a) Montrer que $ON = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$

b) On pose $n_1 = n_2 + \delta n$: δn est petit. Etablir une expression approchée de ON à l'ordre le plus bas non nul.

c) Evaluer ON pour $n_1 = 1{,}53$ et $n_2 = 1{,}5$ avec 1 chiffre significatif.

d) On considère que l'indice de l'air à l'extérieur de la fibre est égal à 1. Soit O le point de l'axe de la fibre située sur le dioptre air-cœur. On note θ_0 l'angle d'incidence du rayon lumineux entrant dans la fibre en O . A quelle condition sur θ_0 le rayon se propage-t-il dans la fibre ?

B. Modes de propagation

Le but de cette partie est de montrer que, dans une fibre optique, la lumière peut se propager le long d'un nombre fini de rayons. Pour cela, nous considérerons la lumière comme une onde électromagnétique décrite par un champ électrique E et un champ magnétique B.

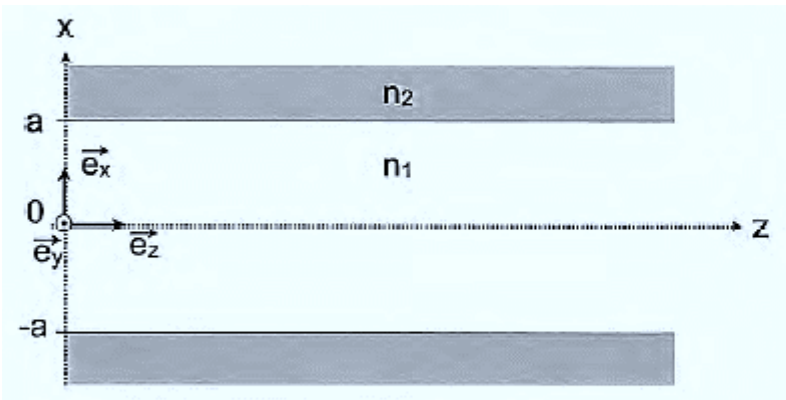
1. Donner les équations de Maxwell dans le vide.
2. Etablir l'équation de propagation de E dans le vide et la mettre sous la forme : $\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0$

   On exprimera c en fonction de ε_0 et μ_0 et on rappellera sa signification.
3. Justifier qu'il faut remplacer c par $\frac{c}{n}$ dans cette équation pour décrire la propagation dans un milieu transparent d'indice n.

   On veut étudier la propagation d'un champ électrique E dans la fibre. Pour simplifier, le "cœur" sera décrit par une couche plane d'indice n_1, comprise entre les cotes $x = -a$ et $x = +a$. Pour $|x| > a$, le milieu a un indice n_2 . Pour chaque région ($|x| < a$ ou $|x| > a$), on cherche $\vec{E}$ sous la forme : $\vec{E} = E(x)\cos(\omega t - k.z)\vec{e}_y$ avec ω et k positifs.

   On pose $k_0 = \frac{\omega}{c}$ et $\lambda_0 = \frac{2\pi}{k_0}$

   On utilisera la représentation complexe : on pose $\underline{\vec{E}} = E(x).\mathrm{expj}(\omega t - k.z)\vec{e}_y$



Modélisation du cœur par une couche plane

4. On cherche $\vec{B}$ sous la forme $\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{B}_m}.\text{expj}(\omega t - k.z)$. Exprimer $\underline{\vec{B}_m}$ fonction de $E(x), k, \omega, \frac{dE(x)}{dx}$ et des vecteurs de base.
5. Justifier que $E(x)$ *et* $\frac{dE(x)}{dx}$ sont continues en $x = \pm a$.
6. On s'intéresse à la propagation dans la "gaine" : $|x| > a$.
   - **a)** Ecrire l'équation de propagation vérifiée par $\vec{E}$ dans ce milieu.
   - **b)** En déduire l'équation différentielle vérifiée par $E(x)$ pour $|x| > a$.
   - **c)** Discuter la nature des solutions selon le signe de $n_2 k_0 - k$. En déduire la condition pour que la propagation soit guidée dans le cœur. <u>On considère cette condition vérifiée dans la suite.</u>
   - **d)** On pose : $\delta = \frac{1}{\sqrt{k^2 - n_2^2 k_0^2}}$

Ecrire la solution $E(x)$ sous la forme d'une combinaison linéaire de fonctions exponentielles, en fonction de δ et de constantes d'intégration qu'on ne cherchera pas à déterminer pour l'instant ; on distinguera les cas $x > a$ et $x < -a$.

7. On s'intéresse à la propagation dans le "cœur" : $|x| < a$.
   - **a)** Ecrire l'équation de propagation vérifiée par $\vec{E}$ dans ce milieu.
   - **b)** En déduire l'équation différentielle vérifiée par $E(x)$ pour $|x| < a$.
   - **c)** A quelle condition sur n_1 a-t-on $E(x)$ fonction sinusoïdale de x ?
     <u>On considère cette condition vérifiée dans la suite.</u>
   - **d)** On pose : $\eta = \sqrt{n_1^2 k_0^2 - k^2}$

Exprimer $E(x)$ en fonction de η et de constantes d'intégration qu'on ne cherchera pas à déterminer pour l'instant.

<u>On choisit de ne s'intéresser qu'aux solutions paires, c'est-à-dire telles que</u> $E(x) = E(-x) \quad \forall x$.

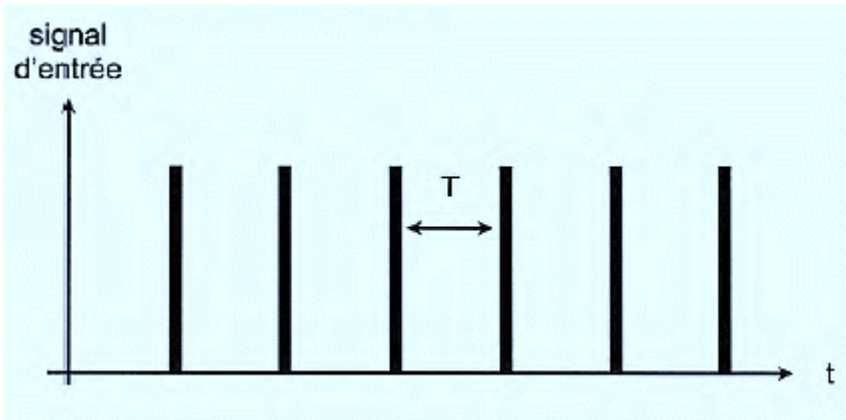
8. Pour $|x| < a$, donner l'expression de $E(x)$ en notant E_m son amplitude. Pour $|x| > a$, justifier que dans chacun des cas, le coefficient d'une des exponentielles est nécessairement nul.
9. Représenter l'allure de $E(x)$ en considérant $2a = 3.\frac{2\pi}{\eta}$ pour fixer les idées.
10. En utilisant les relations de continuité, établir la relation : $tan(\eta a) = \sqrt{\frac{k_0^2 ON^2}{\eta^2} - 1}$
11. Expliquer comment déterminer graphiquement les solutions de cette équation d'inconnue η. Ces solutions sont appelées "modes".
12. Exprimer le nombre N total de modes en fonction de ON, λ_0 et a.
13. Evaluer N pour $\lambda_0 = 1\mu m$, $ON = 0{,}3$ et $a = 25\ \mu m$.
14. On admet que chaque mode correspond à un rayon d'inclinaison donnée. Exprimer la valeur maximale de a permettant d'avoir une propagation le long d'un seul rayon. L'évaluer numériquement avec 2 chiffres significatifs pour $\lambda_0 = 1\mu m$ et $ON = 0{,}3$.

C. Dispersion intermodale

Une fibre optique multimode transporte la lumière le long de plusieurs rayons. Les rayons lumineux d'inclinaisons différentes n'ont pas le même chemin à parcourir dans la fibre, donc leur temps de parcours est variable. Il en résulte un étalement temporel du signal : ce phénomène est la dispersion intermodale.

1. Soit Δt_m la différence de temps de parcours entre deux rayons lumineux se propageant dans une fibre optique (d'indice n_1 , gaine d'indice $n_2 < n_1$) de longueur L, l'un sur l'axe de la fibre et l'autre incliné de $\theta_c = Arcos\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$ par rapport cl celui-ci. Exprimer la longueur parcourue par le rayon non parallèle à l'axe en fonction de L et θ_c. En déduire Δt_m en fonction de n_1 , n_2 , L et c.

   Une série d'impulsions lumineuses ultra-courtes est envoyée dans la fibre. On note T l'intervalle de temps séparant 2 impulsions successives.



2. Représenter l'allure du signal récupéré à la sortie de la fibre dans le cas ou $\Delta t_m < T$ et dans le cas où $\Delta t_m > T$. Commenter.
3. On note BP_m la bande-passante de la fibre associée à la dispersion intermodale : BP_m représente la fréquence maximale des signaux pouvant transiter dans la fibre. Exprimer BP_m en fonction de n_1 , n_2 , L et c.
4. On considère $n_1 = 1.53$ et $n_2 = 1.5$. Evaluer numériquement BP_m avec 1 chiffre significatif pour $L = 10\ m$ et pour $L = 1\ km$ (on prendra $c = 3.10^8 m.s^{-1}$). Commenter. Proposer une solution s'inspirant de la question **B 14**.
5. Pour limiter la dispersion intermodale, on peut aussi utiliser une fibre à gradient d'indice : c'est une fibre dont l'indice n_1 du cœur dépend de la distance r à l'axe. Quel doit être le sens de variation de $n_1(\mathrm{r})$? Représenter qualitativement la trajectoire d'un rayon arrivant dans la fibre en formant un angle θ avec l'axe.

Eléments de correction

Question préliminaire

En cas de réflexion totale, la totalité de l'énergie lumineuse est réfléchie (donc pas de rayon réfracté).
Pour cela, il faut :
$n_1 > n_2$ et l'angle d'incidence soit supérieur à la valeur limite associée à $i_2 = \pi/2$

$$i_1 > i_p = \arcsin(n_2/n_1)$$

A/ Fibre optique à saut d'indice

1. Pour avoir réflexion totale, il faut que $i > \arcsin\frac{n_2}{n_1} = i_p$

avec $i = \frac{\pi}{2} - \theta$: $n_1 \sin i_p = n_2 \Rightarrow n_1 \cos\theta_c = n_2$

$i > i_p \Rightarrow \theta < \theta_c$ avec $\theta_c = \arccos\frac{n_2}{n_1}$

2. Courber la fibre diminue localement l'angle i ce qui favorise la possibilité de transmission dans la gaine. (car i pourra devenir $< i_p$). Donc les rayons réfléchis dans le cœur seront moins intenses.

3. a)

$$ON = n_1 \sin\theta_c = n_1\sqrt{1-\cos^2\theta_c} = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

b) $n_1 = n_2 + \delta n$

$$ON = \sqrt{(n_2+\delta n)^2 - n_2^2} \simeq \sqrt{2 n_2 \delta n}$$

c/ A.N : $ON = 0{,}3$; d/ $\sin\theta_0 = n_1 \sin\theta \Rightarrow \sin\theta_0 < n_1 \sin\theta_c = ON$

B/ Modes de propagation

1. Dans le vide ($\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$)

$\mathrm{div}\,\vec{E} = 0$; $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$; $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ et $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

2. $\vec{\mathrm{rot}}(\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E}) = \vec{\mathrm{grad}}(\underbrace{\mathrm{div}\,\vec{E}}_{= 0}) - \Delta \vec{E}$

or $\vec{\mathrm{rot}}(\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E}) = \vec{\mathrm{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B}\right) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0} \quad \text{avec } c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

3. Dans un milieu d'indice n, la vitesse de propagation vaut $v = \frac{c}{n}$.

4. Equation de Maxwell-Faraday : $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ E(x) \exp j(\omega t - k z) \\ 0 \end{pmatrix} = -j\omega \underline{\vec{B}}$$

$$\left| \begin{array}{l} -\frac{\partial}{\partial z}\left[E(x) \exp j(\omega t - kz)\right] \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}\left[E(x) \exp j(\omega t - kz)\right] \end{array} \right. = j\omega\, \underline{\vec{B}_m} \exp j(\omega t - kz)$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{\vec{B}_m} = -\frac{k}{\omega} E(x)\, \vec{e}_x + \frac{j}{\omega} \frac{dE(x)}{dx}\, \vec{e}_z}$$

5. * en $x = \pm a$, $\vec{E} \propto \vec{e_y}$; $\vec{E}$ est tangentiel $\Rightarrow$

$\vec{E}$ continu $\Rightarrow$ $E(x)$ continu.

** Aucun courant surfacique n'apparaît.

en $x = \pm a$, on a donc la continuité de $\vec{B}$, donc notamment continuité de $\frac{dE(x)}{dx}$.

6. a/ En remplaçant c par c/n_2, on obtient :

$$\vec{\Delta}\vec{E} - \frac{n_2^2}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}.$$

b/ Compte tenu de la forme de l'onde proposée, on en déduit pour l'amplitude :

$$\boxed{\frac{d^2E(x)}{dx^2} + \left(n_2^2 k_0^2 - k^2\right) E(x) = 0} \qquad (1)$$

c/ Pour $n_2 k_0 > k$:

Les solutions sont des combinaisons de sinus et de cosinus, la propagation est autorisée. (autrement-dit, l'onde se propage aussi dans la gaine).

2ème cas $n_2 k_0 < k$.

Les solutions sont des exponentielles réelles, on observe une décroissance exponentielle de l'amplitude (ie l'amplitude des ondes dans la gaine sera amortie) si bien que la propagation sera guidée dans le cœur.

d/ on pose : $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{k^2 - n_2^2 k_0^2}}$

L'équation ① devient :

$$\frac{d^2E(x)}{dx^2} - \frac{1}{\delta^2} E(x) = 0$$

pour $x > a$: $E(x) = A_1 e^{+x/\delta} + A_2 e^{-\frac{x}{\delta}}$

" $x < -a$: $E(x) = A_3 e^{+\frac{x}{\delta}} + A_4 e^{-\frac{x}{\delta}}$

7. Propagation dans le cœur : $|x| < a \Rightarrow n = n_1$

a/
$$\vec{\Delta}\vec{E} - \left(\frac{n_1}{c}\right)^2 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

b/ Idem que 6.b

$$\frac{d^2E(x)}{dx^2} + \left(n_1^2 k_0^2 - k^2\right) E(x) = 0$$

c/ Solution sinusoïdale si $n_1 k_0 > k$

d/ on pose $\eta = \sqrt{n_1^2 k_0^2 - k^2}$

$$E''(x) + \eta^2 E(x) = 0$$

$$E(x) = A\cos(\eta x) + B\sin(\eta x)$$

8. On considère une solution paire $E(x) = E(-x) \Rightarrow B = 0$

et E_m : amplitude.

$\Rightarrow |x| < a$: $E(x) = E_m \cos(\eta x)$

* $x > a$: $\quad E(x) = \underbrace{A_1 \exp\frac{x}{\delta}}_{x \to +\infty \,\Rightarrow\, \infty} + A_2 \exp -\frac{x}{\delta}$

$A_1 = 0$ car $E(x)$ ne peut pas devenir infini

** $x < -a$ De même en $x \longrightarrow -\infty \implies A_4 = 0$

3* $E(x) = E(-x) \implies A_2 = A_3 = K$

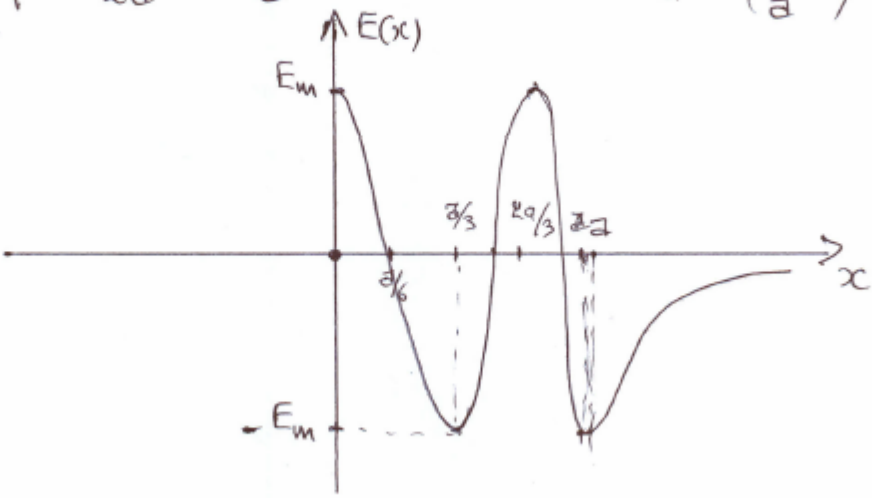
Finalement

$x > a$: $E(x) = K e^{-\frac{x}{\delta}}$

$x < -a$: $E(x) = K e^{x/\delta}$

9. $|x| < a \qquad E(x) = E_m \cos(\eta x) \qquad$ or $2a = 3 . \frac{2\pi}{\eta}$

$\implies \eta = \frac{6\pi}{2a} = \frac{3\pi}{a} \implies E(x) = E_m \cos\left(\frac{3\pi}{a} x\right)$



10. * continuité de $E(x)$ en a : $\quad E_m \cos(\eta a) = K e^{-a/\delta}$

$\implies K = E_m \cos(\eta a) \times e^{a/\delta}$

* Continuité de $E'(x)$ en a : $-\eta E_m \sin(\eta a) = -\frac{K}{\delta} e^{-a/\delta}$

on en déduit : $\boxed{\eta \tan(\eta a) = \frac{1}{\delta}}$

$$\tan(\eta a) = \frac{1}{\eta\delta} = \sqrt{\frac{k^2 - n_2^2 k_0^2}{n_1^2 k_0^2 - k^2}} = \sqrt{\frac{(n_1^2 - n_2^2)k_0^2 - (n_1^2 k_0^2 - k)}{(n_1^2 k_0^2 - k)}}$$

$$= \sqrt{\frac{ON^2 k_0^2}{\eta^2} - 1}$$

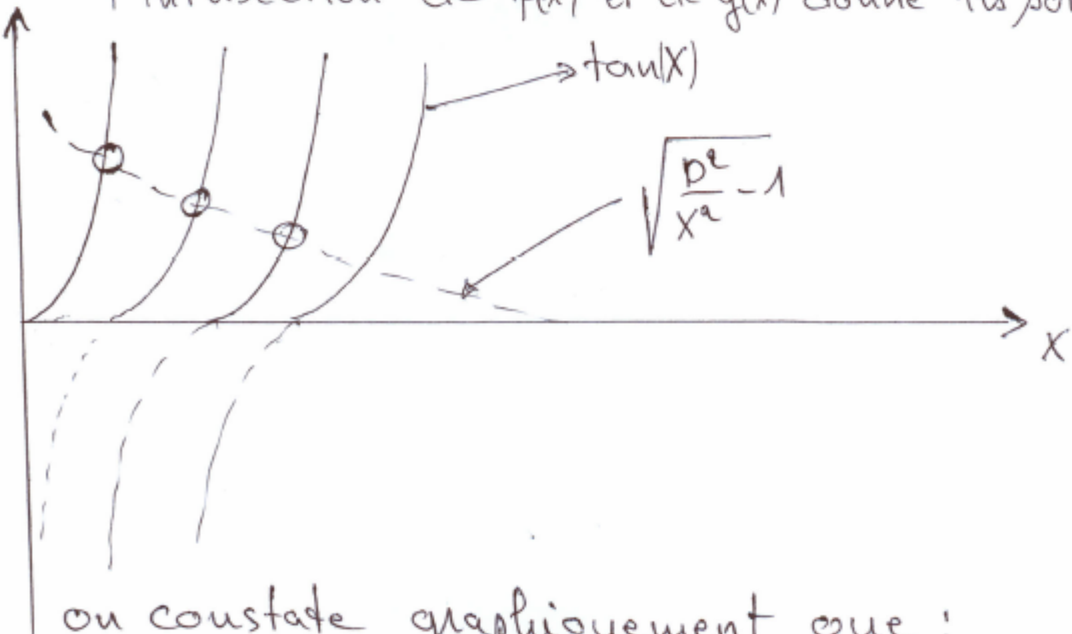
avec $ON^2 = n_1^2 - n_2^2$

11. posons $X = \eta a$, on obtient $\tan X = \sqrt{\frac{D^2}{X^2} - 1}$

avec $D = k_0 \cdot ON \cdot a$

On trace $\tan X = f(X)$ et $g(X) = \sqrt{\frac{D^2}{X^2} - 1}$

l'intersection de $f(X)$ et de $g(X)$ donne les solutions



12. on constate graphiquement que :

$$(N-1)\pi \leq D < N\pi \iff N-1 \leq \frac{k_0 ON . a}{\pi} \leq N$$

En effet :

Il y a un mode solution dans chaque intervalle de la forme $]p\pi, (p+1)\pi[$ et qd $X < D$

Ceci donne un total N compris entre

$E(D/\pi)$ et $1 + E(D/\pi)$ avec E : partie entière

$$N-1 \leqslant \frac{k_0 \cdot ON \cdot a}{\pi} \leqslant N \quad \text{ie} \quad N-1 \leqslant \frac{2a \cdot ON}{\lambda_0} \leqslant N$$

$$\Rightarrow \boxed{N = E\left(\frac{2a \cdot ON}{\lambda_0}\right) + 1}$$

13. A.N $\lambda_0 = 1\,\mu m$ $ON = 0,3$ et $a = 25\,\mu m$.

$\boxed{N = 15}$ quinze modes

14. On veut un seul mode

$$\Rightarrow k_0 ON a < \pi \Rightarrow a < \frac{\pi}{k_0 \cdot ON} = \frac{\lambda_0}{2 \cdot ON}$$

A.N : $a_{max} = \dfrac{\lambda_0}{2 \cdot ON} = \dfrac{1}{0,6} \simeq 1,7\,\mu m$.

autre méthode pour la question 12

Dans l'intervalle $]0, N\pi[\longrightarrow$ N solutions $\Rightarrow$ N modes

La $N^{ième}$ solution vérifie $\begin{cases} x_N < N\pi \\ \text{et} \\ \dfrac{K}{x_N} > 1 \end{cases}$

La valeur max : $x_N = K \quad \Rightarrow \quad N\pi < \dfrac{2\pi}{\lambda_0} ON \cdot a$

$$\Rightarrow N = E\left(\frac{2 \cdot ON \cdot a}{\lambda_0}\right) \qquad \text{A.N : } E(15) = 15$$

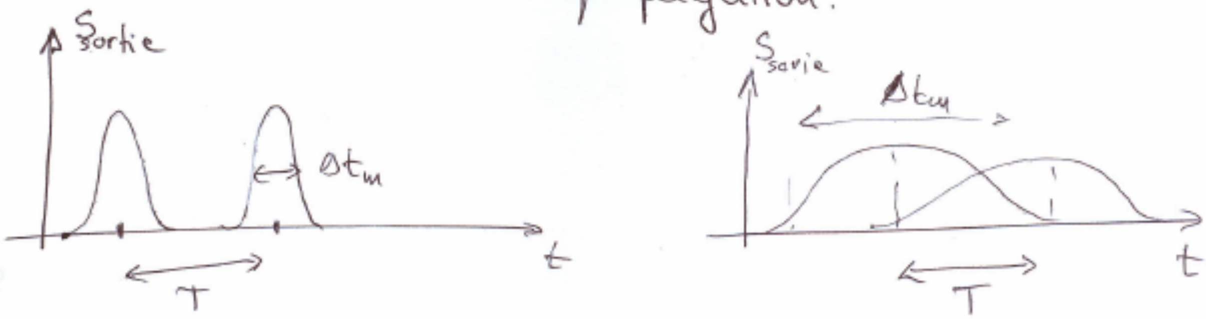
$\Rightarrow \boxed{N = 15}$

C. Dispersion intermodale :

1. Le rayon qui fait un angle θ_c avec l'axe parcourt la distance $\frac{L}{\cos\theta_c}$. La propagation se fait à $\frac{c}{n_1}$ dans le cœur. $\Rightarrow$ $\Delta t_m = \frac{n_1}{c}\left(\frac{L}{\cos\theta_c} - L\right)$ avec $\cos\theta_c = \frac{n_2}{n_1}$

$$\Rightarrow \Delta t_m = \frac{n_1}{n_2}\frac{L}{c}(n_1 - n_2).$$

2. Chaque impulsion constituée des différentes incidences s'étale au cours de la propagation.



Pour $\Delta t_m > T$, les impulsions se chevauchent en sortie, le signal n'est plus utilisable.

3. Transmission $\Rightarrow$ $\Delta t_m < T$ c-à-d $\Delta t_m < \frac{1}{f}$

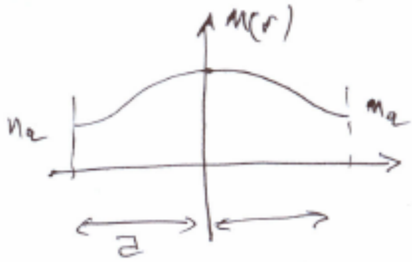
à la limite $\Delta t_m = \frac{1}{BP_m} \Leftrightarrow BP_m = \frac{1}{\Delta t_m}$

$$\boxed{BP_m = \frac{n_2 c_a}{n_1 L (n_1 - n_2)}}$$

4. A.N : $BP_m(10\,m) = 1\,GHz$; $BP_m(1\,km) = 0{,}01\,GHz$

La bande passante $\downarrow$ avec L. Pour éviter la dispersion intermodale, il faut limiter la propagation à 1 seul mode.

5. L'indice doit diminuer lorsqu'on s'éloigne de l'axe pour reproduire le phénomène de réflexion totale.



Pour un profil parabolique de l'indice, la trajectoire suit une sinusoïde. $\Rightarrow \Delta t_m \searrow \Rightarrow BP_m \nearrow$