

* Ex 19 Série 1 (Produit semi-direct)

Soient H et K deux groupes et $\varphi: H \rightarrow \text{Aut}(K)$ un homomorphisme de groupes. On définit une loi de composition interne sur l'ensemble $K \times H$ par: $\forall (k, h); (k', h') \in K \times H$,
$$(k, h) \cdot (k', h') = (k(\varphi(h)(k')), hh').$$

a) Montrer que $(K \times H, \cdot)$ est un groupe, appelé le produit semi-direct de K et H relativement à φ , on le note $K \rtimes_{\varphi} H$.

b) Montrer que $K_0 = K \times \{e_H\}$ est un sous-groupe distingué de $K \rtimes_\varphi H$, isomorphe à K .

c) Montrer que $H_0 = \{e_K\} \times H$ est un sous-groupe de $K \rtimes_\varphi H$, isomorphe à H .

d) Montrer que $\forall z \in K \rtimes_\varphi H, \exists! (k_0, h_0) \in K_0 \times H_0$ tel que $z = k_0 h_0$.

e) Exprimer $K \rtimes_\varphi H$ lorsque φ est l'homomorphisme trivial.

f) Montrer que $K \rtimes_\varphi H$ est abélien si et seulement si K et H sont abéliens et φ est trivial.

g) Soient G un groupe, K_1 un sous-groupe distingué de G et H un sous-groupe de G . Montrer que si $K \cap H = \{e\}$ et $G = HK$,

alors G est canoniquement isomorphe à
 $K \rtimes_{\varphi} H$, où $\varphi: H \longrightarrow \text{Aut}(K)$,
 $\varphi(h)(k) = h k h^{-1}$ où $(h, k) \in H \times K$.

h) Si φ est un autre homomorphisme
de groupes $H \longrightarrow \text{Aut}(K)$.

i) On suppose qu'il existe $\alpha \in \text{Aut}(H)$
tel que $\varphi = \varphi \circ \alpha$. Montrer que
 $K \rtimes_{\varphi} H \simeq K \rtimes_{\varphi} H$.

ii) On suppose qu'il existe $u \in \text{Aut}(K)$
tel que $(\forall h \in H) (\varphi(h) = u \varphi(h) u^{-1})$.
Montrer que $K \rtimes_{\varphi} H \simeq K \rtimes_{\varphi} H$.

i) Soit G un groupe abélien,

$$f: G \longrightarrow G \quad \text{et} \\ n \longmapsto -n$$

$$\varphi: \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \longrightarrow \text{Aut}(G)$$

$$\bar{0} \longmapsto \varphi(\bar{0}) = \text{id}_G$$

$$\bar{1} \longmapsto \varphi(\bar{1}) = f.$$

En prenant $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, où $n \geq 2$. Un groupe est dit diédral de degré n , et noté D_n , s'il est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Un groupe est dit diédral de degré infini s'il est isomorphe à $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, on le note D_∞ .

Pour D_n (resp. D_∞), donner des conditions nécessaires et suffisantes qui définissent la structure du groupe.

j) Soit G un groupe tel que $\forall (a, b) \in G^2, (ab)^2 = a^2b^2$, montrer que G est abélien. Construire, comme produit semi-direct, un groupe d'ordre 27 où tout élément est d'ordre 3 mais

qui n'est pas abélien, bien que pour tout couple (a, b) , $a^3 b^3 = (ab)^3$.

① Preuve: • La loi "•" est stable dans $K \times H$.

$$\begin{aligned} & \bullet (e_K, e_H) \in K \times H \text{ et } \forall (k, h) \in K \times H, \\ & (e_K, e_H) \cdot (k, h) = (e_K(\varphi(e_H)(k)), e_H h) \\ & = (e_K \text{id}_K(k), e_H h) = (e_K k, e_H h) = \\ & = (k, h) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (k, h) \cdot (e_K, e_H) = (k(\varphi(h)(e_K)), h e_H) = \\ & = (k e_K, h e_H) = (k, e_H) \end{aligned}$$

donc l'élément neutre de $(K \times H, \cdot)$ est

(e_K, e_H) (le même que celui du groupe "produit direct $K \times H$ ").

$$\begin{aligned} & \bullet ((k_1, h_1) \cdot (k_2, h_2)) \cdot (k_3, h_3) = \\ & = (k_1(\varphi(h_1)(k_2)), h_1 h_2) \cdot (k_3, h_3) \\ & = (k_1(\varphi(h_1)(k_2))(\varphi(h_1 h_2)(k_3)), h_1 h_2 h_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (k_1 (\varphi(h_1)(k_2)) (\varphi(h_1 h_2)(k_3)), h_1 h_2 h_3) \\
&= (k_1 (\varphi(h_1)(k_2)) (\underbrace{\varphi(h_1) (\varphi(h_2)(k_3))}_{(\varphi(h_1) \circ \varphi(h_2))(k_3)}), h_1 h_2 h_3) \\
&= (k_1, h_1) \cdot (k_2, h_2) \cdot (k_3, h_3) = \\
&= (k_1, h_1) \cdot (k_2 (\varphi(h_2)(k_3)), h_2 h_3) \\
&= (k_1 (\varphi(h_1)(k_2 (\varphi(h_2)(k_3)))), h_1 h_2 h_3) \\
&= (k_1 (\varphi(h_1)(k_2)) ((\varphi(h_1) \circ \varphi(h_2))(k_3)), h_1 h_2 h_3).
\end{aligned}$$

Donc " . " est associative.

• Soit $(k, h) \in K \times H$, $\exists? (u, y) \in K \times H$
tel que $(k, h) \cdot (u, y) = (u, y) \cdot (k, h) = (e_K, e_H)$
(i.e) $k(\varphi(h)(u)) = e_K$, $h y = e_H$,
 $u(\varphi(y)(k)) = e_K$ et $y h = e_H$, donc
forcément $y = h^{-1}$,
 $k(\varphi(h)(u)) = e_K \Leftrightarrow \varphi(h)(u) = k^{-1}$

$$\pi \varphi(h^{-1})(k) = e_k \Leftrightarrow \varphi(h^{-1})(k) = \pi^{-1}$$

$$\Leftrightarrow (\varphi(h))^{-1}(k) = \pi^{-1} \Leftrightarrow \varphi(h)(\pi^{-1}) = k$$

$$\Leftrightarrow (\varphi(h)(\pi))^{-1} = k \Leftrightarrow \varphi(h)(\pi) = k^{-1},$$

ainsi π est l'antécédent de k^{-1} par l'automorphisme $\varphi(h)$ (i.e) $\pi = (\varphi(h))^{-1}(k^{-1})$

Vérifions que:

$$(k, h) \cdot ((\varphi(h))^{-1}(k^{-1}), h^{-1}) = (e_k, e_H)$$

$$(k, h) \cdot ((\varphi(h))^{-1}(k^{-1}), h^{-1}) =$$

$$= (k(\varphi(h)((\varphi(h))^{-1}(k^{-1})), h h^{-1}) =$$

$$= (k \cdot k^{-1}, h h^{-1}) = (e_k, e_H).$$

$$((\varphi(h))^{-1}(k^{-1}), h^{-1}) \cdot (k, h) =$$

$$= ((\varphi(h))^{-1}(k^{-1})(\underbrace{\varphi(h^{-1})(k)}_{\varphi(h)^{-1}(k)}), h^{-1}h)$$

$$= ((\varphi(h))^{-1}(k^{-1}k) = e_k, e_H)$$

$$\text{donc } (k, h)^{-1} = ((\varphi(h))^{-1}(k^{-1}), h^{-1})$$

Ainsi $(K \times H, \cdot)$ est un groupe qu'on note $(K \times_{\varphi} H, \cdot)$ pour le différencier du groupe produit $K \times H$.

b) $\cdot (e_K, e_H) \in K_0$, donc $K_0 \neq \emptyset$.

• Soit $(k, h), (u, y)$ dans K_0 (ie)

$$h = e_H \text{ et } y = e_H,$$

$$(k, e_H) \cdot (u, e_H)^{-1} = (k, e_H) \cdot (\varphi(e_H)^{-1}(u^{-1}), e_H)$$

$$= (k, e_H) \cdot (\text{id}_K(u^{-1}) = u^{-1}, e_H)$$

$$= (k, e_H) \cdot (u^{-1}, e_H) = (k(\varphi(e_H)(u^{-1}), e_H e_H)$$

$$= (ku^{-1}, e_H) \in K \times \{e_H\} = K_0$$

donc K_0 est un s/g de $K \times_{\varphi} H$.

Soit $(k, e_H) \in K_0$ et $(u, y) \in K \times_{\varphi} H$

$$(u, y) \cdot (k, e_H) \cdot (u, y)^{-1} =$$

$$= (u, y) \cdot (k, e_H) \cdot (\varphi(y)^{-1}(u^{-1}), y^{-1}) =$$

$$= (u(\varphi(y)(k)), y) \cdot (\varphi(y)^{-1}(u^{-1}), y^{-1}) =$$

$$= (u(\varphi(y)(k)) (\varphi(y) (\varphi(y)^{-1} (u^{-1}))), y\bar{y}^{-1})$$

$$= (u(\varphi(y)(k)) u^{-1}, e_H) \in K \times \{e_H\} = K_0,$$

Donc $K_0 \supset K \times_{\varphi} H$.

$$\text{Soit } f: K_0 = K \times \{e_H\} \longrightarrow K$$

$$(k, e_H) \longmapsto k$$

Montrons que f est un isomorphisme de groupes:

f est évidemment bijective

$$f((k_1, e_H) \cdot (k_2, e_H)) = f(k_1 (\varphi(e_H)(k_2)), e_H)$$

$$= f(k_1 k_2, e_H) = k_1 k_2 =$$

$$= f((k_1, e_H)) f((k_2, e_H)) \text{ (i.e.)}$$

f est un isomorphisme de groupes.

$$c). (e_K, e_H) \in H_0, \text{ donc } H_0 \neq \emptyset$$

$$\cdot (e_K, h_1) \cdot (e_K, h_2) = (e_K (\varphi(h_1)(e_K)),$$

$$h_1 h_2) = (e_K e_K = e_K, h_1 h_2) \in H_0$$

$$\cdot (e_K, h)^{-1} = (\varphi(e_K)^{-1}(e_K^{-1}), h^{-1}) =$$

$= (\text{id}_K(e_K) = e_K, h^{-1}) \in H_0$,
 donc H_0 est un s/g de $K \rtimes_\varphi H$.

$$\text{Soit } H_0 = \{e_K\} \times H \xrightarrow{g} H$$

$$(e_K, h) \longmapsto h$$

g est évidemment une bijection

$$g((e_K, h_1) \cdot (e_K, h_2)) =$$

$$= g(e_K, h_1 h_2) = h_1 h_2 =$$

$$= g((e_K, h_1)) \cdot g((e_K, h_2)), \text{ d'où}$$

g est un homomorphisme de groupes et
 par suite un isomorphisme de groupes.

d) On a $z = (k, h)$,

$$\underbrace{(k, e_H)}_{K_0} \cdot \underbrace{(e_K, h)}_{H_0} =$$

$$= (k(\varphi(e_H)(e_K), e_H h) = (k, h) = z$$

ce qui prouve l'existence

Si $z = (k, h) = k_0 \cdot h_0$ avec
 $k_0 \in K_0$ et $h_0 \in H_0$, alors
 $(k, e_H) \cdot (e_K, h) = k_0 \cdot h_0$, donc
 $\underbrace{k^{-1} \cdot (k, e_H)}_{\in K_0} = \underbrace{h_0 \cdot (e_K, h)^{-1}}_{\in H_0} \in$

$$\in K_0 \cap H_0 = (K \times \{e_H\}) \cap (\{e_K\} \times H) \\ = \{(e_K, e_H)\}$$

Donc $k_0 = (k, e_H)$ et $h_0 = (e_K, h)$,

ce qui prouve l'unicité. Donc

$$K \times_{\varphi} H = K_0 H_0 \text{ et } K_0 \cap H_0 = \{e_{K \times_{\varphi} H}\}.$$

e) $\varphi: H \longrightarrow \text{Aut}(K)$

$$h \longmapsto \varphi(h) = \text{id}_K$$

(φ est l'identité triviale)

$$(k, h) \cdot (u, y) = (k(\varphi(h)(u)), hy) \\ = (ku, hy), \text{ donc}$$

$(K \times_{\varphi} H, \cdot)$ est le groupe produit direct des groupes K et H .

f) $\Leftrightarrow$ évidente (car le produit direct de deux groupes abéliens est abélien)

$\Rightarrow$ Si $K \times_{\varphi} H$ est abélien alors K et H sont abéliens, donc K et H le sont (d'après b) et c). Montrons que φ est trivial :

Si non, $\exists h \in H$ tel que $\varphi(h) \neq \text{id}_K$ (i.e.)
 $\exists k \in K$ tel que $\varphi(h)(k) \neq k$, donc
 $(e_K, h) \cdot (k, e_H) = (e_K(\varphi(h)(k)), h) =$
 $= (\varphi(h)(k), h) \text{ et } (k, e_H) \cdot (e_K, h) =$
 $= (k(\varphi(e_H)(e_K)), h) = (k, h)$, donc
 $(e_K, h) \cdot (k, e_H) \neq (k, e_H) \cdot (e_K, h)$,
absurde ; donc φ est trivial.

g) on a $G = HK = KH$ car $K \triangleleft G$.

$$\text{Soit } f: KH = G \longrightarrow K \times_{\varphi} H \\ kh \longmapsto (k, h)$$

f est une application (car $H \cap K = \{e\}$)

évidemment bijective.

Montrons que f est un homomorphisme de groupes:

$$\begin{aligned} f(kh, k_1 h_1) &= f(k, h k_1 h^{-1} h_1) = \\ &= (k h k_1 h^{-1}, h h_1) = (k(\varphi(h)(k_1)), h h_1) \\ &= (k, h) \cdot (k_1, h_1) = f(kh) \cdot f(k_1 h_1) \end{aligned}$$

Donc f est un isomorphisme de groupes.

$$\text{h) i) } K \times_{\varphi} H \xrightarrow{f} K \times_{\varphi} H \\ (k, h) \longmapsto (k, \alpha(h))$$

f est évidemment une bijection. Montrons que f est un homomorphisme de groupes:

$$f((k, h) \cdot (k_1, h_1)) = f((k(\varphi(h)(k_1)), h h_1))$$

$$= (k(\psi(h)(k_1)), \alpha(h h_2));$$

$$f((k, h)) \cdot f((k_1, h_2)) =$$

$$= (k, \alpha(h)) \cdot (k_1, \alpha(h_2)) =$$

$$= (k(\psi(\alpha(h))(k_1), \alpha(h) \alpha(h_2)).$$

$$= (k((\psi \circ \alpha)(h)(k_1), \alpha(h h_2))$$

$$= (k(\psi(h)(k_1), \alpha(h h_2)).$$

Donc f est un isomorphisme de groupes.

$$ii) K \rtimes_{\psi} H \xrightarrow{g} K \rtimes_{\varphi} H$$

$$(k, h) \longmapsto (u(k), h)$$

g est évidemment une application bijective

$$g((k, h) \cdot (k_1, h_2)) = g((k(\psi(h)(k_1), h h_2)) = (u(k) u(\psi(h)(k_1), h h_2)$$

$$g((k, h)) \cdot g((k_1, h_2)) =$$

$$= (u(k), h) \cdot (u(k_1), h_2) =$$

$$= (u(k) (\varphi(h)(u(k_1))), h h_2)$$