

*Faculté des Sciences et Techniques
Errachidia*

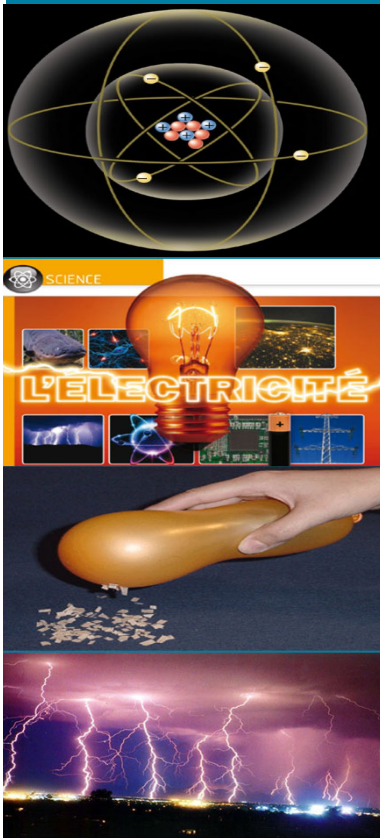
Cours d'électricité

Module P124

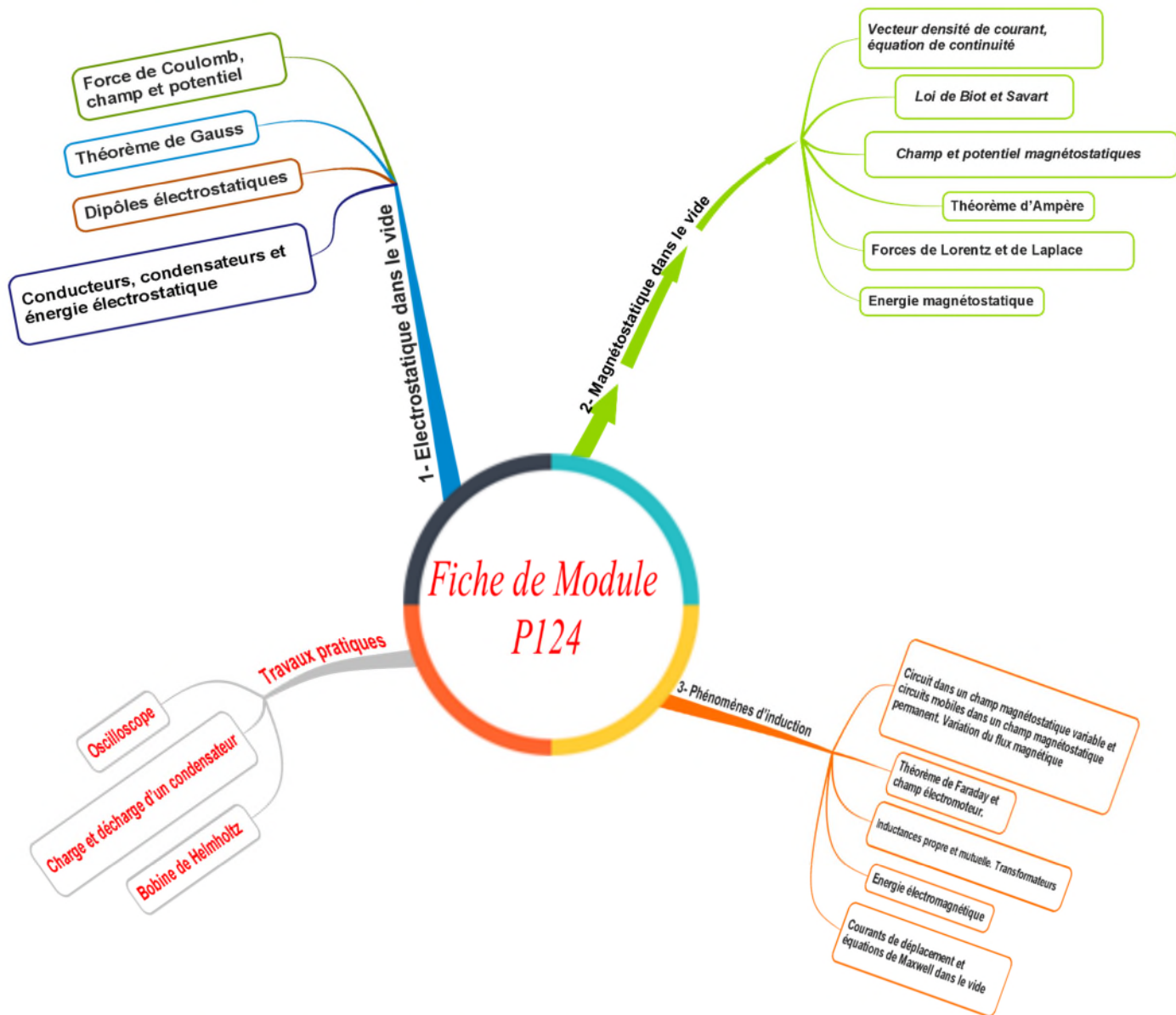
Dr. Abdellah BENAMI

Sciences et Ingénierie des Matériaux,
Nanotechnologie, Plasmonique et Energie Solaire

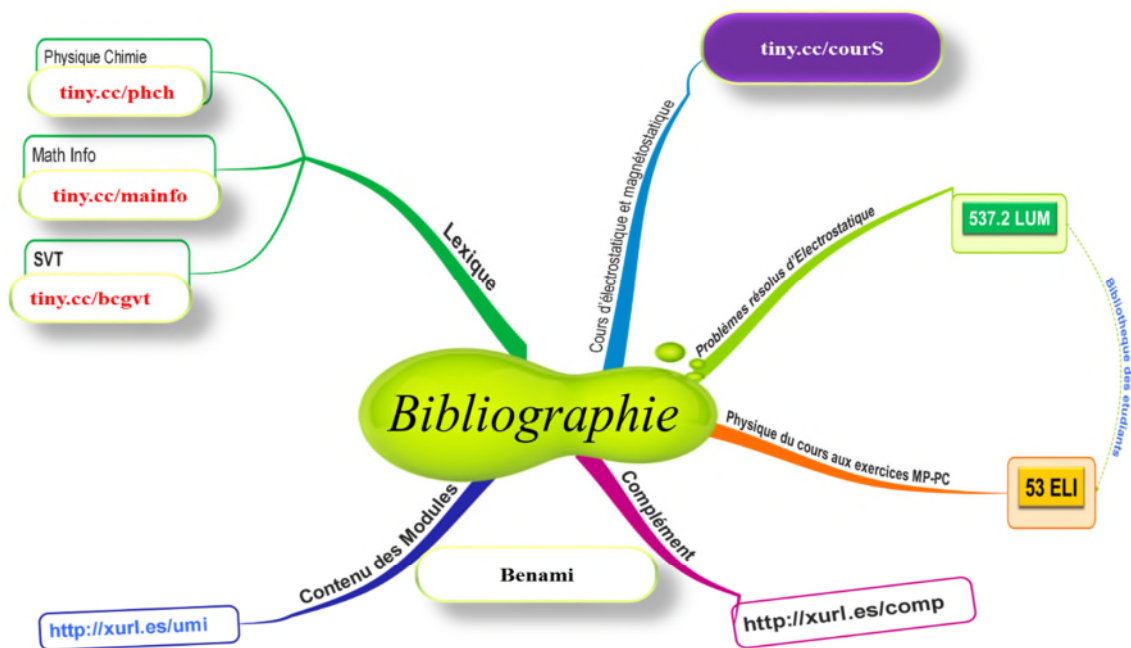
Département de Physique



Fiche de module Electricité	
Responsable : Professeur Abdellah Benami	
Objectif(s)	Maîtriser le calcul du potentiel et du champ électrostatique et magnétostatique créés par des distributions de charges dans le vide et dans les conducteurs. Comprendre les phénomènes d'induction et maîtriser les équations de Maxwell dans le vide.
Pré-requis	Notions de mathématiques : Connaissance du calcul vectoriel et des systèmes de coordonnées cylindriques et sphériques.
Chapitres	Sous Chapitres
Electrostatique dans le vide	❖ Force de Coulomb, champ et potentiel ❖ Théorème de Gauss ❖ Dipôles électrostatiques ❖ Conducteurs, condensateurs et énergie électrostatique
Magnétostatique dans le vide	❖ Vecteur densité de courant, équation de continuité ❖ Loi de Biot et Savart ❖ Champ et potentiel magnétostatiques ❖ Théorème d'Ampère ❖ Forces de Lorentz et de Laplace ❖ Energie magnétostatique
Phénomènes d'induction	❖ Circuit dans un champ magnétostatique variable et circuits mobiles dans un champ magnétostatique permanent. Variation du flux magnétique ❖ Théorème de Faraday et champ électromoteur. ❖ Inductances propre et mutuelle. Transformateurs ❖ Energie électromagnétique ❖ Courants de déplacement et équations de Maxwell dans le vide.
Travaux pratiques	➤ Oscilloscope, Charge et décharge d'un condensateur, Bobine de Helmholtz.



Nothing is impossible, the word itself says
« I'M POSSIBLE »



Chapitre 1 : Electrostatique dans le vide

Introduction

Peu de domaine de la physique ont autant modifié le quotidien des êtres humains comme l'a fait le domaine de l'électricité. Le terme électricité vient du mot grec «elektron» qui signifie «ambre jaune» qui est une résine d'arbre fossilisée. Selon l'histoire de la science les grecs anciens avaient remarqué que l'ambre frotté avec un tissu attirait la poussière ou des petits objets. En effet aux alentours de 600 ans avant Jésus Christ, Thalès de Milet savant et philosophe grec se préoccupa le premier des phénomènes électriques. Ce n'est cependant qu'en 1600 qu'un médecin britannique William Gilbert observa que d'autres substances ont les mêmes propriétés d'électrisation que l'ambre. Il fut le premier à faire la distinction entre attraction magnétique et électrique, il inventa l'adjectif « électricité » et il construisit aussi le premier électroscope.



Qu'est-ce que l'électricité ?

L'électricité est la colonne vertébrale de toutes les industries, de la croissance économique et de la qualité de vie (le confort), grâce à elle on profite des avancées technologiques. Pour se rendre compte de la place qu'elle a prise dans notre vie quotidienne il suffit d'imaginer les conséquences d'une coupure générale d'électricité. Sans électricité plus de lumière, eau potable, transport public (Train, tramway, avion) feux de circulation, moyens de communications (Tel, internet, Banque etc), de commerces et d'usines, des hôpitaux. Sans électricité une ville est paralysée. Peut-on imaginer un pays développé sans électricité ? NON

Définition

Lorsque on entend le mot électricité on pense aux ordinateurs aux lumières et aux moteurs etc.

- L'électricité est une manifestation énergétique due au mouvement des charges électriques dans la matière (conducteur ou semi-conducteur).
- L'électrostatique est la partie de l'électricité qui traite des phénomènes où des charges immobiles agissent. Lorsque les charges sont en mouvement, on parle soit d'électrocinétique ou d'électromagnétisme.
- L'électron est une quantité d'électricité invisible et minuscule présente dans toutes substances.

Fonctionnement d'une Installation Photovoltaïque

Les quatre étapes de fonctionnement d'une installation PV sont :

1- Arrivé des rayons de soleil sur les panneaux et absorption des photons par les cellules qui les compose.

2- Création de paires électron-trou, et la production d'électricité continu par le transport des électrons à travers un conducteur.

3- Transformation du courant continu en courant alternatif à l'aide d'un onduleur.

4- La consommation ou bien l'utilisation de l'électricité par les appareils, sinon l'électricité produite peut être injecter dans le réseau ou stocker dans les batteries pour son utilisation postérieure.

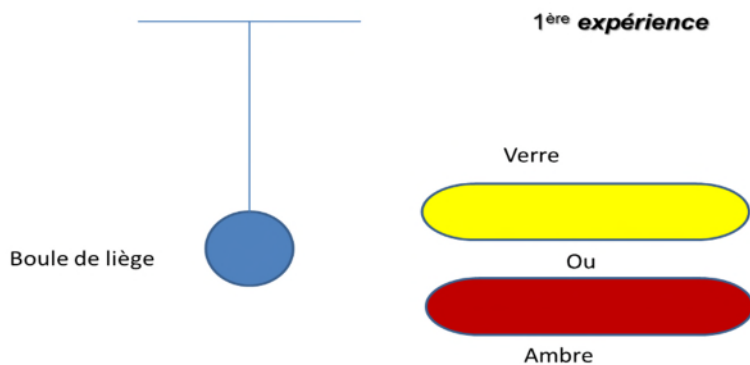


Phénomènes d'électrisation par frottement

Pour mettre en évidence ces phénomènes d'électrisation partons le plus simplement des expériences suivantes

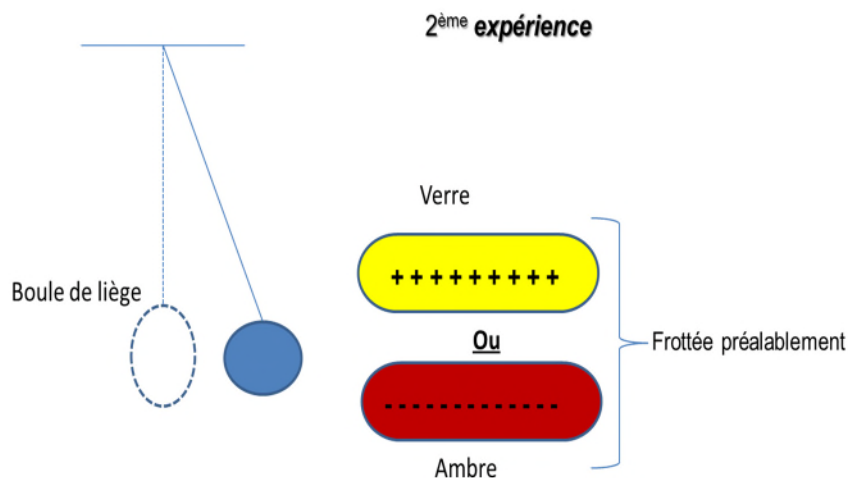
a- Electrification à distance (1^{ère} expérience)

Dans l'expérience schématisée ci-dessous, on approche une baguette de verre ou d'ambre neutre d'une boule de liège aussi neutre suspendue à un fil. On remarque que rien ne se passe.



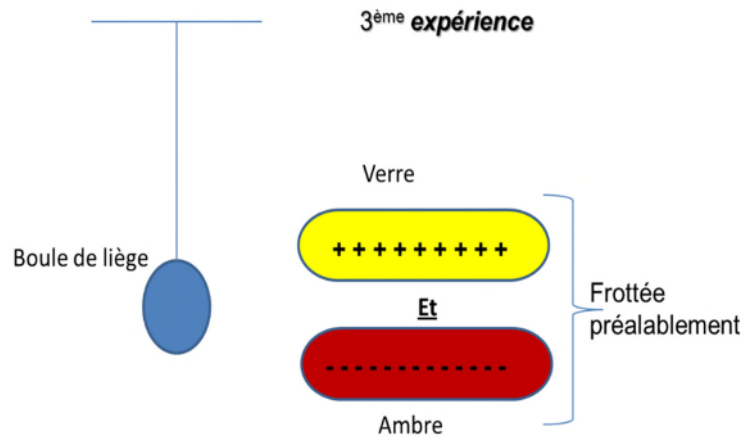
-Electrification à distance (2^{ème} expérience)

Dans la deuxième expérience schématisée ci-dessous, lorsqu' on place une baguette de verre ou d'ambre frottée préalablement (c'est à dire chargée) près d'une petite boule de liège neutre suspendue à un fil, on constate que la boule subit une attraction.



-Electrisation à distance (3^{ème} expérience)

Par contre, si on approche de la boule simultanément les deux baguettes, on observe au lieu d'une attraction plus forte une attraction plus faible ou même pas d'attraction de tout.

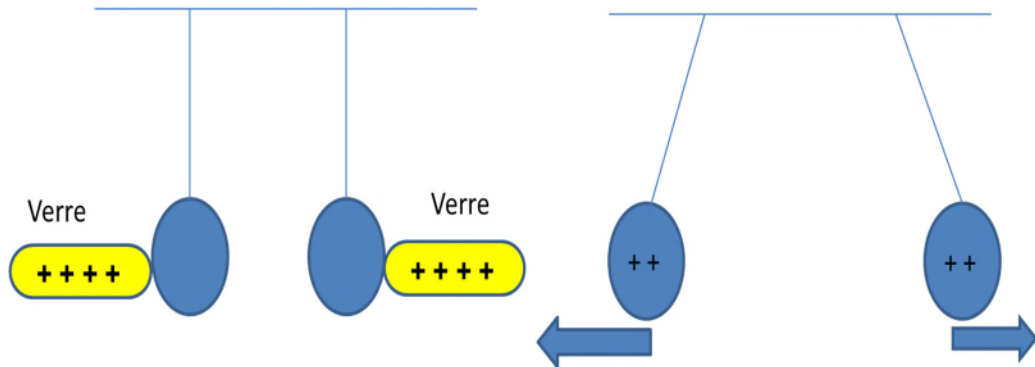


Conclusions

- ▶ A l'aide de la deuxième expérience, on conclue que lorsqu'on frotte le verre et l'ambre avec le morceau de tissu on donne naissance à un phénomène d'électrisation.
- ▶ Ces expériences indiquent que, bien que les deux baguettes attirent la boule de liège, elles le font par des processus physiques opposés.
- ▶ Quand les deux baguettes sont présentes simultanément, elles se neutralisent, produisant un effet plus petit ou nul.
- ▶ Il existe deux types d'électricité de natures opposées l'une positif et l'autre négatif.
- ▶ Cette électricité est capable d'agir à distance.

b- Electrification par contact

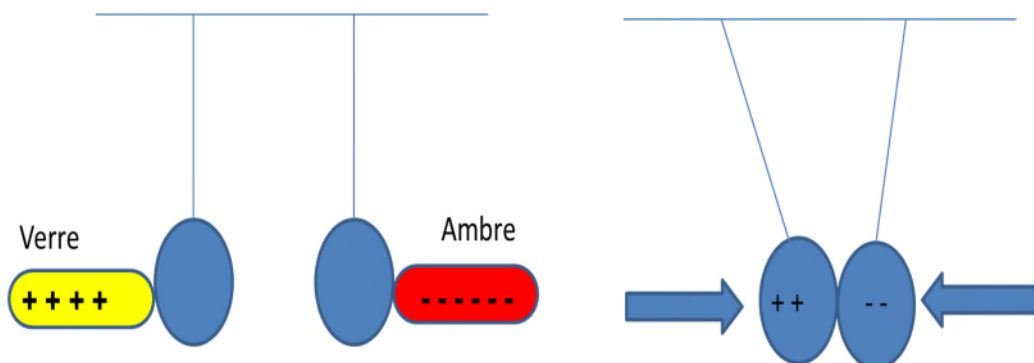
Supposons maintenant qu'on touche les deux boules de lièges avec une baguette de verre électrisé, les deux boules deviennent également chargées positivement. Si on rapproche les deux boules, on note qu'elles se repoussent.



Le même résultat se produit si on touche les deux boules avec une baguette d'ambre électrisé de sorte qu'elles acquièrent un état électrique négatif.



Par contre si on en touche une avec une baguette de verre et l'autre avec une baguette d'ambre de sorte que l'une soit électrisée positivement et l'autre négativement, on constate qu'une fois relâchées, les deux boules ont tendance à se rapprochées l'une de l'autre.



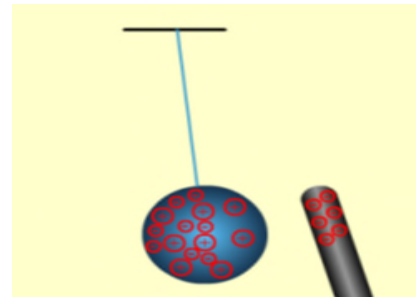
Lorsque les deux boules entrent en contact, elles se neutralisent et par conséquent elles retournent à la position d'équilibre sous l'effet de leur poids.

Conclusions

On montre, à l'aide de cette même série d'expérience, que cette électricité est capable, non seulement d'agir à distance mais également de se déplacer d'un corps à un autre. Nous concluons à l'aide de cette série d'expérience que deux corps portant une électricité de même nature (soit positive, soit négative) se repoussent, tandis qu'ils s'attirent s'ils portent des électricités contraires.

C- Electrification par influence

Si on approche un bâton en ambre chargé d'une boule de liège neutre suspendu à un fil, cette dernière va subir alors une redistribution des charges à sa surface. Une charge positive se condense sur sa face avant alors que la même quantité de charge mais de signe opposé se développe sur sa face arrière (elle est polarisée). Cette redistribution de charge constitue un exemple d'électrification par influence.

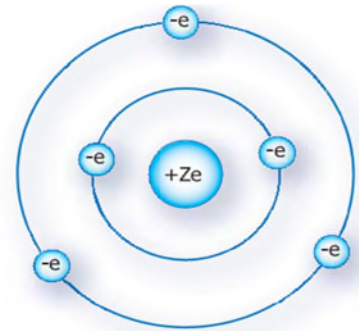


On parle de « Polarisation par influence » dont les phénomènes sont basés sur la propriété selon laquelle les charges de même signe se repoussent et de signe contraire s'attirent.

Notion de charge électrique

Les études expérimentales faites sur la matière à la fin du siècle dernier et au début de siècle ont poussé leurs auteurs à considérer la matière comme étant constituée de particules plus ou moins grosses regroupées de façon ordonnée dans des entités appelées atomes. L'atome est constitué de trois types de particules : les électrons qui forment un nuage autour de noyau, les protons et les neutrons qui forment le noyau de l'atome.

En 1909 Robert A. Millikan a vérifié expérimentalement pour la première fois, le fait que la charge électrique Q est quantifiée, c'est à dire qu'elle ne peut exister que sous forme de multiple entier d'une charge élémentaire sa valeur est $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$: $Q = \pm Ne$



- Le coulomb (C) est l'unité internationale de la charge électrique.
- Les particules sont assimilables à des sphères de rayon très faible.
- L'électron est une charge électrique mobile pouvant être libérée par la matière.

Les valeurs des charges électriques et des masses des constituants atomiques dans le Système International sont données dans le tableau suivant :

Particules	Masses	Charges électriques en coulombs (C)	Remarques
Électron ⊖	$m_e \approx 9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$	$q_e = -e \approx -1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$	Masse très petite. Charge électrique négative.
Proton ⊕	$m_p \approx 16726 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$	$q_p = +e \approx +1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$	Masse 1836,15 fois plus grande que celle de l'électron. Charge électrique positive.
Neutron ○	$m_n \approx 16749 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$	charge électrique nulle	Il assure la stabilité des noyaux atomiques; il est présent dans tous, sauf dans l'hydrogène. Masse 1838,68 fois plus grande que celle de l'électron.

Séparation des charges

- Question : *Que se passet-il lors du frottement d'un corps sur un autre ?*

Réponse

Quand on frotte une baguette de verre avec un drap on arrache des électrons au verre. Le verre se charge positivement alors que le tissu, avec son excès d'électron est chargé négativement d'égale valeur. Dans le cas de l'ambre (ou plastique) c'est ce dernier qui gagne des électrons il se charge par conséquent négativement alors que le tissu se charge positivement

Exemple :

En frottant une baguette de verre avec un tissu, on obtient sur la baguette une charge $Q = +10^{-12} \text{ C}$. cette charge correspond à un déplacement de millions des électrons et on peut calculer leurs nombres.

$$\text{On a } Q = n_e e, n_e = \frac{10^{-12}}{1.6 \times 10^{-19}} \approx 6 \times 10^6$$

Conclusion

Le frottement d'un corps sur un autre fait apparaitre des charges électriques négatives sur l'un des corps, et des charges positives sur l'autre qui restent en place une fois les corps séparés.

Remarque

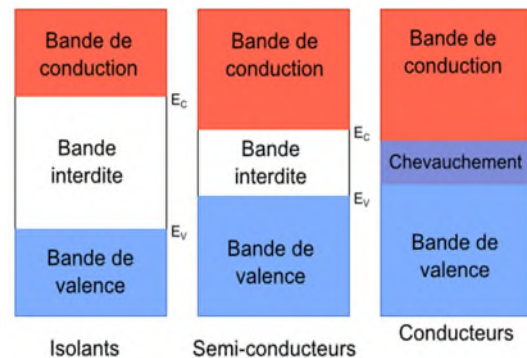
La charge électrique ne peut être ni créée ni détruite, mais elle est transmise d'un corps à un autre.

Conservation de la charge : La charge totale électrique est conservée lors de l'électrisation des corps.

Conducteur et isolant

À un stade élémentaire, on se limite à des considérations simples pour définir le caractère conducteur ou isolant d'un matériau. Il existe deux classes de matériaux qui se distinguent du point de vue de la conductivité électrique et de transport de la charge en général : conducteurs et isolants. La densité d'électrons libres est élevée dans les conducteurs et pratiquement nulle dans les isolants.

D'un point de vue pratique une autre classification parmi les isolants avec une densité de charge intermédiaire et qui conduisent de l'électricité à des températures plus élevées ce sont les semi-conducteurs (très importants en nanotechnologie). Le comportement des matériaux est expliqué à l'aide de la théorie des bandes. On distingue trois bandes : la bande de valence, la bande interdite et la bande de conduction.



Energie de la bande interdite « Gap » en anglais : $E_g = E_c - E_v$

- o Supérieur à 9 eV → isolant.
- o Inférieur à 2eV → Semi-conducteur.
- o Pas de gap c-à-d superposition des deux bande → conducteur.

A retenir

- ❑ Un conducteur est un matériau dans lequel des particules chargées peuvent se déplacer librement (ex : métaux Agent, Or et Cuivre, le corps humain).
- ❑ Un isolant est une matière qui ne permet pas aux charges de se déplacer (ex : verre, bois, ébonite, plastique)

Électroscope

Un appareil simple et sensible qu'on utilise pour observer et mesurer l'électrisation d'un corps. Il existe deux modèles : à feuilles métalliques et à aiguilles métalliques.

Un électroscope à feuilles est constitué d'une tige métallique à sa partie supérieure une boule également métallique, et à sa partie inférieure sont suspendues deux feuilles d'or très minces. Les feuilles divergent dès que l'on approche ou on met au contact de la boule un corps électrisé. L'appareil permet de déceler les électrisations les plus faibles.

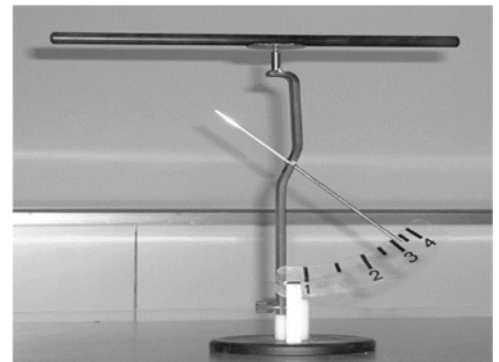


Dans un électroscope à aiguilles les feuilles sont remplacées par une aiguille d'aluminium très légère pivotant sur un axe et surmonté d'un plateau circulaire. Le tout est isolé du sol par un morceau de plastique (figure ci-contre).

Lorsqu'on approche du plateau un corps chargé, l'aiguille monte. Si on éloigne le corps, elle redescend.

Si on touche plusieurs fois le plateau avec un corps chargé, l'aiguille monte progressivement de plus en plus haut.

Le dispositif étant très sensible, si la charge à mesurer est suffisamment forte, le contact n'est pas alors nécessaire.



Force électrostatique

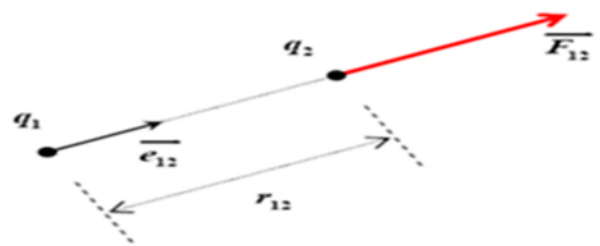
Le prix Nobel **Richard Feynman** présente les forces électriques comme des forces incroyables « Imaginons une force analogue à la gravitation qui varie comme l'inverse du carré de la distance (c-à-d en $1/r^2$) mais qui soit environ un milliard de milliard de milliard de milliard de fois plus intense. Une telle force existe : c'est la force électrique ».

Loi de Coulomb

Dans les années 1780, le physicien français Charles-Augustin de Coulomb découvre expérimentalement l'expression décrivant le module de la force électrostatique que s'exercent deux charges électriques immobiles disposées sur des sphères.

Enoncé : « Deux charges électriques ponctuelles q_1 et q_2 immobiles et situées dans le vide à une distance r_{12} l'une de l'autre, exercent entre elles une **force électrostatique** radiale (portée par la direction qui joint les deux charges) directement proportionnelle au produit de ces charges et inversement proportionnelle au carré de la distance qui les sépare ». Soit alors son expression :

$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \vec{e}_{12}$$



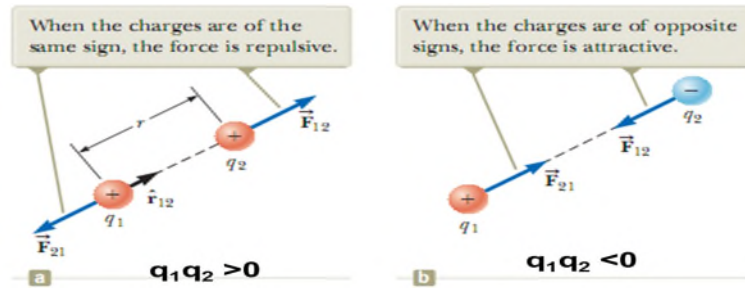
La constante k a pour valeur approximative : $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9,0 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$

ϵ_0 , la constante de permittivité du vide : $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2$

-Si $\vec{F}_{12}$ est la force électrostatique qu'exerce la charge q_1 sur la charge q_2 alors $\vec{F}_{21}$ est la force électrostatique qu'exerce la charge q_2 sur la charge q_1 d'où d'après le principe d'action réciproque (troisième loi Newton) on a : $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

La force électrostatique $\vec{F}$ est un vecteur dont la direction est celle de la droite joignant les charges considérées et dont le sens dépend des signes des charges :

- Si q_1 et q_2 sont de même signe, la force électrostatique $\vec{F}_{12}$ est répulsive (Fig a).
- Si q_1 et q_2 ont des signes opposés, la force électrostatique $\vec{F}_{12}$ est attractive (Fig b).



Attraction et répulsion entre deux charges électriques

Remarque

- ❖ Les chargées ponctuelles sont considérées comme des petites sphères dont leur rayon est négligeable par rapport à la distance qui les sépare.
- ❖ La loi de Coulomb ne s'applique qu'à des charges fixes ou en mouvement relativement lent.

On considère un atome d'hydrogène, calculons la force gravitationnelle et électrique entre le noyau et l'électron, on donne : $m_e=9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$, $m_p=1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$, $e=1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$, $G=6,67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$, $k=9 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$ et la distance entre le noyau et l'électron $r = 53 \text{ pm}$.

$$F_g = G \frac{m_e m_p}{r^2} = 6,67 \times 10^{-11} \frac{(9,11 \times 10^{-31})(1,67 \times 10^{-27})}{(53 \times 10^{-12})^2} = 3,6 \times 10^{-47} \text{ N}$$

$$F_e = k \frac{e.e}{r^2} = 9 \times 10^9 \frac{(1,6 \times 10^{-19})^2}{(53 \times 10^{-12})^2} = 8,2 \times 10^{-8} \text{ N}$$

$$\frac{F_e}{F_g} = 2,27 \times 10^{39}$$

- ❖ Donc au niveau atomique la force de gravitation est négligeable devant la force électrique. C'est la force électrique qui assure la stabilité et la cohésion de l'atome.

Principe de superposition

Lorsqu'un système comporte N charges ponctuelles $(q_i)_{i=1,N}$, la résultante $\vec{F}_k$ des forces électrostatiques sur une charge q_k du système est la somme vectorielle des forces individuelles exercées par chaque charge q_i supposée seule :

$$\vec{F}_k = \vec{F}_{1k} + \vec{F}_{2k} + \dots + \vec{F}_{Nk} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{ik} \text{ avec } \vec{F}_{ik} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_k q_i}{r_{ik}^2} \vec{e}_{ik}$$

Donc :

$$\vec{F}_k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i \neq k}^{i=1,N} \frac{q_k q_i}{r_{ik}^2} \vec{e}_{ik}$$

Lorsque la résultante des forces est nulle alors on parle de l'équilibre de la charge q_k sous l'action des autres charges.

Champ électrostatique et lignes de champ

Définition

Nous avons vu que deux charges ponctuelles q_1 (point O) et q_2 (point M) exercent une influence l'une sur l'autre (loi de Coulomb). La force qui s'exerce sur q_2 due à q_1 est :

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \vec{e}_{12} \quad OM = r_{12}$$

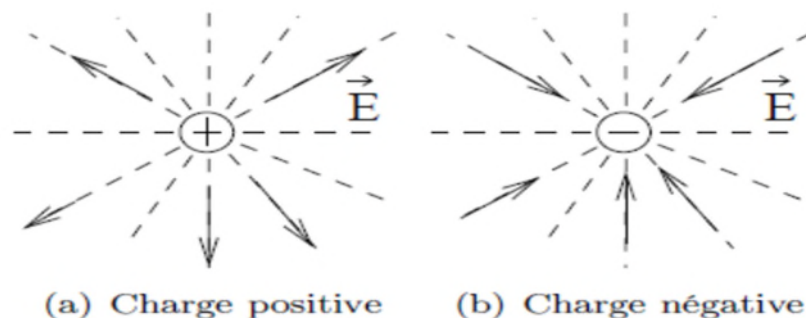
Cette expression peut être mise sous une forme un peu différente :

$$\vec{F}_{12} = q_2 \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_{12}^2} \vec{e}_{12} \right)$$

Si on divise par la charge q_2 l'équation précédente $\frac{\vec{F}_{12}}{q_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_{12}^2} \vec{e}_{12}$, on obtient une nouvelle expression vectorielle qui ne dépend que de la charge q_1 et de la distance r_{12} du point M à O. Cette nouvelle fonction vectorielle est appelée **champ électrostatique** crée par la charge q_1 au point M de l'espace.

La présence d'une charge ponctuelle q au point O modifie son environnement et y crée au point M un champ électrostatique $\vec{E}(M)$. Si on place une charge Q test en M elle subit la force $\vec{F} = Q\vec{E}(M)$.

Le champ électrostatique est porté par la direction joignant la charge et le point où est calculé ce champ (par exemple point M) on dit alors qu'il est radial. Le champ décroît avec la distance à la charge.



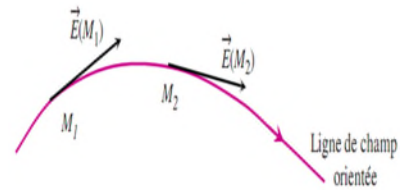
Champ au voisinage d'une : Charge + (Diverge) et charge - (converge).

Le champ est dirigé vers l'extérieur Fig5. (a) (c.-à-d. il a le même sens que $\overrightarrow{OM}$) si $q > 0$, si $q < 0$ le champ est dirigé vers la charge Fig5. (b).

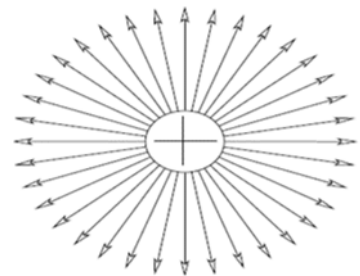
Les lignes de champ

On appelle lignes de champ, les courbes tangentes en chaque point au vecteur champ électrostatique défini en ce point et orientées dans la direction du champ.

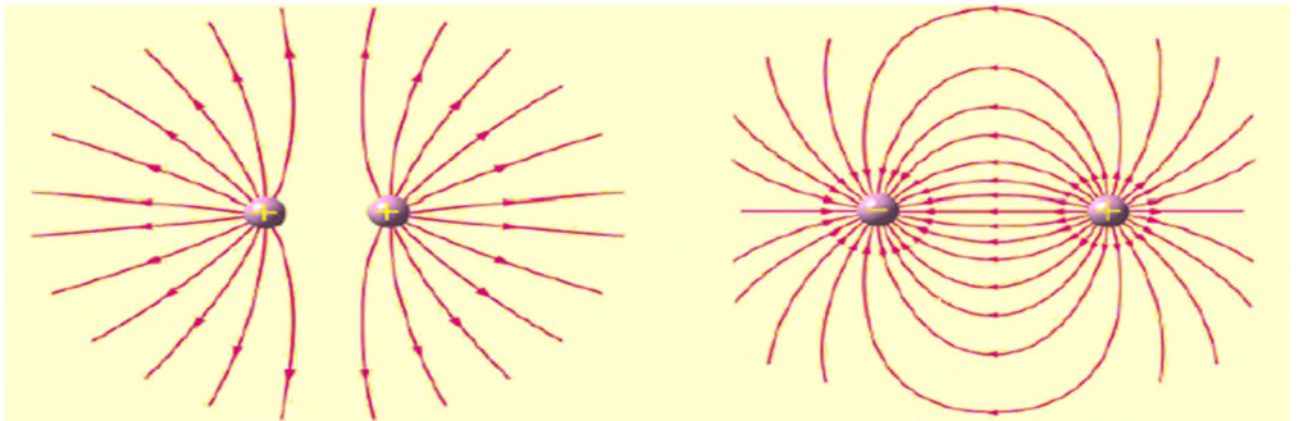
 Le faisceau des lignes de champ définit une cartographie du champ électrique.



Les lignes de champ créées par une charge ponctuelle positive. Pour une charge négative les lignes de champ sont identiques mais convergent vers la charge.



Dans le cas de deux charges ponctuelles les lignes de champ sont représentées sur la figure suivante :

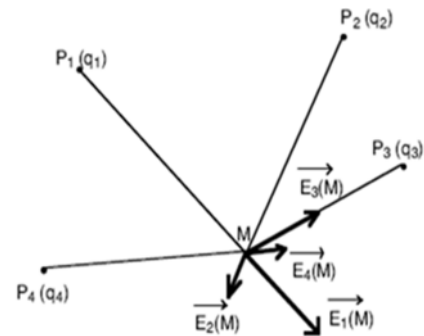


Conclusion :

- ❖ Les lignes de champ électrostatique prennent naissance là où se trouvent des charges positives et aboutissent là où se trouvent des charges négatives.
- ❖ Elles ne se coupent jamais.
- ❖ Partent à l'infini si la distribution est globalement positive

Champ produit par plusieurs charges ponctuelles

Considérons maintenant le cas de N charges ponctuelles fixes q_i situées au points P_i et cherchons l'expression de champ total exercée par l'ensemble de ces charges en un point M de l'espace (voir Fig.).



Pour calculer le champ total on applique **le principe de superposition** aux champs électrostatiques. Le champ total $\vec{E}(M)$ est la somme vectorielle des champs électrique produits par chacune

$$\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^N \vec{E}_{q_i}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_{r_i}$$

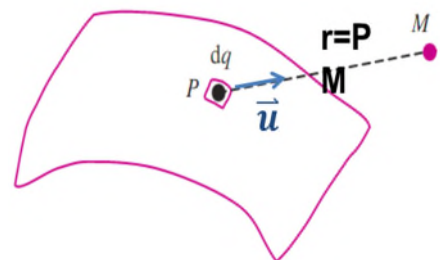
Le principe de superposition est appliqué pour calculer le champ électrostatique créé par une distribution de charges aussi bien ponctuelle que de répartitions continues.

Distribution continue de charges

En pratique l'expression précédente de champ total (sommation) est rarement utilisable étant donné qu'on a généralement amenés à considérer des matériaux constitués d'un nombre gigantesque de particules. De ce fait nous sommes ramenés à travailler sur **des distributions de charges continues**.

Considérons le cas général d'un conducteur avec une charge élémentaire dq située en un point P quelconque de ce conducteur.

$$\vec{E}_{\text{Tot}}(M) = \int_{\text{ensemble}} d\vec{E}(M) \text{ avec } d\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \vec{u}$$



Le champ électrostatique total créé en un point M par l'ensemble du conducteur considéré est donné par :

$\vec{E}_{Tot} = \int_{ensemble} d\vec{E}(M)$ avec $d\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \vec{u}$ étant le champ élémentaire créé par dq centré en P.

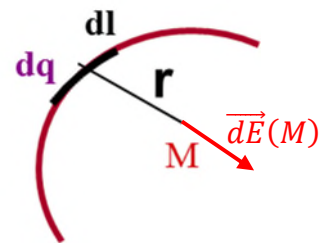
Mathématiquement, Il s'agit évidemment d'une approximation, permettant de remplacer une somme $\sum$ presque infinie par une intégrale $\int$.

Charges distribuées sur une longueur

On définit dans ce cas une densité linéique de charges donnée par : $\lambda = \frac{dq}{dl}$ (cm⁻¹)

Le champ électrostatique relatif à une telle distribution s'obtient par intégration simple sur toute la longueur de la distribution. On obtient alors :

$$\vec{E}(M) = \int_{Longueur} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r^2} dl \vec{u}$$

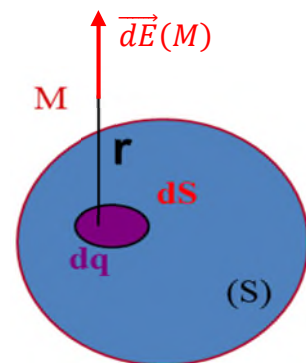


Charges distribuées sur une surface

On définit dans ce cas une densité surfacique de charges donnée par : $\sigma = \frac{dq}{dS}$ (cm⁻²)

Le champ électrostatique relatif à une telle distribution s'obtient par intégration double sur toute la surface de la distribution. On obtient alors : $\vec{E}(M) =$

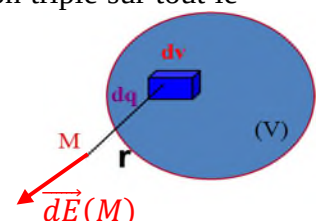
$$\iint_{Surface} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma}{r^2} dS \vec{u}$$



Charges distribuées sur un volume

On définit dans ce cas une densité volumique de charges donnée par : $\rho = \frac{dq}{dv}$ (cm⁻³)

Le champ électrostatique relatif à une telle distribution s'obtient par intégration triple sur tout le volume de la distribution. On obtient alors : $\vec{E}(M) = \iiint_{volume} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho}{r^2} dv \vec{u}$



Relation globale : circulation du champ électrostatique et potentiel électrostatique

Supposons une charge q placée dans un champ électrostatique $\vec{E}$ créée par une distribution de charges quelconque ; le travail fourni pour amener la charge q du point A au point B représente l'intégrale de A à B de la force électrique $\vec{F} = q\vec{E}$ multipliée scalairement par le déplacement élémentaire $d\vec{l}$.

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

En divisant le travail par la charge q on obtient la relation importante suivante :

$$\frac{W}{q} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

L'intégrale curviligne $\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$ est appelée circulation du champ électrostatique entre deux points

$$C = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}.$$

Si la charge ponctuelle q est à symétrie sphérique donc le champ électrostatique créée par cette dernière est radial et l'expression de déplacement élémentaire $d\vec{l} = dr\vec{e}_r + r d\theta\vec{e}_\theta + r \sin\theta d\phi\vec{e}_\phi$

En coordonnées sphérique on obtient :

$$\begin{aligned} C &= \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^B \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{e}_r \cdot d\vec{l}}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_A^B \frac{1}{r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_A^B \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) = V(A) - V(B) \end{aligned}$$

$$\text{Avec} \quad V(A) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_A} \quad \text{et} \quad V(B) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_B}$$

Nous avons ici une autre grandeur physique dépendant des charges : Le potentiel électrostatique

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + V_0$$

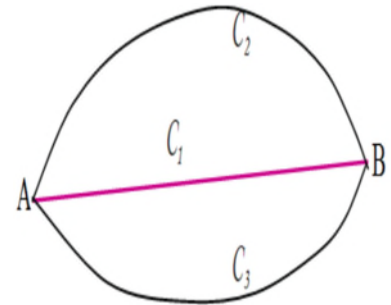
V_0 est une constante d'intégration elle est nulle lorsque le point de référence est à l'infini.

On appelle la quantité $V(A)-V(B)$ la différence de potentiel (**ddp**) entre le point A et le point B.

Sur un parcours fermée C, c-à-d le point d'arrivée B correspond au point de départ A, on a :

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = \int_A^A \vec{E} d\vec{l} = V(A) - V(A) = 0$$

On dit que le champ électrostatique est à circulation conservative.



Remarque :

- ❑ La circulation de $\vec{E}$ est indépendante du parcours choisi puisqu'elle ne dépend que de la différence de potentiel entre A et B.
- ❑ Par contre la circulation de $\vec{E}$ dépend de sens de parcours choisi c'est ce sens qui fixe le signe de la ddp. Il faut donc toujours orienter le parcours avant de calculer la circulation de $\vec{E}$.

Calcul du champ électrostatique $\vec{E}$ à partir du potentiel

Soit une charge ponctuelle q placée en un point O cette charge crée en un point M de l'espace un champ électrostatique $\vec{E}$ donne par :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u}$$

$\vec{u}$ étant le vecteur unitaire de la direction OM . $\vec{r} = r\vec{u} \Rightarrow \vec{u} = \frac{1}{r}\vec{r}$

En introduisant le vecteur $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ il vient :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

Or $\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\vec{r}}{r^3}$

D'où $\vec{E}(M) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{r}\right) = -\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}\right) \Rightarrow \vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}V(M)$

Remarque

- ✓ L'opérateur $\overrightarrow{\text{grad}}$ étant un opérateur de dérivation alors $\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{r}\right) = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{r} + Cste\right)$.
- ✓ Physiquement on n'a pas aucun moyen pour déterminer le potentiel V, par contre on sait mesurer des différences de potentiel entre deux points A et B. $V(A) - V(B) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$ et c'est seulement la ddp qui a un sens physique.
- ✓ Dans le système international l'unité du potentiel est le volt (V).

Potentiel électrostatique crée par une distribution de charges discrètes

Soit un ensemble de charges ponctuelles q_i créant en un même point **M** des champs électrostatiques $\vec{E}_i$ tel que :

$$\vec{E}_i = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_i^2} \vec{u}_{ri}$$

On applique le principe de superposition le champ électrostatique total e sera :

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \frac{\vec{r}}{r_i^3}$$

Donc $\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{r_i}\right)$

Soit aussi $\vec{E} = \sum_{i=1}^N -\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i}\right)$ ou enfin $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i}$

En posant encore $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$ donc on définit le potentiel électrostatique crée en M par l'ensemble de distribution par :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i}$$

Potentiel électrostatique crée par une distribution continue de charge

On passera de la distribution discrète de charge à la distribution continue comme précédemment pour le champ électrostatique en changeant la sommation par une intégrale.

Le potentiel électrostatique crée par une distribution de charge continue est alors :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r} + Cste$$

Pour des distributions de charges linéique λ , surfacique σ et sphérique ρ on obtient respectivement :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_C \frac{\lambda dl}{r} + Cste$$

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma ds}{r} + Cste$$

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho dv}{r} + Cste$$

Surfaces équipotentielles

Une surface équipotentielle électrique est une région où la valeur du potentiel électrique est la même en tout point (c-à-d $V(x,y,z) = \text{Cste}$).

Considérons deux points M et M' d'une surface équipotentielle, M' est obtenu à partir de M par un déplacement élémentaire $\vec{dl}$ on a : $\overrightarrow{MM'} = \vec{dl}$ et $dV=0$ (puisque $V = \text{Cste}$ alors $dV=0$)

$$\text{Or } dV = \overrightarrow{\text{grad}V} \cdot \vec{dl} \text{ et } \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}V} \quad \text{donc} \quad \vec{E} \cdot \vec{dl} = 0$$

Ce résultat implique que le champ électrostatique $\vec{E}$ est perpendiculaire (normale) à la surface équipotentielle.

Dans le cas d'une charge ponctuelle $q > 0$:

- ❖ Les surfaces équipotentielles sont des sphères centrées sur la charge q .
- ❖ Les lignes de champ sont normales aux surfaces équipotentielles et sont orientées dans le sens des potentiels décroissants.

Energie potentiel électrostatique

Charge ponctuelle

- ❖ Définition

L'énergie potentielle électrostatique d'une particule ponctuelle chargée placée dans un champ électrostatique est égale au travail qu'il faut fournir pour amener, de façon quasi-statique, cette particule depuis l'infini à une position considérée finie.

On a déjà démontré plus haut que ce travail vaut :

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = -q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = q(V_B - V_A)$$

Pour un déplacement de la charge de l'infini à un point M c'est à dire $A = \infty$ et $B = M$

$$W_{\infty \rightarrow M} = q(V_M - V_{\infty})$$

Puisque on peut toujours définir le potentiel nul à l'infini ($V_{\infty} = 0$) on obtient l'expression suivante pour l'énergie électrostatique d'une charge ponctuelle située en M :

$$W_{\infty \rightarrow M} = qV_M$$

On voit que le potentiel électrostatique est une mesure de l'énergie électrostatique.

Ensemble de charge ponctuelle

Pour calculer l'énergie il convient d'amener une à une les charges q_i et d'évaluer à chaque fois l'énergie nécessaire à cette opération.

- o Commençons par amener la charge q_1 depuis l'infini jusqu'à la position M_1 . La mise en place de cette charge ne nécessite aucune énergie puisqu'elle est seul dans le vide (pas de champ au voisinage de M_1).
- o Pour amener la seconde charge q_2 en M_2 il faut fournir le travail W_2 qui a pour expression :

$$W_2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$$

- o Ces deux charges se trouvant à leurs positions finales et pour amener une troisième charge q_3 en M_3 il faudra lui fournir le travail W_3 :

$$W_3 = \frac{q_3 q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{q_3 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{23}} = q_3 \left(\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{23}} \right)$$

De façon général l'énergie requise pour amener une j-eme charge q_j au point M_j a pour expression :

$$W_j = q_j \sum_{i \neq j} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$$

L'énergie total U qui est nécessaire pour amener le système de charges dans l'état (q_i, M_i) est égale à la somme de toutes les contributions.

Nous obtenons ainsi :

$$\begin{aligned} U &= \sum_j W_j = \sum_j \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \\ &= \frac{1}{2} \sum_j \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_i q_i V_i \end{aligned}$$

Avec $V_i = \sum_{i \neq j} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$ est le potentiel créé par l'ensemble des charges ponctuelles sauf q_i .

Le facteur $\frac{1}{2}$ dans l'expression de l'énergie électrostatique apparaît pour corriger le fait que en faisant la somme sur tous les i et j on compte chaque terme deux fois alors qu'il n'est à considérer qu'une seule fois.

Energie électrostatique associée à une distribution continue de charge

Le passage du cas d'une distribution de charge discrète au cas d'une distribution continue est réalisé en remplaçant la sommation par une intégrale.

L'énergie potentielle électrostatique créée par une distribution de charges continue est alors :

-Cas d'une distribution linéique : $U_{\text{système}} = \frac{1}{2} \int_C \lambda V dl$

-Cas d'une distribution surfacique : $U_{\text{système}} = \frac{1}{2} \iint_S \sigma V dS$

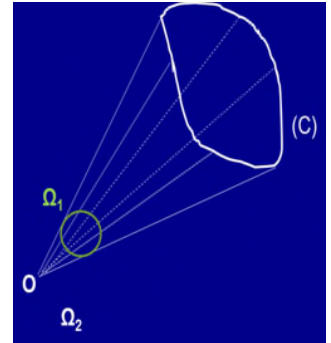
-Cas d'une distribution volumique : $U_{\text{système}} = \frac{1}{2} \iiint_V \rho V dV$

Théorème de Gauss

Angle solide

a- Définition

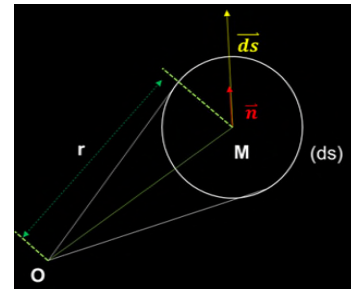
Soit un point O de l'espace, l'ensemble des demi-droites issues de O qui s'appuient sur contour (C) divise l'espace en deux domaines complémentaires Ω_1 et Ω_2 appelé angles solides.



b- Angle solide élémentaire

Soit $ds(M)$ un élément de surface défini autour d'un point M orientée par sa normale $\vec{n}$ et $\vec{u}$ un vecteur unitaire défini par $\frac{\overrightarrow{OM}}{OM}$, O est un point quelconque de l'espace.

$\vec{ds} = ds\vec{n}$ normale à l'élément de surface



$\vec{u} =$

Par définition l'angle solide $d\Omega(M)$ sous lequel du point O on voit l'élément de surface $ds(M)$ est :

$$d\Omega = \frac{\vec{u} \cdot \vec{ds}}{OM^2} \text{ Unité stéradian (sr)}$$

$$\text{En posant } OM=r \rightarrow \vec{u} = \frac{\overrightarrow{OM}}{OM} = \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\text{Alors } d\Omega = \frac{\vec{u} \cdot \vec{ds}}{r^2} = \frac{\vec{r}}{r} \cdot \frac{\vec{ds}}{r} \quad d\Omega \text{ apparait comme étant le flux du vecteur à travers } ds(M).$$

Exemple

On calcule l'angle solide d'une surface sphérique

$$d\Omega = \frac{\vec{u} \cdot \vec{ds}}{r^2} = \frac{ds}{r^2}$$

En coordonnées sphérique la surface élémentaire à r constante vaut :

$ds = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$ avec $0 < \theta < \pi$ et $0 < \varphi < 2\pi$

$$d\Omega = \frac{r^2 \sin \theta d\theta d\varphi}{r^2}$$

$$\Rightarrow \Omega = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta d\varphi = \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = [-\cos \theta]_0^\pi \times [\varphi]_0^{2\pi} = 4\pi$$

Donc pour l'espace entier : $\Omega = 4\pi$

Flux du champ électrostatique crée par une charge ponctuelle

Soit une charge ponctuelle q placée en un point O , elle crée en tout point M un champ électrostatique :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u}$$

Soit un élément de surface ds autour du point M . le flux du champ électrique $\vec{E}$ à travers ds est :

$$d\Phi = \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u} \cdot \vec{ds}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \vec{r} \cdot \vec{ds} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$

Alors le flux élémentaire $d\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$

Cette expression montre que le flux dépendant directement de l'angle solide sous lequel est vue la surface et non de sa distance r .

Flux sortant d'une surface fermée

Cas d'une charge ponctuelle q

1^{er} cas : cas où la charge q est à l'intérieur de (S)

Dans ce cas l'angle solide sous lequel du point O où se trouve la charge q on voit la surface (S) est : $\Omega = 4\pi$

IL FAUT REGARDER DANS TOUT L'ESPACE POUR VISUALISER (S).

Le flux total du champ électrostatique s'obtient en additionnant tous les flux élémentaires



$$\begin{aligned}\Phi_{\vec{E}/s} &= \oiint_S d\Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \iint_S d\Omega \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0} \\ \Phi &= \frac{q}{\epsilon_0} \\ \Phi_{\vec{E}/s} &= \frac{q}{\epsilon_0}\end{aligned}$$

2^{ème} cas : Cas où la charge q est située sur la surface

Dans ce cas l'angle solide sous lequel du point O où se trouve la charge q on voit la surface (S) est égal à $\Omega=2\pi$, moitié de l'espace.

Donc

$$\begin{aligned}\Phi_{\vec{E}/s} &= \oiint_S \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \iint_S d\Omega \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 2\pi = \frac{q}{2\epsilon_0} \\ \Phi &= \frac{q}{2\epsilon_0}\end{aligned}$$



3^{ème} cas : cas où la charge q est située à l'extérieur de la surface (S)

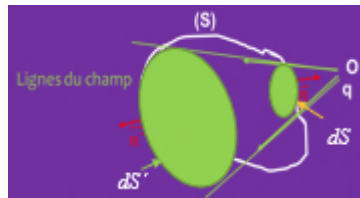
Dans ce cas l'angle solide sous lequel du point O on voit la surface (S) est égal à 0, $\Omega=0$

Le même angle solide $d\Omega$ de sommet O, découpe sur S deux éléments de surface dS et dS' , dont les normales n et n' dirigés vers l'extérieur sont opposées.

Les flux entrant ($d\Phi$) et sortant ($d\Phi'$) sont algébriquement opposés.

$$\Phi_{\frac{E}{s}} = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \iint_S d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi = q = 0$$

- Le flux total de champ électrostatique créé par une charge extérieure à une surface (S) est nul.

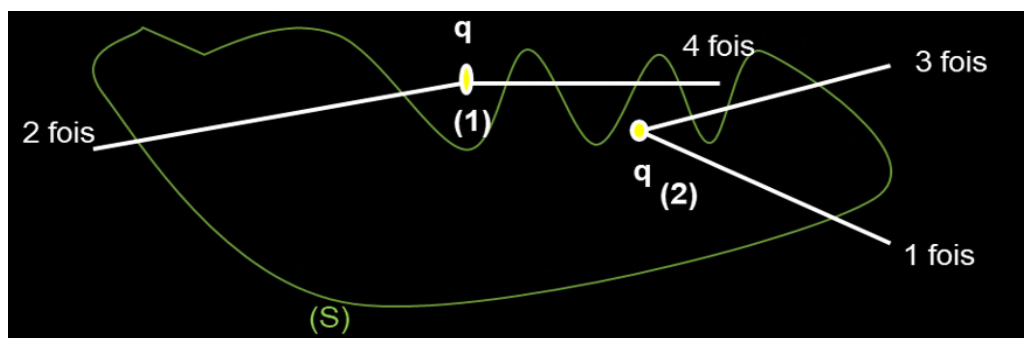


On peut généraliser les trois cas précédents en comptant le nombre de fois qu'une ligne de champ, partant de la charge q, traverse la surface (S).

Exemple :

Si la charge se trouve à l'intérieur de la surface (S) (2) toute ligne de champ partant de la charge traverse la surface (S) un nombre de fois impair donc l'angle solide n'est pas nul.

Dans le cas où le point se trouve à l'extérieur une ligne de champ partant de la charge traverse la surface (S) un nombre de fois paire alors une fois le flux est positif une fois le flux est négatif donc en total le flux est nul est doc l'angle solide aussi.



Enoncé du théorème de Gauss

Dans le vide, le flux du champ électrostatique sortant à travers une surface fermée S quelconque est égal à $\frac{1}{\epsilon_0}$ fois la charge électrique contenue à l'intérieur de cette surface.

$$\Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$\Phi = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$

Remarque

- ❖ Du point de vue physique le théorème de Gauss fournit le lien entre le flux du champ électrostatique et les sources du champ à savoir les charges électriques.
- ❖ Cette relation qui n'est rien d'autre que **la première équation de Maxwell**.

Forme locale du théorème de Gauss : Divergence

Dans le cas de distribution de charge volumique on a : $dq = \rho dv$

Et l'expression du flux

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\iiint_V \rho dv}{\epsilon_0} \quad (1)$$

En appliquant le théorème d'Ostrogradsky :

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iiint_V \text{div} \vec{E} dv \quad (2)$$

Equation (1) et (2)

$$\iiint_V \text{div} \vec{E} dv = \iiint_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dv$$

$$\iiint_v (\text{div} \vec{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0}) dv = 0$$

$$\text{Soit alors : } \text{div} \vec{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \Rightarrow \text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Cette équation entre $\vec{E}$ et ρ constitue l'expression locale du théorème de Gauss et elle n'est autre que la deuxième équation de Maxwell.

Pour une région de l'espace où $\rho=0$ on a : $\text{div} \vec{E}=0$, on dit alors que le champ est à flux conservatif.

Équation de Poisson et de Laplace

En présence d'une densité volumique de charge on peut écrire les deux lois locales:

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}V(M)}$$

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$



$$\text{div}(-\overrightarrow{\text{grad}V(M)}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\text{Or } \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \Delta \quad \Delta \text{ Operateur Laplacien}$$

On déduit :

$$\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \quad \text{équation de Poisson}$$

Et dans le vide $\rho=0$

$$\Delta V = 0 \quad \text{équation de Laplace}$$

En coordonnée cartésienne

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Propriétés de symétrie

a- Principe de Curie

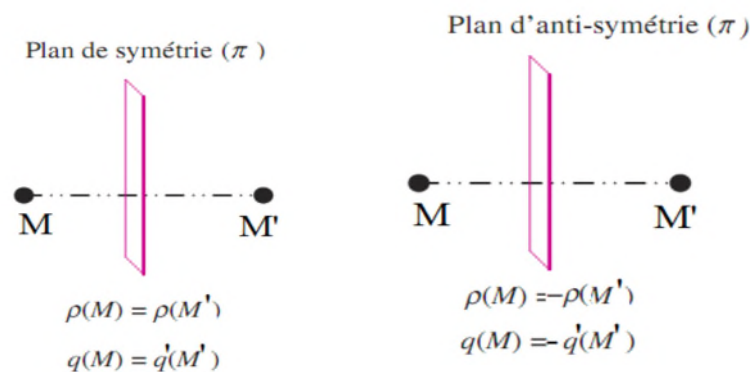
« La symétrie des causes (que sont les charges, sources de l'électrostatique) se retrouve dans les effets produits (que sont le champ et le potentiel électrostatiques) ».

Les propriétés de symétries nous permettent de simplifier le calcul du champ électrostatique.

b- Plan de symétrie et anti-symétrie

On considère deux point M et M' placés symétriquement par rapport à un plan (π).

- Si la charge q (ou densité de charge ρ) située en M est égale à la charge q' (ou ρ') située en M' alors le plan (π) est un plan de symétrie.
- Si la charge q (ou densité de charge ρ) située en M est égale à l'opposé de la charge q' (ou ρ') située en M' alors le plan (π) est un plan d'anti-symétrie.



Remarque

- Une transformation par un plan de symétrie laisse inchangée une grandeur scalaire telle que le potentiel électrostatique $V(M)=V(M')$.
- Par contre une transformation par un plan d'anti-symétrie change une grandeur scalaire en son opposé $V(M)=-V(M')$.
- Si M est dans le plan d'anti-symétrie alors le potentiel est nul dans ce plan.

Règles de symétrie

- Lorsqu'un système de charge possède un ou plusieurs plans de symétrie alors le champ électrostatique créé par ce système est porté par ce plan ou par l'intersection des plans de symétrie.

- Lorsqu'un système de charge possède un plan d'antisymétrie alors le champ électrostatique crée par ce système est perpendiculaire à ce plan d'antisymétrie.
- Lorsqu'un système de charge possède un axe de symétrie alors le champ électrostatique crée par ce système est porté par cet axe de symétrie.
- Lorsqu'un système de charge possède un centre de symétrie alors le champ électrostatique crée par ce système est nul en ce centre de symétrie.
- Lorsqu'un système de charge est invariant pour toute translation ou rotation par rapport à un axe alors le champ électrostatique crée par ce système ne dépend pas de cet axe.

FSTE
BENAMI

FSTE
BENAMI

FSTE
BENAMI

FSTE
BENAMI

FSTE
BENAMI

FSTE
BENAMI

FSTE
BENAMI

FSTE
BENAMI

FSTE
BENAMI

BENAMI

Symétries multiples

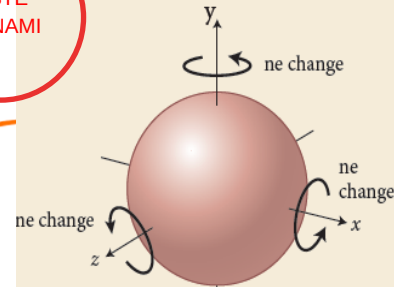
Symétrie sphérique

Symétrie cylindrique

Symétrie plane

BENAMI

(a) Symétrie Sphérique

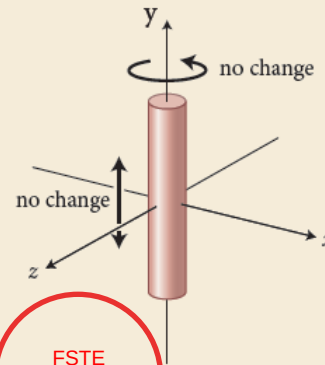


La distribution de charges est invariante par **rotation** autour de tout axe passant par le centre de la sphère.

Elle ne dépend que de r .

$\vec{E}$ ne dépend que de r .

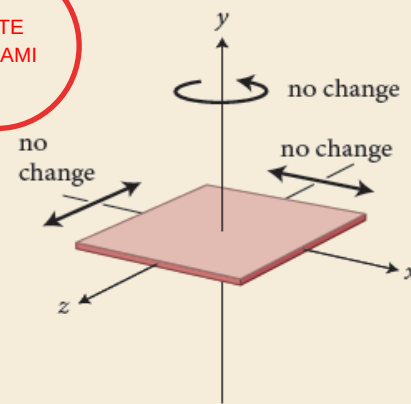
(b) Symétrie Cylindrique



La distribution de charges est invariante par **translation** parallèlement à l'axe (Oy) et par **rotation** autour de ce même axe.

$\vec{E}$ radial.

(c) Symétrie Plane



La distribution de charges est invariante par **rotation** autour de (Oy) et par **translation** parallèlement à (Ox) et (Oz) (plan (Oxz)).

$\vec{E} \perp$ au plan.

A retenir

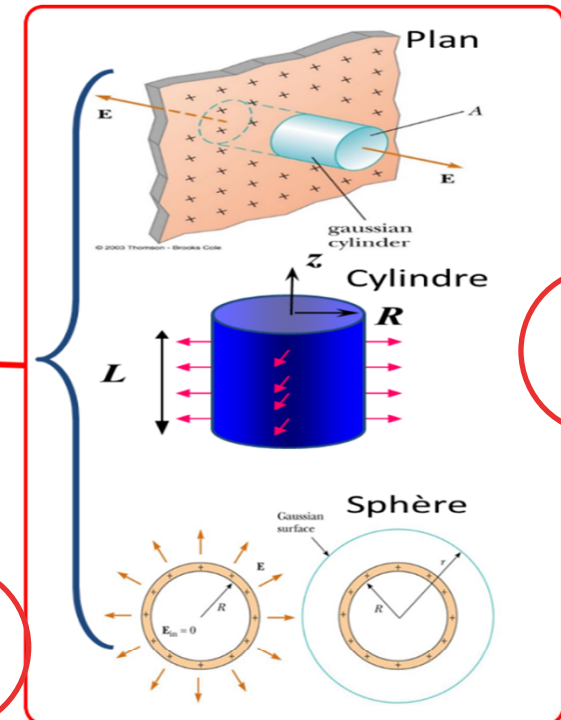
Méthodes de calcul du Champ Électrostatique

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_{ri}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^2} \vec{u}$$

Théorème de Gauss

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$



Calcul du champ électrostatique

Potentiel

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}} V(M)$$

BENAMI

FSTE
BENAMI

FSTE
BENAMI

FSTE
BENAMI

FSTE
BENAMI

FSTE
BENAMI

FSTE
BENAMI

FSTE
BENAMI

FSTE
BENAMI

FSTE
BENAMI

FSTE
BENAMI

FSTE
BENAMI

FSTE
BENAMI

FSTE
BENAMI

FSTE
BENAMI

Direct

Electrostatique des conducteurs

Définition

Un conducteur est un matériau contenant des électrons libres pouvant se déplacer à l'intérieur du conducteur sous l'action d'un champ électrostatique extérieur. Le conducteur est globalement neutre mais les électrons les moins liés au noyau de chaque atome sont libres de se déplacer.

Exemple des conducteurs : on peut citer les métaux, les semi-conducteurs dopés et les gaz ionisés.

Equilibre électrostatique d'un conducteur

Un conducteur est dit en équilibre électrostatique lorsqu'il n'est le siège d'aucun déplacement des porteurs de charges (e^-). Si on associe à chaque porteur de charge une vitesse moyenne $\vec{v}_i$ l'équilibre électrostatique se traduit par une vitesse moyenne nulle en tout point M du conducteur $\vec{v}(M) = \vec{0}$.

Propriétés des conducteurs en équilibre :

- Le champ électrostatique à l'intérieur du conducteur est nul $\vec{E} = \vec{0}$ car la force moyenne exercée sur un porteur de charge est nulle. $[q\vec{E} + k\vec{v}(M) = 0, \text{ or } \vec{v}(M) = 0 \text{ donc } \vec{E} = 0]$
- Comme $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V = 0 \Rightarrow V = C^{ste}$, la surface du conducteur est donc équipotentielle.
- Les lignes de champ à l'extérieur du conducteur sont normales à la surface et par ailleurs, aucune ligne de champ ne peut « revenir » vers le conducteur.

En effet, la circulation du champ le long de cette ligne impose :

$$V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl}$$

Les points A et B appartiennent au même conducteur $V(A)=V(B)$, alors la circulation doit être nulle, ce qui est impossible le long d'une ligne de champ (où, par définition $\vec{E}$ est parallèle à $\overrightarrow{dl}$).

- Soit ρ une distribution volumique à l'intérieur du conducteur en équilibre électrostatique

En utilisant le théorème de Gauss on a :

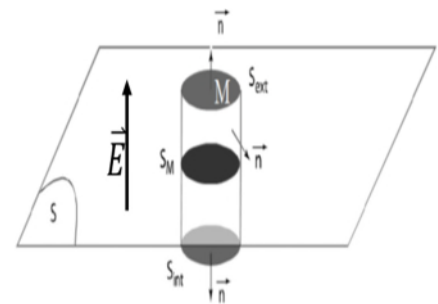
$$\oint_{\text{surface}} \vec{E} d\vec{S} = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{\rho \iiint_V dv}{\epsilon_0} = 0 \text{ car } \vec{E} = 0$$

Cela signifie que $\rho=0$ et donc toutes les charges non compensées se trouvent localisées à la surface du conducteur.

Théorème de Coulomb

- o Détermination du champ au voisinage immédiat d'un conducteur

En un point M infiniment voisin de la surface S d'un conducteur, $\vec{E}$ au point M est normal à S. Considérons une petite surface S_{ext} parallèle à la surface S du conducteur. On peut ensuite construire une surface fermée S_{Gauss} en y adjoignant une surface rentrant à l'intérieur du conducteur S_{int} ainsi qu'une surface latérale S_L



En appliquant le théorème de Gauss sur cette surface fermée, on obtient :

$$\phi = \oint_{S_{\text{Gauss}}} \vec{E} d\vec{S} = \iint_{S_L} \vec{E} d\vec{S} + \iint_{S_{\text{Ext}}} \vec{E} d\vec{S} + \iint_{S_{\text{Int}}} \vec{E} d\vec{S} = \iint_{S_{\text{Ext}}} \vec{E} d\vec{S} = ES_{\text{ext}}$$

D'autre part
$$\phi = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \iint_{S_M} \sigma dS = \frac{\sigma S_M}{\epsilon_0}$$

Où S_M est la surface dessinée par le tube de flux passant par S_{ext} , donc $S_M = S_{\text{ext}}$. Soit alors

$$ES_{\text{ext}} = \frac{\sigma S_M}{\epsilon_0} \text{ d'où } E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \text{ ou } \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$$

Théorème de Coulomb : le champ électrostatique à proximité immédiat d'un conducteur de densité surfacique σ vaut :

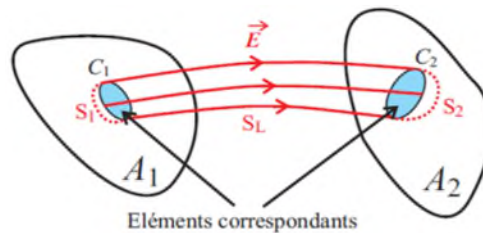
$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$$

Où $\vec{n}$ est le vecteur unitaire normal au conducteur et dirigé vers l'extérieur.

Phénomènes d'influence entre les conducteurs à l'équilibre.

a- Théorème des éléments correspondants

Soit deux conducteurs (A_1) et (A_2), placés l'un à côté de l'autre et portant des densités surfaciques σ_1 et σ_2 à l'équilibre. S'ils ne sont pas au même potentiel, des lignes de champ électrostatique relient (A_1) à (A_2). Soit un petit contour fermé C_1 situé sur la surface de (A_1) tel que l'ensemble des lignes de champ s'appuyant sur C_1 rejoignent (A_2) et y dessinent un contour fermé C_2 .



L'ensemble de ces lignes de champ constitue ce qu'on appelle un tube de flux : le flux du champ électrostatique à travers la surface latérale S_L dessinée par ce tube est nul par construction ($\vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$).

Soit la surface fermée $S = S_L + S_1 + S_2$ où S_1 est une surface qui s'appuie sur C_1 de (A_1), S_2 une surface similaire pour (A_2) et S_L la surface latérale. Par application du théorème de Gauss, on a :

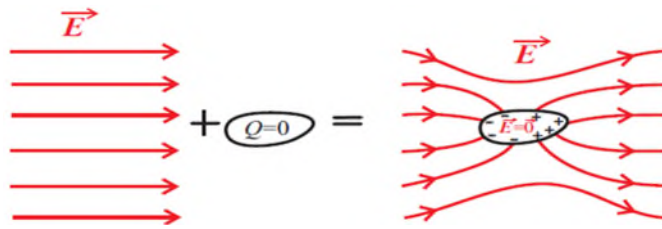
$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_L} \vec{E} \cdot d\vec{S}_L + \iint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 + \iint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 = 0$$

$$\phi = \frac{q_i}{\epsilon_0} = \frac{Q_1}{\epsilon_0} + \frac{Q_2}{\epsilon_0} \Rightarrow Q_1 = -Q_2$$

Théorème : Les charges électriques portées par deux éléments correspondants sont opposées.

b- Phénomènes d'influence électrostatique

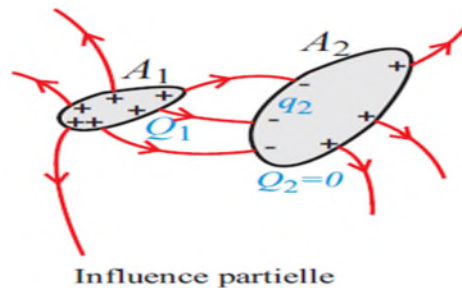
Lorsque on place un conducteur neutre dans un champ électrostatique uniforme, on va assister à un déplacement de charges positives dans la direction de $\vec{E}$ et de charges négative dans la direction opposée. On obtient alors une polarisation du conducteur (création de pôles + et -), se traduisant par une distribution surfacique σ non-uniforme.



➤ Influence partielle :

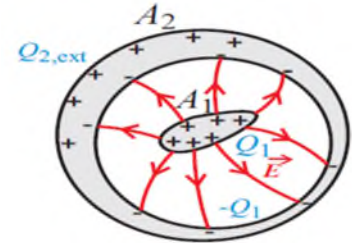
Considérons maintenant le cas d'un conducteur (A_1) de charge Q_1 avec une densité surfacique σ_1 , placé à proximité d'un conducteur neutre (A_2). En vertu de ce qui a été dit précédemment, on voit apparaître une densité surfacique σ_2 non-uniforme sur (A_2) due au champ électrostatique de (A_1). En effet, la présence de charges σ_2 situées à proximité de (A_1) modifie la distribution de charges σ_1 .

A l'équilibre électrostatique, les deux distributions de charges σ_1 et σ_2 dépendent l'une de l'autre. On appelle cette action réciproque, l'influence électrostatique partielle, car l'ensemble des lignes de champ électrostatique issues de (A_1) n'aboutissent pas sur (A_2).



➤ Influence totale

On dit que deux conducteurs (A1) et (A2) sont sous influence totale si toutes les lignes de champ issues de (A1) aboutissent sur (A2). Si (A2) entoure (A1) on voit apparaître la charge $Q_2^{\text{int}} = -Q_1$ sur la face correspondante interne de (A2) en vertu du théorème des éléments correspondants, et ceci quelle que soit la position de (A1).

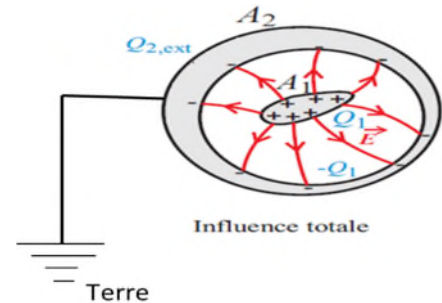


Influence totale

Cette propriété est connue sous le nom de **théorème de Faraday**.

La charge électrique total sur (A2) est : $Q_2 = Q_2^{\text{int}} + Q_2^{\text{ext}} = -Q_1 + Q_2^{\text{ext}}$

Si maintenant nous connectons la surface extérieure de (A2) au sol (grand réservoir de charge), les charges se trouvant sur ces surfaces extérieures s'écoulent dans le sol. Vu de l'extérieur de (A2) le système constitué des deux conducteurs apparait comme un système Neutre.

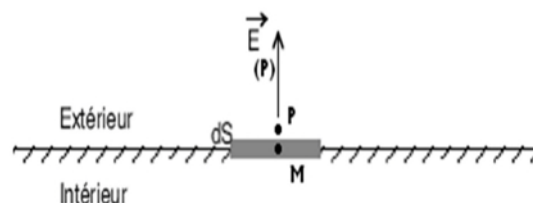


Influence totale

c-Pression électrostatique

On appelle pression électrostatique (Force par unité de surface) la quantité scalaire p donnée par : $p = \frac{df}{dS}$, df est la force électrostatique exercée sur une charge élémentaire $dq = \sigma dS$ par l'ensemble des charges du conducteur autre que dq .

Soit dS un élément de surface sur un conducteur chargé centrée sur le point M et appartenant à ce conducteur et P un point appartenant au voisinage immédiat de cette surface.



Le champ électrostatique au voisinage de la surface du conducteur vaut : $\vec{E}(P) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$ (Th. de Coulomb). Or par application du théorème de superposition on peut décomposer le champ en :
 $\vec{E}(P) = \vec{E}_{dS}(P) + \vec{E}_{Rc}(P)$

$\vec{E}_{dS}(P)$ Champ crée en P par les charges situées sur dS.

$\vec{E}_{Rc}(P)$ Champ crée en P par toutes les autres charges situées à la surface du conducteur (le reste du conducteur).

Les deux point **M** et **P** étant infiniment proches alors la surface **dS** se comporte comme un plan infini par rapport au point P et le champ crée par la distribution de charge se trouvant sur **dS** vaut alors : $\vec{E}_{dS}(P) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{n}$

On en déduit alors que :

$$\vec{E}_{Rc}(P) = \vec{E}(P) - \vec{E}_{dS}(P) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{n} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{n}$$

Soit alors $\vec{E}_{Rc}(P) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{n}$

La force électrostatique df subie par cette charge $dq = \sigma dS$ de la part de l'ensemble des autres charges du conducteur vaut :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{df} &= dq \cdot \overrightarrow{E}_{Rc}(p) = \sigma dS \cdot \overrightarrow{E}_{Rc}(p) \\ &= \sigma dS \cdot \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{n} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} dS \cdot \vec{n} \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{df} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} dS \cdot \vec{n}$$

Quel que soit le signe de σ la force est normale et toujours dirigée vers l'extérieur du conducteur.

Ainsi la pression électrostatique subie en tout point d'un conducteur vaut : $p = \frac{df}{dS} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$

Cette pression est en général trop faible pour arracher les charges de la surface du conducteur. Mais elle peut déformer ou déplacer celui-ci, les charges communiquant au solide la force électrostatique qu'elles subissent.

d-Pouvoir des pointes

Prenons deux sphères chargées de rayons respectifs R_1 et R_2 avec $R_1 > R_2$ reliées par un fil conducteur et placées loin l'une de l'autre.

Les deux sphères ont le même potentiel ($V_1 = V_2$) puisqu'elles constituent un conducteur unique.

$$\begin{aligned} V_1 = V_2 &\Leftrightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S_1} \frac{\sigma_1 dS_1}{R_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S_2} \frac{\sigma_2 dS_2}{R_2} \\ \frac{\sigma_1 4\pi R_1^2}{4\pi\epsilon_0 R_1} &= \frac{\sigma_2 4\pi R_2^2}{4\pi\epsilon_0 R_2} \\ \frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0} &= \frac{\sigma_2 R_2}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

$$\text{Soit } \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}, R_1 > R_2 \Rightarrow \frac{R_2}{R_1} < 1 \Rightarrow \sigma_1 < \sigma_2$$

Donc plus le rayon de la sphère est petit plus sa densité de charge est élevée et d'après le Théorème de Coulomb le champ est intense ($E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$, $E_1 < E_2$). Le résultat montre l'effet d'une pointe (accumulation de charges).

Capacité et coefficients d'influence d'un système de conducteurs en équilibre électrostatique

Soit un système de n conducteurs en équilibre électrostatique. La superposition des états d'équilibre et le théorème d'unicité nous permettent d'écrire que :

$$Q_i = \sum_{j=1}^n C_{ij} V_j \text{ pour chaque conducteur } i$$

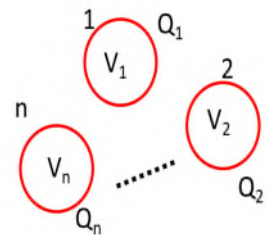
Pour le système entier, on a la relation matricielle suivante :

Matrice Capacité

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{n1} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{pmatrix}$$

C_{ii} : capacité du conducteur i en présence des autres conducteurs (Farad).

C_{ij} : Coefficient d'influence du conducteur j sur le conducteur i .



$$C_{ii} > 0 \text{ et } C_{ij} < 0 \text{ et } C_{ij} = C_{ji}$$

Les éléments de la matrice capacité ne dépendent que des dimensions géométriques des condensateurs.

Condensateurs

a- Définition

On appelle condensateur tout système de deux conducteurs en influence électrostatique total. L'un des conducteurs sera l'armature externe du condensateur tandis que l'autre sera l'armature interne. Les deux armatures sont séparées par un diélectrique (isolant), ce qui a pour effet d'accroître la capacité du condensateur.

Soient deux conducteurs (A_1) et (A_2) en influence totale de potentiels V_1 et V_2 et portant une charge totale Q_1 et Q_2 .

On a :

$$\begin{cases} Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2 \\ Q_2 = C_{21}V_1 + C_{22}V_2 \end{cases}$$

Puisque les condensateurs sont en influence totale alors :

$$Q_2 = Q_2^{ext} + Q_2^{int} = Q_2^{ext} - Q_1$$

Cas où $V_2=0$, $Q_2^{ext}=0$ car on néglige toute influence extérieure

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} Q_1 &= C_{11}V_1 \\ Q_2 &= C_{21}V_1 = -Q_1 \end{aligned}$$

Ce qui implique que : $C_{11} = -C_{21}$

Or $C_{12} = C_{21}$ donc $C_{11} = -C_{12} = -C_{21} = C$

Par convention la capacité C du condensateur sa charge Q et sa tension entre armatures sont définies de la façon suivante.

$$\begin{aligned} Q &= Q_1 \\ V &= V_1 - V_2 \end{aligned}$$

D'où on peut écrire $Q = Q_1 = C(V_1 - V_2) = CV$

Et la capacité du condensateur : $C = \frac{Q}{V}$

Grouperment de condensateurs

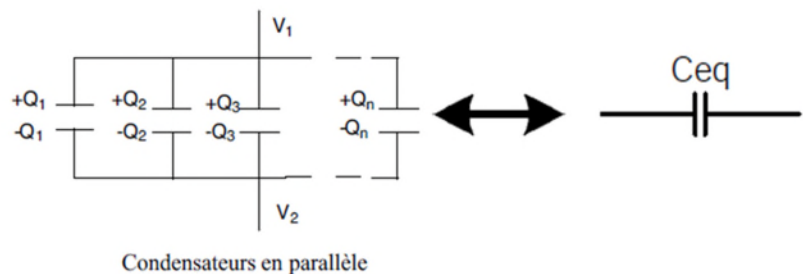
Nous allons étudier l'équilibre de plusieurs condensateurs. La description de cet équilibre dépend de la manière dont ils sont connectés. Ils peuvent être en parallèle ou en série.

➤ Condensateurs en parallèle

Soient n condensateurs de capacités C_i mis en parallèle avec la même tension $V = V_1 - V_2$. La charge électrique de chacun d'entre eux est donnée par $Q_i = C_i V$. La charge électrique totale est simplement

$$Q = \sum_{i=1}^n Q_i = \left(\sum_{i=1}^n C_i \right) V$$

Ce qui correspond à une capacité équivalente $C_{eq} = \sum_{i=1}^n C_i$ qui est la somme des capacités individuelles.

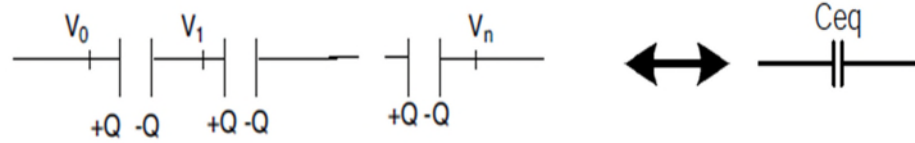


➤ Condensateur en série

Soient n condensateurs de capacités C_i mis en série les uns derrière les autres. On porte aux potentiels V_0 et V_n les deux extrémités de la chaîne et on apporte la charge Q sur le premier condensateur. En supposant que tous les condensateurs sont initialement neutres, il s'établit la charge $\pm Q$ (par influence) sur les armatures des condensateurs adjacents. La tension totale aux bornes de la chaîne de condensateurs s'écrit alors simplement

$$V = V_0 - V_n = (V_0 - V_1) + (V_1 - V_2) + \dots + (V_{n-1} - V_n) = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \dots + \frac{Q}{C_n} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} \right) Q$$

Soit $\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$ est appelée capacité équivalente



Condensateurs en série

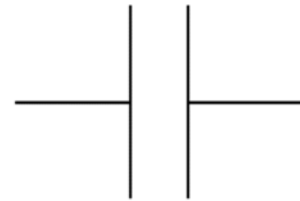
❖ Capacités des condensateurs simples

Pour obtenir la capacité C d'un condensateur, il faut calculer la relation entre sa charge Q et sa tension V c'est à dire :

$$V = V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{Q}{C}$$

Autrement dit il faut calculer la circulation du champ électrostatique entre les deux armatures ainsi que la charge Q.

❖ Symbole du condensateur



Formé de deux plaques conductrices séparées par un isolant

Energie associée à un condensateur

Nous savons qu'un condensateur est un système de deux conducteurs en influence totale. Si nous soumettons les armatures d'un tel système a une différence de potentiel $V = V_1 - V_2$ il apparait sur les armatures des charges $Q_1 = -Q_2 = Q = CV$, C étant la capacité du condensateur. L'énergie U associée à cette charge libre est :

$$U = \frac{1}{2} (Q_1 V_1 - Q_2 V_2) = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CV^2$$

Cette énergie U joue un rôle très important dans l'étude des condensateurs. Elle correspond à l'énergie que le générateur doit fournir au condensateur pour le charger.

Chapitre 2 : Magnétostatique

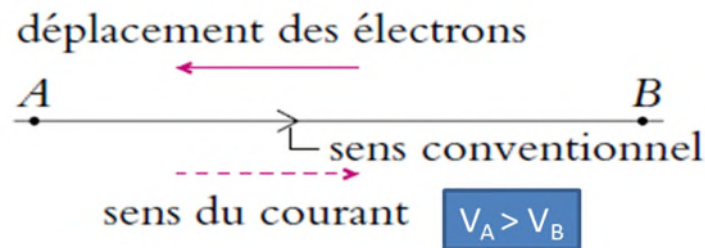
Le courant électrique et ses caractéristiques

a- Notion de courant électrique :

On appelle courant électrique tout déplacement ordonné de charges électriques dans un conducteur.

b- Sens conventionnel du courant

Par convention le sens du courant est le sens suivant lequel se déplacent les charges positives (sens oppose au déplacement des électrons) c'est à dire le sens des potentiels décroissants.



Intensité

On appelle intensité du courant la quantité de charges traversant une surface S par unité de temps.

Vecteur densité de courant

Soit un conducteur dans lequel se déplace un ensemble de porteur de charge ayant une vitesse $\vec{v}_l$.

Soit dS un élément de surface du conducteur d'orientation quelconque.

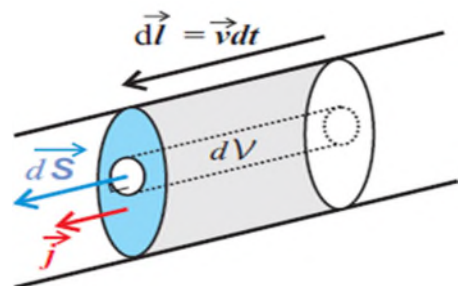
$$di = \frac{dq}{dt} \text{ avec } dq = \rho dv$$

$$\text{Et } \rho = n q$$

P : densité de charge par unité de volume

dv : élément de volume.

N : nombre de porteurs de charge par unité de volume



q : la charge d'un porteur

Or $\vec{v} = \frac{d\vec{l}}{dt}$ d'où $di = \rho \frac{d\vec{l}}{dt} \cdot \vec{dS} = \rho \cdot \vec{v} \cdot \vec{dS} = \vec{j} \cdot \vec{dS}$
 $dV = d\vec{l} \cdot \vec{dS} = \vec{v} \cdot \vec{dS} \cdot dt$

Où $\vec{j} = \rho \cdot \vec{v}$ est la densité de courant (A/m²)

Le courant qui traverse une section (S) du conducteur est donc:

$$I = \int di = \iint_{(S)} \vec{j} \cdot \vec{dS}$$

L'intensité à travers une surface (S) est le flux du vecteur densité de courant $\vec{j}$ à travers S.

Equation de continuité

Soit S une surface fermée délimitant un volume V. Ce volume contient une charge totale mobile

$Q = \iiint_V \rho dV$. Désignons par I_S l'intensité du courant qui sort de S, alors :

$$I_S = -\frac{dQ}{dt} = -\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV$$

La dérivation sous le signe intégrale définie est remplacée par une dérivée partielle puisque $\rho(r, t)$ dépend de point que du temps.

$$I_S = \iint_{(S)} \vec{j} \cdot \vec{dS} = -\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV = -\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

D'après le théorème de Green Ostrogradski :

$$\iint_{(S)} \vec{j} \cdot \vec{dS} = \iiint_V \text{div} \vec{j} dV$$

Alors :

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{j} dV = - \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

Soit :

$$\iiint_V \left[\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right] dV = 0$$

On en déduit

$$\operatorname{div} \vec{j} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Forces magnétiques

Cas d'une charge ponctuelle : force de Lorentz

Une particule chargée de masse m , de charge q et animée d'une vitesse $\vec{v}$, placée au voisinage des charges en mouvement subit :

- une force électrique indépendante du mouvement : $\vec{F}_e = q\vec{E}$, $\vec{E}$ est le champ électrostatique créé par les charges autres que la charge q .
- Une force magnétique due au mouvement de la charge q : $\vec{F}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B}$, $\vec{B}$ est le vecteur induction magnétique créé par les charges en mouvement au point où se trouve la charge q .

La force totale : $\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$, $\vec{F}$ est dite **force de Lorentz**.

Remarques

La force de Lorentz se réduit à la force électrostatique:

- ❖ Si la vitesse $\vec{v}$ a la même direction que $\vec{B}$ ($\vec{v} // \vec{B}$).
- ❖ Si la charge q est immobile $\Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$.
- ❖ Si les charges au voisinage sont immobiles $\Rightarrow \vec{B} = \vec{0}$

Cas des courants électriques : force de Laplace

C'est la force exercée par un champ magnétique sur un conducteur parcouru par un courant.

Soit un circuit électrique filiforme de longueur élémentaire $d\vec{l}$ parcouru par un courant constant d'intensité I et placé dans une région où règne un champ magnétique $\vec{B}$. La portion $d\vec{l}$ est soumise à une force magnétique élémentaire $d\vec{F}_L$, appelée **force de Laplace élémentaire**, dont l'expression est :

$$d\vec{F}_L = I d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

La force de Laplace totale exercée sur la totalité du circuit est alors :

$$\vec{F}_L = \oint_C d\vec{F}_L = \oint_C I d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

Remarques

- ❑ $d\vec{F}_L$ est perpendiculaire à la fois à $d\vec{l}$ et à $\vec{B}$.
- ❑ Le sens de $d\vec{F}_L$ est tel que le trièdre $(d\vec{l}, \vec{B}, d\vec{F}_L)$ est direct (Règle des trois doigts de la main droite).
- ❑ Son module est $dF_L = I dl B |\sin \alpha|$; α étant l'angle formé par $d\vec{l}$ et $\vec{B}$.
- ❑ L'origine de la force de Laplace est la force de Lorentz avec $\vec{E} = \vec{0}$.

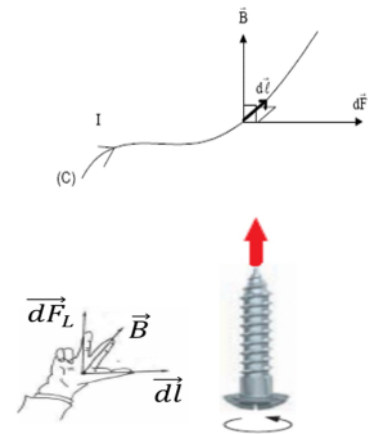
$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B} \Rightarrow d\vec{F} = dq \vec{v} \wedge \vec{B} \text{ or } dq = \rho dV = \rho d\vec{l} \vec{S} \text{ donc } d\vec{F} = d\vec{l} \vec{S} \rho \vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{S} d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

S est la section du fil conducteur, $\vec{j} = \rho \vec{v}$, $I = \vec{S} \vec{j}$

Loi de Biot et Savart

Champ d'induction magnétique créé par un courant électrique



Soit un circuit filiforme parcouru par un courant d'intensité I . Un élément de longueur $d\vec{l}$ situé au point P a une densité linéique de courant $I d\vec{l}$. En un point M de l'espace, le champ magnétique élémentaire $d\vec{B}$ créé par $d\vec{l}$ est donné par la loi de **Biot et Savart**.

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} I d\vec{l} \wedge \frac{\vec{u}}{r^2}$$

$\vec{PM} = PM\vec{u} = r\vec{u}$, $\vec{u}$ étant le vecteur unitaire.

μ_0 : Est la perméabilité magnétique du vide elle vaut dans le SI $4\pi 10^{-7} \text{H.m}^{-1}$ ($\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$).

$d\vec{B}(M)$ est perpendiculaire au plan défini par $I d\vec{l}$ et la direction PM , l'ensemble $(I d\vec{l}, \vec{PM}, d\vec{B})$ forme un trièdre direct. (Règle de la main droite)

Pour obtenir le champ total au point M il faut ajouter la contribution de tous les éléments constituant le circuit.

$$\vec{B}(M) = \int d\vec{B}(M) = \int \frac{\mu_0}{4\pi} I d\vec{l} \wedge \frac{\vec{u}}{r^2}$$

La loi de Biot et Savart se généralise pour une distribution de courant de densité $\vec{j}$ ($I = \iint \vec{j} d\vec{s}$) défini dans un volume V :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j} \wedge \vec{u}}{r^2} dV$$

Champ d'induction magnétique créé par une charge ponctuelle en mouvement

Une charge ponctuelle q , animée d'une vitesse $\vec{v}$, est équivalente à un élément de courant $I d\vec{l}$ tel que $I d\vec{l} = q\vec{v}$. L'induction magnétique $\vec{B}$ au point M est donné par la loi de Biot et Savart sous la forme :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} q\vec{v} \wedge \frac{\vec{u}}{r^2}$$

L'unité du champ magnétique est le tesla (T) ou aussi le Gauss (G) avec $1T = 10^4 G$

❑ On définit l'**excitation magnétique** en un point M par : $\vec{H}(M) = \frac{\vec{B}(M)}{\mu_0}$.

Les caractéristiques du champ magnétique sont :

- La direction de $\vec{B}(M)$ est perpendiculaire au plan formé par $\vec{v}$ et $\overrightarrow{PM}$.

- Le sens de $\vec{B}(M)$ est tel que le trièdre $(\vec{v}, \overrightarrow{PM}, \vec{B}(M))$ soit direct.

- Le module est donné par : $B(M) = \frac{\mu_0 q v \sin \alpha}{4\pi r^2}$ $\alpha = (\vec{v}, \overrightarrow{PM})$

- Quand on a plusieurs charges ponctuelles (q_i) formées de n particules chargées et animées par les vitesses $\vec{v}_i$. Le champ magnétique créé en un point M de l'espace est égal à la somme des champs $\vec{B}_i$ créée par chacune des i particules en appliquant le principe de superposition. L'expression du champ magnétique s'écrit alors :

$$\vec{B}(M) = \sum_i^n \vec{B}_i = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^n q_i \vec{v}_i \wedge \frac{\vec{u}_i}{r_i^2}$$

r_i étant la distance $P_i M$, q_i se trouve à P_i .

Théorème d'Ampère

Enoncé : Dans le vide, la circulation du champ magnétique sur un contour fermé orienté quelconque est égale à μ_0 fois la somme algébrique des intensités des courants enlacés par le contour.

$$C = \oint_C \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum I_{\text{enlacé}}$$

Soit un fil rectiligne infini parcouru par un courant I . Le champ magnétique créé par ce courant en un point M , obtenu par la loi de Biot et Savart en coordonnées cylindriques, est donné par :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$$

On s'intéresse à la circulation de ce champ sur un contour fermé (C) entourant le fil.

$$C = \oint_C \vec{B} d\vec{l} \text{ avec } d\vec{l} = dr\vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + dz\vec{e}_z$$

$$C = \oint_C \frac{\mu_0 I}{2\pi r} r d\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint_C d\theta \text{ Or } 0 < \theta < 2\pi$$

$$\text{Donc : } C = \frac{\mu_0 I}{2\pi} 2\pi = \mu_0 I$$

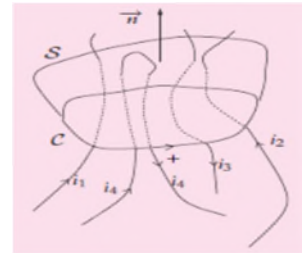
Remarque

- Les courants qui traversent toute surface s'appuyant sur le contour sont dits « courants enlacés » par le contour.

Exemple

Les courants sont comptés positivement si leur orientation correspond à l'orientation de la surface.

L'application du théorème d'Ampère dans le cas de la figure ci-contre donne :



$$\oint_C \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 (I_1 + I_2 - I_3 + I_4 - I_4) = \mu_0 (I_1 + I_2 - I_3)$$

Dans le cas d'une distribution de densité de courant $\vec{j}$ on a l'intensité totale $I = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{ds}$.

Le théorème d'Ampère s'écrit :

$$\oint_C \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot \vec{ds}$$

D'après le théorème de Stokes :

$$\oint_C \vec{B} d\vec{l} = \iint_S \vec{rot} \vec{B} \cdot \vec{ds} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot \vec{ds}$$

Alors :

$$\vec{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

Appelée équation de **Maxwell-Ampère** ou **forme locale d'Ampère**.

Flux du champ magnétique à travers une surface fermée

Le flux du champ magnétique à travers une surface fermée S quelconque est toujours nul. On dit que le champ magnétique est à flux conservatif.

$$\phi_{\vec{B}/S} = \oint_S \vec{B} d\vec{S} = \iiint_V \text{div} \vec{B} dV = 0$$

Les lignes de champ magnétique sont des cercles centrés sur les fils, source qui crée le champ.

L'orientation de la ligne de champ et le sens du courant dans les fils sont liés par la règle de la main droite.

Potentiel vecteur

Puisque $\text{div} \vec{B} = 0 \Rightarrow \exists$ un vecteur $\vec{A}$ tel que $\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}$ puisque la divergence de tout rotationnel est nulle.

Considérons la propriété locale du champ magnétique :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

En introduisant dans cette équation la relation $\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}$ on obtient :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}) = \mu_0 \vec{j} \text{ Soit } \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A}$$

Or $\text{div} \vec{A} = 0$ par analogie avec le potentiel électrostatique nul à l'infini, ce qui nous donne l'équation suivante :

$$\Delta \vec{A} + \mu_0 \vec{j} = 0$$

L'équation a la même structure que l'équation de Poisson présentée en électrostatique.

Chapitre 3 : Phénomènes d'induction

Loi de Faraday

La force électromotrice (f.é.m) induite dans un circuit est égale à l'opposé de la dérivée par rapport au temps du flux magnétique à travers le circuit.

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} \text{ avec } \Phi = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{dS}$$

f.é.m. est en volts, le flux magnétique en weber. Le signe négatif indique que la f.é.m s'oppose à la variation de flux magnétique.

Circuit fixe dans un champ magnétique variable : induction de type Neumann

Considérons un circuit filiforme (C), fixe par rapport à un référentiel galiléen, soumis à un champ magnétique variable. La variation de $\vec{B}$ dans le temps conduit à l'apparition d'un courant induit dans (C) et par conséquent d'un champ électromoteur $\vec{E}_m$.

La circulation de $\vec{E}_m$ le long du (C) fermé est donnée par :

$$e = \oint_C \vec{E}_m \cdot \vec{dl} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot \vec{dS}$$

Le circuit étant fixe, s'il est indéformable, la surface est constante.

$$\text{D'où : } \frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot \vec{dS} = \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{dS}$$

$$\text{En utilisant le théorème de Stokes : } \oint_C \vec{E}_m \cdot \vec{dl} = \iint_S \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}_m \cdot \vec{dS} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{dS}$$

$$\text{On obtient alors : } \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{Donc : } \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = -\overrightarrow{\text{rot}} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\text{D'où : } \vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Si en plus dans la région d'espace considérée règne un champ électrostatique $\vec{E}_s$ dérivant d'un potentiel électrostatique V : $\vec{E}_s = -\overrightarrow{grad}V$, on parle alors d'un champ électrique total

$$\vec{E} = \vec{E}_m + \vec{E}_s = -\overrightarrow{grad}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Alors :

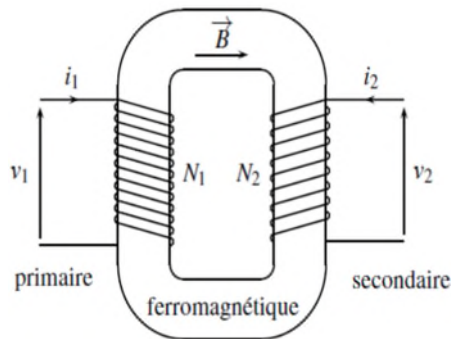
$$\overrightarrow{rot}\vec{E} = \overrightarrow{rot}(-\overrightarrow{grad}V) + \overrightarrow{rot}\left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{rot}\vec{A}$$

Finalement : $\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, Appelée relation de **Maxwell-Faraday**

Transformateur

Un **transformateur** est un appareil qui modifie l'amplitude de tensions et de courants alternatifs.

Il est constitué par deux bobinages, appelés respectivement primaire et secondaire, enroulés autour d'une carcasse **ferromagnétique**.
matériau ferromagnétique est de canaliser champ magnétique créé par le primaire, lignes de champ traversent en totalité le



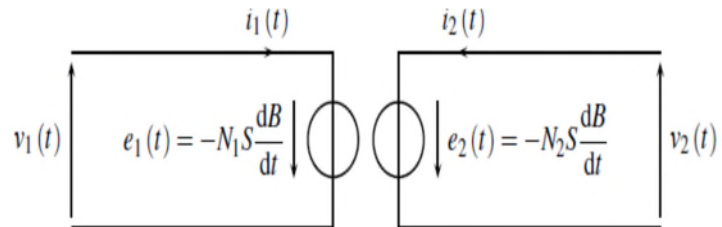
L'intérêt de les lignes de afin que ces secondaire.

Le primaire, constitué de N_1 spires, soumis à $V_1(t)$ est parcouru par $i_1(t)$. Le champ variable $B(t)$ crée un flux variable dans le secondaire. Une f.é.m est donc induite au secondaire.

Le flux total à travers les N_1 spires du primaire est donc $\phi_1(t) = N_1 B(t)S$, celui au secondaire est $\phi_2(t) = N_2 B(t)S$. Les f.é.m. induites au primaire et au secondaire sont alors :

$$e_1 = -\frac{d\phi_1}{dt} = -N_1 S \frac{dB}{dt} \quad \text{et} \quad e_2 = -\frac{d\phi_2}{dt} = -N_2 S \frac{dB}{dt}$$

Le schéma électrique équivalent est :



Donc : $V_1 = -e_1$ et $V_2 = -e_2$

Ainsi

$$\begin{cases} v_1(t) = N_1 S \frac{dB}{dt} \\ v_2(t) = N_2 S \frac{dB}{dt} \end{cases} \quad \text{implique} \quad \frac{v_2(t)}{v_1(t)} = \frac{N_2}{N_1} = m.$$

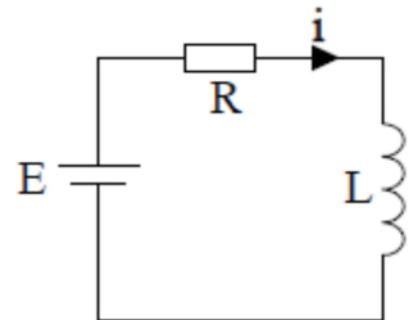
Où $m = \frac{N_2}{N_1}$ est le **rapport de transformation**.

Energie électromagnétique d'un circuit unique filiforme

Soit un circuit simple comportant un générateur de f.é.m E , une résistance R et une auto-inductance L .

La loi des mailles donne l'équation électrique du circuit :

$$E = Ri + L \frac{di}{dt}$$



Multiplions-la par idt afin de faire apparaître des énergies :

$$E idt = Ri^2 dt + L \frac{di}{dt} idt$$

Donc :

$$w = \frac{1}{2} Li^2 = \frac{1}{2} \Phi i$$

Est l'énergie stockée dans le circuit

Courant de déplacement

En régime permanent, les équations déjà obtenues sont cohérentes, mais en régime variable il apparaît une contradiction manifeste entre la forme locale d'Ampère.

On a l'équation de continuité (conservation de la charge) : $\text{div} \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$

D'après l'équation de Maxwell-Ampère (forme locale d'Ampère) : $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

Or $\text{div} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) = \mu_0 \text{div} \vec{j} = 0 \Rightarrow \text{div} \vec{j} = 0$

Cette équation est en contradiction avec l'équation de la conservation de charge en régime variable. La solution à ce problème proposée par Maxwell est d'introduire un courant fictif supplémentaire, appelé courant de déplacement noté $\vec{j}_D$.

Alors

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \vec{j}_D \Rightarrow \text{div} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) = \mu_0 \text{div} \vec{j} + \mu_0 \text{div} \vec{j}_D = 0$$

$$\Rightarrow \text{div} \vec{j}_D = -\text{div} \vec{j} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \text{Or } \text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{Donc} \quad \text{div} \vec{j}_D = \text{div} \left(\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

En fin $\vec{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Et l'équation de Maxwell-Ampère s'écrit : $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Equations de Maxwell dans le vide

En présence de charges, le champ électromagnétique satisfait aux quatre équations de Maxwell :
Formes locale et intégrale.

	Locale	Intégrale	
1	$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{\epsilon_0}$	Maxwell-Gauss (M-G)
2	$\text{div} \vec{B} = 0$	$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$	Maxwell-Flux (M-φ)
3	$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\oint_C \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$	Maxwell-Faraday (M-F)
4	$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enlacé}} + \frac{1}{c^2} \iint \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$	Maxwell-Ampère (M-A)

Les équations de Maxwell en l'absence de charges et de courant ($\rho = 0, \vec{j} = \vec{0}$) et en régime permanent.

	$\rho = 0, \vec{j} = \vec{0}$	Permanent	
1	$\text{div} \vec{E} = 0$	$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	M-G
2	$\text{div} \vec{B} = 0$	$\text{div} \vec{B} = 0$	M-φ
3	$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0}$	M-F
4	$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$	M-A

Grandeur physiques

Une grandeur physique est une propriété quantifiable de la matière, de l'espace ou d'un phénomène: elle est mesurable ou repérable. Une grandeur est qualifiée de scalaire quand elle est décrite par un seul nombre, de vectorielle si elle est définie par plusieurs nombres que l'on peut numérotter avec un seul indice (composantes d'un vecteur), et de tensorielle quand elle est décrite par un ensemble de nombres avec plusieurs indices.

Symboles

Les symboles littéraux des grandeurs sont formés à partir de caractères latins ou grecs.

Alphabet grec

Nom	Minuscules	Majuscules
Alpha	α	A
Beta	β	B
Gamma	γ	Γ
Delta	δ	Δ
Epsilon	ϵ, ε	E
Zeta	ζ	Z
Eta	η	H
Theta	θ	Θ
Iota	ι	I
Kappa	κ	K
Lambda	λ	Λ
Mu	μ	M
Nu	ν	N
Xi	ξ	Ξ
Omicron	o	O
Pi	π	Π
Rho	ρ	P
Sigma	σ	Σ
Tau	τ	T
Upsilon	υ	Υ
Phi	ϕ	Φ
Chi	χ	X
Psi	ψ	Ψ
Omega	ω	Ω

Multiples et sous-multiples

Les multiples et sous-multiples sont formés à partir de vingt préfixes que nous avons rassemblés dans la table suivante accompagnés de leurs symboles.

Facteur	Préfixe	Symbole	Facteur	Préfixe	Symbole
10^{24}	yotta	Y	10^{-24}	yocto	y
10^{21}	zetta	Z	10^{-21}	zepto	z
10^{18}	exa	E	10^{-18}	atto	a
10^{15}	peta	P	10^{-15}	femto	f
10^{12}	tera	T	10^{-12}	pico	p
10^9	giga	G	10^{-9}	nano	n
10^6	mega	M	10^{-6}	micro	μ
10^3	kilo	k	10^{-3}	milli	m
10^2	hecto	h	10^{-2}	centi	c
10^1	deka	da	10^{-1}	deci	d

«Celui qui pose une question risque cinq minutes d'avoir l'air bête, celui qui ne pose pas de question restera bête toute sa vie» *Chinois*

«Deux personnes n'apprennent pas: Le timide et l'arrogant»

Exemples de grandeurs

Elles sont présentées dans la table suivante avec leur unité, symbole et la dimension associée.

Sept unités fondamentales

Grandeur	Unité	Symbole	Dimension
Longueur	mètre	m	L
Masse	kilogramme	kg	M
Temps	seconde	s	T
Intensité électrique	ampère	A	I
Température	kelvin	K	Θ
Intensité lumineuse	candela	cd	J
Quantité de matière	mole	mol	N
Surface	mètre carré	m ²	L ²
Volume	mètre cube	m ³	L ³
Vitesse	mètre(s) par seconde	m·s ⁻¹	L·T ⁻¹
Vitesse angulaire	radian(s) par seconde	rad·s ⁻¹	T ⁻¹
Accélération	mètre(s) par seconde carrée	m·s ⁻²	L·T ⁻²
Fréquence	hertz	Hz	T ⁻¹
Masse volumique	kilogramme par mètre cube	kg·m ⁻³	M·L ⁻³
Force	newton	N	L·M·T ⁻²
Pression	pascal	Pa	L ⁻¹ ·M·T ⁻²
Energie, travail	joule	J	L ² ·M·T ⁻²
Puissance	watt	W	L ² ·M·T ⁻³
Résistance électrique	ohm	Ω	A ⁻² ·L ² ·M·T ³
Conductance électrique	siemens	S	A ² ·L ⁻² ·M ⁻¹ ·T ³
Température Celsius	degré Celcius	°C	Θ

Quelques constantes fondamentales de la physique

Constante	Symbole	Valeur(Incertitude)	Unités
Vitesse de la lumière	c	2.99792458×10^8 exact	ms^{-1}
Charge de l'électron	e	$1.60217733(49) \times 10^{-19}$	C
Masse de l'électron	m_e	$9.1093897(54) \times 10^{-31}$	kg
Permittivité du vide	ϵ_0	$8.854187817... \times 10^{-12}$ exact	F/m
Perméabilité du vide	μ_0	$12.566370614... \times 10^{-7}$ exact	NA^{-2}
Masse du proton	m_p	$1.6726231(10) \times 10^{-27}$	kg
Constante d'Avogadro	N_A	$6.0221367(36) \times 10^{23}$	mol^{-1}
Constante de Boltzmann	k	$1.380658(12) \times 10^{-23}$	JK^{-1}
Volume molaire idéal(STP)	V_m	$22.41410(19) \times 10^{-3}$	$m^3 mol^{-1}$
Rayon de Bohr	a_0	$0.529177249(24) \times 10^{-10}$	m
Magnéton de Bohr	μ_B	$5.78838263(52) \times 10^{-11}$	$MeVT^{-1}$

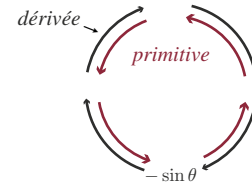
L'électron-volt est l'énergie gagnée par une charge élémentaire e sous une différence de potentiel de 1 volt

$$1 \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ As} \cdot 1 \text{ V} = 1.6 \cdot 10^{-19} [\text{As} \cdot \text{V}] = 1.6 \cdot 10^{-19} [\text{J}] \quad 1 \text{ eV} = 1.60217733(49) \times 10^{-19} \text{ J}$$

Dérivées:

$$\frac{d}{dx}x = 1 \quad \frac{d}{dx}\sin ax = a \cos ax \quad \frac{d}{dx}\cos ax = -a \sin ax$$

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1} \quad \frac{d}{dx}\ln ax = \frac{1}{x} \quad \frac{d}{dx}e^{ax} = ae^{ax}$$



Intégrales :

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$$

$$\int dx = x + C$$

$$\int \frac{dx}{x(x+a)} = -\frac{1}{a} \ln \frac{x+a}{x} + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{dx}{(a+bx)^2} = -\frac{1}{b(a+bx)} + C$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C$$

$$\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b} \ln(a+bx) + C$$

$$\int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax + C$$

$$\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax + C$$

$$\int \frac{x dx}{a+bx} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b^2} \ln(a+bx)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

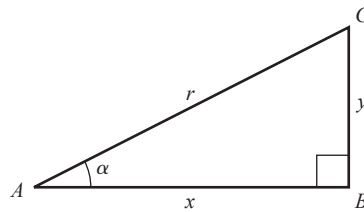
$$\int \frac{x dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} + C$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2} \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} + C$$

$$ABC, \quad x^2 + y^2 = r^2.$$

On a les fonctions :

$$\sin \alpha = y/r \quad \cos \alpha = x/r \quad \tan \alpha = y/x$$



Fonction	Réciproque	Définition de la fonction réciproque
Sin	ArcSin ou Sin ⁻¹	$y = \text{Arcsin } x \Leftrightarrow \begin{cases} \sin y = x \\ -\pi/2 \leq y \leq \pi/2 \end{cases}$
Cos	ArcCos	$y = \text{Arccos } x \Leftrightarrow \begin{cases} \cos y = x \\ 0 \leq y \leq \pi \end{cases}$
Tan	ArcTan	$y = \text{Arctan } x \Leftrightarrow \begin{cases} \tan y = x \\ -\pi/2 \leq y \leq \pi/2 \end{cases}$

$$\sin^{-1} x \neq (\sin x)^{-1}$$

Les relations

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\sin \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\sin(\alpha \pm \pi/2) = \pm \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha \pm \pi/2) = \mp \sin \alpha$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

$$\cos \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \cos \alpha$$

$$2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 + \cos \alpha$$

Développements en série

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots$$

$$\text{Si } x \ll 1, \quad (1+x)^n \sim 1 + nx$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (all x)$$

$$\text{si } x \ll 1, \quad e^x \approx 1 + x.$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \quad (|x| < 1)$$

$$\text{si } x \ll 1, \quad \ln(1+x) \approx x.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \quad (all x)$$

$$\text{si } x \ll 1, \quad \sin x \approx x.$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \quad (all x)$$

$$\text{si } x \ll 1, \quad \cos x \approx 1.$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots \quad (|x| < \pi/2)$$

$$1, \quad \tan x \approx x$$

Abréviations des unités

A	ampere	H	henry	nm	nanometer (10^{-9} m)
Å	angstrom (10^{-10} m)	h	hour	pt	pint
atm	atmosphere	Hz	hertz	qt	quart
Btu	British thermal unit	in	inch	rev	revolution
Bq	becquerel	J	joule	R	roentgen
C	coulomb	K	kelvin	Sv	seivert
°C	degree Celsius	kg	kilogram	s	second
cal	calorie	km	kilometer	T	tesla
Ci	curie	keV	kilo-electron volt	u	unified mass unit
cm	centimeter	lb	pound	V	volt
dyn	dyne	L	liter	W	watt
eV	electron volt	m	meter	Wb	weber
°F	degree Fahrenheit	MeV	mega-electron volt	y	year
fm	femtometer, fermi (10^{-15} m)	Mm	megameter (10^6 m)	yd	yard
ft	foot	mi	mile	μm	micrometer (10^{-6} m)
Gm	gigameter (10^9 m)	min	minute	μs	microsecond
G	gauss	mm	millimeter	μC	microcoulomb
Gy	gray	ms	millisecond	Ω	ohm
g	gram	N	newton		

Certains facteurs de conversion

<i>Longueur</i>	<i>Force–pression</i>
1 m = 39.37 in = 3.281 ft = 1.094 yd	1 N = 10^5 dyn = 0.2248 lb
1 m = 10^{15} fm = 10^{10} Å = 10^9 nm	1 lb = 4.448 N
1 km = 0.6214 mi	1 atm = 101.3 kPa = 1.013 bar = 76.00 cmHg = 14.70 lb/in ²
1 mi = 5280 ft = 1.609 km	<i>Masse</i>
1 lightyear = 1 c · y = 9.461×10^{15} m	1 u = $[(10^{-3} \text{ mol}^{-1})/N_A]$ kg = 1.661×10^{-27} kg
1 in = 2.540 cm	1 tonne = 10^3 kg = 1 Mg
<i>Volume</i>	1 slug = 14.59 kg
1 L = 10^3 cm ³ = 10^{-3} m ³ = 1.057 qt	1 kg weighs about 2.205 lb
<i>Temps</i>	<i>Energie–puissance</i>
1 h = 3600 s = 3.6 ks	1 J = 10^7 erg = 0.7376 ft · lb = 9.869×10^{-3} L
1 y = 365.24 d = 3.156×10^7 s	= 3.6 MJ
<i>Vitesse</i>	1 cal = 4.184 J = 4.129×10^{-2} L
1 km/h = 0.278 m/s = 0.6214 mi/h	= $\frac{101.325 \text{ J}}{10^{-19} \text{ J}}$ = 24.22 cal
1 ft/s = 0.3048 m/s = 0.6818 mi/h	1 eV = 1.602×10^{-19} J
<i>Angle–vitesse angulaire</i>	1 Btu = 778 ft · lb = 252 cal = 1054 J
1 rev = 2π rad = 360°	1 horsepower = 550 ft · lb/s = 746 W
1 rad = 57.30°	<i>Conductivité thermique</i>
1 rev/min = 0.1047 rad/s	1 W/(m · K) = 6.938 Btu · in/(h · ft ² · °F)
	<i>Champ magnétique</i>
	1 T = 10^4 G
	<i>Viscosité</i>
	1 Pa

Logarithmes: Si $\log a = x$, alors $a = 10^x$. $\log a + \log b = \log(ab)$ $\log a - \log b = \log(a/b)$ $\log(a^n) = n \log a$
 Si $\ln a = x$, alors $a = e^x$. $\ln a + \ln b = \ln(ab)$ $\ln a - \ln b = \ln(a/b)$ $\ln(a^n) = n \ln a$

Formule quadratique : Si $ax^2 + bx + c = 0$, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Géométrie

Circonférence d'un cercle de rayon r : $C = 2\pi r$
 Aire d'un cercle de rayon r : $A = \pi r^2$
 volume d'une sphère de rayon r : $V = 4\pi r^3/3$

Surface d'une sphère de rayon r : $A = 4\pi r^2$
 Volume d'un cylindre de rayon r et de hauteur h : $V = \pi r^2 h$

Scalaire et vecteur

Un scalaire est la représentation mathématique d'une grandeur non orientée : par exemple la température.

Un vecteur est la représentation mathématique d'une grandeur orientée, par exemple une force.

Opérateur

1- Opérateur gradient

L'opérateur gradient d'un champ scalaire f est défini par : $df = \overrightarrow{\text{grad}}(f) \cdot \overrightarrow{dl}$

En coordonnée cartésienne $\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$

En coordonnée cylindrique $\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$

En coordonnée sphérique $\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$

La différentielle df d'une fonction $f(x,y,z)$ s'écrit: $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$

Avec $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ dérivée partielle de $f(x,y,z)$ par rapport à x , à y et z fixés.

Le vecteur déplacement $\overrightarrow{dl}$ en coordonnées cartésiennes dans un espace de repère orthonormé de vecteur unitaire $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: $\overrightarrow{dl} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$

df apparait comme le produit scalaire d'un vecteur $\overrightarrow{\text{grad}} f$ ayant pour composante $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial z}$ et $\overrightarrow{dl}$. $df = \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot \overrightarrow{dl}$ où $\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k} = \vec{\nabla} f$.

$\vec{\nabla}$ est appelé opérateur **Nabla**.

2- Opérateur Divergence

Définition – Soit $\vec{V} : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs. La **divergence** de $\vec{V}$ est le champ scalaire sur D , noté $\text{div } \vec{V} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V}$ (produit scalaire).

En coordonnées cartésiennes

$$\text{div } \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

En Coordonnées cylindriques

$$\text{div } \vec{V} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r V_r)}{\partial r} + \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

En Coordonnées sphériques

$$\text{div } \vec{V} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(V_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi}$$

3- Opérateur Laplacien

L'opérateur Laplacien (noté Δ) est défini par :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Il peut s'appliquer à une fonction scalaire :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

ou à un vecteur :

$$\begin{aligned} \Delta \vec{V} &= \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial z^2} \\ &= \vec{e}_x \Delta V_x + \vec{e}_y \Delta V_y + \vec{e}_z \Delta V_z \end{aligned}$$

$$\Delta f = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}(f))$$

4- Opérateur Rotationnel

Définition – Soit $\vec{V} : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs. Le **rotationnel de**

$\vec{V}$ est le champ de vecteurs sur D , noté $\text{rot } \vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{V}$ (produit vectoriel).

En coordonnées cartésiennes

$$\vec{\text{rot}} \vec{V} = \begin{pmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \\ \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{pmatrix}$$

En Coordonnées cylindriques

$$(\vec{\text{rot}} \vec{V})_r = \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z}$$

$$(\vec{\text{rot}} \vec{V})_\theta = \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r}$$

$$(\vec{\text{rot}} \vec{V})_z = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) - \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right]$$

En Coordonnées sphériques

$$(\vec{\text{rot}} \vec{V})_r = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial (\sin \theta V_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial \varphi} \right]$$

$$(\vec{\text{rot}} \vec{V})_\theta = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r V_\varphi)}{\partial r}$$

$$(\vec{\text{rot}} \vec{V})_\phi = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r V_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right]$$

5- Opérateur Nabla

On définit en coordonnées cartésiennes le vecteur "symbolique" nabla, noté $\vec{\nabla}$, qui, appliqué à un scalaire, ou multiplié scalairement, ou encore vectoriellement, permet de retrouver les opérateurs d'analyse vectorielle que l'on vient de définir. Par définition, sur la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

A partir de cet opérateur, on peut retrouver les autres opérateurs :

$$\vec{\text{grad}}(f) = \vec{\nabla}(f)$$

$$\text{div}(\vec{D}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{D}$$

$$\Delta f = \vec{\nabla}^2(f)$$

$$\vec{\text{rot}}(\vec{D}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{D}$$

Propriétés des opérateurs

f et g étant des fonctions scalaires, on a :

$$\vec{\text{grad}}(fg) = f \cdot \vec{\text{grad}}(g) + g \cdot \vec{\text{grad}}(f) \quad \vec{\text{rot}}(\vec{\text{grad}}(f)) = \vec{0}$$

$$\text{div}(f \cdot \vec{D}) = f \cdot \text{div}(\vec{D}) + \vec{\text{grad}}(f) \cdot \vec{D} \quad \text{div}(\vec{\text{rot}}(\vec{D})) = 0$$

$$\vec{\text{rot}}(f \cdot \vec{D}) = f \cdot \vec{\text{rot}}(\vec{D}) + \vec{\text{grad}}(f) \wedge \vec{D} \quad \text{div}(\vec{\text{grad}} f) = \Delta f$$

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}(\vec{D})) = \vec{\text{grad}}(\text{div} \vec{D}) - \Delta(\vec{D})$$

RELATIONS VECTORIELLES

Produit mixte

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \wedge \vec{A})$$

Double produit vectoriel

$$\vec{A} \wedge \vec{B} \wedge \vec{C} = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

6-Théorème de Green-Ostrogradski ou théorème de la Divergence

Soit S une surface fermée et $\mathcal{V}$ le volume intérieur à cette surface. Il y a un lien entre le flux de $\vec{A}$ à travers flux la surface fermée S et l'intégrale de volume de la divergence de ce champ vectoriel. Cela constitue la **formule d'Ostrogradski**.

$$\oiint_{S \text{ fermée}} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iiint_{(\mathcal{V})} \text{div} \vec{A} \cdot d\mathcal{V}$$

Théorème de Stokes

Soit un contour orienté C et une surface S s'appuyant sur ce contour et orienté par la règle de la main droite.

La *circulation* du champ $\vec{A}$ sur le contour C est liée au flux du rotationnel de $\vec{A}$ à travers la surface s'appuyant sur ce contour par la **formule de Stokes** :

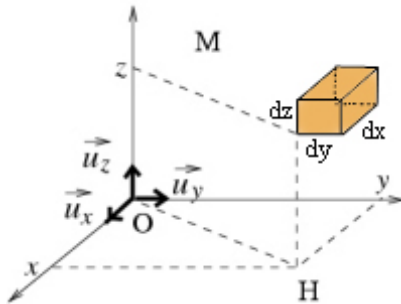
$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{(S)} \text{rot} \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

<u>RESUME</u>	Electrostatique	magnétostatique
source de champ	charges fixes	charges en mouvement
action d'une source élémentaire	$d\vec{E} = \frac{1}{4\mu\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot \vec{u}$	$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{u}}{r^2}$
circulation	conservative $\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$	non conservative $\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$ (Ampère)
flux	non conservatif $\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$ (Gauss)	conservatif $\oiint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$
équations locales	$\text{rot} \vec{E} = \vec{0}$ $\text{div} \vec{E} = \rho/\epsilon_0$	$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ $\text{div} \vec{B} = 0$
lignes de champ	- non fermées - peuvent diverger	- fermées - ne peuvent diverger
potentiel	scalaire $\vec{E} = - \text{grad } V$	vecteur $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$

Déplacements, surfaces et volumes élémentaires

Coordonnées cartésiennes

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$$



Déplacement élémentaire

$$d\overrightarrow{OM} = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z$$

Surfaces élémentaires

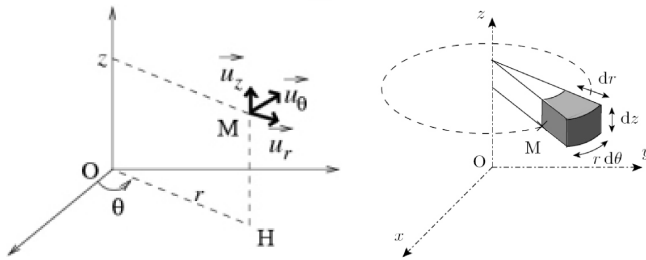
$$\begin{aligned} - d\vec{S}_z &= dxdy\vec{u}_z \\ - d\vec{S}_y &= dx dz\vec{u}_y \\ - d\vec{S}_x &= dy dz\vec{u}_x \end{aligned}$$

Volume élémentaire

$$d\tau = dxdydz$$

Coordonnées cylindriques

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + z\vec{u}_z = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z$$



Déplacement élémentaire

$$d\overrightarrow{OM} = dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta + dz\vec{u}_z$$

Surfaces élémentaires

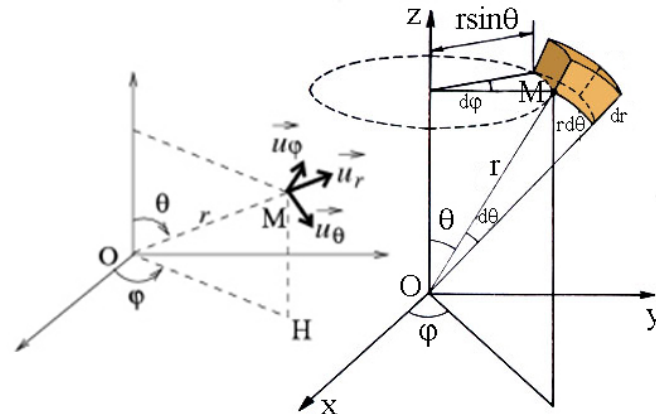
$$\begin{aligned} - d\vec{S}_z &= r dr d\theta\vec{u}_z \\ - d\vec{S}_\theta &= dr dz\vec{u}_\theta \\ - d\vec{S}_r &= r d\theta dz\vec{u}_r \end{aligned}$$

Volume élémentaire

$$d\tau = r dr d\theta dz$$

Coordonnées sphériques

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$$



Déplacement élémentaire

$$d\overrightarrow{OM} = dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta + r \sin \theta d\varphi\vec{u}_\varphi$$

Surfaces élémentaires

$$\begin{aligned} - d\vec{S}_\varphi &= r dr d\theta\vec{u}_\varphi \\ - d\vec{S}_\theta &= r dr \sin \theta d\varphi\vec{u}_\theta \\ - d\vec{S}_r &= r^2 \sin \theta d\theta d\varphi\vec{u}_r \end{aligned}$$

Volume élémentaire

$$d\tau = r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi$$