Chapitre I

Calcul matriciel TD

1 Opérations sur les matrices et propriétés

Exercice 1.1 *Ecrire la matrice* $A = (a_{ij})$ *sachant que* $A \in \mathcal{M}_{3,5}(\mathbb{R})$ *et* $a_{ij} = i + j - 1$

Exercice 1.2 *Soient* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -7 \end{pmatrix}$

CalcuLer A+B, A-B, 3A,3A-B et pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *la matrice* $\alpha A - \beta B$.

Exercice 1.3 *Pour tout* $a, b \in \mathbb{R}$ *soit* $M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & -b \\ a & a & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ *Quelle est la dimension de l'espace vectoriel* $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.
Préciser les matrices $M(0,1)$, $M(1,0)$ *et* $M(3,-6)$.
Soit $F = \{M(a,b) \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}) : a, b \in \mathbb{R}\}$. *Montrer que* F *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel, détérminer une base de* F *et sa dimension.*

Exercice 1.4 *Détérminer deux matrices* A *et* B *de* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *telles que :*
$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ *et* $A - B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 1.5 *Soient* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ *et* $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Effectuer tous les produits de ces matrices deux à deux lorsqu'ils existent.

Exercice 1.6 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(I\!R)$ *et* $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,4}(I\!R)$

Les deux produits $A\,X$ *et* $X\,A$ *sont-ils possibles ? Si oui, effectuer les.*

Exercice 1.7 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -1 \\ 4 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

i) Comparer AB *et* BA.

ii) Quelles lignes ou quelles colonnes et quelles matrices multipliez-vous pour obtenir :

. *a) la première ligne du produit* AB.

. *b) la troisième colonne du produit* BA.

iii) Calculer $B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ *et* $B \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 1.8 *Soient* $A \in \mathcal{M}_{3,5}(I\!R)$, $B \in \mathcal{M}_{5,3}(I\!R)$, $C \in \mathcal{M}_{5,1}(I\!R)$, $D \in \mathcal{M}_{3,1}(I\!R)$.

Parmi les opérations suivantes, précisez celles qui sont permises et le format des résultats :

$A(B+C)$, $A\,B\,D$, $A\,C + B\,D$ *et* $A\,B\,A\,B\,D$.

Exercice 1.9 *Soit* A *et* B *deux matrices,* $A \in \mathcal{M}_{m,n}(I\!R)$.

i) On suppose que les produits $A\,B$ *et* $B\,A$ *sont possibles.*

Quel est le format de B *? Montrer que les matrices* $A\,B$ *et* $B\,A$ *sont carrées.*

ii) On suppose que le produit $A\,B$ *est possible.*

Si la ligne k *de* A *est nulle et les colonnes* i *et* j *de* B *sont égales, que peut-on dire de la matrice* $A\,B$.

Exercice 1.10 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 3 & -2 & 1 & O \end{pmatrix}$ *Calculer* $A\,{}^tA$ *et* ${}^tA\,A$

Exercice 1.11 *Soit* E *un* $I\!R$*-espace vectoriel et* $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ *une base de* E. *Soit* $u_1 = e_1 + 2e_2 + 3e_3 + 4e_4$, $u_2 = e_2 - e_3$, $u_3 = e_1 + e_2 + 2e_3 + 2e_4$.

Donner les composantes des vecteurs u_1, u_2 *et* u_3, *puis la matrice représentant la famille* $S = \{u_1, u_2, u_3\}$ *dans la base* $\mathcal{B}$.

Calculer les composantes du vecteur $w = 4u_1 - u_2 + 3u_3$ *en utilisant le produit matriciel.*

2 Matrices carrées

Exercice 2.1 *Soient* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & O \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ *et* $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

i) Calculer AC , CA *et* AB *et* BA.

ii) Trouver toutes les matrices D *de* $\mathcal{M}_3$ *qui commutent avec* B.

Exercice 2.2 *Soient* A *et* B *deux matrices carrées d'ordre* n .

i) Développer les produits $(A-B)^2$, $(A+B)(A-B)$ *et* $(AB)^4$.

Que trouve-t-on si A *et* B *commutent ?*

ii) On suppose que A *et* B *commutent. Développer le produit* $(A+B)^3$.

iii) Développer $(I_n - A)\,(I_n + A + \cdots + A^k)$

Exercice 2.3 .

i) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. *Calculer* $A\,{}^tA$ *et* ${}^tA\,A$, *préciser leur format.*

ii) Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}$ *Montrer que les produits* $M\ {}^tM$ *et* ${}^tM\ M$ *sont des matrices symétriques, préciser leurs formats.*

ii) Montrer que si A *et* B *sont deux matricse symétriques de* $\mathcal{M}_n$, *alors la matrice* AB *est symétrique si et seulement si* A *et* B *commutent.*

Exercice 2.4 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Calculer* A^3 *et en déduire* A^n *pour* $n \in I\!N$.

Exercice 2.5 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$.

i) Calculer A^2. *En déduire que* A *est inversible et détérminer son inverse.*

ii) Calculer A^{2n} *et* A^{2n+1} *pour* $n \in I\!N$.

iii) Détérminer les suites $(u_p)_p$ *et* $(v_p)_p$ *définies par la relation de récurrence :*

$$\forall\, p \in I\!N^*, \left\{ \begin{array}{ccccc} u_p & = & 2\,u_{p-1} & + & v_{p-1} \\ v_p & = & 5\,u_{p-1} & - & 2\,v_{p-1} \\ u_0, v_0 & \in & I\!R & & \end{array} \right.$$

Exercice 2.6 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.
Calculer A^2. *En déduire que* A *n'est pas inversible. Calculer* A^n *pour* $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2.7 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
i) Détérminer la matrice J *telle que* $A = I_3 + J$.

Calculer J^2 *et* J^3. *En déduire* A^n *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

ii) Détérminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ *tels que :* $A^3 + a\,A^2 + b\,A + c\,I_3 = O$

En déduire que A *est inversible et détérminer son inverse.*

iii) Détérminer les suites x_n, y_n *et* z_n *définies par la relation de récurrence :*

$$\forall\, p \in \mathbb{N}^*, \left\{ \begin{array}{ccccc} x_p & = & x_{p-1} & + & 3\,y_{p-1} \\ y_p & = & y_{p-1} & + & 2\,z_{p-1} \\ z_p & = & z_{p-1} & & \\ x_0, y_0, z_0 & \in & \mathbb{R} & & \end{array} \right.$$