Chapitre II

Les intégrales multiples

1 Intégrales doubles

1.1 Sous-ensembles mesurables de $\mathbb{R}^2$

Définition 1.1
On appelle pavé borné (ou rectangle) de $\mathbb{R}^2$ toute partie P de la forme $P = [a, b] \times [c, d]$ tel que $a \leq b$ et $c \leq d$.
- Le rèel $m(P) = (b - a)(d - c)$ est appelé la mesure (ou l'aire) du pavé P.

$\diamond$

Soit A une partie bornée de $\mathbb{R}^2$, donc il existe un rectangle $R = [a, b] \times [c, d]$ tel que $A \subset R$. Pour avoir un quadrillage de R, on considère une subdivision $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ de $[a, b]$ et une subdivision $(y_j)_{0 \leq j \leq m}$ de $[c, d]$, On note $\sigma = \big((x_i)_{0 \leq i \leq n}\ ,\ (y_j)_{0 \leq j \leq m}\big)$ et on l'appelle un quadrillage de R.
Ainsi, σ est un quadrillage de R à l'aide des rectangles
$R_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ qui sont des pavés bornés. On pose alors:

$$S_\sigma^- = \sum_{R_{ij}\subset A} (x_{i+1}-x_i)(y_{j+1}-y_j)$$

$$S_\sigma^+ = \sum_{R_{ij}\cap A\neq\emptyset} (x_{i+1}-x_i)(y_{j+1}-y_j)$$

On note que S_σ^- represente l'aire de l'ensemble des rectangles qui sont inclus dans A alors que S_σ^+ represente l'aire de l'ensemble des rectangles qui rencontrent A. On a : $S_\sigma^- \leq S_\sigma^+$.
Si $(x'_{i'})_{0\leq i'\leq n'}$ est une subdivision de $[a,b]$ plus fine que $(x_i)_{0\leq i\leq n}$, et $(y'_{j'})_{0\leq j'\leq m'}$ est une subdivision de $[c,d]$ plus fine que $(y_j)_{0\leq j\leq m}$, alors en notant $\sigma' = \Big((x'_{i'})_{0\leq i'\leq n'}\ ,\ (y'_{j'})_{0\leq j'\leq m'}\Big)$, on obtient : $S_\sigma^- \leq S_{\sigma'}^- \leq S_{\sigma'}^+ \leq S_\sigma^+$

Définition 1.2
On dit que A est mesurable si : $\sup\limits_{\sigma\in\mathcal{P}} S_\sigma^- = \inf\limits_{\sigma\in\mathcal{P}} S_\sigma^+$
où $\mathcal{P}$ est l'ensemble des quadrillages de R.
Dans ce cas, on appelle mesure de A (ou aire de A), le nombre
$\mu(A) = \sup\limits_{\sigma\in\mathcal{P}} S_\sigma^- = \inf\limits_{\sigma\in\mathcal{P}} S_\sigma^+$ ◇

Exemple 1.1
- Les rectangles, les disques, les polygones de $\mathbb{R}^2$... sont des parties mesurables.
- Les parties (connexes) de $\mathbb{R}^2$ de la forme
$\Big\{(x,y)\in R^2/a\leq x\leq b\ et\ \phi_1(x)\leq y\leq \phi_2(x)\Big\}$
ou $\Big\{(x,y)\in R^2/c\leq y\leq d\ et\ \psi_1(y)\leq x\leq \psi_2(y)\Big\}$ sont mesurables. ◇

Proposition 1.1
Soient A et B deux parties bornées et mesurables de $\mathbb{R}^2$. On a:
1) $\mu(A)\geq 0$

2) Si $A \subset B$ alors $\mu(A) \leq \mu(B)$

3) On a $A \cap B$ et $A \cup B$ sont des parties mesurables de $\mathbb{R}^2$ et

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$$

4) $\mu(\emptyset) = 0$

5) $\mu(A + u) = \mu(A)$ où $u \in \mathbb{R}^2$ et $A + u = \{x + u / x \in A\}$

$\diamond$

1.2 Fonctions intégrables au sens de Riemann

Soient A un ensemble borné et mesurable de $\mathbb{R}^2$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie et bornée sur A et R un rectangle contenant A.
Soit la fonction χ_A (appelée fonction caractéristique de A) définie par:

$$\begin{array}{cccc} \chi_A & : & R & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longrightarrow & \left\{ \begin{array}{ll} 1 & si\ (x,y) \in A \\ 0 & si\ (x,y) \notin A \end{array} \right. \end{array}$$

On considère la fonction $\chi_A.f$ est définie sur R par:

$$(\chi_A.f)(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} f(x,y) & si\ (x,y) \in A \\ 0 & si\ (x,y) \notin A \end{array} \right.$$

Soit σ un quadrillage de R par des rectangles R_{ij}. Sur chaque rectangle R_{ij} de σ la fonction $\chi_A f$ est bornée, on pose alors:

$$\alpha_{ij}(\sigma)(f) = \inf_{(x,y) \in R_{ij}} (\chi_A f)(x,y)$$

$$\beta_{ij}(\sigma)(f) = \sup_{(x,y) \in R_{ij}} (\chi_A f)(x,y)$$

et on note alors:

$$S_\sigma^-(f) = \sum_{ij} \alpha_{ij}(\sigma)(f)(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)$$

$$S_\sigma^+(f) = \sum_{ij} \beta_{ij}(\sigma)(f)(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)$$

Il est clair qu'on a : $S_\sigma^-(f) \leq S_\sigma^+(f)$.

Définition 1.3

La fonction f est dite intégrable (au sens de Riemann) si
$\sup\limits_{\sigma \in \mathcal{P}} S_\sigma^-(f) = \inf\limits_{\sigma \in \mathcal{P}} S_\sigma^+(f)$. On notera ce nombre $\displaystyle\iint_A f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$
et on l'appelle l'intégrale double de f sur A. ◇

Exemple 1.2

Soit la fonction constante $f(x,y) = c > 0$ sur un ensemble borné A de $\mathbb{R}^2$.

On montre que cette fonction est intégrable.

Pour tout i, j, on a : $\alpha_{ij}(\sigma)(f) = \begin{cases} c & si\ R_{ij} \cap C^A = \emptyset \\ 0 & si\ R_{ij} \cap C^A \neq \emptyset \end{cases}$

et $\beta_{ij}(\sigma)(f) = \begin{cases} c & si\ R_{ij} \cap A \neq \emptyset \\ 0 & si\ R_{ij} \cap A = \emptyset \end{cases}$

où R_{ij} est un quadrillage d'un rectangle R contenant A.

On a donc:

$$S_\sigma^-(f) = \sum_{R_{ij} \subset A} c(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j) = c.S_\sigma^-$$

$$S_\sigma^+(f) = \sum_{R_{ij} \cap A \neq \emptyset} c(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j) = c.S_\sigma^+$$

Comme A est mesurable, alors :

$\mu(A) = \sup\limits_{\sigma \in \mathcal{P}} S_\sigma^- = \inf\limits_{\sigma \in \mathcal{P}} S_\sigma^+$ et donc $\sup\limits_{\sigma \in \mathcal{P}} S_\sigma^-(f) = \inf\limits_{\sigma \in \mathcal{P}} S_\sigma^+(f)$.

Ainsi, f est intégrable sur A et $\displaystyle\iint_A c\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \mu(A).c$

Cas particulier: La mesure (ou l'aire) de A est $\mu(A) = \displaystyle\iint_A 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ ◇

Proposition 1.2
Soient f et g deux fonctions définies bornées et intégrables sur un ensemble A borné et mesurable de $\mathbb{R}^2$. On a :
1) $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\iint\limits_A (af+bg)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = a\iint\limits_A f\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + b\iint\limits_A g\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$
2) Si $f \leq g$, alors $\displaystyle\iint\limits_A f\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq \iint\limits_A g\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$
3) $\displaystyle\Big|\iint\limits_A f\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\Big| \leq \iint\limits_A \big|f\big|\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq \mu(A).\ \underset{(x,y)\in A}{sup}|f(x,y)|$
4) Si A et B sont deux ensembles de $\mathbb{R}^2$ bornés mesurables et disjoints, alors,
$\displaystyle\iint\limits_{A\cup B} f\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_A f\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint\limits_B f\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ ◇

Théorème 1.1
Soient A un ensemble fermé, borné et mesurable de $\mathbb{R}^2$, et f une fonction continue sur A. Alors, f est intégrable sur A.

◇

2 Calcul des intégrales doubles

2.1 Intégrale sur un pavé

Théorème 2.1
Soit f une fonction continue sur un pavé P=$[a,b]\times[c,d]$.
Alors: $\displaystyle\iint\limits_P f(x,y)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \Big(\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x = \int_c^d \Big(\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}y$

◇

Exemple 2.1
Calculer I=$\displaystyle\iint\limits_P \frac{1}{(x+y+1)^2}\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ où P=$[0,1]\times[0,1]$

On a: I$= \displaystyle\int_0^1 \Big(\int_0^1 \frac{1}{(x+y+1)^2}\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x = -\int_0^1 \Big[\frac{1}{x+y+1}\Big]_{y=0}^{y=1}\mathrm{d}x$
$= \displaystyle\int_0^1 \Big(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\Big)\,\mathrm{d}x = \Big[\ln(x+1) - \ln(x+2)\Big]_0^1 = \ln\frac{4}{3}.$

$\diamond$

Remarque 2.1

Si la fonction f définie sur P est de la forme $f(x,y) = g(x)h(y)$, alors $\displaystyle\iint_P f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \Big(\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\Big)\Big(\int_c^d h(y)\mathrm{d}y\Big)$ $\diamond$

Exemple 2.2

Calculer $\displaystyle\iint_P xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ où $\Delta = [0,1]\times[0,1]$.

On a: $\displaystyle\iint_P xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \Big(\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\Big)\Big(\int_0^1 y\,\mathrm{d}y\Big) = \frac{1}{4}.$ $\diamond$

2.2 Intégrale sur une partie bornée de $\mathbb{R}^2$

<u>**Théorème de Fubini**</u>

Théorème 2.2

Soit D une partie bornée de $\mathbb{R}^2$, et soit f une fonction continue sur D.

-Si $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / a \le x \le b \ et \ \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x)\}$ où ϕ_1 et ϕ_2 sont des fonctions continues sur $[a,b]$ et $\phi_1(x) \le \phi_2(x)$ pour tout $x\in[a,b]$. Alors,

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \Big(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x$$

-Si D$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ / \ c \le y \le d \ et \ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\}$

où ψ_1, ψ_2 deux fonctions continues sur $[c,d]$ et vérifiant $\psi_1(x) \le \psi_2(x)$ por tout $x\in[c,d]$. Alors

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \Big(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}y$$ $\diamond$

Remarque 2.2

Le théorème 2.1 est un corollaire du théorème de Fubini. ◇

Exemple 2.3

On calcule l'intégrale I=$\displaystyle\iint_D e^{y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

où D=$\{(x,y) \in R^2 \ / \ 0 \leq x \leq 1 \ , \ x \leq y \leq 1\}$

On a I=$\displaystyle\iint_D e^{y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \Big(\int_x^1 e^{y^2}\ \mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x$

On peut aussi écrire D de la façon suivante:

D=$\{(x,y) \in R^2 \ / \ 0 \leq y \leq 1 \ , \ 0 \leq x \leq y\}$

D'où: I=$\displaystyle\int_0^1 \Big(\int_0^y e^{y^2}\ \mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}y = \int_0^1 ye^{y^2}\ \mathrm{d}y = \Big[\frac{e^{y^2}}{2}\Big]_0^1 = \frac{e-1}{2}.$ ◇

Exemple 2.4

$\displaystyle\iint_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

où D est la partie du plan limitée par les paraboles $y = x^2$ et $x = y^2$. D'où:

D=$\{(x,y) \in R^2 \ / \ 0 \leq x \leq 1 \ et \ x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$

ou D=$\{(x,y) \in R^2 \ / \ 0 \leq y \leq 1 \ et \ y^2 \leq x \leq \sqrt{y}\}$

$$\iint_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 x\ \Big(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} y\ \mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 x(x-x^4)\ \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\frac{x^3}{3} - \frac{x^6}{6}\Big]_0^1 = \frac{1}{12}.$$ ◇

Exemple 2.5

Calculer l'aire du disque(fermé) D de contre O et de rayon R dans $\mathbb{R}^2$.

On a: D= $D(O,R) = \{(x,y) \in R^2 \ / \ x^2 + y^2 \leq R\}$

Aire(D)= $\displaystyle\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

On peut écrire D de la façon suivante:

D=$\{(x,y) \in R^2 \ / \ -R \leq x \leq R \ , \ -\sqrt{R^2-x^2} \leq y \leq \sqrt{R^2-x^2}\}$
donc, Aire(D)=$\displaystyle\int_{-R}^{R}\Big(\int_{\sqrt{-R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x = 2\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\ \mathrm{d}x = 4\int_{0}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\ \mathrm{d}x$
On pose: $x = R\ cos\theta$. On a alors,
Aire(D)=4$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2\ (sin\theta)^2\ \mathrm{d}\theta = 2R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ (1-cos2\theta)\mathrm{d}\theta$
$= 2R^2\Big[\theta - \dfrac{sin\ 2\theta}{2}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2R^2\Big(\dfrac{\pi}{2}\Big) = \pi R^2.$ ◇

2.3 Cas général

Plus généralement, pour calculer l'intégrale d'une fonction continue sur une partie fermée et bornée D de $\mathbb{R}^2$, on cherchera à décomposer D en sous ensembles qui soient des pavés ou qui soient de la forme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ a \leq x \leq b \ et \ \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}$ ou $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ c \leq y \leq d \ et \ \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$.

Exemple 2.6
Calculer l'intégrale I=$\displaystyle\iint_D (x+2y)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ où D est le triangle de sommets O, $A(1,1)$, $B(2,-1)$.
Les droites OA, OB, AB ont pour équations respectives $y = x$, $y = \dfrac{-x}{2}$, $y = -2x+3$. On décompose D en deux parties D_1 et D_2 d'intérieurs disjoints en les séparant par la droite d'équation $x = 1$.
Ainsi, on a : I=$\displaystyle\iint_{D_1} (x+2y)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \ + \iint_{D_2} (x+2y)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$
$\displaystyle=\int_0^1\Big(\int_{-x/2}^{x}(x+2y)^2\,\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x \ + \int_1^2\Big(\int_{-x/2}^{-2x+3}(x+2y)^2\,\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x$
$\displaystyle=\int_0^1\ \Big[\frac{(x+2y)^3}{6}\Big]_{y=-x/2}^{x}\mathrm{d}x \ + \int_1^2\ \Big[\frac{(x+2y)^3}{6}\Big]_{y=-x/2}^{-2x+3}\mathrm{d}x$
$\displaystyle=\frac{27}{6}\int_0^1 x^3\mathrm{d}x \ + \ \frac{27}{6}\int_1^2(-x+2)^3\mathrm{d}x$
$\displaystyle=\frac{27}{24}+\frac{27}{24}\Big[(-x+2)^4\Big]_1^2 = \frac{27}{12}.$ ◇

2.4 Formule de changement de variables pour une intégrale double

Théorème 2.3

Soient D et D' deux ouverts bornés dans $\mathbb{R}^2$. Soit $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ un C^1-difféomorphisme de D sur D'. On pose: $\psi = \phi^{-1} = (\psi_1, \psi_2)$. Soit f une fonction réelle continue sur D; on a:

$$\iint\limits_D f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 = \iint\limits_{D'} f(\psi(y_1, y_2)).\left|\frac{D(\psi_1, \psi_2)}{D(y_1, y_2)}(y)\right|\,\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}y_2 \qquad \diamond$$

Exemple 2.7

Calculer $\displaystyle\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

où D est l'ensemble intérieur au cercle $C((0,0),3)$ et extérieur au cercle de $C((1,0),1)$.

On a D=D$_1\cup$D$_2$ avec D$_1 = \{(x,y) \in D \ / \ x \geq 0\}$,

D$_2 = \{(x,y) \in D \ / \ x \leq 0\}$. Ainsi, $\displaystyle\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_1} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint\limits_{D_2} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

-Calculons l'intégrale $\displaystyle\iint\limits_{D_1} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

On utilise les coordonnées polaires en posant: $\begin{cases} x &= rcos\theta \\ y &= rsin\theta \end{cases}$

On a donc un C^1-difféomorphisme

$$\begin{array}{cccc} \phi & : & D_1 & \longrightarrow & \Delta_1 = [0,3]\times[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \\ & & (x,y) & \longrightarrow & (r,\theta) \end{array}$$

Le jacobien de la réciproque de ϕ_1 est $\displaystyle\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)}(r,\theta) = \begin{vmatrix} cos\theta & -rsin\theta \\ sin\theta & rcos\theta \end{vmatrix} = r$

Donc, d'après le théorème de changement de variables des intégrales doubles, on a: $\displaystyle\iint\limits_{D_1} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Delta_1} r^2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \Big(\int_0^3 r^2\mathrm{d}r\Big)\Big(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \mathrm{d}\theta\Big) = 9\pi.$

-Calculons, maintenant, la deuxième intégrale $\iint\limits_{D_2} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

Les équations polaires des cercles C(O,3) et C((1,0),1) sont respectivement $r=3$ et $r=2cos\theta$ car:

l'équation cartésienne du C(O,3) qui est $x^2+y^2=9$ donne $r=3$ et l'équation cartésienne du C((1,0),1) qui est $(x-1)^2+y^2=1$ donne $r=2cos\theta$.

On a donc, le C^1-difféomorphisme

$$\begin{array}{cccc} \phi & : & D_2 & \longrightarrow & \Delta_2 \\ & & (x,y) & \longrightarrow & (r,\theta) \end{array}$$

où $\Delta_2=\{(r,\theta)\ /\ \frac{-\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2},\ 2cos\theta\leq r\leq 3\}$

Ainsi, $\iint\limits_{D_2} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Delta_2} r^2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$

$=\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\Big(\int_{2cos\theta}^{3} r^2\mathrm{d}r\Big)\mathrm{d}\theta=\frac{1}{3}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(27-8(cos\theta)^3)\mathrm{d}\theta$

or, $cos^3\theta=\frac{1}{8}(2cos3\theta+6cos\theta)$

d'où $\iint\limits_{\Delta_2} r^2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta=9\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta-\frac{1}{3}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(2cos3\theta+6cos\theta)\mathrm{d}\theta$

$=9\pi-\frac{1}{3}\Big(\frac{2}{3}sin3\theta+6sin\theta\Big)_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=9\pi-\frac{32}{9}$

Finalement, on a : $\iint\limits_{D} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=18\pi-\frac{32}{9}$. ◇

Exemple 2.8

D=$\{(x,y)\in(\mathbb{R}_+)^2\ /\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1\}$ avec $a>0$, $b>0$

Calculer $\iint\limits_{D} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

On pose: $x=ar\ cos\ \theta$, $y=br\ sin\ \theta$, on a : $\phi: D\longrightarrow D'$, $(x,y)\longrightarrow(r,\theta)$,

$\phi^{-1}=\psi:(r,\theta)\longrightarrow(ar\ cos\ \theta, ab\ sin\ \theta)$

et $\phi(D)=D'=[0,1]\times[0,\frac{\pi}{2}]$

$$\frac{D(\psi_1,\psi_2)}{D(r,\theta)}=\begin{vmatrix} a\ cos\theta & -ar\ sin\theta \\ b\ sin\theta & br\ cos\theta \end{vmatrix}=abr$$

D'où: $\displaystyle\iint_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = a^2b^2 \iint_{D'} r^3\, cos\theta\ sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$

$$=a^2b^2\Big(\int_0^1 r^3\ \mathrm{d}r\Big)\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos\theta\ sin\theta\ \mathrm{d}\theta\Big) = \frac{a^2b^2}{8}. \qquad \diamond$$

Exemple 2.9

$\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)(y^2-x^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, où

D=$\{(x,y)\in(\mathbb{R}_+)^2\ /\ a\le xy\le b,\ y\ge x,\ y^2-x^2\le 1\}$

On pose: $u=xy$, $v=y^2-x^2$

$\phi:(x,y)\longrightarrow(u,v)$

$\psi=\phi^{-1}:(u,v)\longrightarrow(x,y)$

$\phi(D)=[a,b]\times[0,1]$ car $a\le u\le b$ d'après $a\le xy\le b$

et $0\le v\le 1$ d'après $y\ge x,\ y^2-x^2\le 1$

$\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} y & x \\ -2x & 2y \end{vmatrix} = 2(y^2+x^2)$ entraîne que

$\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} = \dfrac{1}{2(y^2+x^2)}$

Comme ϕ est C^1, injective et Jϕ inversible, alors ϕ est C^1-difféomorphisme.

Ainsi, $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)(y^2-x^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\phi(D)} v(x^2+y^2)\frac{1}{2(y^2+x^2)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$

$$=\frac{1}{2}\iint_{\phi(D)} v\ \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\Big(\int_a^b \mathrm{d}u\Big)\Big(\int_0^1 v\ \mathrm{d}v\Big) = \frac{b-a}{4}. \qquad \diamond$$

3 Calcul des intégrales triples

3.1 Intégrale sur un pavé

Théorème 3.1

Soit f une fonction continue sur un pavéde $\mathbb{R}^3$, P=$[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]$.

Alors:
$$\iiint_P f(x,y,z)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z = \int_{a_1}^{b_1}\Big(\int_{a_2}^{b_2}\Big(\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\ \mathrm{d}z\Big)\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x$$
◇

Exemple 3.1

Calculer I=$\iiint_P (x+y+z)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$ où D=$[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$

On a: I=$\int_0^1\Big(\int_0^1\Big(\int_0^1 (x+y+z)\mathrm{d}z\Big)\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}y$

$$= \int_0^1\Big(\int_0^1\Big((x+y)z+\frac{z^2}{2}\Big)_0^1\ \mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}y$$
$$= \int_0^1\Big(\int_0^1 ((x+y)+\frac{1}{2})\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}y = \int_0^1\Big(\frac{x^2}{2}+(y+\frac{1}{2})x\Big)_0^1\ \mathrm{d}y$$
$$= \int_0^1 (1+y)\mathrm{d}y = \frac{3}{2}.$$

◇

3.2 Intégrale sur une partie bornée de $\mathbb{R}^3$

Théorème 3.2

Soit E une partie bornée de $\mathbb{R}^3$ telle que E=$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ /\ (x,y)\in$D et $\phi_1(x,y)\le z\le\phi_2(x,y)\}$ où D est une partie bornée de $\mathbb{R}^2$, ϕ_1 et ϕ_2 deux fonctions continues sur D telles que: $\forall(x,y)\in$D, $\phi_1(x,y)\le\phi_2(x,y)$.

Si f est une fonction continue et bornée sur E, alors
$$\iiint_E f(x,y,z)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z = \iint_D\Big(\int_{\phi_1(x,y)}^{\phi_2(x,y)} f(x,y,z)\ \mathrm{d}z\Big)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$$

◇

Exemple 3.2

Calculer le volume de la boule B de $\mathbb{R}^3$ de centre O et de rayon R.

On a B= $\{(x,y,z)/\ x^2+y^2+z^2\le R^2\}$

V(B)=$\iiint_B \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

On peut écrire B de la façon suivante:

B=$\{(x,y,z)/\ (x,y) \in D\ ,\ -\sqrt{R^2-x^2-y^2} \leq z \leq \sqrt{R^2-x^2-y^2}\}$ où

D=$\{(x,y)/\ x^2+y^2 \leq R^2\}$

Donc, V(B)=$\iint_D \Big(\int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \mathrm{d}z\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=2\iint_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=2\int_0^R\int_0^{2\pi} \sqrt{R^2-r^2}\,r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$ à l'aide des coordonnées polaires.

$=4\pi\int_0^R r\sqrt{R^2-r^2}\,\mathrm{d}r = 4\pi\Big[-\frac{(R^2-r^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\Big]_0^R = \frac{4}{3}\pi R^3.$ ◇

3.3 Autre façon de calculer une intégrale triple sur une partie bornée

Théorème 3.3

Soit f une fonction continue sur une partie bornée D telle que D=$\{(x,y,z) \in R^3\ /\ a \leq z \leq b\ ,\ (x,y) \in D_z\}$

où D_z est une partie bornée de $\mathbb{R}^2$. On a alors:

$$\iiint_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_a^b \Big(\iint_{D_z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}z$$

◇

Remarque 3.1

Dans les théorèmes 3.2 et 3.3 on peut échanger les rôles de x, y et z. ◇

3.4 Formule de changement de variables pour une intégrale triple

Théorème 3.4

Soient D et D' deux ouverts bornés dans $\mathbb{R}^3$. Soit $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ un C^1-difféomorphisme de D sur D'. On pose: $\psi = \phi^{-1} = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$. Soit f une fonction réelle continue et bornée sur D; on a:

$$\iiint_D f(x_1, x_2, x_3)\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2\, \mathrm{d}x_3$$

$$= \iiint_{D'} f(\psi(y_1, y_2, y_3)).\left|\frac{D(\psi_1, \psi_2, \psi_3)}{D(y_1, y_2, y_3)}(y)\right| \mathrm{d}y_1\, \mathrm{d}y_2\, \mathrm{d}y_3 \qquad \diamond$$

Exemple 3.3

Calculer $\iiint_D z\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$

où D=$\{(x, y, z) \in (R^3_+) \;/\; x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$.

On utilise les coordonnées sphériques, en posant: $\begin{cases} x &= rsin\theta\; cos\phi \\ y &= rsin\theta\; sin\phi \\ z &= rcos\theta \end{cases}$

L'application $\begin{array}{cccc} \alpha & : & D & \longrightarrow & \Delta \\ & & (x, y, z) & \longrightarrow & (r, \theta, \phi) \end{array}$

est un C^1-difféomorphisme de D sur $\Delta = \alpha(D) = [0, 1] \times [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}]$

Le jacobien de sa réciproque $\begin{array}{cccc} \alpha^{-1} & : & \Delta & \longrightarrow & D \\ & & (r, \theta, \phi) & \longrightarrow & (x, y, z) \end{array}$

est $\dfrac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, \phi)} = \begin{vmatrix} sin\theta cos\phi & rcos\theta cos\phi & -rsin\theta sin\phi \\ sin\theta sin\phi & rcos\theta sin\phi & rsin\theta cos\phi \\ cos\theta & -rsin\theta & 0 \end{vmatrix}$

$= cos\theta(r^2 cos\theta sin\theta) + rsin\theta(rsin^2\theta) = r^2 sin\theta.$

D'où: $\iiint_D z\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \iiint_\Delta r^3 cos\theta |sin\theta|\, \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi$

$$=\iiint_\Delta r^3 cos\theta sin\theta \, \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$
$$=\Big(\int_0^1 r^3\mathrm{d}r\Big)\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos\theta sin\theta\mathrm{d}\theta\Big)\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\phi\Big) = \frac{\pi}{8}\Big[\frac{sin^2\theta}{2}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{16}. \qquad \diamond$$

Exemple 3.4

Calculer le volume de la partie D de la boule de centre O et de rayon R, comprise entre les plans d'équations $z = h_1$ et $z = h_2$ $(-R \leq h_2 \leq h_1 \leq R)$.

On utilise les coordonnées cylindriques, en posant: $\begin{cases} x &= rcost \\ y &= rsint \\ z &= z \end{cases}$

Ainsi, l'équation de la sphère S$=\{(x,y,z)\ /\ x^2+y^2+z^2 = R^2\}$ devient $r^2+z^2 = R^2$.

L'application $\begin{array}{cccc} \phi & : & D & \longrightarrow & \Delta \\ & & (x,y,z) & \longrightarrow & (r,t,z) \end{array}$

est un C[1]-difféomorphisme de D sur Δ

où $D = \{(x,y,z)/x^2+y^2+z^2 \leq R^2, h_2 \leq z \leq h_1\}$

et $\Delta = \{(r,t,z)/h_2 \leq z \leq h_1, -\pi \leq t \leq \pi, 0 \leq r \leq \sqrt{R^2-z^2}\}$. Le jacobien de sa réciproque est:

$\dfrac{D(x,y,z)}{D(r,t,z)} = \begin{vmatrix} cost & -rsint & 0 \\ sint & rcost & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$. On a : Vol(D)$=\iiint_D \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z =$

$$\iiint_\Delta r\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}t\ \mathrm{d}z$$
$$=\iint_{\Delta_1}\Big(\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} r\mathrm{d}r\Big)\mathrm{d}t\mathrm{d}z, \text{ où } \Delta_1 = [-\pi,\pi]\times[h_2,h_1]$$
$$=\iint_{\Delta_1}\frac{R^2-z^2}{2}\mathrm{d}t\mathrm{d}z = \Big(\int_{h_2}^{h_1}\frac{R^2-z^2}{2}\mathrm{d}z\Big)\Big(\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}t\Big)$$
$$=\pi\Big[R^2z-\frac{z^3}{3}\Big]_{h_2}^{h_1} = \pi\Big(R^2(h_1-h_2)-\frac{1}{3}(h_1^3-h_2^3)\Big).$$

- Si $h_1 = R$ et $h_2 = -R$, alors on retrouve le volume de la boule de centre O et de rayon R, $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

$\diamond$