Université Moulay Ismail
Faculté des Sciences - Meknès
Département de Mathématiques

Cours d'Analyse VI :

CALCUL INTEGRAL
ET
FORMES DIFFERENTIELLES

Mostafa KHALOUI

SMA (S4) - 2020/2021

Chapitre I

Intégrales dépendant d'un paramètre

1 Introduction

Le but de ce chapitre est l'étude des fonctions F de la forme $F(x) = \displaystyle\int_J f(x,t)\, \mathrm{d}t$ où f est une fonction de deux variables définie sur $I \times J$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ avec I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.

L'étude de la continuité, la dérivabilité de F et la limite de $F(x)$ quand x tend vers un point adhérent à I, va nous conduire naturellement à intervertir la limite et le signe somme (d'intégration) dans le cas de la continuité et le calcul des limites, et à intervertir la dérivée avec le signe somme dans le cas de la dérivation.

2 Théorème de la convergence dominée (TCD)

Le but de ce paragraphe est l'étude de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_J f_n(t)\, \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_J f_n(x)\, \mathrm{d}x$ où (f_n) est une suite de fonctions définies sur un intervalle J.

2.1 Cas de la convergence uniforme de (f_n) sur un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$

Théorème 2.1

Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $I = [a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose que (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction f. Alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_I \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ $\diamond$

Preuve: Pout tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} |\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t| \leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)|\,\mathrm{d}t &\leq \int_a^b ||f_n - f||_\infty\,\mathrm{d}t \\ &= (b-a).||f_n - f||_\infty \end{aligned}$$

Comme f_n converge uniformément vers f sur $I = [a,b]$, alors $||f_n - g||_\infty \longrightarrow 0$ quand n tend vers $+\infty$. Par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_I f(t)\,\mathrm{d}t$.

2.2 TCD pour les suites de fonctions

Le théorème suivant dit théorème de la convergence dominée permet d'intervertir la limite et le signe somme sans la convergence uniforme, et sur un intervalle quelconque.

Rappel sur la continuité par morceaux :

Une fonction f est dite continue par morceaux sur un segment $[a,b]$ si et seulement si il existe une subdivision $a_0 = a < a_1 < \dots < a_n = b$ telle que sa restriction à tout intervalle ouvert $]a_i, a_{i+1}[$ coincide avec une fonction g_i continue sur le segment $[a_i, a_{i+1}]$.

Théorème 2.2

Soient I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$, (f_n) une suite de fonctions continues

par morceaux sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, tels que:
i) la suite (f_n) cvg simplement vers une fonction f;
ii) la fonction f est continue par morceaux sur I;
iii) (hypothèse de domination) Il existe une fonction ϕ continue par morceaux sur I et intégrable sur I telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in I$, $|f_n(x)| \leq \phi(x)$.
Alors: f_n et f sont intégrables,
et $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_I f_n(t)\, \mathrm{d}t = \int_I \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)\, \mathrm{d}t$ $\diamond$

Exemple 2.1
Soit la suite d'intégrales suivantes $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2+1)^n}\, \mathrm{d}t$. On note par (f_n) la suite telle que pour tout $t \in [0, +\infty[$, $f_n(t) = \frac{1}{(t^2+1)^n}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue (par morceaux) sur $[0, +\infty[$;
- la suite f_n converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers la fonction $f(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t > 0 \\ 1 & si \quad t = 0 \end{cases}$ qui est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.
- Pour l'hypothèse de domination, on a: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in [0, +\infty[$, $|f_n(t)| \leq \phi(t) = \frac{1}{t^2+1}$, et ϕ est une fonction continue (par morceaux) et intégrable sur $[0, +\infty[$ (car $\phi \geq 0$ et équivalente à $\frac{1}{t^2}$ en $+\infty$).
D'après le TCD, $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \int_0^{+\infty} f(t)\, \mathrm{d}t = 0$. $\diamond$

2.3 TCD pour les séries de fonctions

Le théorème suivant permet d'intégrer une série de fonctions terme à terme.

Théorème 2.3
Soit (f_n) une suite de fonctions définies et continues par morceaux sur un

intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose que:
i) la série de fonctions de terme général f_n converge simplement sur I vers une fonction S;
ii) la fonction S est continue par morceaux sur I;
iii) la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |f_n(x)|\,\mathrm{d}x$ est convergente.
Alors,

- Les fonctions f_n et S sont intégrables sur I;
- $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_I \big(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\big)\,\mathrm{d}x.$ ◇

Remarque 2.1
On obtient le même résultat si on remplace l'hypoyhèse iii) par l'hypothèse de domination iii)' : Il existe une fonction g continue par morceaux et intégrable sur I telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|\sum_{k=0}^{n} f_k| \leq g$. On obtient alors le TCD pour les séries de fonctions. ◇

Exemple 2.2
Caculer la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x - 1}\,\mathrm{d}x$ en fonction d'une série numérique.
On pose $f(x) = \frac{x^2}{e^x - 1}$. Pour $x \in]0, +\infty[$, on a: $0 < e^{-x} < 1$ et donc

$$f(x) = \frac{x^2}{e^x(1 - e^{-x})} = x^2 e^{-x} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^2 e^{-(n+1)x}.$$

On note $f_n(x) = x^2 e^{-(n+1)x}$.
- Chaque f_n est continue (par morceaux) sur $]0, +\infty[$ et la série de fonctions de terme général f_n converge simplement vers la fonction f sur $]0, +\infty[$;
- la fonction f est continue (par morceaux) sur $]0, +\infty[$;
- on a : $\int_0^{+\infty} |f_n(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-(n+1)x}\,\mathrm{d}x$

En posant $t = (n+1)x$, on obtient
$\int_0^{+\infty} (\frac{t}{n+1})^2\, e^{-t} \frac{dt}{n+1} \;=\; \frac{1}{(n+1)^3} \int_0^{+\infty} \; t^2 e^{-t}\; \mathrm{d}t \;=\; \frac{2}{(n+1)^3}$
La série de terme général $\int_0^{+\infty} |f_n(x)|\; \mathrm{d}x$ est convergente car $\frac{2}{(n+1)^3} \sim \frac{2}{n^3}$
D'après le théorème d'intégration terme à terme, on a: $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x - 1}\; \mathrm{d}x =$
$\int_0^{+\infty} f(x)\; \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \big(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\big)\; \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\; \mathrm{d}x$
$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(n+1)^3} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^3}$. ◇

3 Continuité des intégrales dépendant d'un paramètre

Théorème 3.1

Soient I et J deux intervalles (non vides) de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction définie sur $I \times J$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $(x,t) \longrightarrow f(x,t)$ telle que:

i) $\forall x \in I$, la fonction $t \longrightarrow f(x,t)$ est continue par morceaux sur J;

ii) $\forall t \in J$, la fonction $x \longrightarrow f(x,t)$ est continue sur I;

iii) (hypothèse de domination) Il existe une fonction ϕ définie, continue par morceaux et intégrable sur J telle que pour tout $(x,t) \in I \times J$, $|f(x,t)| \leq \phi(t)$

Alors, la fonction F définie sur I par $F(x) = \int_J f(x,t)\; dt$ est continue sur I.

◇

Preuve:

Pour tout $x \in I$, la fonction $t \longrightarrow f(x,t)$ est intégrable sur J d'après l'hypothèse de domination. Donc, $F(x)$ existe.

Soit $a \in I$, et soit (x_n) une suite de I telle que $\lim_{n \to +\infty} x_n = a$. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in J$, $g_n(t) = f(x_n, t)$. Vérifions les hypothèses du théorème de la convergence dominée. Pour tout $n \in I\!N$, g_n est continue par morceaux et intégrables sur J, et puisque pour tout $t \in J$, la fonction $x \longrightarrow f(x,t)$ est continue sur I alors (g_n) converge simplement sur J vers la fonction $t \longrightarrow f(a,t)$ qui est continue par morceaux sur J. On a pour tout $n \in I\!N$ et $t \in J$, $|g_n(t)| = |f(x_n,t)| \leq \phi(t)$. Donc, d'après le théorème de la convergence dominée la suite $\displaystyle\int_J f(x_n,t)\,\mathrm{d}t$ converge vers $\displaystyle\int_J f(a,t)\,\mathrm{d}t$, c'est-à-dire $F(x_n) \longrightarrow F(a)$ quand $n \longrightarrow +\infty$, d'où F est continue en a, et par conséquent F est continue sur I.

Exemple 3.1
Soit $F : x \longrightarrow \displaystyle\int_0^{+\infty} sin(xt)e^{-t^2}\mathrm{d}t$
On montre que F est définie et continue sur $I\!R$.
Soit $x \in I\!R$, la fonction $t \longrightarrow f(x,t) = sin(xt)e^{-t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} sin(xt)e^{-t^2}\mathrm{d}t$ est convergente car $|t^2 sin(xt)e^{-t^2}| \longrightarrow 0$ quand $t \longrightarrow +\infty$(puisque $|t^2 sin(xt)e^{-t^2}| \leq t^2e^{-t^2}$). Donc, F est définie sur $I\!R$.
On a: pour tout $x \in I\!R$, la fonction $t \longrightarrow f(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$, et pour tout $t \geq 0$, la fonction $x \longrightarrow f(x,t)$ est continue sur $I\!R$. L'hypothèse de domination est vérifiée car pour tout $(x,t) \in I\!R \times [0,+\infty[$, $|f(x,t)| \leq e^{-t^2} = \phi(t)$, et la fonction ϕ est continue par morceaux et intégrable sur $[0,+\infty[$ (car $t^2e^{-t^2} \longrightarrow 0$ quand $t \longrightarrow +\infty$). Donc, d'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, F est continue sur $I\!R$. $\diamond$

Remarque 3.1
Le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre permet d'écrire, lorsque $a \in I$ et F continue en a, que $\displaystyle\lim_{x\to a}\int_J f(x,t)\mathrm{d}t = \int_J f(a,t)\mathrm{d}t$. Le théorème suivant donne le même résultat quand a est un point adhérent à I. $\diamond$

Passage à la limite sous le signe somme

Théorème 3.2

Soient I et J deux intervalles (non vides) de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction définie sur $I \times J$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $(x,t) \longrightarrow f(x,t)$, et soit α un réel ou infini, adhérent à I tels que:

i) $\forall x \in I$, la fonction $t \longrightarrow f(x,t)$ est continue par moceaux sur J;

ii) $\forall t \in J$, la fonction $x \longrightarrow f(x,t)$ est continue sur I et a une limite $l(t)$ quand $x \to \alpha$, et de plus la fonction l est continue par morceaux sur J;

iii) (hypothèse de domination) Il existe une fonction ϕ définie, continue par morceaux et intégrable sur J telle que: $\forall (x,t) \in I \times J$, $|f(x,t)| \leq \phi(t)$

Alors, la fonction $F(x) = \displaystyle\int_J f(x,t)\, \mathrm{d}t$ a une limite en α

et $\displaystyle\lim_{x\to\alpha} \int_J f(x,t)\mathrm{d}t = \int_J \lim_{x\to\alpha} f(x,t)\mathrm{d}t = \int_J l(t)\mathrm{d}t.$ ◇

Exemple 3.2

Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x^2t^2}\mathrm{d}t$. Pour $x > 0$, la fonction $t \longrightarrow f(x,t) = e^{-x^2t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^2 e^{-x^2t^2} = 0$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2t^2}\mathrm{d}t$ est convergente. Ainsi, F est définie sur $]0,+\infty[$.

On a : - $\forall x \in [1,+\infty[$, la fonction $t \longrightarrow f(x,t)$ est continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$.

- $\forall t \in]0,+\infty[$, la fonction $x \longrightarrow f(x,t)$ a une limite $l(t) = 0$ quand $x \to +\infty$, et bien evidement la fonction l est continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$.

- L'hypothèse de domination : on a $\forall x \geq 1$, $\forall t > 0$, $|f(x,t)| = e^{-x^2t^2} \leq \phi(t) = e^{-t^2}$ et ϕ est continue (par morceaux) et intégrable sur $]0,+\infty[$. Donc, F a une limite en $+\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} 0\ \mathrm{d}t = 0.$ ◇

4 Dérivabilité des intégrales à paramètres

Dérivation sous le signe somme

Théorème 4.1
Soient I et J deux intervalles (non vides) de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction définie sur $I \times J$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $(x,t) \longrightarrow f(x,t)$ tels que:
i) $\forall x \in I$, la fonction $t \longrightarrow f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur J;
ii) La fonction f admet, sur $I \times J$ une dérivée partielle par rapport à x et vérifiant:

- $\forall x \in I$, la fonction $t \longrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur J;
- $\forall t \in J$, la fonction $x \longrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur I;

iii) (hypothèse de domination) Il existe une fonction ψ, définie, continue par morceaux et intégrable sur J telle que, $\forall (x,t) \in I \times J$, $|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)| \leq \psi(t)$
Alors, la fonction $F(x) = \displaystyle\int_J f(x,t)\ \mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur I et $\forall x \in I$, $F'(x) = \displaystyle\int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\ \mathrm{d}t$ ◇

Exemple 4.1
Calculer, par dérivation, la fonction $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2} e^{-2\pi i x t}\ \mathrm{d}t$
Posons $f(x,y) = e^{-\pi t^2} e^{-2\pi i x t}$. On a:
i) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ la fonction $t \longrightarrow f(x,t)$ est continue (par morceaux) et intégrable sur $\mathbb{R}$ car $|f(x,t)| \leq e^{-\pi t^2}$ pour $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, et $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} t^2 e^{-\pi t^2} = 0$.
ii) f admet une dérivée partielle par rapport à x, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -2\pi i t e^{-\pi t^2} e^{-2\pi i x t}$ telle que:
- $\forall x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \longrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}$;

- $\forall t \in \mathbb{R}$, la fonction $t \longrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$;
iii) hypothèse de domination: on a $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2$, $|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)| \leq 2\pi|t|e^{-\pi t^2}$, et la fonction $\psi(t) = 2\pi|t|e^{-\pi t^2}$ est continue (par morceaux) et intégrable sur $\mathbb{R}$.
Donc, d'après le théorème de la dérivation sous le signe somme, la fonction $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2} e^{-2\pi ixt}\, dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $F'(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} -2\pi ite^{-\pi t^2} e^{-2\pi ixt} dt$
Par intégration par parties, on a $F'(x) = -2\pi x F(x)$, d'où $F(x) = Ae^{-\pi x^2}$ avec $A = F(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2}\, dt = 1$. Finalement, $F(x) = e^{-\pi x^2}$ $\diamond$

Généralisation de la dérivation sous le signe somme

Théorème 4.2

Soient I et J deux intervalles (non vides) de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction définie sur $I \times J$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $(x,t) \longrightarrow f(x,t)$ tels que:
i) $\forall x \in I$, la fonction $t \longrightarrow f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur J;
ii) La fonction f admet, sur $I \times J$ des dérivées partielles par rapport à x jusqu'à l'ordre $n \geq 1$ et vérifiant:

- $\forall k = 1, ..., n$, $\forall x \in I$, la fonction $t \longrightarrow \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux sur J;
- $\forall k = 1, ..., n$, $\forall t \in J$, la fonction $x \longrightarrow \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue sur I;

iii) (hypothèse de domination) $\forall k = 1, ..., n$, il existe une fonction ψ_k, définie, continue par morceaux et intégrable sur J telle que, $\forall (x,t) \in I \times J$, $|\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)| \leq \psi_k(t)$
Alors, la fonction $F(x) = \displaystyle\int_J f(x,t)\, dt$ est de classe C^n sur I et $\forall k = 1, ..., n$
$\forall x \in I$, $F^{(k)}(x) = \displaystyle\int_J \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\, dt$. $\diamond$