Université Moulay Ismail
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2020-2021
SMA - S4
Analyse 6

Série $n^o 1$

Exercice 1: Soit la suite de fonctions f_n définies par $f_n(x) = \dfrac{2n}{\pi(1+n^2x^2)}$ où $x \in [0,1]$.

1) Etudier la convergence simple et la convergence uniforme de f_n sur $]0,1]$.

2) Etudier la convergence uniforme de f_n sur $[a,1]$ où $0 < a < 1$.

3) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 2: Calculer la limite de suite (I_n) telle que: $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^n + e^t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 3: Déterminer le domaine de définition de la fonction: $H(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^2+x^2}$.

Exercice 4: On pose, pour $x \in [1,+\infty]$, $F(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{x + sint}\,\mathrm{d}t$

1) Vérifier que F est bien définie sur $[1,+\infty[$.

2) Montrer que F est continue sur $[1,+\infty[$.

Exercice 5: Pour $x \in]0,+\infty[$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{lnt}{t^2+x}\,\mathrm{d}t$

1) Justifier l'existence de $F(x)$;

2) Montrer que F est C^∞ sur $]0,+\infty[$;

3 Calculer $F(1)$, et en déduire l'expression de F.

Exercice 6: Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{Shx}\,\mathrm{d}x$,
en l'écrivant comme somme d'une série.

<u>Exercice 7</u>: (calcul de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$)

Soient les fonctions définies par $F(x) = (\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}x)^2$ et $G(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que F et G sont de classe C^1 sur $\in \mathbb{R}$ et calculer F' et G'.

2) Montrer que la fonction $F+G$ est constante sur $\mathbb{R}$.

3) En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

<u>Exercice 8</u> (Facultatif): Par dérivation, calculer pour $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2} e^{-2\pi i x t}\,\mathrm{d}t$

<u>Exercice 9</u> (Facultatif): On pose pour $z \in$, $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t$. On note D l'ensemble de définition de Γ.

1) Montrer que D= $\{z \in /Re(z) \geq 0\}$

2) Montrer que $\forall z \in$ D, $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$

3) Montrer que Γ est C^∞ sur $]0, +\infty[$