Chapitre I

Calcul matriciel TD

1 Opérations sur les matrices et propriétés

Exercice 1.1. *Ecrire la matrice* $A = (a_{ij})$ *sachant que* $A \in \mathcal{M}_{3,5}(I\!R)$ *et* $a_{ij} = i + j - 1$

Solution. *:*

On a $A \in \mathcal{M}_{3,5}(I\!R)$ *et* $a_{ij} = i + j - 1$ *où* $i \in \{1, 2, 3\}$ *et* $j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Alors $a_{1j} = j$, $a_{2j} = j + 1$ *et* $a_{3j} = j + 2$ *où* $j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

et donc $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

Exercice 1.2. *Soient* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -7 \end{pmatrix}$

CalcuLer A+B, A-B, 3A,3A-B et pour tout $\alpha, \beta \in I\!R$ *la matrice* $\alpha A - \beta B$.

Solution. *:*

$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}$

$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 9 \end{pmatrix}$

$3A = 3 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

$3A - B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & 13 \end{pmatrix}$

$\forall \alpha, \beta \in I\!R \quad \alpha A - \beta B = \begin{pmatrix} \alpha & 2\alpha & 3\alpha \\ 0 & \alpha & 2\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -3\beta & -4\beta \\ -\beta & 0 & 7\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 2\alpha - 3\beta & 3\alpha - 4\beta \\ -\beta & \alpha & 2\alpha + 7\beta \end{pmatrix}$

Exercice 1.3. *Pour tout* $a, b \in I\!R$ *soit* $M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & -b \\ a & a & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(I\!R)$. *Quelle est la dimension de l'espace vectoriel* $\mathcal{M}_{2,3}(I\!R)$.
Préciser les matrices $M(0,1)$, $M(1,0)$ *et* $M(3,-6)$.
Soit $F = \{M(a,b) \in \mathcal{M}_{2,3}(I\!R) : a,b \in I\!R\}$. *Montrer que* F *est un* $I\!R$*-espace vectoriel, détérminer une base de* E *et sa dimension.*

Solution. *:*
$\dim \mathcal{M}_{2,3}(I\!R) = 2 \times 3 = 6$.
$M(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M(1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $M(3,6) = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -6 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$
Montrons que $F = \{M(a,b) \in \mathcal{M}_{2,3}(I\!R) : a,b \in I\!R\}$ *est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel* $\mathcal{M}_{2,3}(I\!R)$.
$\forall\, a,\, b \in I\!R \quad M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & -b \\ a & a & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
donc $M(a,b) = a\, M(1,0) + b\, M(0,1)$
par suite $F = \{a\, M(1,0) + b\, M(0,1) : a,b \in I\!R\} = vect\{M(1,0)\,,\, M(0,1)\}$.
Donc F *est le sous-espace vectoriel engendré par la famille* $S = \{M(1,0)\,,\, M(0,1)\}$.
Vérifions que la famille S *est libre, soit* $a,\, b \in I\!R$,
$a\, M(1,0) + b\, M(0,1) = O \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b & -b \\ a & a & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a = b = 0$
Alors la famille $S = \{M(1,0)\,,\, M(0,1)\}$ *est libre et génératrice dans* F*, d'où* S *est une base de* F *et* $\dim_{I\!R} F = 2$.

Exercice 1.4. *Détérminer deux matrices* A *et* B *de* $\mathcal{M}_2(I\!R)$ *telles que :*
$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ *et* $A - B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Solution. *:*
Posons $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ *et* $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

alors $\begin{cases} A + B = M_1 \\ A - B = M_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{2}(M_1 + M_2) \\ B = \dfrac{1}{2}(M_1 - M_2) \end{cases}$

Par suite
$A = \frac{1}{2}(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$
$B = \frac{1}{2}(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 1.5. *Soient* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ *et* $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Effectuer tous les produits de ces matrices deux à deux lorsqu'ils existent.

Solution. *:*

$A \in \mathcal{M}_{13}$, $B \in \mathcal{M}_{31}$, $C \in \mathcal{M}_{22}$, $D \in \mathcal{M}_{33}$, $E \in \mathcal{M}_{32}$ *et* $F \in \mathcal{M}_{23}$

Donc les produits suivants sont possibles :

1) $AB \in \mathcal{M}_{11}$, $AD \in \mathcal{M}_{13}$, $AE \in \mathcal{M}_{12}$

2) $BA \in \mathcal{M}_{33}$

3) $CC \in \mathcal{M}_{22}$, $CF \in \mathcal{M}_{23}$

4) $DD \in \mathcal{M}_{33}$, $DB \in \mathcal{M}_{31}$, $DE \in \mathcal{M}_{32}$

5) $EC \in \mathcal{M}_{32}$, $EF \in \mathcal{M}_{33}$

6) $FB \in \mathcal{M}_{21}$, $FD \in \mathcal{M}_{23}$, $FE \in \mathcal{M}_{22}$

alors :

1) $AB = (-1\ ,\ AD = (2 \quad 4 \quad -1)\ ,\ AE = (0 \quad 1)$

2) $BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3) $C^2 = CC = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $CF \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

4) $D^2 = DD = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $DB = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $DE = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

5) $EC = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $EF = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

6) $FB = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $FD = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $FE = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 1.6. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ *et* $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,4}(\mathbb{R})$
Les deux produits $A\,X$ *et* $X\,A$ *sont-ils possibles ? oui, effectuer les.*

Solution. *:*
$A \in \mathcal{M}_{31}$, $X \in \mathcal{M}_{14}$
le produit XA *est impossible*
le produit $AX \in \mathcal{M}_{34}$ *est possible*

$$AX = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ -x_1 & -x_2 & -x_3 & -x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 1.7. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -1 \\ 4 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

i) Comparer AB *et* BA.
ii) Quelles lignes ou quelles colonnes et quelles matrices multiplier-vous pour obtenir :
. *a) la première ligne du produit* AB.
. *a) la troisième colonne du produit* BA.
iii) Calculer $B\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ *et* $B\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Solution. *:*
i) $A \in \mathcal{M}_{24}$, $X \in \mathcal{M}_{42}$
les produit $AB \in \mathcal{M}_{22}$ *et* $BA \in \mathcal{M}_{44}$ *sont possibles*

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -1 \\ 4 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+15-12+4 & 6-5-15+14 \\ 6-6-4-4 & 18+2-5-14 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ -8 & 1 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -1 \\ 4 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+18 & 10-12 & -6-6 & 4-12 \\ 3-3 & 15+2 & -9+1 & 6+2 \\ 4+15 & 20-10 & -12-5 & 8-10 \\ 2+21 & 10-14 & -6-7 & 4-14 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 20 & -2 & -12 & -8 \\ 0 & 17 & -8 & 8 \\ 19 & 10 & -17 & -2 \\ 23 & -4 & -13 & -10 \end{pmatrix}$$

ii)

a) La première ligne du produit AB s'obtient en multipliant la première ligne de A par la matrice B.

b) La troisième colonne du produit BA s'obtient en multipliant la matrice B par la troisième colonne de A.

iii)

$$B\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \ , \ B\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$B\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = B\,(\,2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = 2B\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3B\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 3 \\ 23 \\ 25 \end{pmatrix}$$

$$B\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = (\,B\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad B\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}) == \begin{pmatrix} 6 & 22 \\ -1 & 3 \\ 5 & 23 \\ 7 & 25 \end{pmatrix}$$

Exercice 1.8. *Soient $A \in \mathcal{M}_{3,5}(I\!R)$, $B \in \mathcal{M}_{5,3}(I\!R)$, $C \in \mathcal{M}_{5,1}(I\!R)$, $D \in \mathcal{M}_{3,1}(I\!R)$. Parmi les opérations suivantes, préciser celles qui sont permises et le format des résultats :*

$A(B+C) \quad , A\,B\,D \quad , A\,C + B\,D \quad$ *et* $A\,B\,A\,B\,D$

Solution. *:*

A et B ne sont pas du même format donc la somme $A+B$ n'est pas permise.

Le produit $AB \in \mathcal{M}_{3,3}(I\!R)$ est permis et Le produit $(AB)D \in \mathcal{M}_{3,1}(I\!R)$ est permis.

Le produit $AC \in \mathcal{M}_{3,1}(I\!R)$ est permis et Le produit $BD \in \mathcal{M}_{5,1}(I\!R)$ est permis mais la somme $AC+BD$ n'est pas permise car AC et BD ne sont pas du même format.

$AB \in \mathcal{M}_{3,3}(I\!R)$ donc le produit $(AB)(AB) \in \mathcal{M}_{3,3}(I\!R)$ et alors Le produit $(ABAB)D \in \mathcal{M}_{3,1}(I\!R)$ est permis.

Exercice 1.9. *Soit A et B deux matrices, $A \in \mathcal{M}_{m,n}(I\!R)$.*
i) On suppose que les produits $A\,B$ et $B\,A$ sont possibles.
Quel est le format de B ? Montrer que les matrices $A\,B$ et $B\,A$ sont carrées.
ii) On suppose que le produit $A\,B$ est possible.
Si la ligne k de A est nulle et les colonnes i et j de B sont égales, que peut-on dire de la matrice $A\,B$?

Solution. *:*
La matrice A est de format (m,n) et soit B une matrice de format (p,q).
i) Le produit AB est possible donc $n = p$ et le produit BA est possible donc $q = m$ donc la matrice B est de format (n,m).
Dans ce cas $AB \in \mathcal{M}_{m,m}(I\!R)$ et $BA \in \mathcal{M}_{n,n}(I\!R)$ sont des matrices carrées.

ii) On suppose que le produit AB est possible donc $n = p$, la matrice B est de format (n,q).
En multipliant la ligne k de la matrice A par B on obtient la la ligne k de AB.
Par suite si la ligne k de A est nulle alors la ligne k de AB est nulle.
En multipliant la matrice A par la colonne k de B, on obtient la la colonne k de AB.
Par suite si les colonnes i et j de B sont égales alors les colonnes i et j de AB sont égales.

Exercice 1.10. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *Calculer $A\,{}^tA$ et ${}^tA\,A$*

Solution. *:*

$$ {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \\ 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} $$

$$ A\,{}^tA = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \\ 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 5 \\ 5 & 14 \end{pmatrix} $$

$$ {}^tA\,A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \\ 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -7 & 3 & -3 \\ -7 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 9 \end{pmatrix} $$

Exercice 1.11. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ une base de E.*
Soit $u_1 = e_1 + 2e_2 + 3e_3 + 4e_4$, $u_1 = e_2 - e_3$, $u_1 = e_1 + e_2 + 2e_3 + 2e_4$.
Donner les composantes des vecteurs u_1, u_2 et u_3, puis la matrice représentant la famille $S = \{u_1, u_2, u_3\}$ dans la base $\mathcal{B}$.
Calculer les composantes du vecteur $w = 4u_1 - u_2 + 3u_3$ en utilisant le produit matriciel.

Solution. *:*
Les composantes des vecteurs u_1, u_2 et u_3 dans la base $\mathcal{B}$:

$$u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad , \quad u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La matrice représentant la famille $S = \{u_1, u_2, u_3\}$ dans la base $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(S) = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit $w \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$ les composantes du vecteur $w = 4u_1 - u_2 + 3u_3$ dans la base $\mathcal{B}$:

D'après le calcul matriciel, les composantes du vecteur w dans la base $\mathcal{B}$, sont données par :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 19 \\ 22 \end{pmatrix}$$

2 Matrices carrées

Exercice 2.1. *Soient* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ *et* $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

i) Calculer AC , CA *et* AB , BA.

ii) Trouver toutes les matrices D *de* $\mathcal{M}_3$ *qui commutent avec* B.

Solution. *:*

a)

$$AC = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$CA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 4 & 10 & 18 \\ 7 & 16 & 27 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 10 & 12 \\ 21 & 24 & 27 \end{pmatrix}$$

b)

$$DB = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2b & 3c \\ d & 2e & 3f \\ g & 2h & 3k \end{pmatrix}$$

$$BD = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ 3g & 3h & 3k \end{pmatrix}$$

$$BD = DB \iff \begin{cases} 2b = b \\ 3c = c \\ 3f = 2f \\ d = 2d \\ g = 3g \\ 2h = 3h \end{cases} \iff b = c = f = d = g = h = 0$$

donc

$$BD = DB \iff D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} \quad \text{où } a,\, e,\, k \in \mathbb{K}$$

D commute avec B si et seulement si D est diagonale.

Exercice 2.2. *Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n .*
i) Développer les produits $(A-B)^2$, $(A+B)(A-B)$ et $(AB)^4$.
Que trouve-t-on si A et B commutent ?
ii) On suppose que A et B commutent. Développer le produit $(A+B)^3$.
iii) Développer $(I_n - A)\,(I_n + A + \cdots + A^k)$

Solution. *:*
i)

$$(A-B)^2 = (A-B)(A-B) = A^2 - AB - BA + B^2$$

$$(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2$$

$$(AB)^4 = AB\,AB\,AB\,AB$$

Si A et B commutent, alors

$$(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$

$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$$

$$(AB)^4 = A^4\,B^4$$

ii) Si A et B commutent, d'après la formule du binôme, on a :

$$(A+B)^3 = \sum_{k=0}^{k=3} C_3^k\,A^k\,B^{3-k}$$

où $C_3^k = \dfrac{3!}{k!(3-k)!}$; $k \in \{0,1,2,3\}$

$$(A+B)^3 = B^3 +\, 3\,AB^2 +\, 3\,A^2B + A^3$$

iii)

$$(I_n - A)\,(I_n + A + \cdots + A^k) = I_n + A + \cdots + A^k - A - \cdots - A^k - A^{k+1} = I_n - A^{k+1}$$

Exercice 2.3. .
i) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. *Calculer $A\,{}^tA$ et ${}^tA\;A$, préciser leur format.*
ii) Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}$ Montrer que les produits $M\ {}^tM$ et ${}^tM\ M$ sont des matrices symétriques, préciser leurs formats.
iii) Montrer que si A et B sont deux matrices symétriques de $\mathcal{M}_n$, alors la matrice AB est symétrique si et seulement si A et B commutent.

Solution. *:*

i) cf. Exercice 1.10.

ii) Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}$ *alors* ${}^tM \in \mathcal{M}_{p,n}$.

Par suite $M\,{}^tM \in \mathcal{M}_{n,n}$ *et* ${}^tM\,M \in \mathcal{M}_{p,p}$.

$${}^t(M\,{}^tM) = {}^t({}^tM)\,{}^tM = M\,{}^tM \;\Leftrightarrow\; M\,{}^tM \text{ est symétrique}$$

$${}^t({}^tM\,M) = {}^tM\;{}^t({}^tM) = {}^tM\,M \;\Leftrightarrow\; {}^tM\,M \text{ est symétrique}$$

iii) Soient A *et* B *deux matrices symétriques de* $\mathcal{M}_n$*, alors* ${}^tA = A$ *et* ${}^tB = B$.

AB *est symétrique* $\Leftrightarrow\; {}^t(AB) = AB \;\Leftrightarrow\; {}^tB\;{}^tA = AB \;\Leftrightarrow\; B\,A = AB \;\Leftrightarrow\; A$ *et* B *commutent*

Exercice 2.4. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Calculer* A^3 *et en déduire* A^n *pour* $n \in \mathbb{N}$.

Solution. *:*

$$A^2 = A\,A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A\,A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$A^4 = A\,A^3 = O$ *car le produit de* A *par les colonnes* 1, 2 *et* 3 *de* A^3 *qui sont nulles est nul et le produit de* A *par la colonne* 4 *de* A^3 *est nul.*

D'où $\forall\, n \geq 4 \quad A^n = O$

Exercice 2.5. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$.

i) Calculer A^2. *En déduire que* A *est inversible et détérminer son inverse.*

ii) Calculer A^{2n} *et* A^{2n+1} *pour* $n \in \mathbb{N}$.

iii) Détérminer les suites u_n *et* v_n *définies par la relation de récurrence :*

$$\forall\, p \in \mathbb{N}^*, \left\{ \begin{array}{lcl} u_p & = & 2\,u_{p-1} + v_{p-1} \\ v_p & = & 5\,u_{p-1} - 2\,v_{p-1} \\ u_0, v_0 & \in & \mathbb{R} \end{array} \right.$$

Solution. *:*

i)

$$A^2 = A\,A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = 9 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 9\,I_2$$

alors

$$A^2 = 9\,I_2 \Leftrightarrow (\frac{1}{9}A)\,A = I_2$$

par suite A est inversible d'inverse

$$A^{-1} = \frac{1}{9}A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

ii) pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$A^{2n} = (A^2)^n = (9\,I_2)^n = 9^n I_2$$

$$A^{2n+1} = A^{2n}\,A = 9^n\,I_2\,A = 9^n\,A$$

ii) Ecriture matricielle du système :

$$\forall\, p \in \mathbb{N}^* \qquad \begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{p-1} \\ v_{p-1} \end{pmatrix} \qquad u_0,\, v_0 \in \mathbb{R}$$

Pour tout $p \in \mathbb{N}$ posons $X_p = \begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix}$ alors

$$\forall\, p \in \mathbb{N}^* \qquad X_p = A\,X_{p-1} = A^2\,X_{p-2} = \ldots = A^p\,X_0$$

Vérifions pa récurrence sur p que $X_p = A^p\,X_0$.
Si p=1 $X_1 = A\,X_0$ vraie.
On suppose que $X_p = A^p\,X_0$ vraie pour p, alors :
$X_{p+1} = A\,X_p = A\,A^p\,X_0 = A^{p+1}\,X_0$ vraie pour $p+1$.
Si $p = 2n$ alors

$$X_{2n} = A^{2n}\,X_0 = 9^n I_2 X_0 = 9^n X_0$$

par suite

$$\begin{cases} u_{2n} = 9^n u_0 \\ v_{2n} = 9^n v_0 \end{cases}$$

Si $p = 2n+1$ alors

$$X_{2n+1} = A^{2n+1}\,X_0 = 9^n\,A\,X_0 = 9^n X_1$$

par suite

$$\begin{cases} u_{2n+1} = 9^n u_1 \\ v_{2n+1} = 9^n v_1 \end{cases}$$

où $X_1 = A\,X_0$ *alors*

$$\begin{cases} u_1 = 2u_0 + v_0 \\ v_1 = 5u_0 - 2v_0 \end{cases}$$

Exercice 2.6. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Calculer A^2. *En déduire que* A *n'est pas inversible. Calculer* A^n *pour* $n \in \mathbb{N}$.

Solution. *:*

$$A^2 = A\,A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ 21 & 42 \end{pmatrix} = 7 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = 7\,A$$

alors $A^2 = 7\,A \;\Leftrightarrow\; A(A - 7I_2) = O$

Supposons par l'absurde que A *est inversible alors*

$$A^{-1}A(A - 7I_2) = A^{-1}O \;\Leftrightarrow\; A - 7I_2 = O \;\Leftrightarrow\; A = 7I_2$$

ce qui est faux. Donc A *n'est pas inversible.*

Calculons les puissances $n^{\text{ème}}$ *de la matrice* A.

On a : $A^2 = 7\,A$ *et* $A^3 = A^2\,A = 7\,A\,A = 7\,A^2 = 7^2\,A$.

Vérifions pa récurrence sur $n \geq 2$ *que* $A^n = 7^{n-1}\,A$.

Si $n = 2$ *et* $n = 3$ *vraie.*

On suppose que $A^n = 7^{n-1}\,A$ *vraie pour* n, *alors :*

$$A^{n+1} = A^n A = 7^{n-1}\,A\,A = 7^{n-1}\,A^2 = 7^{n-1}\,7\,A = 7^n\,A$$

D'où pour tout entier $n \geq 2$

$$A^n = 7^{n-1}\,A$$

Exercice 2.7. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

i) Détérminer la matrice J *telle que* $A = I_3 + J$.

Calculer J^2 *et* J^3. *En déduire* A^n *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

ii) Détérminer a, b, $c \in \mathbb{R}$ *tels que :* $A^3 + a\,A^2 + b\,A + c\,I_3 = O$

En déduire que A *est inversible et détérminer son inverse.*

iii) Détérminer les suites x_n, y_n et z_n définies par la relation de récurrence :

$$\forall\, p \in I\!N^*, \left\{\begin{array}{ccccc} x_p & = & x_{p-1} & + & 3\,y_{p-1} \\ y_p & = & y_{p-1} & + & 2\,z_{p-1} \\ z_p & = & z_{p-1} & & \\ x_0, y_0, z_0 & \in & I\!R & & \end{array}\right.$$

Solution. *:*

i)

$$A = I_3 + J \;\Leftrightarrow\; J = A - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J^3 = J^2\,J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Par suite pour tout entier $n \geq 3, \qquad J^n = O.$

Comme I_3 et J commutent, d'après la formule du binôme, on a :

$$A^n = (I_3 - J)^n = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k\, J^k$$

où

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad k \in \{0, 1, \ldots, n\} \qquad et \qquad \forall\, n \geq 3, \qquad J^n = O$$

Alors pour tout entier $n \geq 3$

$$A^n = (I_3 - J)^n = C_n^0\, J^0 + C_n^1\, J + C_n^2\, J^2 = I_3 + n\,J + \frac{n(n-1)}{2}\, J^2$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3n & 3n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ii)

$$J^3 = (I_3 - A)^3 = O$$

Comme I_3 et A commutent, d'après la formule du binôme, on a :

$$(I_3 - A)^3 = I_3 + \frac{3!}{1!\,2!}(-A) + \frac{3!}{2!\,1!}(-A)^2 + (-A)^3$$

alors

$$I_3 - 3A + 3A^2 - A^3 = O$$

d'où

$$A^3 - 3A^2 + 3A - I_3 = O$$

alors $a = -3$, $b = 3$, *et* $c = -1$.

Par suite

$$A^3 - 3A^2 + 3A = I_3 \Leftrightarrow A(A^2 - 3A + 3I_3) = I_3$$

d'où A *est inversible d'inverse* $A^{-1} = A^2 - 3A + 3I_3$

$$A^{-1} = A^2 - 3A + 3I_3 == \begin{pmatrix} 1 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ecriture matricielle du système :

$$\forall p \in I\!N^* \qquad \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{p-1} \\ y_{p-1} \\ z_{p-1} \end{pmatrix} \qquad x_0, y_0, z_0 \in I\!R$$

Pour tout $p \in I\!N$ *posons* $U_p = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix}$ *alors*

$$\forall p \in I\!N^* \qquad U_p = A\,U_{p-1} =, A^2\,U_{p-2} = \ldots = A^p\,U_0$$

Vérifions pa récurrence sur p que $U_p = A^p\,U_0$.
Si p=1 $U_1 = A\,U_0$ *vraie.*
On suppose que $U_p = A^p\,U_0$ *vraie pour p, alors :*
$U_{p+1} = A\,U_p = A\,A^p\,U_0 = A^{p+1}\,U_0$ *vraie pour* $p+1$.
Alors pour tout $n \in I\!N^*$ *et pour tous* $x_0, y_0, z_0 \in I\!R$

$$U_n = A^n\,U_0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3n & 3n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_n = x_0 + 3n\,y_0 + 3n\,(n-1)\,z_0 \\ y_n = y_0 + 2n\,z_0 \\ z_n = z_0 \end{cases}$$