

Module: ALGEBRE 5

Programme

Chapitre I: Formes bilinéaires symétriques
et formes quadratiques.

Chapitre II: Décomposition de Gauss
des formes quadratiques.

Chapitre III: Espaces Préhilbertiens
réels.

Chapitre IV: Espaces Euclidiens.

Pr. Samir Bouchiba

Chapitre I: Formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques

Soient $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} et E un K -espace vectoriel.

Definition 1.1.

1) On appelle forme bilinéaire symétrique (fb) sur E toute application $\varphi : E \times E \rightarrow K$ telle que, pour tout $x, x', y, y' \in E$ et pour tout $\alpha, \beta \in K$, on a

$$a) \varphi(\alpha x + \beta x', y) = \alpha \varphi(x, y) + \beta \varphi(x', y).$$

$$b) \varphi(x, \alpha y + \beta y') = \alpha \varphi(x, y) + \beta \varphi(x, y').$$

2) Une application $\varphi : E \times E \rightarrow K$ est appelée une forme bilinéaire symétrique (fbs) si φ est une fb qui est de plus symétrique, c'est à dire, $\varphi(x, y) = \varphi(y, x), \forall x, y \in E$.

3) Soit φ est une fbs sur E . On appelle forme quadratique associée à φ l'application $q : E \rightarrow K$ définie par $q(x) = \varphi(x, x), \forall x \in E$.

4) On note $\mathcal{L}(E, E, K)$ l'ensemble des fb, $\mathcal{S}(E, K)$ l'ensemble des fbs et $\mathcal{Q}(E)$ l'ensemble des fq.

Exemples 1.2.

1) Soient $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1 + x_2 y_2 \text{ et } q(x, y) = x^2 + y^2.$$

Alors φ est une fbs et q est une fq et c'est la fq associé à φ .

2) Soit $\varphi : M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $\varphi(A, B) = \text{tr}(AB)$ la trace de AB et $q : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $q(A) = \text{tr}(A^2)$. Alors φ est une fbs et q est la fq associée à φ .

Proposition 1.3.

$\mathcal{L}(E, E, K)$, $\mathcal{S}(E, K)$ et $\mathcal{Q}(E)$ sont des K -espaces vectoriels.

Definition 1.4.

Soit $q : E \longrightarrow K$ une application. On dit que q est une forme quadratique si il existe une fbs $\varphi : E \times E \longrightarrow K$ telle que $q(x) = \varphi(x, x), \forall x \in E$. φ s'appelle une forme polaire de q .

Proposition 1.5.

Soit $q : E \longrightarrow K$ une forme quadratique. Alors:

- 1) $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x), \forall x \in E, \forall \lambda \in K$.
- 2) $q(-x) = q(x), \forall x \in E$.
- 3) $q(0_E) = 0_K$.

Démonstration.

1) Soit φ une forme polaire de q . Soient $\lambda \in K$ et $x \in E$.

On a

$$q(\lambda x) = \varphi(\lambda x, \lambda x) = \lambda^2 \varphi(x, x) = \lambda^2 q(x).$$

$$2) q(-x) = (-1)^2 q(x) = q(x).$$

$$3) q(0_E) = q(0_K 0_E) = 0_K^2 q(0_E) = 0_K q(0_E) = 0_K.$$

Proposition 1.6.

Soit $q : E \longrightarrow K$ une forme quadratique. Alors l'application $\varphi : E \times E \longrightarrow K$ définie par

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$$

est l'unique forme polaire de q appelée la forme polaire de q .

Démonstration.

Soit ψ une fp arbitraire de q . D'où $\psi(x+y, x+y) = q(x) + q(y) + 2\psi(x, y) = q(x+y)$. Ce qui donne $\psi(x, y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y)) = \varphi(x, y), \forall x, y \in E$. Par suite $\psi = \varphi$.

Proposition 1.7.

Soit $q : E \longrightarrow K$ une application. Alors q est une forme quadratique sur E si et seulement si

- 1) $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x), \forall x \in E, \forall \lambda \in K.$
- 2) L'application $\varphi : E \times E \longrightarrow K$ définie par

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2}(q(x + y) - q(x) - q(y))$$

est une forme bilinéaire sur E .

Démonstration.

Supposons que (1) et (2) sont vérifiés. D'où $\forall x \in E,$

$$\varphi(x, x) = \frac{1}{2}(q(2x) - 2q(x)) = \frac{1}{2}(4q(x) - 2q(x)) = q(x).$$

Alors q est une fq.

Proposition 1.8.

L'application $\psi : \mathcal{S}(E, K) \longrightarrow \mathcal{Q}(E)$ définie par $\psi(\varphi) = q$ pour toute fbs φ , avec q est la forme quadratique associée à φ , est un isomorphisme d'espaces vectoriels sur K .

Démonstration.

Il est facile de voir que ψ est linéaire. Soit $q \in \mathcal{Q}(E)$. D'où il existe une unique $f \in \mathcal{S}(E, K)$ qui soit la forme polaire de q , c'est à dire que, $\psi(f) = q$. Alors ψ est un isomorphisme.

Application

Montrer que $q : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $q(A) = \det(A)$ est une forme quadratique.

D'abord, $q(\alpha A) = \det(\alpha A) = \alpha^2 \det(A) = \alpha^2 q(A), \forall \alpha \in \mathbb{R}$ et $\forall A \in M_2(\mathbb{R})$. Soient $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$ deux

éléments de $M_2(\mathbb{R})$. Alors,

$$\det(A + B) = \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 & a_4 + b_4 \end{vmatrix} =$$

$$a_1a_4 + a_1b_4 + b_1a_4 + b_1b_4 - a_2a_3 - a_2b_3 - b_2a_3 - b_2b_3$$

Par suite,

$$\varphi(A, B) = \frac{1}{2}(\det(A + B) - \det(A) - \det(B)) = \frac{1}{2}(a_1b_4 + b_1a_4 - (a_2b_3 + a_3b_2))$$

definie une fb sur $M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R})$. Par conséquent, q est une fq sur $M_2(\mathbb{R})$.

Remarque.

L'application $\det : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ n'est pas une forme quadratique lorsque $n \neq 2$.

Definition 1.9.

Soient E un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E . Soit $\varphi : E \times E \rightarrow K$ une fbs. Soient $x = x_1e_1 + \dots + x_n e_n$ et $y = y_1e_1 + \dots + y_n e_n$. Alors

$$\varphi(x, y) = \sum_{i,j} x_i y_j \varphi(e_i, e_j).$$

La matrice de φ dans la base B est definie par

$$M(\varphi, B) = (\varphi(e_i, e_j))_{i,j} = \begin{pmatrix} \varphi(e_1, e_1) & \varphi(e_1, e_2) & \cdots & \varphi(e_1, e_n) \\ \varphi(e_2, e_1) & \varphi(e_2, e_2) & \cdots & \varphi(e_2, e_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi(e_n, e_1) & \varphi(e_n, e_2) & \cdots & \varphi(e_n, e_n) \end{pmatrix}$$

Proposition 1.10.

Soit $\varphi : E \times E \rightarrow K$ une fbs avec E un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. Soient B une base de E et $A = M(\varphi, B)$.

$$\text{Soient } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}. \text{ Alors}$$

$$\varphi(x, y) = {}^t X \cdot A \cdot Y = (x_1 x_2 \cdots x_n) A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Démonstration.

$$\text{Soit } A = (a_{ij})_{i,j}. \text{ On a } A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n \\ \vdots \\ a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n \end{pmatrix}.$$

$$\text{D'où } {}^t X A Y = (a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + \cdots + a_{1n}x_1y_n) + (a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2 + \cdots + a_{2n}x_2y_n) + \cdots + (a_{n1}x_ny_1 + a_{n2}x_ny_2 + \cdots + a_{nn}x_ny_n) = \varphi(x, y).$$

Remarque.

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et soit B une base de E .

1) Soit φ une fbs sur E . Si $\varphi(x, y) = \sum_{i,j} a_{ij}x_iy_j, \forall x, y \in E$, alors

$$M(\varphi, B) = (a_{ij})_{i,j}.$$

2) Soit q une fq sur E . Si $q(x) = \sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}x_ix_j$, alors

$$M(q, B) = \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{1}{2}a_{12} & \cdots & \frac{1}{2}a_{1n} \\ \frac{1}{2}a_{21} & a_{22} & \cdots & \frac{1}{2}a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{2}a_{n1} & \frac{1}{2}a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Exemple

Soit $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la forme quadratique telle que

$$q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy - 4xz - 6yz.$$

- 1) Donner la matrice $M(q, B)$ de q dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .
- 2) Déterminer la forme polaire φ de q .

Proposition 1.11.

Soient E un espace vectoriel sur K et $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E . Soit $\mathcal{S}_n(K)$ l'espace vectoriel des matrices symétriques sur K de degré n . Alors l'application $\psi : \mathcal{S}(E, K) \longrightarrow \mathcal{S}_n(K)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels sur K .

Démonstration.

Il est facile de voir que ψ est linéaire. Soit $A \in \mathcal{S}_n(K)$. Alors $\varphi : E \times E \longrightarrow K$ définie par $\varphi(x, y) = {}^t XAY$ est une fbs sur E , $\psi(\varphi) = A$ et $\varphi \in \mathcal{S}(E, K)$ est l'unique fbs telle que $M(\varphi, B) = A$. D'où ψ est bijective. Par suite $\mathcal{S}(E, K) \stackrel{\varphi}{\cong} \mathcal{S}_n(K)$.

Corollaire 1.13.

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. Alors

$$\dim_K(\mathcal{S}(E, K)) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Démonstration.

On a $\dim_K(\mathcal{S}_n(K)) = \frac{n(n+1)}{2}$. Par suite, puisque $\mathcal{S}(E, K) \cong \mathcal{S}_n(K)$, on obtient, $\dim_K(\mathcal{S}(E, K)) = \frac{n(n+1)}{2}$.

Corollaire 1.14.

Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(K)$ telles que pour tout $X, Y \in K^n$,

$${}^tXAY = {}^tXBY$$

Alors $A = B$.

Démonstration.

Supposons que ${}^tXAY = {}^tXBY, \forall X, Y \in K^n$. Donc $\psi^{-1}(A) = \psi^{-1}(B)$. Comme ψ est bijective, on obtient $A = B$.

Corollaire 1.15.

Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(K)$ telles que pour tout $X \in K^n$,

$${}^tXAX = {}^tXBX$$

Alors $A = B$.

Démonstration.

Soient φ_A et φ_B les fbs associées à A et B , respectivement. D'où $\varphi_A(X, X) = \varphi_B(X, X), \forall X$. Par suite, $q_A(X) = q_B(X), \forall X$. Ce qui implique que $q_A = q_B$. On obtient alors $A = M(q_A, \mathcal{B}) = M(q_B, \mathcal{B}) = B$.

Application.

Soit $q : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $q(A) = \det(A)$. Soit $\mathcal{B} = \left\{ E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$. Donner la matrice et la forme polaire de q .

Soit $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = xE_{11} + yE_{12} + zE_{21} + tE_{22}$ un élément de $M_2(\mathbb{R})$. Alors $q(A) = \det(A) = xt - yz$. Par suite

$$M(q, \mathcal{B}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soient $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}, A' = \begin{pmatrix} x' & y' \\ z' & t' \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Alors

$$\begin{aligned} \varphi(A, A') &= (x \ y \ z \ t) \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} (x \ y \ z \ t) \begin{pmatrix} t' \\ -z' \\ -y' \\ x' \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} (xt' - yz' - zy' + tx'). \end{aligned}$$

Changement de bases

Proposition 1.16.

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. Soient $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ et $B' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ deux bases de E et P la matrice de passage de B à B' . Soient φ une fbs sur E , $A = M(\varphi, B)$ et $A' = M(\varphi, B')$. Alors

$$A' = {}^t P A P.$$

Démonstration.

Soient $x, y \in E$ et X la matrice colonne de x dans B , Y la matrice colonne de y dans B . Soient X' la matrice colonne

de x dans B' et Y' la matrice colonne dans B' . Alors $X = PX'$ et $Y = PY'$. Par suite

$$\begin{aligned}\varphi(x, y) &= {}^tXAY = {}^t(PX')A(PY') = {}^tX'({}^tPAP)Y' \\ &= {}^tX'A'Y'.\end{aligned}$$

Par conséquent, $A' = {}^tPAP$.

Orthogonalité pour les fbs

Definition 1.17.

Soit E un espace vectoriel sur K et soit φ une fbs sur E .

- 1) Soient $x, y \in E$. On dit que x est orthogonal à y pour φ si $\varphi(x, y) = 0$.
- 2) Soient $x \in E$ et $A \subseteq E$. On dit que x est orthogonal à A pour φ si $\varphi(x, a) = 0, \forall a \in A$.
- 3) Soit $A \subseteq E$. On définit l'orthogonal de A pour φ , noté A^\perp , l'ensemble $A^\perp = \{x \in E : \varphi(x, a) = 0, \forall a \in A\}$.
- 4) Une famille $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de E est dite orthogonale pour φ , si $\varphi(x_i, x_j) = 0, \forall i \neq j$.

Proposition 1.18.

Soit E un espace vectoriel sur K et soit φ une fbs sur E .

- 1) $\forall A \subseteq E, A^\perp$ est un sous espace vectoriel de E .
- 2) Soient $A, B \subseteq E. A \subseteq B \Rightarrow B^\perp \subseteq A^\perp$.
- 3) $\forall A \subseteq E, A^\perp = \text{Vect}(A)^\perp$.
- 4) $0^\perp = E$.
- 5) $\forall A \subseteq E, A \subseteq A^{\perp\perp}$.

Démonstration.

- 1) Soit $A \subseteq E$. Soient $x, y \in A^\perp$. On a, $\forall a \in A$,

$$\varphi(x + y, a) = \varphi(x, a) + \varphi(y, a) = 0.$$

D'où $x + y \in A^\perp$. De même, si $x \in A^\perp$ et $\alpha \in K, \varphi(\alpha x, a) = \alpha \varphi(x, a) = 0, \forall a \in A$, par suite $\alpha x \in A^\perp$. Par conséquent, A^\perp

est un sous espace vectoriel de E .

2) Soit $A \subseteq B$. Soit $x \in B^\perp$. D'où $\varphi(x, b) = 0, \forall b \in B$. En particulier, $\varphi(x, a) = 0, \forall a \in A$ puisque $A \subseteq B$. Par suite $x \in A^\perp$. Alors $B^\perp \subseteq A^\perp$.

3) Soit $A \subseteq E$. Alors $A \subseteq \text{Vect}(A)$. D'où $\text{Vect}(A)^\perp \subseteq A^\perp$. Soit, maintenant, $x \in A^\perp$. Soit $b \in \text{Vect}(A)$. Alors, il existe $a_1, \dots, a_n \in A$ et il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$, tels que $b = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n$. Par suite

$$\varphi(x, b) = \varphi(x, \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n) =$$

$$= \alpha_1 \varphi(x, a_1) + \alpha_2 \varphi(x, a_2) + \dots + \alpha_n \varphi(x, a_n) = 0$$

car $x \in A^\perp$. Alors $x \in \text{Vect}(A)^\perp$. Par suite $A^\perp \subseteq \text{Vect}(A)^\perp$. D'où l'égalité.

4) Il est clair.

5) Soit $x \in A$. D'où $\varphi(x, y) = 0$ pour tout $y \in A^\perp$. Par suite $x \in A^{\perp\perp}$. Par conséquent $A \subseteq A^{\perp\perp}$.

Definition 1.19.

Soit φ une fbs sur un espace vectoriel E . On appelle noyau de φ le sous espace vectoriel

$$\text{Ker}(\varphi) = E^\perp = \{x \in E : \varphi(x, y) = 0, \forall y \in E\}$$

de E .

Proposition 1.20.

Soit φ une fbs sur un espace vectoriel E et soit $A = M(\varphi, B)$, où B est une base de E . Alors, si $x \in E$,

$$x \in \text{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow AX = 0$$

où X est la matrice colonne de x dans B . D'où, $\text{Ker}(\varphi) = \text{Ker}(A)$.

Démonstration.

On a $x \in \text{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow \varphi(x, y) = 0, \forall y \in E \Leftrightarrow {}^t X A Y = 0, \forall Y \Leftrightarrow$

$${}^t(AX)Y = 0, \forall Y \Leftrightarrow {}^t(AX)Y = 0, \forall Y \Leftrightarrow AX = 0.$$

Exemple.

Soit q la forme quadratique sur \mathbb{R}^2 définie par

$$q(x, y) = x^2 + \frac{1}{4}y^2 + xy.$$

- 1) Déterminer la matrice de q et la forme polaire de q .
- 2) Déterminer le noyau de q .

1) On a $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$. Alors

$$\varphi((x, y), (x', y')) = xx' + \frac{1}{4}yy' + \frac{1}{2}xy' + \frac{1}{2}yx'$$

$$\forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2.$$

2) $\text{Ker}(\varphi, B) = \text{Ker}(A) = \left\{ (x, y) : \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$$= \left\{ (x, y) : \begin{cases} x + \frac{1}{2}y = 0 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y = 0 \end{cases} \right\}$$

$$= \{(x, y) : y = -2x\} = \{(x, -2x) : x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\{(1, -2)\}. \text{ Par suite } \text{Ker}(\varphi) = \text{Vect}\{(1, -2)\}.$$

Definition 1.21.

Soit E un espace vectoriel. Alors

- 1) Une fbs φ sur E est dite dégénérée si $\text{Ker}(\varphi) \neq \{0\}$.
- 2) Une fbs φ sur E est dite non dégénérée si $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}$.

Definition 1.21.

Soient E un espace vectoriel sur K . Soit φ une fbs sur E et q sa forme quadratique.

- 1) Un vecteur x de E est dit isotrope pour φ , si $q(x) = 0$.

2) On appelle cône isotrope de q l'ensemble

$$C(q) = \{x \in E : x \text{ est isotrope}\}.$$

3) Soit F un sous espace vectoriel de E . F est dit totale-
ment isotrope si $F \subseteq F^\perp$.

Remarque.

1) Soit F un sous espace vectoriel de E . Soit φ une fbs et q sa fq. F est totalement isotrope si et seulement si $\varphi(x, y) = 0, \forall x, y \in F$.

2) $\text{Ker}(\varphi) \subseteq C(q)$.

Démonstration.

1) F est tot isotrope $\Leftrightarrow F \subseteq F^\perp \Leftrightarrow \forall x \in F, \varphi(x, y) = 0, \forall y \in F \Leftrightarrow \varphi(x, y) = 0, \forall x, y \in F$.

2) Soit $x \in \text{Ker}(\varphi) \Rightarrow x \in E^\perp \Rightarrow \varphi(x, x) = 0 \Rightarrow q(x) = 0 \Rightarrow x \in C(q)$. D'où $\text{Ker}(\varphi) \subseteq C(q)$.

Exemple.

Déterminer le cône isotrope de la fq $q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$q(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2.$$

On a $(x, y, z) \in C(q) \Leftrightarrow x^2 + y^2 - z^2 = 0 \Leftrightarrow z^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow z \in \{\sqrt{x^2 + y^2}, -\sqrt{x^2 + y^2}\}$. Alors

$$C(q) = \{(x, y, \sqrt{x^2 + y^2}) : x, y \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, y, -\sqrt{x^2 + y^2}) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Remarque.

Le cône isotrope n'est pas, en général, un sous espace vectoriel de E .

D'après l'exemple précédent, on a $(1, 0, 1), (1, 0, -1) \in C(q)$ mais $(1, 0, 1) + (1, 0, -1) = (2, 0, 0) \notin C(q)$. D'où $C(q)$

n'est pas un sev de E .

Definition 1.22.

Une forme quadratique sur un espace vectoriel E est dite définie si $\forall x \in E$,

$$q(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

c'est à dire $C(q) = \{0\}$.

Proposition 1.23.

Soit E un espace vectoriel et q une forme quadratique sur E .

- 1) Si q est définie, alors q est non dégénérée.
- 2) Soit $K = \mathbb{R}$. Si q est non dégénérée et q est positive, alors q est définie.

Démonstration.

1) Supposons que q est définie. Comme $\text{Ker}(\varphi) \subseteq C(q) = \{0\} \Rightarrow \text{Ker}(\varphi) = \{0\}$. D'où φ est non dégénérée.

2) Supposons que $K = \mathbb{R}$, φ non dégénérée et $q(x) \geq 0, \forall x \in E$. Soit $x \in C(q)$. Soient $y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $q(y + \lambda x) \geq 0$, d'où $q(y) + \lambda^2 q(x) + 2\lambda\varphi(x, y) = q(y) + 2\lambda\varphi(x, y) \geq 0$. Supposons qu'il existe $y \in E$ such that $\varphi(x, y) > 0$. D'où, pour $\lambda < \frac{-q(y)}{2\varphi(x, y)}$, on a $q(y) + 2\varphi(x, y) < 0$ qui est absurde.

De même, si $\varphi(x, y) < 0$, pour $\lambda > \frac{-q(y)}{2\varphi(x, y)}$, on a $q(y) + 2\lambda\varphi(x, y) < 0$ qui est absurde aussi. Par suite $\varphi(x, y) = 0, \forall y \in E$. Alors, $x = 0$ puisque q est non dégénérée. Par suite $C(q) = \{0\}$ est donc q est définie.

Cas où E est un espace vectoriel de dimension finie

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Soit φ une forme bilinéaire symétrique sur E et q la fq associée.

Definition 1.24.

On appelle rang de φ l'entier

$$\text{rg}(\varphi) = \dim(E) - \dim(\text{Ker}(\varphi)) = \dim(E) - \dim(E^\perp).$$

$$(d'où \dim(E) = \text{rg}(\varphi) + \dim(E^\perp)).$$

Proposition 1.25.

Soient E un espace vectoriel de dimension finie sur K et B une base de E . Soit φ une fbs sur E . Alors

$$\text{rg}(\varphi) = \text{rg}(M(\varphi, B)).$$

Démonstration.

On a $\text{Ker}(\varphi) = \text{Ker}(A)$, où $A = M(\varphi, B)$. Or

$$\dim(E) = \dim(\text{Ker}(A)) + \dim(\text{Im}(A)).$$

Alors $\dim(E) = \dim(\text{Ker}(\varphi)) + \text{rg}(A) = \dim(E^\perp) + \text{rg}(A)$. Comme $\dim(E) = \text{rg}(\varphi) + \dim(E^\perp)$, on obtient $\text{rg}(\varphi) = \text{rg}(A)$.

Corollary 1.26.

Soient E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et B une base de E . Soit φ une fbs sur E . Alors φ est non dégénérée si et seulement si $\text{rg}(A) = n$ si et seulement si A est une matrice inversible, où $A = M(\varphi, B)$.

Démonstration.

On a $\text{rg}(\varphi) = \text{rg}(A)$ et $\text{Ker}(\varphi) = \text{Ker}(A)$. De même

$$\dim(\text{Ker}(A)) + \text{rg}(A) = \dim(E) = n.$$

Alors φ est non dégénérée si et seulement si $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}$ si et seulement si $\text{rg}(A) = n$.

Théorème 1.27.

Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et φ une fbs sur E . Alors φ admet une base orthogonale B , c'est à dire, il existe une base $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ telle que $\varphi(e_i, e_j) = 0, \forall i \neq j$.

Démonstration.

Le démonstration se fait par récurrence sur n . Pour le cas $n = 1$ le résultat est trivial. Supposons que le résultat est vrai pour $n \geq 1$. Soient E un espace vectoriel de dimension $n + 1$ et $\varphi : E \times E \rightarrow K$ une fbs. Si $\varphi = 0$ le résultat est trivial puisque toute base de E est orthogonale pour φ . Supposons alors que $\varphi \neq 0$. D'où $C(q) \neq E$ (car si $C(q) = E$, alors $q = 0$ et donc $\varphi = 0$ ce qui est absurde). Soit $e_1 \in E$ tel que $q(e_1) \neq 0$. Soit $F = \{e_1\}^\perp$ et $\varphi_F : F \times F \rightarrow K$ la restriction de φ à F (c'est à dire $\varphi_F(x, y) = \varphi(x, y), \forall x, y \in F$). Montrons que $E = Ke_1 \oplus F$, où $Ke_1 = \{\alpha e_1 : \alpha \in K\}$ désigne le sous espace vectoriel engendré de E par e_1 . Soit $x \in Ke_1 \cap F$. D'où $x = \alpha e_1$, pour un certain $\alpha \in K$, et $\varphi(x, e_1) = 0$ puisque $x \in F$. Alors $\alpha q(e_1) = 0$ ce qui donne $\alpha = 0$ puisque $q(e_1) \neq 0$. Ceci entraîne que $x = 0$ et par suite $Ke_1 \cap F = \{0\}$. Fixons $x \in E$ et cherchons $\alpha \in K$ et $y \in F$ tels que $x = \alpha e_1 + y$. D'où $\varphi(e_1, x) = \alpha \varphi(e_1, e_1) = \alpha q(e_1)$ puisque $\varphi(e_1, y) = 0$. Alors $\alpha = \frac{\varphi(e_1, x)}{q(e_1)}$. Donc soit $x = \frac{\varphi(e_1, x)}{q(e_1)} e_1 + \left(x - \frac{\varphi(e_1, x)}{q(e_1)} e_1\right)$.

On montre que $y := x - \frac{\varphi(e_1, x)}{q(e_1)} e_1 \in F$. En effet,

$$\begin{aligned} \varphi(e_1, y) &= \varphi\left(e_1, x - \frac{\varphi(e_1, x)}{q(e_1)} e_1\right) \\ &= \varphi(e_1, x) - \frac{\varphi(e_1, x)}{q(e_1)} q(e_1) \\ &= \varphi(e_1, x) - \varphi(e_1, x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

D'où $y \in F$ et par suite $x \in Ke_1 + F$. Par conséquent, $E = Ke_1 \oplus F$. En particulier, $\dim(F) = n$. Par récurrence, il existe une base orthogonale $\{e_2, \dots, e_{n+1}\}$ de F pour φ_F . Comme $e_1 \notin F$, on obtient que $\{e_1, e_2, \dots, e_{n+1}\}$ est une famille libre de E . Par suite $\{e_1, e_2, \dots, e_{n+1}\}$ est une base de E qui est de plus orthogonale pour φ .

Corollaire 1.28.

Soit φ une fbs sur un espace vectoriel E de dimension finie $n \geq 1$. Alors il existe une base B de E telle que $M(\varphi, B)$ est diagonale.

Démonstration.

Il suffit de prendre une base orthogonale B de E pour φ . D'où $M(\varphi, B)$ est diagonale.