Département des Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Moulay Ismail
Année Universitaire 2020-2021

S4 : Mathématiques
Module: Algèbre 5

Série 1

Exercice 1.
Soit $q : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application definie par, $\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

$$q(M) = \mathrm{tr}(M^2) + \mathrm{tr}(M)^2.$$

1) Montrer que q est une forme quadratique.
2) Donner la matrice de q dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
3) Donner la forme polaire associée à q.

Exercice 2. (Facultatif)
Soit $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. On considère la forme bilinéaire symétrique $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(P,Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$, $\forall P,Q \in \mathbb{R}_2[X]$.
1) Calculer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
2) Déterminer le noyau de φ.
2) φ est-elle non dégénérée?

Exercice 3.
On considère la forme quadratique $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definie par

$$q(x,y,z) = y^2 - 2xz, \forall x,y,z \in \mathbb{R}.$$

1) Donner la matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2) Donner le noyau de q.
3) q est-elle non dégénérée?
4) Soient $e_1 = (1,1,0), e_2 = (0,1,1)$ et $e_3 = (1,1,1)$ et soit $B' = \{e_1, e_2, e_3\}$.
   a) Vérifier que B' est une base de $\mathbb{R}^3$.
   b) Donner la matrice de q dans B'.

Exercice 4.
Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ définie par

$$q(x,y,z) = x^2 + 3y^2 - 8z^2 - 4xy + 2xz - 10yz.$$

1) Déterminer le noyau de q.
2) Vérifier que $q(x,y,z) = (x - 3y - 2z)(x - y + 4z)$.
3) Montrer que le cône isotrope de q est une réunion de deux plans

vectoriels dont on donnera les équations cartésiennes.
4) Soit $v = (1,1,1)$. Déterminer l'orthogonal $v^{\perp}$ de v pour q.

Exercice 5.

On considère la forme quadratique q sur $E = \mathbb{R}^3$ par

$$q(x,y,z) = xy + yz.$$

1) Donner la matrice de q par rapport à la base canonique B de $\mathbb{R}^3$.
2) Déterminer le noyau et le rang de q.
3) Trouver le cône isotrope de q et montrer que $C(q)$ n'est pas un sous espace vectoriel de E.
4) Soit p un entier tel que $0 \leq p \leq 3$. Etudier l'existence d'un sous espace F totalement isotrope de dimension p pour $p = 0,1,2,3$.
5) En déduire tous les sous espaces totalement isotropes de E pour q.
6) Déterminer $A^{\perp}$, où $A = \mathrm{Vect}\{(1,1,0),(1,0,1)\}$.