Chapitre I : Matrice d’une application linéaire et changement de bases

Pr. Abdellatif Sadrati

Université Moulay-Ismail, F.S.T Errachidia.
abdo2sadrati@gmail.com

27 mars 2021

Plan

Dans tout le chapitre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $n, p \in \mathbb{N}^*$.

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ de dimensions n et p respectivement, et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Soient $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ une base de E et $C = \{e'_1, e'_2, ..., e'_p\}$ une base de F. Les images par f des vecteurs $e_1, e_2, ..., e_n$ se décomposent sur la base $\{e'_1, e'_2, ...e'_p\}$:

$$
\begin{aligned}
f(e_1) &= a_{11}e'_1 + a_{21}e'_2 + ... + a_{p1}e'_p \\
f(e_2) &= a_{12}e'_1 + a_{22}e'_2 + ... + a_{p2}e'_p \\
&. \\
&. \\
&. \\
f(e_n) &= a_{1n}e'_1 + a_{2n}e'_2 + ... + a_{pn}e'_p
\end{aligned}
$$

Définition

On appelle matrice de f dans les bases $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ et $C = \{e'_1, e'_2, ..., e'_p\}$ la matrice notée $M_{CB}(f)$ appartenant à $\mathbb{M}_{pn}(\mathbb{k})$ dont les colonnes sont les composantes des vecteurs $f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n)$ dans la base $\{e'_1, e'_2, ..., e'_p\}$.

$$M_{CB}(f) = M_C(f(B)) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{p1} & a_{p2} & . & . & . & a_{pn} \end{pmatrix}$$

Remarques

i) *Attention à l'ordre dans l'écriture* $M_{CB}(f)$ *!*

ii) *La* j*ème colonne de la matrice est formée des composantes du vecteur* $f(e_j)$ *dans la base* C.

iii) *Cette matrice a n colonnes et p lignes :* $M_{CB}(f) \in \mathbb{M}_{pn}(\mathbb{K})$.

iv) *Il est clair que la matrice associée à* f *dépend du choix des bases de* E *et* F.

v) *Si* $E = F$ *et* $B = C$*, on note* $M_{BB}(f) = M_B(f)$.

Exemples

1) Soit θ l'application nulle de E dans F et θ_{pn} la matrice nulle de $\mathbb{M}_{pn}(\mathbb{K})$, alors $M_{CB}(\theta) = \theta_{pn}$.

2) Soit E de dimension n finie et $Id_E : E \longrightarrow E$ l'application qui à x associe x. On considère une base $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ de E. On a

$$M_B(Id_E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ . & 0 & . & & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & & . & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & 1 \end{pmatrix} = I_n.$$ Matrice unité de $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$

3) Soit $E = \mathbb{R}^2$ et $P_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire qui à (x, y) associe $(x, 0)$. considérons la base canonique $B = \{e_1, e_2\}$ de $\mathbb{R}^2$. On a $P_1(e_1) = (1, 0) = e_1$, $P_1(e_2) = (0, 0)$ et

$$M_{BB}(P_1) = M_B(P_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemples (Suite)

4) Soit $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $C = \{e'_1, e'_2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Considérons l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ qui à (x, y, z) associe $(x - y, z - y)$. On a $M_{CB}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

5) Soit $D : \mathbb{R}_4[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]$ l'application linéaire qui à $P(X)$ associe $P'(X)$. On a

$$M_{CB}(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Par exemple :
$D(X) = X' = 1 = 1.1 + 0.X + 0.X^2 + 0.X^3 ...$

B et C étant les bases canoniques respectivement de $\mathbb{R}_4[X]$ et $\mathbb{R}_3[X]$.

Exemples (Suite, Plus de détails sur l'exemple 5))

5) Soit $D : \mathbb{R}_4[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]$ l'application linéaire qui à $P(X)$ associe $P'(X)$.
$B = \{1, X, X^2, X^3, X^4\}$ La base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$ et $C = \{1, X, X^2, X^3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. On a

$$M_{CB}(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

- $D(1) = 1' = 0 = 0.1 + 0.X + 0.X^2 + 0.X^3$,
- $D(X) = X' = 1 = 1.1 + 0.X + 0.X^2 + 0.X^3$,
- $D(X^2) = (X^2)' = 2X = 0.1 + 2.X + 0.X^2 + 0.X^3 \ldots$
- $D(X^3) = (X^3)' = 3X^2 = 0.1 + 0.X + 3.X^2 + 0.X^3 \ldots$
- $D(X^4) = (X^4)' = 4X^3 = 0.1 + 0.X + 0.X^2 + 4.X^3 \ldots$

Proposition

Soient f et g deux éléments de $L(E,F)$ et λ un élément de $\mathbb{K}$, alors

(i) $M_{CB}(f+g) = M_{CB}(f) + M_{CB}(g)$.

(ii) $M_{CB}(\lambda f) = \lambda M_{CB}(f)$

Théorème

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension n et p respectivement. $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ et $C = \{e'_1, e'_2, ..., e'_p\}$ des bases de E et F. Alors l'application $M : L(E,F) \longrightarrow \mathbb{M}_{pn}(\mathbb{k})$ qui à f associe $M_{CB}(f)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En particulier $\dim L(E,F) = np$.

Si

- $M_{CB}(f) = A$ la matrice de l'application linéaire dans les bases B et C $(f \cong A)$
- $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = X_B \in E \quad (x \cong X_B)$

Alors,

$$f(x) = A.X_B = \begin{pmatrix} . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix} = Y_C = y \in F$$

Par exemple : En dimension $= 1$, $f(x) = ax$ avec $a \in \mathbb{K} = (\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}) = \mathbb{M}_{1,1}(\mathbb{K})$.

Démonstration.

Il est facile de vérifier la linéarité de M. Soient $f \in \ker M$, donc $M_{CB}(f) = 0$. Par suite, $f(e_1) = f(e_2) = ... = f(e_n) = 0$. D'oú $f = 0$ et M est injective. Elle est aussi surjective, car si

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{p1} & a_{p2} & . & . & . & a_{pn} \end{pmatrix}.$$

On construit f en posant :

$$f(e_1) = a_{11}e'_1 + a_{21}e'_2 + ... + a_{p1}e'_p$$
$$f(e_2) = a_{12}e'_1 + a_{22}e'_2 + ... + a_{p2}e'_p$$
$$.$$

suite de la démonstration.

.

.

$$f(e_n) = a_{1n}e_1' + a_{2n}e_2' + ... + a_{pn}e_p'.$$

Pour $x \in E, x = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n$ avec $x_i \in \mathbb{K}$, on pose $f(x) = x_1f(e_1) + x_2f(e_2) + ... + x_nf(e_n)$. On vérifie que l'application f est linéaire et $M_{CB}(f) = A$. □

Soient E, F, G trois espaces vectoriels, $f \in L(E, F), g \in L(F, G)$. Soient $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}, C = \{e_1', e_2', ..., e_p'\}$ et $D = \{e_1'', e_2'', ..., e_m''\}$ les bases respectives de E, F, G.

Proposition

Avec les notations précédentes on a

$$M_{DB}(g \circ f) = M_{DC}(g).M_{CB}(f).$$

Corollaire

Soient E et F deux espaces vectoriels de même dimension n et de bases respectives B et C. $f \in L(E,F)$ est bijective si et seulement si $M_{CB}(f)$ est inversible. De plus,

$$M_{BC}(f^{-1}) = (M_{CB}(f))^{-1}.$$

Démonstration.

Comme $f \circ f^{-1} = Id_F$ et $f^{-1} \circ f = Id_E$, alors $M_B(f^{-1} \circ f) = I_n$ et $M_C(f \circ f^{-1}) = I_n$ et par suite $M_{BC}(f^{-1}).M_{CB}(f) = M_{CB}(f).M_{BC}(f^{-1}) = I_n$, c'est-à-dire $M_{BC}(f^{-1}) = (M_{CB}(f))^{-1}$. □

Remarque

Dans le cas particulier où $E = F$ et $B = C$, on obtient, pour toute application linéaire bijective

$$M_B(f^{-1}) = (M_B(f))^{-1}.$$

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n muni de deux bases $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ et $B' = \{e'_1, e'_2, ..., e'_n\}$. Soient $(P_{1j}, P_{2j}, ..., P_{nj})$ les coordonnées du vecteurs e'_j dans la base B, c'est-à-dire $\forall j \in \{1, 2, ..., n\}$,

$$e'_j = \sum_{i=1}^{n} P_{ij} e_i = P_{1j}e_1 + P_{2j}e_2 + ... + P_{nj}e_n.$$

Définition

On appelle matrice de passage de la base B à la base B' la matrice $P_{BB'} = M_B(B') = M_B(e'_1, e'_2, ...e'_n)$ dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de la base B' exprimées dans la base B.

Exemple

Soit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ et de la base $B' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$, où $e'_1 = e_1 - e_2 + e_3, \; e'_2 = e_2 - e_3$ et $e'_3 = -2e_1 + 2e_2 - e_3$. La matrice de passage de la base B à la base B' est

$$P_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Remarque

On a clairement $P_{BB} = P_{B'B'} = I_n$.

Lemme

Si B et B' sont deux bases de E, alors

$$P_{BB'} = M_{BB'}(Id_E).$$

Attention ! Ici la matrice de l'endomorphisme Id_E n'est pas l'unité car la représentation matricielle de l'identité est formée en choisissant une base à l'arrivée qui n'est a priori la même au départ.

Proposition

Si B et B' sont deux bases de E, alors la matrice de passage de B à la base B' est inversible et son inverse est la matrice de passage de B' à B :

$$P_{BB'}^{-1} = P_{B'B}.$$

Exemple

Reprenons les notations de l'exemple précédent :

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 - e_2 + e_3 \\ e'_2 = e_2 - e_3 \\ e'_3 = -2e_1 + 2e_2 - e_3 \end{cases} \quad \text{et} \quad P_{BB'} = M_B(B') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pour former la matrice de passage inverse $(P_{BB'})^{-1}$, il suffit d'exprimer les vecteurs de la base B en fonction de ceux de la base B'. A l'aide du système précédent on obtient :

$$\begin{cases} e_1 = e'_1 + e'_2 \\ e_2 = 2e'_1 + e'_2 + e'_3 \\ e_3 = 2e'_1 + e'_3 \end{cases} \quad \text{et donc} \quad P_{B'B} = (P_{BB'})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Théorème

Soient B et B' deux bases de E. Soient x un élément de E, X_B et $X'_{B'}$ les matrices colonnes des coordonnées de x dans les bases B et B' . Alors

$$X'_{B'} = P_{B'B} X_B \Leftrightarrow X_B = P_{BB'} X'_{B'}$$

Attention à l'ordre ! on a les nouvelles coordonnées en fonction des anciennes.

Soit E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$, B et B' deux bases de E et P la matrice de passage de B à B'. Soit F un espace vectoriel de dimension m sur $\mathbb{K}$, C et C' deux bases de F et Q la matrice de passage de C à C'.

Théorème

Si f est une application linéaire de E dans F représentée par la matrice A dans les bases B et C et par A' dans les bases B' et C', on a la relation

$$\boxed{A' = Q^{-1}AP.}$$

Remarque

On peut retrouver la formule du théorème précédent à l'aide du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
(E,B) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "Id_E"] & (F,C) \arrow[d, "Id_F"] \\
(E,B') \arrow[r, "f"] & (F,c')
\end{tikzcd}$$

On a : $Id_F \circ f = f \circ Id_E$.

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad M_{C'B}(Id_F \circ f) = M_{C'B}(f \circ Id_E) \\
&\Leftrightarrow \quad M_{C'C}(Id_F).A = A'.M_{B'B}(Id_E) \\
&\Leftrightarrow \quad P_{C'C}.A = A'P_{B'B} \\
&\Leftrightarrow \quad Q^{-1}A = A'P^{-1} \\
&\Leftrightarrow \quad Q^{-1}AP = A'.
\end{aligned}$$

Remarque

Dans le cas particulier où f est un endomorphisme de E, si A (resp. A') est la matrice représentant f dans la base B (resp. B'), alors : $A' = P^{-1}AP$.

Définition

On dit que deux matrices carrées A et A' d'ordre n sont semblables s'il existe P matrice carrée d'ordre n inversible telle que $A' = P^{-1}AP$.

D'après la remarque précédente, si f est un endomorphisme de E, et si B et B' sont deux bases de E, alors $M_B(f)$ et $M_{B'}(f)$ sont deux matrices semblables. Donnons maintenant une forme de réciproque :

Proposition

Soient f un endomorphisme de E, B une base de E et A la matrice de f dans la base B. Si A' est une matrice semblable à A, il existe une base B' de E telle que A' soit la matrice de f dans la base B'.