# Chapitre II : Déterminant d'une matrice carrée et systèmes de Cramer

*Pr. Abdellatif Sadrati*

Université Moulay-Ismail, F.S.T Errachidia.
abdo2sadrati@gmail.com

27 mars 2021

# Plan

Dans tout le chapitre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

## Définition

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une application $f : E \times E \times ... \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ est $n$-linéaire si elle est linéaire par rapport à chaque variable, c'est-à-dire si :

$$\begin{aligned} f(x_1, ..., x_{i-1}, \alpha y_i + \beta z_i, x_{i+1}, ..., x_n) &= \alpha f(x_1, ..., x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, ..., x_n) \\ &+ \beta f(x_1, ..., x_{i-1}, z_i, x_{i+1}, ..., x_n). \end{aligned}$$

Elle est symétrique si elle est invariante par permutation des vecteurs et antisymétrique ou alternée si l'interversion de deux vecteurs change le signe, c'est-à-dire si

$$\forall x_1, ..., x_n \in E, \forall i < j, f(x_1, ..., x_i, ..., x_j, ..., x_n) = -f(x_1, ..., x_j, ..., x_i, ..., x_n).$$

## Exemple

- $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ est 2-linéaire (bilinéaire) si $\forall\, x, y, z \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$$\begin{cases} f(\alpha x + \beta z, y) = \alpha f(x, y) + \beta f(z, y) \\ \text{et} \\ f(x, \alpha y + \beta z) = \alpha f(x, y) + \beta f(x, z) \end{cases}.$$

- $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ est linéaire si, $\forall\, X = (x_1, x_2), Y = (y_1, y_2) \in E \times E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned} f(\alpha X + \beta Y) &= f(\alpha(x_1, x_2) + \beta(y_1, y_2)) \\ &= \alpha f(x_1, x_2) + \beta f(y_1, y_2) \\ &= \alpha f(X) + \beta f(Y). \end{aligned}$$

## Remarque

*On déduit immédiatement que si $f$ est alternée, alors $f(x, x, ..., x) = 0$ et puis plus généralement que si $x_i$ est une combinaison linéaire des autres vecteurs $x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n$ alors $f(x_1, ..., x_n) = 0$.*

- $f(x, ..., x, ..., x, ..., x) = -f(x, ..., x, ..., x, ..., x) \Rightarrow f(x, ..., x) = 0$
- si $(x_1, x_2, x_3) \in E \times E \times E \quad (n = 3)$ et si $x_2 = \alpha x_1 + \beta x_3$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= f(x_1, \alpha x_1 + \beta x_3, x_3) \\ &= \alpha f(x_1, x_1, x_3) + \beta f(x_1, x_3, x_3) \\ &= -\alpha f(x_1, x_1, x_3) - \beta f(x_1, x_3, x_3) \\ &= -[\alpha f(x_1, x_1, x_3) + \beta f(x_1, x_3, x_3)] \\ &= -f(x_1, x_2, x_3). \end{aligned}$$

## Exemples

1) Le produit scalaire de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est bilinéaire et symétrique.
2) L'application de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $((a,b),(c,d)) \longrightarrow ad - bc$ est bilinéaire alternée.

$$1)\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$$
$$\varphi(x,y) = x_1y_1 + ... + x_ny_n = y_1x_1 + ... + y_nx_n = \varphi(y,x).$$
$$2)\varphi((a,b),(c,d)) = ad - bc = -(cb - da) = -\varphi((c,d),(a,b)).$$

Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ de terme général $a_{ij}$. On note $A_{ij}$ la sous matrice de $A$ d'ordre $n-1$ obtenue en enlevant à $A$ sa $i$ème ligne et sa $j$ème colonne.

## Définition

On appelle déterminant de $A$ et on note $\det(A)$ l'élément de $\mathbb{K}$ défini par une des formules de récurrence suivantes :

- Si $n = 1$, on pose $\det(a_{11}) = a_{11}$.
- Si $n > 1$, on pose (développement par rapport à la $k$ème colonne)

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det(A_{ik}) \\ &= (-1)^{1+k} a_{1k} \det(A_{1k}) + (-1)^{2+k} a_{2k} \det(A_{2k}) + \ldots \\ &\quad \ldots + (-1)^{n+k} a_{nk} \det(A_{nk}).\end{aligned}$$

ou (développement par rapport à la $k$ème ligne)

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \det(A_{kj})$$

## Définition (suite)

- Le nombre $\det(A_{ij})$ est un **mineur** d'ordre $n-1$ de la matrice $A$.
- Le nombre $c_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{ij})$ est le **cofacteur** de $A$ relatif au coefficient $a_{ij}$.

## Remarque

*On admet que toutes ces formules de récurrence donnent le même résultat.*

## Exemples

1) Si $\Theta$ est la matrice nulle de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, $\det(\Theta) = 0$.
2) Si $I_n$ est la matrice identité de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, $\det(I_n) = 1$.
3) Si $n = 2$, $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

## Exemples (suite)

4) Si $n = 3$ et $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, alors

$$\begin{aligned} det(A) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{(développement suivant la 3ème colonne)} \\ &= (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &+ (-1)^{3+3} a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

## Remarques

1) *Si une colonne quelconque d'une matrice carrée $A$ est nulle, le déterminant de $A$ est nul $(det(A) = 0)$.*
2) *Si $A = (a_{ij})$ est une matrice dont tous les coefficients en dehors de la diagonale sont nuls, alors $det(A) = a_{11}a_{22}...a_{nn}$.*
3) *Si $A = (a_{ij})$ est une matrice dont tous les coefficients sous la diagonale sont nuls $(a_{ij} = 0$ si $i > j)$, alors $det(A) = a_{11}a_{22}...a_{nn}$.*
4) *Notant $c_i$ les colonnes d'une matrice $A$ on a $det(A) = det(c_1, ..., c_i, ..., c_n) = det(c_1, ..., c_i + \lambda c_j, ..., c_n)$, avec $i \neq j$. C'est-à-dire qu'on ne change pas la valeur du déterminant en ajoutant à une colonne un multiple d'une autre colonne.*
5) *En particulier, si deux colonnes sont égales le déterminant est nul.*
6) ***Calcul par blocs :** Quand la matrice $A$ est donnée par blocs, on peut parfois calculer son déterminant en fonction des blocs de $A$ :*

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix} \Longrightarrow \det(A) = \det(B)\det(D).$$

## Théorème (admis)

*L'application de* $(\mathbb{R}^n)^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times ... \times \mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}$ *qui à un* $n$*-uplet* $(c_1, c_2, ..., c_n)$ *de* $\mathbb{R}^n$ *associe le scalaire* $\det(c_1, c_2, ..., c_n)$ *est une forme* $n$*-linéaire alternée.*
*Toute forme* $n$*-linéaire alternée de* $(\mathbb{R}^n)^n$ *dans* $\mathbb{R}$ *est proportionnelle à cette application.*

Le corollaire suivant est fondamental.

## Corollaire

*Soit* $A$ *une matrice dont les colonnes sont* $c_1, c_2, ..., c_n$.

$$det(A) = det(c_1, ..., c_i, ..., c_j, ..., c_n) = -det(c_1, ..., c_j, ..., c_i, ..., c_n).$$

*Autrement dit, en échangeant deux colonnes on change le signe du déterminant.*

## Proposition

$$\forall A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K}),\ \forall B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K}),\ \det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Il n'est pas inutile de répéter ici que le déterminant n'est pas linéaire ! On a en général

$$\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B).$$

On peut prendre par exemple le cas des matrices carrées :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A+B) = -1, \quad \text{alors que} \quad \det(A) + \det(B) = 0.$$

Vérifier que, si $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, alors $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$!!

## Remarque

*Si $A$ et $B$ sont deux matrices semblables, alors*

$$\det(A) = \det(B).$$

## Démonstration.

Il existe une matrice $P$ inversible telle que, $A = P^{-1}BP$

$\det(A) = \det(P^{-1}BP) = \det(P^{-1})\det(B)\det(P)$

Or, $1 = \det(I_n) = \det(P^{-1}P) = \det(P^{-1})\det(P) \Longrightarrow \det(P^{-1}) = \dfrac{1}{\det(P)}$

$\Longrightarrow \det(A) = \det(B)$. $\square$

## Définition

Soient $u_1, u_2, ..., u_n$ des vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ de dimension $n$. On appelle déterminant de $(u_1, u_2, ..., u_n)$ dans une base $B$ et on note $\det_B(u_1, u_2, ..., u_n)$ le déterminant de la matrice dont les colonnes sont constituées des vecteurs $u_1, u_2, ..., u_n$.

Nous pouvons ainsi définir le déterminant d'un endomorphisme.

## Théorème

*Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n$ et $f$ un endomorphisme de $E$. Alors le scalaire $\det_B(f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n))$ ne dépend pas de la base $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ choisie. On l'appelle déterminant de l'endomorphisme $f$ et on note $\det(f)$.*

## Démonstration.

Soient $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ et $B' = \{e'_1, e'_2, ..., e'_n\}$ deux bases de $E$. On note $M$ et $N$ les matrices de l'endomorphisme $f$ dans ces deux bases et $P$ la matrice de passage de $B$ à $B'$. Alors on a $N = P^{-1}MP$ et d'après la proposition précédente $\det(M) = \det(N)$, d'où le résultat. $\square$

### Proposition

$\forall A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K}),\ \det(A) = \det({}^tA).$

### Remarque

*Une conséquence du dernier résultat, est que par transposition, tout ce que l'on a dit des déterminants à propos des colonnes est vrai pour les lignes. Ainsi, le déterminant est multilinéaire par rapport aux lignes, si une matrice a deux lignes égales, son déterminant est nul, on ne modifie pas un déterminant en ajoutant à une ligne une combinaison linéaire des autres lignes...*

Le théorème suivant est fondamental.

**Théorème**

*Soit* $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$*.Alors*

$$A \text{ est inversible } \Longleftrightarrow \det(A) \neq 0.$$

L'ensemble des matrices carrées $(n, n)$ inversibles à coefficients dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) est noté $GL_n(\mathbb{R})$ (resp. $GL_n(\mathbb{C})$).

**En fait il y a une formule pour la matrice inverse :**

Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. Nous lui associons la matrice $C$ des cofacteurs, appelée **Comatrice**, et notée **com(A)** :

$$C = (c_{ij}) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & . & . & . & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & . & . & . & c_{2n} \\ . & & & & & . \\ . & & & & & . \\ . & & & & & . \\ c_{n1} & c_{n2} & . & . & . & c_{nn} \end{pmatrix},$$

avec $c_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$

## Théorème

*Soit $A$ une matrice inversible, et $C$ sa comatrice. On a alors*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,{}^{t}C$$

## Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Le calcul donne que $\det(A) = 2$. La comatrice $C = com(A)$ s'obtient en calculant $9$ déterminants $(2,2)$ (sans oublier les signes $+/-$). On trouve (avec $c_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{ij})$) :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et donc } A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,{}^{t}C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Le théorème suivant appelé **règle de Cramer**, donne une formule explicite pour la solution de certains systèmes d'équations linéaires ayant autant d'équations que l'inconnues.
Considérons le système d'équations linéaires à $n$ équations et $n$ inconnues suivant :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Ce système peut aussi s'écrire sous forme matricielle

**AX=B** où $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & & & & & . \\ . & & & & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K}),\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$.

Définissons la matrice $A_j \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ par :

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{11} & . & . & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & . & . & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & . & . & a_{2n} \\ . & & & . & . & . & . & & . \\ . & & & . & . & . & . & & . \\ . & & & . & . & . & . & & . \\ a_{n1} & . & . & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & . & . & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, $A_j$ est la matrice obtenue en remplacant la $j$ème colonne de $A$ par le second membre $B$. La règle de Cramer va nous permettre de calculer la solution du système, dans le cas où $\det(A) \neq 0$, en fonction des déterminants des matrices $A$ et $A_j$.

## Théorème

*Soit $AX = B$ un système de $n$ équations à $n$ inconnues. Supposons que $\det(A) \neq 0$. Alors **l'unique solution** $(x_1, x_2, ..., x_n)$ du système est donnée par :*

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)},\ x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, ...,\ x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}.$$

## Démonstration.

Nous avons supposé que $\det(A) \neq 0$. Donc $A$ est inversible. Par suite, $X = A^{-1}B$ est l'unique solution du système. D'autre part, nous avons vu que $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^tC$ où $C$ est la comatrice de $A$. Donc $X = \frac{1}{\det(A)} {}^tCB$ :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & . & . & . & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & . & . & . & c_{n2} \\ . & & & & & . \\ . & & & & & . \\ c_{1n} & c_{2n} & . & . & . & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$$

## suite de la démonstration .

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} c_{11}b_1 + c_{21}b_2 + ... + c_{n1}b_n \\ c_{12}b_1 + c_{22}b_2 + ... + c_{n2}b_n \\ . \\ . \\ . \\ c_{1n}b_1 + c_{2n}b_2 + ... + c_{nn}b_n \end{pmatrix}.$$

$$\Longrightarrow \quad x_i = \frac{c_{1i}b_1 + c_{2i}b_2 + ... + c_{ni}b_n}{\det(A)}, \ \forall i = 1, 2, ..., n.$$

Mais $c_{1i}b_1 + c_{2i}b_2 + ... + c_{ni}b_n$ est le développement en cofacteurs de $\det(A_i)$ par rapport à sa $i$ème colonne :

$$\det(A_i) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+i} (a_{ji} = b_j) \det(A_{ji}) = c_{1i}b_1 + c_{2i}b_2 + ... + c_{ni}b_n.$$

$$\Longrightarrow \quad x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}, \ \forall i = 1, 2, ..., n.$$

## Exemple

Résolvons le système suivant :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 6 \\ -3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 30 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 8 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad A.X = B, \quad (\Leftrightarrow X = A^{-1}.B\ ??)$$

avec,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \ et\ B = \begin{pmatrix} 6 \\ 30 \\ 8 \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 8 \end{pmatrix},$$

$$\det(A) = 44,\ \det(A_1) = -40,\ \det(A_2) = 72 \text{ et } \det(A_3) = 152.$$

## Exemple (suite)

La solution est alors,

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = -\frac{40}{44} = -\frac{10}{11},$$
$$x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{72}{44} = \frac{18}{11},$$
$$x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{152}{44} = \frac{38}{11}.$$

Donc,

$$S = \left\{ \left( -\frac{10}{11}, \frac{18}{11}, \frac{38}{11} \right) \right\}.$$