Chapitre III: Réduction d'endomorphisme: diagonalisation et trigonalisation

Pr. Abdellatif Sadrati

Université Moulay-Ismail, F.S.T Errachidia.
abdo2sadrati@gmail.com

27 mars 2021

Plan

Dans tout le chapitre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et f un endomorphisme de E.

Définition

On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est **valeur propre** de f s'il existe un vecteur non nul x de E tel que $f(x) = \lambda x$; x est alors appelé **vecteur propre** de f associé à la valeur propre λ.

Remarque

*Tous les multiples non nuls d'un vecteur propre de f sont encore des vecteurs propres de f pour la même valeur propre. L'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme f s'appelle **spectre** de f et est noté $sp(f)$.*

En effet, si $v = \alpha x$ est un multiple de x, avec $\alpha \neq 0$, alors

$$f(v) = f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha \lambda x = \lambda \alpha x = \lambda v.$$

Exemple

Si f est une homothétie d'un espace vectoriel E, $f = a.Id_E$, alors tout vecteur non nul est un vecteur propre associé à la valeur propre a.

L'exemple que nous donnons ici concerne un espace vectoriel réel de dimension infinie.

Exemple

Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, indéfiniment dérivables. L'application $u : E \longrightarrow E$ qui à une fonction associe sa dérivée est un endomorphisme de E. Alors pour tout réel λ, la fonction $f_\lambda(t) = \exp(\lambda t)$ est un vecteur propre associé à la valeur propre λ, car $f_\lambda \neq 0$ et $u(f_\lambda) = f'_\lambda = \lambda f_\lambda$.

$$f_\lambda(t) = e^{\lambda t} \Longrightarrow u(f_\lambda)(t) = (e^{\lambda t})' = \lambda e^{\lambda t} = \lambda f_\lambda(t) \Longrightarrow u(f_\lambda) = \lambda f_\lambda.$$

Dans le théorème suivant nous caractérisons de manière plus précise les valeurs propres d'un endomorphisme.

Théorème

Soit $f \in L(E)$ et λ un scalaire. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) *λ est valeur propre de f ;*

(ii) *L'endomorphisme $f - \lambda Id_E$ n'est pas injectif, c'est-à-dire son noyau vérifie*

$$\ker(f - \lambda Id_E) = \{x \in E/(f - \lambda Id_E)(x) = 0\} \neq \{0\};$$

(iii) $\det(f - \lambda Id_E) = 0$ *;*

(iv) $\det(M - \lambda I_n) = 0$, *où M est la matrice de f dans n'importe quelle base de E.*

Démonstration.

Pour que λ soit valeur propre de f il faut et il suffit qu'il existe un vecteur non nul x de E tel que $f(x) = \lambda x \Longrightarrow f(x) = \lambda id_E x$, c'est-à-dire que l'on ait $(f - \lambda id_E)(x) = 0$, ou encore que le noyau $\ker(f - \lambda id_E) \neq \{0\}$. Ceci entraine l'équivalence de (i) et (ii).

Pour que l'endomorphisme $f - \lambda id_E$ de l'espace vectoriel de dimension n finie E ne soit pas injectif il faut et il suffit qu'il ne soit pas bijectif, c'est-à-dire que son déterminant soit nul, d'où l'équivalence de (ii) et (iii).

Enfin par définition du déterminant d'un endomorphisme, (iii) et (iv) sont équivalentes. □

Définition

Le **polynôme caractéristique** de $f \in L(E)$ est défini par

$$C_f(X) = \det(f - X id_E).$$

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors $C_f(X) \in \mathbb{K}[X]$. De plus, si M est la matrice de f dans une base quelconque B de E, alors

$$C_f(X) = \det(M - XI_n) = C_M(X).$$

Théorème

Les valeurs propres d'un endomorphisme f sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E sont exactement les racines de son polynôme caractéristique qui sont dans $\mathbb{K}$.

Démonstration.

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\lambda \in \mathbb{K} \text{ est valeur propre de } f &\iff f - \lambda Id_E \text{ est non injectif} \\
&\iff \det(f - \lambda Id_E) = 0 \\
&\iff C_f(\lambda) = 0 \\
&\iff \lambda \text{ est une racine de } C_f \text{ dans } \mathbb{K}.
\end{aligned}$$

□

Soit $M = (m_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$. Soit X une indéterminé, alors on peut écrire :

$$M - XI_n = \begin{pmatrix} m_{11} - X & m_{12} & . & . & . & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} - X & . & . & . & m_{2n} \\ . & . & . & & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & & . & . \\ m_{n1} & m_{n2} & . & . & . & m_{nn} - X \end{pmatrix}$$

Proposition

Le polynôme caractéristique d'une matrice (ou d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n) est un polynôme de degré n.

Corollaire

En dimension n un endomorphisme (ou une matrice d'ordre n) a au plus n valeurs propres distinctes.

Exemple

Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice triangulaire. Alors $A - XI_n$ est aussi une matrice triangulaire et le polynôme caractéristique (déterminant d'une matrice triangulaire) est donc le produit des coefficients diagonaux, c'est-à-dire

$$C_A(X) = (a_{11} - X)(a_{22} - X)...(a_{nn} - X).$$

Les valeurs propres de A sont donc les coefficients diagonaux de A. En particulier ce résultat est vrai pour une matrice diagonale.

Définition

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. L'ordre de multiplicité d'une valeur propre λ de f est l'ordre de multiplicité de la racine λ du polynôme caractéristique de f.

Exp : $P(X) = X^2(X-1)^3(X+4)$.

Ce qui précède montre que l'ensemble des vecteurs propres associés à une valeur propre λ $\{x \neq 0 : (f - \lambda id_E)(x) = 0\}$, auquel on ajoute le vecteur nul est exactement $\ker(f - \lambda Id_E)$.

Définition

Soit λ une valeur propre d'un endomorphisme f. On appelle **sous-espace propre** associé à λ, le sous-espace vectoriel de E défini par :

$$E_\lambda = \ker(f - \lambda Id_E).$$

Remarque

C'est en cherchant le noyau de l'application $f - \lambda Id_E$ que l'on détermine les vecteurs propres associés à la valeur propre λ.

Exemple

Le polynôme caractéristique de la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est

$$C_M(X) = \det(M - XI_2) = \begin{vmatrix} -X & 1 \\ 1 & -X \end{vmatrix} = X^2 - 1.$$

Les valeurs propres sont ± 1. Les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres se déterminent alors de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_1 = \ker(M - 1.I_2) \iff (M - 1.I_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

$$\iff x = y.$$

Donc E_1 est engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exemple (suite)

De la même manière on détermine E_{-1}

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_{-1} \Longleftrightarrow (M + 1.I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow x = -y.$$

Donc E_{-1} est engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Théorème

Soit $f \in L(E)$ et λ une valeur propre de f. Alors la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre λ est inférieure ou égale à la multiplicité de la valeur propre λ. En particulier, si λ est une valeur propre simple (multiplicité égale à 1) alors $\dim E_\lambda = 1$.

Définition

On dit qu'un polynôme $P(X)$ est **scindé** dans $\mathbb{K}$ s'il est décomposable en un produit de facteurs du premier degré à coefficients dans $\mathbb{K}$, c'est-à-dire s'il peut s'écrire sous la forme :

$$P(X) = a\prod_{i=1}^{n}(X-\alpha_i),\ \ a, \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}.$$

Exp : $P(X) = X^2(X-1)^3(X+4)$.
Exp : $P(X) = X^2(X-1)^3(X^2+4)$.

Remarque

Si le polynôme caractéristique $C_f(X)$ d'un endomorphisme f est scindé dans $\mathbb{K}$, alors on peut l'écrire sous la forme :

$$C_f(X) = (-1)^n \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{m_i} = \prod_{i=1}^{r} (\lambda_i - X)^{m_i},$$

où $r, 1 \leq r \leq n$, représente le nombre de valeurs propres distinctes, les $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq r}$ sont les différentes valeurs propres et les $(m_i)_{1 \leq i \leq r}$ sont leurs ordres de multiplicité respectifs. On a de plus $\sum_{i=1}^{r} m_i = n$.

En effet,

$$
\begin{aligned}
C_f(X) &= (-1)^n \prod_{i=1}^{r} (X-\lambda_i)^{m_i} \\
&= (-1)^n (X-\lambda_1)^{m_1}.(X-\lambda_2)^{m_2}...(X-\lambda_r)^{m_r} \\
&= (-1)^n (-(\lambda_1 - X))^{m_1}.(-(\lambda_2 - X))^{m_2}...(-(\lambda_r - X))^{m_r} \\
&= (-1)^n (-1)^{m_1}(\lambda_1 - X)^{m_1}.(-1)^{m_2}(\lambda_2 - X)^{m_2}...(-1)^{m_r}(\lambda_r - X)^{m_r} \\
&= (-1)^n (-1)^{n=\sum_{i=1}^{r} m_i} (\lambda_1 - X)^{m_1}.(\lambda_2 - X)^{m_2}...(\lambda_r - X)^{m_r} \\
&= (-1)^{2n} \prod_{i=1}^{r} (\lambda_i - X)^{m_i} \\
&= \prod_{i=1}^{r} (\lambda_i - X)^{m_i}.
\end{aligned}
$$

Définition

On dit que $f \in L(E)$ est diagonalisable s'il existe une base de E constituée de vecteurs propres.

Remarque

Dans une telle base la matrice de f s'écrit

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & . & & & . \\ . & & . & & . \\ . & & & . & 0 \\ 0 & . & . & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Théorème

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie, C_f son polynôme caractéristique, $\lambda_1, ..., \lambda_r$ une liste sans répétition de toutes ses valeurs propres et $E_{\lambda_i} = \ker(f - \lambda_i Id_E)$ $(1 \leq i \leq r)$ ses sous-espaces propres associés. Les énoncés suivants sont alors équivalents :

(i) *f est diagonalisable ;*

(ii) *C_f est scindé, mettons : $C_f(X) = \prod_{i=1}^{r} (\lambda_i - X)^{m_i}$, et la multiplicité de chaque racine λ_i de C_f est égale à la dimension du sous-espace propre associé à λ_i ; $\dim E_{\lambda_i} = m_i,\ 1 \leq i \leq r$;*

(iii) $\dim E = \dim E_{\lambda_1} + \dim E_{\lambda_2} + ... + \dim E_{\lambda_r}$;

(iv) *E est la somme directe des sous-espaces propres de f :*

$$E = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus ... \oplus E_{\lambda_r} \ (E = E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2} + ... + E_{\lambda_r} \text{ et } E_{\lambda_i} \cap E_{\lambda_j} = \{0\}, i \neq j).$$

Afin de diagonaliser un endomorphisme f, on peut procéder comme suit :

1) Calcule et scindage de C_f : $C_f(X) = \prod_{i=1}^{r}(\lambda_i - X)^{m_i}$. si C_f n'est pas scindé, alors f n'est pas diagonalisable.

2) Pour chaque racine λ_i de C_f, détermination d'une base $\{u_{i1}, u_{i2}, ..., u_{in_i}\}$ du sous-espace propre $E_{\lambda_i} = \ker(f - \lambda_i Id_E)$.

- Si l'une de ces bases vérifie : $n_i = \dim E_{\lambda_i} < m_i$, alors f n'est pas diagonalisable.
- Sinon, on a $n_i = \dim E_{\lambda_i} = m_i$ pour tout i et l'on obtient une base de E en les juxtaposant. La matrice de passage à cette nouvelle base et la matrice diagonale représentant f dans cette dernière s'en déduisent immédiatement :

Exp : $P(X) = X^2(X-1)^3(X+4)$.
Exp : $P(X) = X^2(X-1)^3(X^2+4)$.

Méthode de diagonalisation-Exemple

$$P = \begin{pmatrix} u_{11} & . & . & u_{1n_1} & . & . & u_{r1} & . & . & u_{rn_r} \\ . & & & . & & & . & & & . \\ . & & & . & & & . & & & . \\ . & & & . & & & . & & & . \\ . & & & . & & & . & & & . \\ . & & & . & & & . & & & . \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & . & & . & & . & 0 \\ 0 & . & & & & & & & \\ & & . & . & & & & & . \\ . & & . & \lambda_1 & & & & & \\ & & & & . & . & & & . \\ . & & & & . & . & & & \\ & & & & & & \lambda_r & . & . \\ . & & & & & & . & . & \\ & & & & & & & . & 0 \\ 0 & & . & & . & & . & 0 & \lambda_r \end{pmatrix}$$

Exemple

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ représenté dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique $C_f(X) = \begin{vmatrix} -X & 1 \\ -1 & -X \end{vmatrix} = X^2 + 1$ n'est pas scindé dans $\mathbb{R}$, donc f n'est pas diagonalisable.

Considérons maintenant l'endomorphisme g de $\mathbb{C}^2$ représenté par la matrice A : On a cette fois $C_g(X) = X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$ et g a deux valeurs propres simples : i et $-i$. Les deux sous-espaces propres correspondants E_i, E_{-i} sont donc de dimension 1 et g est diagonalisable. Déterminons une base de E_i.

Exemple (suite)

Les vecteurs de $E_i = \ker(g - iId_{\mathbb{C}^2})$ sont les vecteurs $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ tels que

$$(A - iI_2)\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -iz_1 + z_2 = 0 \\ -z_1 - iz_2 = 0 \; {\color{red}(\times i)} \end{cases}.$$

Autrement dit tels que $z_2 = iz_1$. On peut donc choisir comme base de E_i le vecteur $u_1 = (1, i)$. On trouve de mème que E_{-i} est l'ensemble de vecteurs $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ tels que $z_2 = -iz_1$, et l'on peut donc choisir comme base de E_{-i} le vecteur $u_2 = (1, -i)$. La matrice de passage à la base $\{u_1, u_2\}$ et la matrice de g dans cette dernière sont respectivement :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

En conclusion, la matrice A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$, mais pas dans $\mathbb{R}$.

Définition

Une matrice carrée A est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire T, supérieure ou inférieure, c'est-à-dire s'il existe une matrice inversible P telle que $A = P^{-1}TP$ (ou $T = P^{-1}AP$).

Définition

On dit que $f \in L(E)$ est trigonalisable s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure ou inférieure.

Trigonaliser f signifie : Rechercher une telle base. Si f a dans la base $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ une matrice triangulaire supérieure

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & & & . \\ . & & . & . & & . \\ . & & & . & . & . \\ 0 & . & . & . & 0 & a_{nn} \end{pmatrix},$$

alors pour tout j : $f(u_j) = \sum_{i=1}^{j} a_{ij} u_i = a_{1j} u_1 + a_{2j} u_2 + ... + a_{jj} u_j$.

Trigonaliser $f : E \longrightarrow E$ revient donc à chercher une base $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ de E telle que pour tout $j \in \{1, 2, ..., n\}$, $f(u_j)$ appartient au sous-espace engendré par les vecteurs $u_1, u_2, ..., u_j$:

$$f(u_j) \in \text{ vect}(u_1, u_2, ..., u_j).$$

En particulier, u_1 est nécessairement un vecteur propre de f.

Remarque

Tout endomorphisme (ou matrice) diagonalisable est trigonalisable.

Théorème

$f \in L(E)$ *est trigonalisable si et seulement si* f *est scindé, c-à-d* $C_f(X)$ *est scindé.*

En particulier, lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, f *est toujours trigonalisable.*

Exemple

On considère f l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le calcul du polynôme caractéristique donne : $C_f(X) = C_A(X) = (1-X)^3$.
La matrice A admet donc une seule valeur propre $\lambda = 1$, elle ne peut pas être diagonalisable sinon, il existerait une matrice P inversible telle que $A = P^{-1}.I_3.P$, alors $A = I_3$, or ce n'est pas le cas.
On détermine le sous espace propre E_1 associé à cette valeur propre.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 = Ker(A - 1.I_3) \Leftrightarrow (A - 1I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemple (suite)

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2x+2y-2z=0 \\ -x-y+z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases} \Longleftrightarrow x+y-z=0 \Longleftrightarrow x+y=z.$$

Donc,

$$\begin{aligned} E_1=\{(x,y,x+y):(x,y)\in\mathbb{R}^2\} &= \{(x,0,x)+(0,y,y):(x,y)\in\mathbb{R}^2\} \\ &= \{x(1,0,1)+y(0,1,1):(x,y)\in\mathbb{R}^2\}. \end{aligned}$$

Comme les deux vecteurs $u_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $u_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ sont libres, car le sous déterminant $\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}\neq 0$, alors on peut choisir $\{u_1,u_2\}$ comme base de E_1.

Exemple (suite)

On complète (u_1, u_2) par un vecteur u_3 pour obtenir une base de $\mathbb{R}^3$. Ici, on peut par exemple choisir $u_3 = e_3$. Le système $\{u_1, u_2, u_3\}$ est libre car, $\det(u_1, u_2, u_3) = 1 \neq 0$. On a donc les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_1 = e_1 + e_3 \\ u_2 = e_2 + e_3 \\ u_3 = e_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_1 = u_1 - u_3 \\ e_2 = u_2 - u_3 \\ e_3 = u_3 \end{cases}.$$

Ainsi, $f(u_1) = u_1,\ f(u_2) = u_2$ et

$$\begin{aligned} f(u_3) = f(e_3) &= -2e_1 + e_2 \\ &= -2(u_1 - u_3) + (u_2 - u_3) \\ &= -2u_1 + u_2 + u_3. \end{aligned}$$

Exemple (suite)

La matrice de f dans la base $\{u_1, u_2, u_3\}$ s'écrit alors :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que $T = P^{-1}AP$, avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On considère f l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Le calcul du polynôme caractéristique donne $C_f(X) = C_A(X) = (1-X)^4$. Il y a donc une seule valeur propre $\lambda = 1$ d'ordre 4. On détermine maintenant le sous-espace propre E_1 associé à cette valeur propre.

$$(A - 1I_4)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -3y + 3t = 0 \\ -2x - 7y + 13t = 0 \\ -3y + 3t = 0 \\ -x - 4y + 7t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3t \\ y = t \end{cases}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} E_1 &= \{(3t,t,z,t) : (z,t)\in\mathbb{R}^2\} \\ &= \{(3t,t,0,t)+(0,0,z,0) : (z,t)\in\mathbb{R}^2\} \\ &= \{t(3,1,0,1)+z(0,0,1,0) : (z,t)\in\mathbb{R}^2\}. \end{aligned}$$

L'unique sous-espace propre E_1 est donc de dimension 2 ($< 4 = \dim\mathbb{R}^4$) donc f n'est pas diagonalisable.
E_1 est engendré par les vecteurs u_1 et u_2 de coordonnées :

$$u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 3e_1 + e_2 + e_4 \\ u_2 = e_3 \end{cases}.$$

On complète (u_1,u_2) par (u_3,u_4) pour obtenir une base de $\mathbb{R}^4$. Ici on peut par exemple choisir $u_3 = e_1$ et $u_4 = e_2$. On a donc les relations suivantes :

$$e_1 = u_3,\quad e_2 = u_4,\quad e_3 = u_2,\quad e_4 = u_1 - 3u_3 - u_4.$$

[On a calculé les $(e_i)_i$ en fonction des $(u_i)_i$] .

Par suite, $f(u_1) = u_1$, $f(u_2) = u_2$ (des vecters propres associés à 1) et

$$f(u_3) = f(e_1) = e_1 - 2e_2 - e_4 = -u_1 + 4u_3 - u_4$$
$$f(u_4) = f(e_2) = -3e_1 - 6e_2 - 3e_3 - 4e_4 = -4u_1 - 3u_2 + 9u_3 - 2u_4.$$

La matrice de f dans la base $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ s'écrit alors

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

On considère la sous-matrice

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

qui est la matrice de la projection de f sur le sous-espace engendré par $(u_3$ et $u_4)$, dans la base canonique de ce sous-espace. On va maintenant trigonaliser cette matrice. Le polynôme caractéristique de cette matrice est

$$C_{A_1}(X) = (1 - X)^2.$$

Cette matrice n'a qu'une seule valeur propre double qui est 1.
Le sous espace propre associé à cette valeur propre est déterminé par

$$\begin{cases} 3x+9y=0 \\ -x-3y=0 \end{cases} \iff x=-3y.$$

Sa dimension est donc 1, et il est engendré par v_1 de coordonnées dans la base canonique du sous-espace $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. On le complète en une base du sous-espace avec un vecteur v_2 de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les vecteurs correspondants dans l'espace $E=\mathbb{R}^4$ sont donc :

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = v_1' \text{ et } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = v_2'$$

ou encore, $v_1' = -3u_3 + u_4$ et $v_2' = u_4$.

On obtient donc,

$$\begin{aligned} f(v_1') &= -3f(u_3) + f(u_4) \\ &= -3(-u_1 + 4u_3 - u_4) + (-4u_1 - 3u_2 + 9u_3 - 2u_4) \\ &= -u_1 - 3u_2 - 3u_3 + u_4 = -u_1 - 3u_2 + v_1'. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(v_2') = f(u_4) &= -4u_1 - 3u_2 + 9u_3 - 2u_4 \\ &= -4u_1 - 3u_2 - 3(-3u_3 + u_4) + u_4 \\ &= -4u_1 - 3u_2 - 3v_1' + v_2'. \end{aligned}$$

La matrice de f dans la base $\{u_1, u_2, v_1', v_2'\}$ s'écrit alors

$$A'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E. On définit les puissances de f par :

$$f^0 = Id_E, \;\; f^1 = f, \;\; f^2 = f \circ f, ..., \;\; f^{m+1} = f^m \circ f.$$

Plus généralement, si $P(X) = a_0 + a_1 X + ... + a_m X^m$ est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, alors on définit le polynòme d'endomorphisme $P(f)$ par :

$$P(f) = a_0 Id_E + a_1 f + ... + a_m f^m.$$

Si A est la matrice de f dans une base B de E, alors le polynôme de matrice $P(A)$ défini par :

$$P(A) = a_0 I_n + a_1 A + ... + a_m A^m$$

est la matrice de $P(f)$ dans la base B.

Proposition

Pour tout endomorphisme f de E, il existe un polynòme non nul $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q(f) = 0$ (où 0 est l'endomorphisme nul de E).

Démonstration.

E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, donc $L(E)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n^2. Par conséquent, les $n^2 + 1$ endomorphismes $Id_E, f, f^2, ..., f^{n^2}$ sont liés. Donc il existe des coefficients $a_0, a_1, ..., a_{n^2}$ de $\mathbb{K}$ non tous nuls, tels que $a_0 Id_E + a_1 f + ... + a_{n^2} f^{n^2} = 0$. C'est-à-dire le polynôme non nul

$$Q(X) = a_0 + a_1 X + ... + a_{n^2} X^{n^2}$$

vérifie $Q(f) = 0$. □

On appelle polynôme annulateur de f tout polynôme $Q(X) \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q(f) = 0$.

Soit $f \in L(E)$ (resp. $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$). Alors il existe un unique polynôme unitaire $m_f(X)$ (resp. $m_A(X)$) de $\mathbb{K}[X]$ de degré minimal, vérifiant $m_f(f) = 0$ (resp. $m_A(A) = 0$), tel que tout polynôme annulateur de f (resp. de A) est multiple de $m_f(X)$ (resp. $m_A(X)$).

Théorème (de Cayley-Hamilton)

Soit $f \in L(E)$ (resp. $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$). Alors le polynôme caractéristique $C_f(X)$ de f (resp. $C_A(X)$ de A) est un polynôme annulateur de f (resp. de A).

Corollaire

Soit $f \in L(E)$ (resp. $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$). Alors le polynôme minimal $m_f(X)$ divise $C_f(X)$ et $m_A(X)$ divise $C_A(X)$.

Exemples

1) Soit $f \in L(\mathbb{R}^3)$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -6 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Comme $C_f(X) = (2-X)(X-1)^2 = -(X-2)(X-1)^2$, il en résulte que

$$m_f(X) = (X-2)(X-1) \text{ ou } m_f(X) = (X-2)(X-1)^2.$$

Or, $(A-2I_3)(A-I_3) \neq 0$, alors

$$m_f(X) = (X-2)(X-1)^2 = C_f(X).$$

2) Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. On a $C_A(X) = (1-X)(2+X)^2 = -(X-1)(X+2)^2$. Comme $(A-I_3)(A+2I_3) = 0$, alors $m_A(X) = (X-1)(X+2)$.

Théorème

Soit $f \in L(E)$ (resp. $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$). Alors f (resp. A) est diagonalisable si, et seulement si les racines de $m_f(X)$ (resp. de $m_A(X)$) sont simples et appartiennent à $\mathbb{K}$.