Chapitre IV : Formes bilinéaires et formes quadratiques

Abdellatif Sadrati

Université Moulay-Ismail, F.S.T Errachidia.
abdo2sadrati@gmail.com

27 mars 2021

Plan

Tout le long du chapitre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une forme linéaire sur E est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}$ étant considéré comme un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Proposition

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ une base de E. Une application f de E dans $\mathbb{K}$ est une forme linéaire si et seulement si il existe n scalaires $a_1, a_2, ..., a_n$ tels que pour tout
$x = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n$: $f(x) = x_1a_1 + x_2a_2 + ... + x_na_n = \sum_{i=1}^{n} a_ix_i$.

Ceci se vérifie facilement en remarquant que
$f(x) = x_1f(e_1) + x_2f(e_2) + ... + x_nf(e_n)$: on pose $a_i = f(e_i), i = 1, 2, ..., n$.

Exemple

Si $E = \mathbb{K}_n[X]$, et si $a \in \mathbb{K}$ alors l'application $f : \mathbb{K}_n[X] \longrightarrow \mathbb{K}$ qui à $P(X)$ associe $P(a)$ est une forme linéaire sur E.

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle espace **dual** (ou simplement dual) de E l'espace vectoriel des formes linéaires sur E, c'est-à-dire $L(E, K)$, et on le note E^*.

Définition

Soit $B=\{e_1,e_2,...,e_n\}$ une base de E. Pour tout $i=1,2,...,n$ on définit une forme linéaire e_i^* sur E en posant

$$\text{pour } 1\leq j\leq n,\ e_i^*(e_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & \text{si } i=j\\ 0 & \text{si } i\neq j\end{cases}.$$

δ_{ij} est appelé le **symbole de Kroneker.**

Proposition

*Soit $B=\{e_1,e_2,...,e_n\}$ une base de E. L'ensemble $B^*=\{e_1^*,e_2^*,...,e_n^*\}$ défini comme ci-dessus est une base de E^* et est appelé **base duale** de B.*

Définition

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Une forme bilinéaire sur $E \times F$ est une application φ de $E \times F$ dans $\mathbb{K}$, telle que :

- Pour x fixé dans E, l'application $\varphi_x : y \longrightarrow \varphi(x, y)$ est une forme linéaire sur F.
- Pour y fixé dans F, l'application $\varphi_y : x \longrightarrow \varphi(x, y)$ est une forme linéaire sur E.

Exemple

Soit F l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans $\mathbb{K}$ (autrement dit l'espace des formes linéaires sur E). L'application

$$\begin{array}{rcl} \varphi : E \times L(E, \mathbb{K}) & \to & \mathbb{K} \\ (x, f) & \to & \varphi(x, f) = f(x) \end{array}$$

$\varphi(\alpha x + \beta y, f) = \alpha f(x) + \beta f(y)$ et $\varphi(x, \alpha f + \beta g) = \alpha f(x) + \beta g(x)$.

Dans la suite on va supposer que $E = F$. Dans ce cas, on parle de forme bilinéaire sur E.

Exemples

1) Soit $E = \mathbb{K}$. Soit a un élément de $\mathbb{K}$ et φ l'application de $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ définie par $\varphi(x, y) = axy$. C'est une forme bilinéaire.

   Réciproquement, toutes les formes bilinéaires sur $\mathbb{K}$ sont de ce type. En effet, soit φ une forme bilinéaire sur $\mathbb{K}$. Alors, pour tout (x, y) de $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$, $\varphi(x, y) = x\varphi(1, y)$ (linéarité par rapport à la première variable). Or, $\varphi(1, y) = y\varphi(1, 1)$ (linéarité par rapport à la deuxième variable). D'où : $\varphi(x, y) = xy\varphi(1, 1)$. En posant $a = \varphi(1, 1)$ qui est bien un scalaire, il vient $\varphi(x, y) = axy$.

2) Soit $E = \mathbb{R}^2$ et ψ l'application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ par

$$\psi(x, y) = \psi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 - 2x_2y_1 + 2x_1y_2 - x_2y_2$$

   est une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^2$ (vréification immédiate).

Il est toujours possible d'associer à une application linéaire une matrice dans une base. Voyons ce qu'il en est pour une forme bilinéaire φ. Soit $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, et soient

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \text{ et } y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$$

deux éléments de E. On a

$$\begin{aligned}
\varphi(x, y) &= \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi\left(e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j \varphi(e_i, e_j) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \varphi(e_i, e_j) x_i y_j .
\end{aligned}$$

Ainsi, la forme bilinéaire φ est déterminée de façon unique par la matrice suivante dans la base B :

$$\boxed{M_{\varphi,B} = M_B = (\varphi(e_i, e_j))_{1 \leq i,j \leq n} .}$$

Si on note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix}$ les matrices colonnes des vecteurs x et y dans la base B et M_B la matrice associée à φ dans la base B. C'est donc la matrice de $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ de terme général $a_{ij} = \varphi(e_i, e_j)$. Il vient :

$$\varphi(x,y) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} x_i y_j = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \right).$$

En notant $c_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j$, cela donne :

$$\varphi(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i c_i = \begin{pmatrix} x_1 & . & . & . & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ . \\ . \\ . \\ c_n \end{pmatrix}.$$

La matrice ligne $\begin{pmatrix} x_1 & . & . & . & x_n \end{pmatrix} = {}^tX$. Le scalaire $c_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j$ peut être interprété comme le produit

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & . & . & . & a_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ . \\ . \\ . \\ c_n \end{pmatrix} = M_B \begin{pmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix}.$$

D'où le résultat suivant :

Proposition

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ une base de E et φ une forme bilinéaire sur E. Soit M_B la matrice associée à φ dans la base B.

Si x et y sont deux éléments de E, X et Y les matrices colonnes dont les éléments sont les coordonnées de x et y respectivement dans la base B, alors on a

$$\boxed{\varphi(x, y) = {}^tX M_B Y.}$$

Bien évidemment la question qui se pose est celle de l'existence d'une formule liant les matrices associées à une forme bilinéaire dans deux bases différentes.

Soient B et B' deux bases de E. P la matrice de passage de B à B'. Soient x et y deux éléments de E de matrices-colonnes $X,\ X'$ et $Y,\ Y'$ dans B et B' respectivement. Les formes classiques de changement de base donnent les relations :

$$X = PX' \quad \text{et} \quad Y = PY'.$$

Alors, si φ est une forme bilinéaire sur E et M_B sa matrice dans la base B on a :

$$\varphi(x,y) = {}^tXM_BY = {}^t(PX')M_B(PY') = {}^tX'({}^tPM_BP)Y'.$$

La formule trouvée prouve que $M_{B'} = {}^tPM_BP$ est la matrice associée à φ dans la base B'.

On peut donc énoncer la formule de changement de base :

Proposition

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, B et B' deux bases de E et P la matrice de passage de B à B'. Soient φ une forme bilinéaire sur E, M et M' les matrices associées à φ dans les bases B et B' respectivement. Alors :

$$\boxed{M' = {}^tPMP.}$$

Remarque

Attention à ne pas confondre avec la formule de changement de base pour une application linéaire

$$\boxed{M' = P^{-1}MP.}$$

Ce qui précède nous donne la caractérisation suivante d'une forme bilinéaire sur un espace vectoriel E de dimension n :

Proposition

Soit $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ *une base de* E. *Une application* φ *de* $E \times E$ *dans* $\mathbb{K}$ *est une forme bilinéaire sur* E *si, et seulement s'il existent des scalaires* a_{ij}, *pour* $1 \leq i, j \leq n$, *tels que pour tout*

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n \text{ et } y = y_1e_1 + y_2e_2 + ... + y_ne_n,$$

$\varphi(x, y)$ *s'écrit de la manière suivante :*

$$\varphi(x, y) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij}x_iy_j.$$

Définition

On dit que deux matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$, M et M', sont congruentes, s'il existe une matrice inversible P telle que $M' = {}^tPMP$.

Définition

Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

- φ est définie si
$$\forall x \in E, \quad \varphi(x,x) = 0 \iff x = 0;$$
- φ est dite positive lorsque
$$\forall x \in E, \quad \varphi(x,x) \geq 0;$$
- φ est dite définie positive lorsque
$$\forall x \in E \setminus \{0\}, \quad \varphi(x,x) > 0.$$

Définition

On dit qu'une forme bilinéaire φ sur E est symétrique si

$$\forall (x,y) \in E \times E, \ \ \varphi(x,y) = \varphi(y,x);$$

Elle est antisymétrique si $\varphi(x,y) = -\varphi(y,x)$.
Remarquer que la symétrie permet de ne vérifier la linéarité que d'un seul côté.

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha x + \beta z, y) &= \alpha\varphi(x,y) + \beta\varphi(z,y) = \alpha\varphi(y,x) + \beta\varphi(y,z) \\ &= \varphi(y, \alpha x + \beta z). \end{aligned}$$

Exemple

La relation $\varphi\left((x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n)\right) = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n$ définit une forme bilinéaire symétrique et définie positive (à vérifier).

Proposition

Pour qu'une forme bilinéaire soit symétrique il faut et il suffit que sa matrice dans une base donnée soit symétrique (c'est-à-dire $a_{ij} = a_{ji}$).

Démonstration.

Soit $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ une base de E. La matrice de la forme bilinéaire φ dans cette base est :

$$(\varphi(e_i, e_j))_{1\leq i,j\leq n}\,.$$

Si cette matrice est symétrique on a pour tout $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$,

$$\varphi(x,y) = \sum_{1\leq i,j\leq n} \varphi(e_i,e_j)x_iy_j = \sum_{1\leq i,j\leq n} \varphi(e_j,e_i)y_jx_i = \varphi(y,x),$$

c'est-à-dire que la forme bilinéaire est symétrique. $\square$

Définition

On dit qu'une application $Q : E \longrightarrow \mathbb{K}$ est une forme quadratique sur l'espace vectoriel E s'il existe une forme bilinéaire symétrique φ sur $E \times E$ vérifiant $Q(x) = \varphi(x, x)$ pour tout x dans E. φ est appelée la forme bilinéaire associée à Q.

Exemples

1) Soient $E = \mathbb{K}$, a un élément de $\mathbb{K}$ et φ la forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{K}$ définie par $\varphi(x, y) = axy$. Alors : $Q : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K},\ x \longrightarrow ax^2$ est une forme quadratique associée à φ.
2) Soient $E = \mathbb{K}^2$ et ψ la forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{K}^2$ définie par $\psi\left((x, y), (x', y')\right) = xx' + yy'$. Alors : $Q : \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K},\ (x, y) \longrightarrow x^2 + y^2$ est une forme quadratique associée à ψ.

Proposition

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, φ une forme bilinéaire symétrique sur E et Q la forme quadratique associée à φ.

i) *Soient x un élément de E et λ un scalaire. Alors,*

$$Q(\lambda x) = \lambda^2 Q(x).$$

ii) *Pour tout (x, y) appartenant à $E \times E$,*

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2}\left[Q(x + y) - Q(x) - Q(y)\right].$$

*Cette dernière formule est appelée **formule de polarisation.***

Démonstration.

i) Soient $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors,

$$Q(\lambda x) = \varphi(\lambda x, \lambda x) = \lambda^2 \varphi(x,x) = \lambda^2 Q(x).$$

ii) Soit $(x,y) \in E \times E$. Alors,

$$\begin{aligned} Q(x+y) &= \varphi(x+y, x+y) \\ &= \varphi(x, x+y) + \varphi(y, x+y) \\ &= \varphi(x,x) + \varphi(x,y) + \varphi(y,x) + \varphi(y,y). \end{aligned}$$

Comme φ est symétrique cela donne

$$\begin{aligned} Q(x+y) &= \varphi(x,x) + 2\varphi(x,y) + \varphi(y,y) \\ &= Q(x) + 2\varphi(x,y) + Q(y). \end{aligned}$$

D'où le résultat. $\square$

Le théorème suivant permet d'avoir une caractérisation des formes quadratiques plus utilisable.

Théorème

Une application Q de E dans $\mathbb{K}$ est une forme quadratique sur E si, et seulement si les deux propriétés suivantes sont satisfaites :

1) $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, Q(\lambda x) = \lambda^2 Q(x)$.
2) *L'application φ définie par :*

$$\forall (x, y) \in E \times E,\ \varphi(x, y) = \frac{1}{2}\left[Q(x + y) - Q(x) - Q(y)\right]$$

est bilinéaire symétrique.

Si ces conditions sont satisfaites, Q est une formes quadratique associée à φ et la forme bilinéaire symétrique φ est souvent appelée ***forme polaire*** *associée à Q.*

Remarque

Pour toute forme quadratique Q il existe une unique forme bilinéaire symétrique associée.

Attention ! étant donné une forme quadratique Q, il existe en général une infinité de forme bilinéaires φ vérifiant $Q(x) = \varphi(x, x)$. Par exemple, si Q est la forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$ définie pour tout $x = (x_1, x_2)$ par $Q(x) = x_1 x_2$ et si φ_λ est la forme bilinéaire définie pour $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$ par

$$\varphi_\lambda\left((x, y)\right) = \varphi_\lambda\left((x_1, x_2), (y_1, y_2)\right) = \lambda x_1 y_2 + (1 - \lambda) x_2 y_1,$$

$$\varphi_\lambda\left((y, x)\right) = \varphi_\lambda\left((y_1, y_2), (x_1, x_2)\right) = \lambda y_1 x_2 + (1 - \lambda) y_2 x_1,$$

alors on a $\varphi_\lambda(x, x) = Q(x)$, pour tout λ. Mais ces formes ne sont pas symétriques sauf pour $\lambda = \frac{1}{2}$, qui correspond à la forme bilinéaire associée, C-à-d

$$\varphi_{\frac{1}{2}}(x, y) = \frac{1}{2} x_1 y_2 + \frac{1}{2} x_2 y_1 = \frac{1}{2} y_1 x_2 + \frac{1}{2} y_2 x_1 = \varphi_{\frac{1}{2}}(y, x).$$

Soient $B=\{e_1,e_2,...,e_n\}$ une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et Q une forme quadratique sur E. La matrice de Q dans cette base est exactement celle de sa forme bilinéaire associée φ. Si on note $M_B=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ cette matrice, et si de plus X est la matrice colonne dans B d'un vecteur x de E, alors

$$\begin{aligned}
Q(x)=\varphi(x,x) &= {}^tXM_BX=\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}x_ix_j \\
&= \sum_{1\leq i=j\leq n} a_{ii}x_i^2+\sum_{1\leq i<j\leq n} a_{ij}x_ix_j+\sum_{1\leq j<i\leq n} a_{ij}x_ix_j \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2+2\sum_{1\leq i<j\leq n} a_{ij}x_ix_j
\end{aligned}$$

car φ étant symétrique on a $a_{ij}=\varphi(e_i,e_j)=\varphi(e_j,e_i)=a_{ji}$.
Une forme quadratique s'écrit donc comme un polynôme homogène de degré 2 (tous les monômes sont de degré 2).

Corollaire

Soit Q une forme quadratique sur E dont l'expression dans la base $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ de E est pour tout $x = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n$

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii}x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_{ij}x_ix_j$$

avec α_{ij} sont des scalaires vérifiant $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$. Alors la forme bilinéaire symétrique associée à Q, a pour expression pour tout

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n \text{ et } y = y_1e_1 + y_2e_2 + ... + y_ne_n$$

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii}x_iy_i + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_{ij}(x_iy_j + x_jy_i).$$

Ce résultat est constamment utilisé dans la pratique.

Exemple

Soit $E = \mathbb{R}^4$. Soit Q l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ par $Q(x) = x_1^2 - 2x_3^2 + x_1x_2 - 3x_3x_4 + 2x_1x_4$.
Comme $Q(x)$ est une expression polynômiale homogène de degré 2 par rapport aux coordonnées x_i de x dans la base canonique, c'est une forme quadratique et sa forme polaire est définie pour tout $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ et $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ de $\mathbb{R}^4$ par

$$\varphi(x, y) = x_1y_1 - 2x_3y_3 + \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_1) - \frac{3}{2}(x_3y_4 + x_4y_3) + x_1y_4 + x_4y_1.$$

La matrice associée à φ (ou à Q) dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est :

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Définitions

1) Soit Q une forme quadratique de E et B une base de E, $M_{Q,B}$ la matrice de Q dans la base B. On appelle **rang** de Q, noté **rg(**Q**) ou rang**Q**)**, le rang de la matrice $M_{Q,B}$.
2) On appelle noyau de Q le sous-espace vectoriel de E :

$$\ker Q = \{x \in E; \forall y \in E, \varphi(x, y) = 0\},$$

où φ est la forme bilinéaire de Q.

Remarque

Le rang de Q ne dépend pas de la base choisie et le noyau de Q est celui de sa matrice relativement à n'importe quelle base.

Définitions

Soit $Q : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme quadratique de forme polaire φ. On dit que

1) Q est non dégénérée si φ est non dégénérée , c'est-à-dire

$$(\forall y \in E, \varphi(x,y) = 0) \Longrightarrow x = 0.$$

2) Q est positive si, et seulement si φ est positive ; c'est-à-dire $\forall x \in E$, $Q(x) \geq 0$.

3) Q est définie positive si, et seulement si φ est aussi définie positive ; c'est-à-dire $\forall x \in E \setminus \{0\}$, $Q(x) > 0$.

La proposition suivante donne des conditions nécessaire et suffisantes pour qu'une forme quadratique soit non dégénérée.

Proposition

Soit Q une forme quadratique de E. Considérons une base B de E. Les assertions suivantes sont équivalents :

i) *Q est non dégénérée ;*

ii) $\ker Q = \{0\}$;

iii) *La matrice de Q dans la base B est inversible.*

Théorème

Soit Q une forme quadratique de rang r sur un espace vectoriel réel E de dimension n. Il existe une base de E dans laquelle Q s'écrit :

$$Q(x) = x_1^2 + ... + x_p^2 - x_{p+1}^2 - ... - x_r^2.$$

De plus, p et $p' = r - p$ ne dépendent que de Q et non pas de la base choisie.

Définition

Le couple (p, p'), qui est formé par le nombre de carrés précédés du signe + et le nombre de carrés précédés du signe - s'appelle la signature de la forme quadratique Q à coefficient réels et le rang de Q vaut $p + p'$.

Corollaire

Soit une forme quadratique Q à coefficients réels de signature $s = (p, p')$ dans un espace vectoriel de dimension n. On a les propriétés suivantes :

- $p + p' = n \iff Q$ ***est non dégénérée.***
- $p' = 0 \iff Q$ *est positive.*
- $p = 0 \iff Q$ *est négative.*
- $s = (n, 0) \iff Q$ *est définie positive.*
- $s = (0, n) \iff Q$ *est définie négative.*

Définition

Soit E un espace vectoriel et φ une forme bilinéaire sur E. On dit que deux vecteurs x et y de E sont orthogonaux (relativement à φ), si $\varphi(x, y) = 0$.

Un vecteur x de E est dit **isotrope**, s'il est orthogonal à lui-même.

Définition

Soit Q une forme quadratique sur un espace vectoriel E de dimension finie n, et soit φ sa forme polaire. Une base $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ de E est dite **orthogonale** pour Q quand $\varphi(e_i, e_j) = 0$ pour tout couple (i, j) avec $i \neq j$. Autrement dit, une base est orthogonale pour Q quand la matrice de Q dans cette base est diagonale.

Théorème

Toute forme quadratique sur un espace vectoriel de dimension finie admet des bases orthogonales.

Il s'agit d'un algorithme permettant de trouver une décomposition d'une forme quadratique en combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes. Les identités suivantes sont les outils de cet algorithme.

$$(I_1) \quad x^2 + 2xy = (x+y)^2 - y^2\,;$$
$$(I_2) \quad xy = \frac{1}{4}\left[(x+y)^2 - (x-y)^2\right].$$

La preuve est basée sur une démonstration par récurrence sur la dimension n de E.

• Si $n = 1$, il n'y a rien à dire : $(Q(x_1) = a_{11}x_1^2)$.

• Si $n > 1$. Supposons que toute forme quadratique sur un espace vectoriel de dimension $n-1$ admet une décomposition en combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes.

• Soit Q une forme quadratique sur un espace vectoriel de dimension n.
Si $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ est une base de E et x un élément de E, $Q(x)$ s'écrit :

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le n} a_{ij}x_ix_j\,.$$

Premier cas : il existe au moins un indice i pour lequel $a_{ii} \neq 0$. On dit usuellement qu'il existe un terme carré. Par exemple supposons $a_{11} \neq 0$. Alors $Q(x)$ peut être ordonnée comme un polynôme du second degré en x_1. Cela donne

$$
\begin{aligned}
Q(x) &= \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + \sum_{1\leq i<j\leq n} a_{ij}x_ix_j \\
&= a_{11}x_1^2 + \sum_{i=2}^{n} a_{ii}x_i^2 + \sum_{j=2}^{n} a_{1j}x_1x_j + \sum_{2\leq i<j\leq n} a_{ij}x_ix_j \\
&= a_{11}x_1^2 + x_1\sum_{j=2}^{n} a_{1j}x_j + \sum_{i=2}^{n} a_{ii}x_i^2 + \sum_{2\leq i<j\leq n} a_{ij}x_ix_j \\
&= a_{11}x_1^2 + x_1A(x_2, x_3, ..., x_n) + C(x_2, x_3, ..., x_n),
\end{aligned}
$$

où A est une expression polynômiale homogène de degré 1 par rapport à $(x_2, x_3, ..., x_n)$, donc une forme linéaire en $(x_2, x_3, ..., x_n)$ et C une expression polynômiale homogène de degré 2 par rapport à $(x_2, x_3, ..., x_n)$, donc une forme quadratique en $(x_2, x_3, ..., x_n)$.

En utilisant l'identité (I_1) il vient :

$$\begin{aligned} Q(x) &= a_{11}\left[x_1^2 + 2x_1\frac{1}{2a_{11}}A(x_2, ..., x_n)\right] + C(x_2, x_3, ..., x_n) \\ &= a_{11}\left[x_1 + \frac{1}{2a_{11}}A(x_2, ..., x_n)\right]^2 - \frac{1}{4a_{11}}\left[A(x_2, ..., x_n)\right]^2 + C(x_2, ..., x_n). \end{aligned}$$

D'où,

$$Q(x) = a_{11}\left[x_1 + \frac{1}{2a_{11}}A(x_2, ..., x_n)\right]^2 + \left[C(x_2, ..., x_n) - \frac{1}{4a_{11}}\left[A(x_2, ..., x_n)\right]^2\right].$$

Exp : $(x_1 + x_2 + x_3)^2 = (x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + x_2 + x_3)$.

L'expression

$$C(x_2, ..., x_n) - \frac{1}{4a_{11}} \left[A(x_2, ..., x_n)\right]^2$$

est une expression polynômiale homogène de degré 2 par rapport à $(x_2, ..., x_n)$, qui peut donc être considérée comme une forme quadratique sur un espace de dimension $n-1$. cela permet d'écrire

$$Q(x) = a_{11}\left[x_1 + \frac{1}{2a_{11}} A(x_2, ..., x_n)\right]^2 + Q_1(x_2, ..., x_n).$$

On termine donc en appliquant l'hypothèse de récurrence à Q_1.

Second cas : il n'existe pas d'indice i pour lequel $a_{ii} \neq 0$.

Si Q est nulle c'est fini, sinon au moins un $a_{ij} \neq 0$ (avec $i \neq j$). On dit usuellement que $a_{ij}x_ix_j$ est un terme rectangle. Par exemple supposons $a_{12} \neq 0$. Alors,

$$\begin{aligned}
Q(x) &= \sum_{1\leq i<j\leq n} a_{ij}x_ix_j \\
&= a_{12}x_1x_2 + \sum_{j=3}^{n} a_{1j}x_1x_j + \sum_{j=3}^{n} a_{2j}x_2x_j + \sum_{3\leq i<j\leq n} a_{ij}x_ix_j \\
&= a_{12}x_1x_2 + x_1\sum_{j=3}^{n} a_{1j}x_j + x_2\sum_{j=3}^{n} a_{2j}x_j + \sum_{3\leq i<j\leq n} a_{ij}x_ix_j \\
&= a_{12}x_1x_2 + x_1A(x_3,...,x_n) + x_2C(x_3,...,x_n) + D(x_3,...,x_n),
\end{aligned}$$

où A et C sont des formes linéaires en $(x_3,...,x_n)$ et D une forme quadratique en $(x_3,...,x_n)$.

Alors, on peut écrire :

$$\begin{aligned} Q(x) &= a_{12}\left[x_1 + \frac{1}{a_{12}}C(x_3,\dots,x_n)\right]\left[x_2 + \frac{1}{a_{12}}A(x_3,\dots,x_n)\right] \\ &+ D(x_3,\dots,x_n) - \frac{1}{a_{12}}A(x_3,\dots,x_n)C(x_3,\dots,x_n). \end{aligned}$$

Autrement dit :

$$Q(x) = a_{12}f_1(x_1,x_3,\dots,x_n)f_2(x_2,x_3,\dots,x_n) + Q_3(x_3,\dots,x_n),$$

où f_1 et f_2 sont des formes linéaires en $(x_1,x_3,\dots,x_n)$ et $(x_2,x_3,\dots,x_n)$ respectivement et Q_3 une forme quadratique en $(x_3,\dots,x_n)$.

En utilisant l'identité (I_2), il vient :

$$\begin{aligned} Q(x) &= \frac{a_{12}}{4}\left[(f_1(\dots)+f_2(\dots))^2 - (f_1(\dots)-f_2(\dots))^2\right] \\ &+ Q_3(x_3,\dots,x_n). \end{aligned}$$

On termine en appliquant l'hypothèse de récurrence à Q_3.

Exemple

Appliquons la méthode à la forme quadratique

$$Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 4x_2x_3 + 6x_3x_4.$$

Q contient un carré, on commence donc par appliquer le premier cas.

$$\begin{aligned} Q(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1^2 + 2x_1(-x_3 + x_4) + x_3^2 + x_4^2 + 4x_2x_3 + 6x_3x_4 \\ &= (x_1 - x_3 + x_4)^2 - (-x_3 + x_4)^2 + x_3^2 + x_4^2 + 4x_2x_3 + 6x_3x_4 \\ &= (x_1 - x_3 + x_4)^2 + 4x_2x_3 + 8x_3x_4. \end{aligned}$$

On obtient $Q_1(x_2, x_3, x_4) = 4x_2x_3 + 8x_3x_4$, qui ne contient pas de carré. On applique donc la méthode du second cas.

$$\begin{aligned} Q_1(x_2, x_3, x_4) &= 4x_2x_3 + 8x_3x_4 = 4(x_2 + 2x_4)(x_3 + 0) \\ &= (x_2 + x_3 + 2x_4)^2 - (x_2 - x_3 + 2x_4)^2 + 0, \end{aligned}$$

Exemple

où la dernière forme quadratique est nulle. Le procédé est donc terminé et on obtient :

$$Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_3 + x_4)^2 + (x_2 + x_3 + 2x_4)^2 - (x_2 - x_3 + 2x_4)^2.$$

• $rg(Q) = 3 < 4 = \dim\left(\mathbb{R}^4\right) \Rightarrow Q$ est dégénérée (n'est pas non dégénérée).
• $sign(Q) = (2, 1) = (p, p')$.
• $p \neq 0$ et $p' \neq 0 \Rightarrow Q$ n'est ni positive ni négative $\Rightarrow Q$ n'est ni définie positive ni définie négative.