Chapitre I

Calcul matriciel

1 Définitions et matrices particulières

Définition 1.1 ***(Matrice)***

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$, *soient* $n \geq 1$ *et* $p \geq 1$ *des entiers. Une matrice à coefficients dans* $\mathbb{K}$ *est la donnée de* $n \times p$ *scalaires dans* $\mathbb{K}$ *notés :* $(a_{ij})_{i\in\{1,\cdots,n\};j\in\{1,\cdots,p\}}$.

On représente une martrice sous forme d'un tableau A:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

On note aussi une matrice par : $A = (a_{ij})_{n,p}$, *le premier indice est l'indice de la ligne et le deuxième celui de la colonne. On dit que* A *est une matrice de format* (n, p) *et* a_{ij} *est le terme général de la matrice* A.

On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *l'ensemble des matrices de format* (n, p) *à coefficients dans* $\mathbb{K}$ *à* n *lignes et* p *colonnes.*

Si $n = p$, *on dit que* A *est une matrice carrée d'ordre* n *et les termes* $(a_{ii})_{i=1,\cdots,n}$ *forment la digonale principale de la matrice* A.

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *l'ensemble des matrices carrées d'ordre* n.

Matrices particulières :

a) Si $A \in \mathcal{M}_{1,p}(I\!K)$, A est dite Matrice ligne

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \end{pmatrix}$$

b) Si $A \in \mathcal{M}_{n,1}(I\!K)$, A est dite Matrice colonne

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{i1} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$$

c) **Matrices élémentaires** $E_{kl} \in \mathcal{M}_{n,p}(I\!K)$, où $k = 1, \cdots, n$ et $l = 1, \cdots, p$.

$E_{kl} = (\varepsilon_{ij})_{n,p}$, où $\varepsilon_{ij} = 1$ si $(i,j) = (k,l)$ et $\varepsilon_{ij} = 0$ sinon.

$$E_{kl} = \begin{pmatrix} & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & \varepsilon_{kl} = 1 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

d) Matrice nulle notée $O = (o_{ij})_{n,p}$, où $o_{ij} = 0$, $i = 1, \cdots, n$ et $j = 1, \cdots, p$.

$$O = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

2 Matrices et vecteurs

Soient E un $I\!K$-espace vectoriel de dimension finie n et $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ une base de E.

a) Matrice colonne associée à un vecteur de E

Pour tout $u \in E$, il existe un et un seul $(x_1, \cdots, x_n) \in I\!K^n$ tel que :

$$u = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$$

On associe au vecteur u la matrice colonne

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(I\!\!K)$$

des composantes de u dans la base $\mathcal{B}$. Toute matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(I\!\!K)$ correspond à un et un seul vecteur de E dans la base $\mathcal{B}$.

b) Matrice associée à une famille de vecteurs de E

Soit $\mathcal{S} = (u_1, \cdots, u_p)$ une famille de p vecteurs de E.
Pour tout $j = 1, \cdots, p$, il existe un et un seul $(a_{1j}, \cdots, a_{nj}) \in I\!\!K^n$ tel que :

$$u_j = a_{1j}e_1 + \cdots + a_{nj}e_n$$

On associe à la famille $\mathcal{S}$ la matrice $A = (a_{ij})_{n,p} \in \mathcal{M}_{n,p}(I\!\!K)$ dans la base $\mathcal{B}$:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} u_1 & \cdots & u_j & \cdots & u_p \end{array} \\ A = & \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{array} \end{array}$$

La $j^{\text{ème}}$ colonne de A est constituée des composantes de u_j dans la base $\mathcal{B}$. On dit aussi que A est la matrice représentant la famille de vecteurs $\mathcal{S} = (u_1, \cdots, u_p)$ dans la base $\mathcal{B}$.

3 Espace vectoriel des matrices.

On considère l'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(I\!\!K)$ des matrices de même format (n, p).
Soient $A = (a_{ij})_{n,p}$ et $B = (b_{ij})_{n,p}$ deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(I\!\!K)$.

On dit que A et $\mathcal{B}$ sont deux matrices égales ssi $a_{ij} = b_{ij}$ pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$ et pour tout $j \in \{1, \cdots, p\}$.

Addition :

On définit la somme $C = (c_{ij})_{n,p}$ de A et B, notée $A + B = C$,
par :
$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$ et pour tout $j \in \{1, \cdots, p\}$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1j} + b_{1j} & \cdots & a_{1p} + b_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} + b_{i1} & \cdots & a_{ij} + b_{ij} & \cdots & a_{ip} + b_{ip} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & \cdots & a_{nj} + b_{nj} & \cdots & a_{np} + b_{np} \end{pmatrix}$$

On ne peut additionner que des matrices de même format.

Propriétés de l'addition :

Pour toutes matrices A, B et C de $\mathcal{M}_{n,p}(I\!\!K)$.
a) L'addition + est associative : $A + (B + C) = (A + B) + C$.
b) L'addition + est commutative : $A + B = B + A$.
c) la matrice nulle O est l'élément neutre : $A + O = O + A$
d) L'opposé noté $-A$ de $A = (a_{ij})_{n,p}$ est $-A = (-a_{ij})_{n,p}$: $A + (-A) = O$.

Multiplication par un scalaire :

Soient $A = (a_{ij})_{n,p}$ et λ un scalaire dans $I\!\!K$.
On définit le produit, noté λA de A par le scalaire λ par: $\lambda A = (\lambda a_{ij})_{n,p}$

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1j} & \cdots & \lambda a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \cdots & \lambda a_{ij} & \cdots & \lambda a_{ip} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \cdots & \lambda a_{nj} & \cdots & \lambda a_{np} \end{pmatrix}$$

Propriétés de la multiplication par un scalaire :

Pour toutes matrices A, B de $\mathcal{M}_{n,p}(I\!\!K)$ et pour tous λ et μ des scalaires de $I\!\!K$.
a) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$.
b) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$.
c) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
d) $1A = A$

Proposition 3.1 *L'enemble $\mathcal{M}_{n,p}(I\!\!K)$ des matrices de format (n, p) muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire est un espace vectoriel sur $I\!\!K$. De plus la famille des matrices élémentaires*

$$\{E_{kl} \in \mathcal{M}_{n,p}(I\!\!K) : k = 1, \cdots, n \ \ et\ l = 1, \cdots, p\}$$

est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(I\!\!K)$ et

$$\dim \mathcal{M}_{n,p}(I\!\!K) = np$$

4 Produit matriciel

Définition 4.1 .
Soient $A \in \mathcal{M}_{p,\boldsymbol{n}}(I\!\!K)$ et $B \in \mathcal{M}_{\boldsymbol{n},q}(I\!\!K)$, $A = (a_{ij})_{p,\boldsymbol{n}}$ $B = (b_{ij})_{\boldsymbol{n},q}$
On définit la matrice produit $C = (c_{ij})_{p,q} \in \mathcal{M}_{p,q}(I\!\!K)$, notée $C = A\ B$, par :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik}\, b_{kj} \quad , \quad où \quad i = 1, \cdots, p \quad et \quad j = 1, \cdots, q$$

Remarque :
le produit $A\ B$ n'est defini que si les formats des matrices sont compatibles, **le nombre de colonnes de A est égale au nombre de lignes de B**. Dans ce cas le produit $A\ B$ a le même nombre de lignes p que A et le même nombre de colonnes q que B.

Produit LC d'une matrice ligne L et d'une matrice colonne C :

Soient $L = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_p \end{pmatrix}$ une matrice ligne de format $(1, p)$
et $C = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_q \end{pmatrix}$ une matrice colonne de format $(q, 1)$.
Le produit LC n'est possible que si $p = q = n$. Dans ce cas le produit LC est de format $(1, 1)$, un scalaire de $\mathbb{K}$.

$$LC = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{k=n} a_k \, b_k$$

Produit CL d'une matrice colonne C et d'une matrice ligne L :

Soient $C = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix}$ une matrice colonne de format $(p, 1)$
et $L = \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_q \end{pmatrix}$ une matrice ligne de format $(1, q)$.
le produit LC est possible et LC est une marice de format (p, q).

$$CL = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_j & \cdots & b_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_1 & \cdots & a_1b_j & \cdots & a_1b_q \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_ib_1 & \cdots & a_ib_j & \cdots & a_ib_q \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_pb_1 & \cdots & a_pb_j & \cdots & a_pb_q \end{pmatrix}$$

Produit AB, d'une matrice A de format (p, n) et d'une matrice B de format (n, q) :

Soit $L_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}$ la $i^{\text{ème}}$ ligne de la matrice A,

$$A = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_p \end{pmatrix}$$

et soit $C_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{kj} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$ la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice B,

$$B = \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_j & \cdots & C_q \end{pmatrix}$$

Alors

$$A\,B = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_j & \cdots & C_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1C_1 & \cdots & L_1C_j & \cdots & L_1C_q \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_iC_1 & \cdots & L_iC_j & \cdots & L_iC_q \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_pC_1 & \cdots & L_pC_j & \cdots & L_pC_q \end{pmatrix}$$

L_i est une matrice ligne de format $(1, n)$ et C_j une matrice colonne de format $(n, 1)$, le produit L_iC_j est possible, de format $(1, 1)$.

$$c_{ij} = L_iC_j = \begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{kj} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik}\, b_{kj}$$

c_{ij} est le produit de la $i^{\text{ème}}$ ligne de A par la $j^{\text{ème}}$ colonne de B.

Remarque 4.1 ***Ecriture par bloc du produit matriciel***

a) La $j^{\text{ème}}$ colonne E_j du produit AB est le produit de la matrice A par la $j^{\text{ème}}$ colonne C_j de B.

$$AB = A\,(C1 \cdots C_j \cdots C_q) \;=\; (E_1 \cdots E_j \cdots E_q)$$

où pour tout j

$$E_j = A\,C_j$$

b) La $i^{\text{ème}}$ ligne M_j du produit AB est le produit de la $i^{\text{ème}}$ ligne L_i de A par la matrice B.

$$AB = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_p \end{pmatrix} B \;=\; \begin{pmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_i \\ \vdots \\ M_p \end{pmatrix}$$

où pour tout i

$$M_i = L_i\,B$$

.

Combinaison linéaire de vecteurs

Soit E un $I\!\!K$-espace vectoriel de dimension finie n.
Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ une base de E.

Soit $\mathcal{S} = \{u_1, \cdots, u_p\}$ une famille de p vecteurs de E.
Pour tout $j = 1, \cdots, p$, il existe un et un seul $(a_{1j}, \cdots, a_{nj}) \in I\!\!K^n$ tel que :

$$u_j = a_{1j}e_1 + \cdots + a_{nj}e_n$$

Dans la base $\mathcal{B}$, on associe à la famille $\mathcal{S}$ la matrice A de format (n, p) suivante :

$$u_1 \quad \cdots \quad u_j \quad \cdots \quad u_p$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{array}$$

.

Soit v un vecteur de E en combinaison linéaire des vecteurs $u_1, \cdots, u_p$.

$$v = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p \quad \text{où } \lambda_1, \cdots, \lambda_p \text{ sont des scalaires}$$

Soit

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

la matrice colonne des composantes de v dans la base $\mathcal{B}$.

Ecriture analytique

$$v = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{i1} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_p \begin{pmatrix} a_{1p} \\ \vdots \\ a_{ip} \\ \vdots \\ a_{np} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} y_1 = a_{11}\lambda_1 + \cdots + a_{1p}\lambda_p \\ \vdots \\ y_i = a_{i1}\lambda_1 + \cdots + a_{ip}\lambda_p \\ \vdots \\ y_n = a_{n1}\lambda_1 + \cdots + a_{np}\lambda_p \end{array} \right.$$

Ecriture matricielle

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix}$$

La matrice A étant une matrice de format (n, p).

Définition 4.2 ***(Matrice transposée).***
Soit $A = (a_{ij})_{n,p}$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
On appelle transposée de A la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, notée ${}^tA$, définie par :

$${}^tA = (b_{ij})_{p,n} \text{ où } \forall\ (i,j)\ \ b_{ij} = a_{ji}$$

Remarque :
les coefficients de la $i^{\text{ème}}$ ligne de A sont les coefficients de la $i^{\text{ème}}$ colonne de ${}^tA$:
Si $L_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{ip} \end{pmatrix}$ est la $i^{\text{ème}}$ ligne de la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}$$

alors ${}^tL_i = \begin{pmatrix} a_{i1} \\ \vdots \\ a_{ik} \\ \vdots \\ a_{ip} \end{pmatrix}$ est la $i^{\text{ème}}$ colonne de la matrice ${}^tA$

$${}^tA = \begin{pmatrix} {}^tL_1 & \cdots & {}^tL_i & \cdots & {}^tL_n \end{pmatrix}.$$

Propriétés des matrices transposées.

a) Pour toutes matrices A,B dans $\mathcal{M}_{n,p}(I\!\!K)$ de même format et pour tout $\lambda \in I\!\!K$.

$$^t(\ ^tA\ ) = A \qquad ^t(A+B) = \ ^tA \ + \ ^tB \qquad ^t(\lambda A) = \lambda \ ^tA$$

b) Pour toutes matrices A de format (p, n) et B de de format (n, q)

$$^t(A\ B) = \ ^tB\ ^tA$$

5 Matrices carrées

Soit $\mathcal{M}_n(I\!\!K)$ le $I\!\!K$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n.
Soit $A = (a_{ij})_{n,n} \in \mathcal{M}_n(I\!\!K)$.
Les termes $(a_{ii})_{i=1,\cdots,n}$ forment la **diagonale principale** de A.

Matrices particulières :

a) **Matrice unité d'ordre** n **:** $I_n = (e_{ij})_{n,n}$, où $e_{ij} = 0$ si $i \neq j$ et $e_{ii} = 1$.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) **Matrice carrée diagonale :** $D = (d_{ij})_{n,n}$, où $d_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & d_{ii} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & d_{nn} \end{pmatrix}$$

c) **Matrice carrée triangulaire supérieure :** $A = (a_{ij})_{n,n}$, où $a_{ij} = 0$ si $i > j$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

d) **Matrice symétrique :** $A = (a_{ij})_{n,n}$, où $a_{ij} = a_{ji}$ pour tout (i, j)

$$A \text{ est une matrice symétrique } \Leftrightarrow {}^tA = A$$

Produit des matrices carrées.

Le produit des matrices carrées est une loi de composition interne définie sur $\mathcal{M}_n(I\!\!K)$:

$$\forall\ A, B \in \mathcal{M}_n(I\!\!K) \qquad A\,B \in \mathcal{M}_n(I\!\!K)$$

et

$$\forall\ A, B \in \mathcal{M}_n(I\!\!K)\ \ \forall\, \lambda \in I\!\!K \qquad A\,(\lambda\, B) = (\lambda\, A)\, B$$

le produit dans $\mathcal{M}_n(I\!\!K)$ est **associatif**:

$$\forall\ A, B, C \in \mathcal{M}_n(I\!\!K) \qquad A\,(B\,C) = (A\,B)\,C$$

le produit est **distributif** par rapport à l'addition :

$$\forall\ A, B, C \in \mathcal{M}_n(I\!\!K) \quad A\,(B + C) = A\,B + A\,C \ \text{ et } \ (B + C)\,A = B\,A + C\,A$$

La matrice unité I_n est l'élément neutre pour le produit :

$$\forall\ A, \in \mathcal{M}_n(I\!\!K) \qquad A\,I_n = I_n A = A$$

Le produit des matrices n'est pas commutatif, $AB \neq BA$ en général.
On dit que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(I\!\!K)$ **commutent** si $AB = BA$.
Remarque :
i) On peut avoir $AB = O$ avec $A \neq O$ ou $B \neq O$.

ii) On peut avoir $AB = AC$ et $B \neq C$.

iii) $\forall\ A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(I\!K)$

$$(A + B)(C + D) = AC + AD + BC + BD$$

$$(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2$$

et si A et B commutent,

$$(A + B)^2 = A^2 + 2\,AB + B^2$$

iv) On peut factoriser :

$$A^2 + AB + A = A\,(A + B + I_n)$$

Matrices inversibles

Définition 5.1 .
On dit qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(I\!K)$ est inversible s'il existe une matrice notée A^{-1} de $\mathcal{M}_n(I\!K)$ telle que :

$$A\,A^{-1} = A^{-1}\,A = I_n$$

La matrice A^{-1} est alors unique et s'appelle l'inverse de A.

Preuve (Unicité de l'inverse):
Supposons que A est inversible d'inverse A^{-1}.
Si B est un autre inverse de A, $A\,B = B\,A = I_n$, alors :

$$A\,B = I_n \;\Rightarrow\; A^{-1}\,A\,B = A^{-1}\,I_n \;\Rightarrow\; I_nB = A^{-1}\,I_n \;\Rightarrow\; B = A^{-1}$$

Exemple 5.1 .
Une matrice digonale $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ *est inversible si et seulement si pour tout i $\lambda_i \neq 0$ et dans ce cas* $D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}$

Proposition 5.1 .
Soient A, B *et* C *dans* $\mathcal{M}_n(I\!\!K)$.
a) Si A *est inversible alors* A^{-1} *est inversible et*

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

b) Si A *et* B *sont inversibles alors* $A\,B$ *est inversible et*

$$(A\,B)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}$$

c) Si A *est inversible alors sa transposée* ${}^tA$ *est inversible et*

$$({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$$

d) Si C *est inversible alors* $A\,C = B\,C \;\Rightarrow\; A \;=\; B$

e) Si $AB = I_n$ ***ou*** $BA = I_n$ *alors* $A^{-1} = B$ *et* $A\,B = B\,A$.

Preuve :
a) la proriété $A\,A^{-1} \;=\; A^{-1}\,A \;=\; I_n$ prouve que $(A^{-1})^{-1} = A$.

b) En effet :

$$(A\,B\,)(B^{-1}\,A^{-1}) = A\,(B\,B^{-1})\,A^{-1} = A\,I_n\,A^{-1} = A\,A^{-1} = I_n$$

De même on vérifie que $(B^{-1}\,A^{-1})(A\,B\,) = I_n$ et donc

$$B^{-1}\,A^{-1} = (A\,B)^{-1}$$

c) Par la proriété de la transposée

$$A\,A^{-1} = \;I_n \;\;\Rightarrow\;\; {}^t(A\,A^{-1}) = \;{}^tI_n \;\;\Rightarrow\;\; {}^t(A^{-1})\,{}^tA = I_n$$

De même on vérifie que ${}^tA\;{}^t(A^{-1}) = I_n$ et donc

$$({}^tA)^{-1} = \;{}^t(A^{-1})$$

d) En effet :

$$A\,C = B\,C \;\Rightarrow\; (A\,C)\,C^{-1} = \;(B\,C)\,C^{-1}$$

alors comme le produit est associatif :

$$A\,(C\,C^{-1}) = B\,(C\,C^{-1}) \Rightarrow A\,I_n = B\,I_n \Rightarrow A = B$$

e) On peut admettre le résultat (cf. Fin du chapitre II).

Puissances d'une matrice carrée.

Soit A une matrice carrée d'ordre n. Les puissances de A sont définies par récurrence :

$$A^o = I_n\,,\ A^1 = A \ \text{ et } \ \forall\, p \in \mathbb{N} \quad A^{p+1} = A^p\,A = A\,A^p$$

Si A est inversibe $A^{-p} = (A^{-1})^p$.

Par convention $O^0 = I_n$.

Soit D une matrice carrée diagonale d'ordre n,

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda_i & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

On vérifie par récurrence sur p que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$D^p = \begin{pmatrix} \lambda_1^p & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^p & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda_i^p & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^p \end{pmatrix}$$

En particulier $I_n^p = I_n$.

Propriétés :
Soient D et P deux matrices carrées d'ordre n.
Supposons que P est inversible d'inverse P^{-1}.

i) Pour tout $k \in I\!N$ la matrice P^k est inversible et

$$(P^k)^{-1} = (P^{-1})^k = P^{-k}$$

ii) Soit $A = P\,D\,P^{-1}$ alors

$$\forall\, k \in I\!N \quad A^k = P\,D^k\,P^{-1}$$

Preuve:
On procède par récurrence sur k :
i) si $k = 0$ alors $(P^0)^{-1} = (I_n)^{-1} = I_n = (P^{-1})^0$.
On suppose que $(P^k)^{-1} = (P^{-1})^k$ alors

$$(P^{k+1})\,(P^{-1})^{k+1} = (P^k)\;P\;P^{-1}\;(P^{-1})^k$$

donc

$$(P^k)\;I_n\;(P^{-1})^k = (P^k)\;(P^{-1})^k = I_n$$

d'où le résultat.
ii) Si $n = 0$, $A^0 = I_n$ et $P\,D^0\,P^{-1} = P\,I_n\,P^{-1} = P\,P^{-1} = I_n$.
On suppose que $A^k = P\,D^k\,P^{-1}$ alors :

$$A^{k+1} = A^k\,A = (\,P\,D^k\,P^{-1}\,)\,(P\,D\,P^{-1}\,)$$

donc

$$A^{k+1} = P\,D^k\,(P^{-1}\,P)\,D\,P^{-1} = P\,D^{k+1}\,P^{-1}$$

d'où le résultat.

Formule du binôme :
Si A et B **commutent** ($AB = BA$),pour tout $p \in I\!N$:

$$(A + B)^p = \sum_{k=0}^{k=p} C_p^k\;A^k\;B^{p-k} \quad \text{où} \quad C_p^k = \frac{p!}{k!\;(p-k)!}$$

Rappel :

$$C_p^0 = C_p^k = 1\;,\;C_p^1 = p\;,\;C_p^2 = \frac{p(p-1)}{2}\;\;\text{et}\;\;C_p^k = C_p^{p-k}$$

.