Chapitre II

Les systèmes d'équations linéaires

L'objet de ce chapitre est de donner une méthode de résolution des systèmes d'équations linéaires par élimination successive des inconnues, dite **méthode de Gauss**.

1 Définitions.

On appelle systèmes d'équations linéaires de n équations à p inconnues $(x_1, \cdots, x_p)$ tout système (S) de la forme :

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & a_{1p}x_p & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & a_{2p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & a_{np}x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

Où $a_{ij} \in I\!K$ et $b_i \in I\!K$, $i = 1, \cdots, n$, $j = 1, \cdots, p$

Les inconnues de (S) sont $x_1, \cdots, x_p$

Le second membre de (S) est $(b_1, \cdots, b_n)$

(S) est dit homogène si le second membre est nul.

Le système homogène associé à (S) est le système (S') obtenu à partir de (S) en remplaçant le second membre par $(0, \cdots, 0)$.

Une solution de (S) est un p-uplet $(x_1, \cdots, x_p)$ qui vérifie simultanément les n équations.

Résoudre (S) c'est détérminer toutes les solutions de (S).

(S) est dit **impossible** s'il n'admet aucune solution.

(S) est dit **indétérminé** s'il admet plusieurs solutions.

(S) est dit **de Cramer** s'il admet une et une seule solution.

Deux systèmes sont dits **équivalents** s'ils ont le même ensemble de solutions.

Ecriture matricielle :

On appelle matrice associée au système (S), la matrice $A = (a_{ij})_{n,p}$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ la matrice colonne des inconnues et soit $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ la matrice colonne du second membre.

Par définition du produit matriciel : Le système (S) s'écrit $AX = B$.

$$(S) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

2 Systèmes Triangulaires

Définition 2.1 .

Un système Triangulaire T est un système à n équations et à n inconnues qui se présente sous forme :

$$(T) \left\{ \begin{array}{ccccccccc} \boxed{a_{11}}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & \cdots & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & & \boxed{a_{22}}x_2 & + & \cdots & \cdots & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & \ddots & & & \vdots & & \vdots \\ & & & & \boxed{a_{n-1\,n-1}}x_{n-1} & + & a_{n-1\,n}x_n & = & b_{n-1} \\ & & & & & & \boxed{a_{nn}}x_n & = & b_n \end{array} \right.$$

Ecriture matricielle : $AX = B$ *où* $A = (a_{ij})_{n,n}$ *est une matrice carrée triangulaire supérieure,* $a_{ij} = 0$ *si* $i > j$.

Proposition 2.1 .

Si pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, $a_{ii} \neq 0$, *alors le système Triangulaire* (T) *admet une solution unique , c'est un système de Cramer.*

Si le système est homogène, son unique solution est : $(0, \cdots, 0) \in I\!\!K^n$

Preuve :

Le système (T) se résout par la méthode dite de **substitutions remontantes** (on le résout de proche en proche en commençant par la dernière équation).

$$\left\{ \begin{array}{lcll} x_1 & = & \frac{1}{a_{11}} & (b_1 - \quad a_{12}x_2 - \quad \cdots \quad - a_{1n}x_n) \\ x_2 & = & \frac{1}{a_{22}} & (b_2 - \quad a_{23}x_3 - \quad \cdots \quad - a_{2n}x_n) \\ \vdots & & & \\ x_i & = & \frac{1}{a_{ii}} & (b_i - \quad a_{i\,i+1}x_{i+1} - \quad \cdots \quad - a_{in}x_n) \\ \vdots & & & \\ x_{n-1} & = & \frac{1}{a_{n-1\,n-1}} & (b_n - \quad a_{n-1\,n}x_n) \\ x_n & = & \frac{b_n}{a_{nn}} & \end{array} \right.$$

Exemple 2.1

$$(T) \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & -y & + & 2z & = & -1 \\ & & & & 5z & = & 5 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & \frac{1}{2}(1 - y - z) \\ y & = & 2z + 1 \\ z & = & 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & -\frac{3}{2} \\ y & = & 3 \\ z & = & 1 \end{array} \right.$$

Le système (S) admet une solution unique $(-\frac{3}{2},\, 3,\, 1)$.

$$\mathcal{S} = \{\ (-\frac{3}{2},\, 3,\, 1)\ \}$$

Proposition 2.2 .

Soit (T) *le système Triangulaire ci dessus.*

S'il existe i tel que $a_{i\,i} = 0$ *alors*

a) Le système homogène associé à (T) *est* ***indétérminé****, admet une infinité de solutions.*

b) Le système (T) *est soit* ***indétérminé****, soit* ***impossible****.*

Preuve :

Supposons qu'il existe i tel que $a_{i\,i} = 0$.

a) **Étude du système homogène associé** $(\widetilde{T})$

$$(\widetilde{T})\begin{cases} \boxed{a_{11}}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots \cdots a_{1p}x_n = 0 \\ \boxed{a_{22}}x_2 + \cdots \cdots a_{2n}x_n = 0 \\ \ddots \vdots \vdots \\ \boxed{a_{n-1\,n-1}}x_{n-1} + a_{n-1\,n}x_n = 0 \\ \boxed{a_{nn}}x_n = 0 \end{cases}$$

Soit i_0 le plus petit indice tel que $a_{i_0\,i_0} = 0$.

Considérons le système $(\widetilde{T_{i_0}})$

$$(\widetilde{T_{i_0}})\begin{cases} \boxed{a_{11}}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots \cdots a_{1\;i_0-1}x_{i_0-1} = -a_{1\;i_0}x_{i_0} \\ \boxed{a_{22}}x_2 + \cdots \cdots a_{2\;i_0-1}x_{i_0-1} = -a_{2\;i_0}x_{i_0} \\ \ddots \vdots \vdots \\ \boxed{a_{i_0-1\;i_0-1}}x_{i_0-1} = -a_{i_0-1\;i_0}x_{i_0} \end{cases}$$

Pour toute valeur $c \in I\!K$ de x_{i_0}, ce système est de Cramer qui admet une solution unique notée $(s_1, \cdots, s_{i_0-1})$.

Alors $\forall\, c \in I\!K$, le n-uplet $(s_1, \cdots, s_{i_0-1}, 0, \cdots, 0) \in I\!K^n$ est solution du système homogène $(\widetilde{T})$ associé à (T).

b) **Étude du système** (T)

Soit j le plus grand indice tel que $a_{j\,j} = 0$.

$$(T_j)\begin{cases} \boxed{a_{j+1\,j+1}}x_{j+1} + \cdots \cdots a_{j+1\,n}x_n = b_{j+1} & L_{j+1} \\ \ddots \vdots \vdots & \vdots \\ \boxed{a_{n-1\,n-1}}x_{n-1} + a_{n-1\,n}x_n = b_{n-1} & L_{n-1} \\ \boxed{a_{nn}}x_n = b_n & L_n \end{cases}$$

Le système (T_j) est de Cramer, la méthode de remontée permet de calculer $x_n, x_{n-1}, \cdots, x_{j+1}$ en fonction de $b_n, b_{n-1}, \cdots, b_{j+1}$ et les coefficients a_{kl}.

Comme $a_{j\,j} = 0$, la $j^{\text{ème}}$ équation s'écrit :

$$a_{j\,j+1}\,x_{j+1} + \cdots + a_{jp}x_p = b_j \qquad L_j$$

On remplace alors dans l'équation L_j les valeurs $x_n, x_{n-1}, \cdots, x_{j+1}$.

Alors:

• ou bien l'équation n'est pas vérifiée et dans ce cas le système (T) est impossible.

• ou bien l'équation est vérifiée et alors on poursuit la résolution avec x_j qui devient un paramètre quelconque de $\mathbb{K}$: Le système (T) est soit impossible (cf. Exemple 2.2), soit indétérminé (cf. Exemple 2.3).

Exemple 2.2 *Ici* $a_{22} = 0$

$$(S)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ & & & - & 2z & = & 1 \\ & & & & z & = & 5 \end{array}\right.$$

Le système (S) est impossible, l'ensemble des solutions $\mathcal{S} = \emptyset$.

Exemple 2.3 *Ici* $a_{22} = 0$

$$(S)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ & & & - & 2z & = & -10 \\ & & & & z & = & 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ & & & & z & = & 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2y - 5 \\ z = 5 \\ y \in \mathbb{R} \end{array}\right.$$

y étant un paramètre quelconque. Le système (S) est indétérminé, l'ensemble des solutions $\mathcal{S} = \{(2y-5, y, 5) \in \mathbb{R}^3 : y \in \mathbb{R}\}$.

3 La méthode de résolution de Gauss

La méthode de Gauss consiste, en un nombre fini d'opérations élémentaires sur les lignes, à transformer un système (S) quelconque en un système Triangulaire (T) équivalent à (S).

3.1 Opérations élémentaires sur les lignes

Définition 3.1 .

Soit (S) *un système à* n *équations et à* p *inconnues.*

Pour tout $i = 1, \cdots, n$, *on note* L_i *la* $i^{\text{ème}}$ *équation de* (S), L_i *est dite la* $i^{\text{ème}}$ *ligne* *de* (S).

On appelle ***opération élémentaire*** *sur les lignes l'une des transformations suivantes :*

• *Multiplier la* $i^{\text{ème}}$ *ligne par* $\alpha \neq 0$.

Cette étape est codée par : $L_i \leftarrow \alpha\, L_i$

• *Permuter la ligne* i *et la ligne* j.

Cette étape est codée par : $L_i \leftrightarrow L_j$

• *Ajouter à la ligne* i*, la ligne* j *multipliée par* α.

Cette étape est codée par : $L_i \leftarrow L_i + \alpha\, L_j$

Proposition 3.1 .

On obtient un système équivalent à (S) *en transformant une des equations de* (S) *à l'aide de l'une des trois opérations élémentaires.*

Preuve :

Si $\alpha \neq 0$, toute solution de l'équation de L_i est solution de l'équation $\alpha\, L_j$ et réciproquement car $L_i = \frac{1}{\alpha}(\alpha\, L_j)$.

Vérifions que l'opération $L_i \leftarrow L_i + \alpha\, L_j$ transforme (S) en un système équivalent.

Toute solution des équations $\left\{\begin{array}{l} L_i \\ L_j \end{array}\right.$ est solution de $\left\{\begin{array}{l} L_i \\ L_i + \alpha\, L_j \end{array}\right.$ et réciproquement car $L_i = (L_i + \alpha\, L_j) - \alpha\, L_j$.

D'où le résultat puisque les autres équations sont inchangées.

Proposition 3.2 .

le système (S) *est équivalent au système*

$$(S_i)\left\{\begin{array}{c} L_1 + \alpha_1 L_i \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_n + \alpha_n L_i \end{array}\right.$$

où $\alpha_1, \cdots, \alpha_1$ *sont dans* $\mathbb{K}$. *On obtient le système équivalent à* (S) *en conservant une équation* L_i *et en ajoutant à toutes les autres un multiple de* L_i.

Exemple 3.1 .

Soit à résoudre le système :

$$(S)\left\{\begin{array}{lllllllll} x & + & 8y & - & 2z & = & -4 & & L_1 \\ 3x & + & 15y & + & 7z & = & 30 & & L_2 \\ x & + & 4y & + & 2z & = & 8 & & L_3 \end{array}\right.$$

Étape 1 :

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lllllllll} x & + & 8y & - & 2z & = & -4 & & L_1 \\ & - & 9y & + & 13z & = & 42 & & L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ & - & 4y & + & 4z & = & 12 & & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}\right.$$

Étape 2 :

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lllllllll} x & + & 8y & - & 2z & = & -4 & & L_1 \\ & & y & - & z & = & -3 & & L_2 \leftarrow -\frac{1}{4}L_3 \\ & - & 9y & + & 13z & = & 42 & & L_3 \leftarrow L_2 \end{array}\right.$$

Étape 3 :

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lllllllll} x & + & 8y & - & 2z & = & -4 & & L_1 \\ & & y & - & z & = & -3 & & L_2 \\ & & & & 4z & = & 15 & & L_3 \leftarrow L_3 + 9L_2 \end{array}\right.$$

Étape 4 :

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x & = -4 - 8y + 2z \\ y & = -3 + z \\ z & = \frac{15}{4} \end{array}\right.$$

Étape 5 :

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x & = -\frac{5}{2} \\ y & = \frac{3}{4} \\ z & = \frac{15}{4} \end{array}\right.$$

Le système (S) est de Cramer, l'ensemble des solutions $\mathcal{S} = \{(-\frac{5}{2}, \frac{3}{4}, \frac{15}{4})\}$.

Méthode pratique des calculs

On peut faire abstraction des inconnues x, y, z pour ne travailler que sur les coefficients.
Le système (S) est représenté alors par le tableau suivant :

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 8 & -2 \\ 3 & 15 & 7 \\ 1 & 4 & 2 \end{array}\right\|\begin{array}{c} -4 \\ 30 \\ 8 \end{array}\left|\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\right.$$

On opère sur les lignes du tableau puis on réécrit le système triangulaire après la dernière étape pour la résolution finale.

Étape 1 :

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 8 & -2 \\ 0 & -9 & 13 \\ 0 & -4 & 4 \end{array}\right\|\begin{array}{c} -4 \\ 42 \\ 12 \end{array}\left|\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}\right.$$

Étape 2 :

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 8 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -9 & 13 \end{array}\right\|\begin{array}{c} -4 \\ -3 \\ 42 \end{array}\left|\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{4}L_3 \\ L_3 \leftarrow L_2 \end{array}\right.$$

Étape 3 :

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 8 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{array}\right\|\begin{array}{c} -4 \\ -3 \\ 15 \end{array}\left|\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 9L_2 \end{array}\right.$$

Étape 4 :

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 8y & - & 2z & = & -4 \\ & & y & - & z & = & -3 \\ & & & & 4z & = & 15 \end{array}\right.$$

Proposition 3.3 .
On obtient un système équivalent à (S) en transformant une des équations de (S) à l'aide de l'une des deux opérations suivantes :

$$L_i \leftarrow L_i + \sum_{j\neq i} \alpha_j L_j \qquad \textbf{\textit{ou}} \qquad L_i \leftarrow \alpha L_i + \beta L_j \ (\alpha \neq 0 \ et \ j \neq i)$$

Exemple 3.2 *Soit à résoudre le système*

$$(S) \left\{\begin{array}{lclclcl} 2x & + & y & + & z & = & 7 \\ x & + & 2y & + & z & = & 8 \\ x & + & y & + & 2z & = & 9 \end{array}\right.$$

Étape 1 :

$$\left|\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right\|\begin{array}{c} 7 \\ 8 \\ 9 \end{array}\left|\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\right.$$

Étape 2 :

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right\|\begin{array}{c} 6 \\ 8 \\ 9 \end{array}\left|\begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{4}(L_1 + L_2 + L_3) \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\right.$$

Étape 3 :

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right\|\begin{array}{c} -4 \\ 2 \\ 3 \end{array}\left|\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}\right.$$

Étape finale :

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 6 \\ y & = & 2 \\ z & = & 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ y & = & 2 \\ z & = & 3 \end{array}\right.$$

Le système (S) est de Cramer avec comme ensemble des solutions $\mathcal{S} = \{(1,2,3)\}$.

4 Méthode de Gauss

Soit le système

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & a_{1p}x_p & = & b_1 & L_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & a_{2p}x_p & = & b_2 & L_2 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & a_{np}x_p & = & b_n & L_n \end{array}\right.$$

Au cours de cette résolution on fait abstraction des inconnues $x_1, \cdots, x_p$ pour ne travailler que sur les coefficients.

Le système (S) se représente par le tableau :

$$\left|\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{array}\right\|\begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{array}\left|\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{array}\right.$$

Principe : Transformer à l'aide des opérations élémentaires le système (S) en un système équivalent **triangulaire** ou **échelonné** que l'on résout ensuite avec la méthode de substitutions remontantes.

Etape 1 :

La première colonne est non nulle (car sinon l'inconnue x_1 disparaît), Soit $a_{i_0 1} \neq 0$ l'un au moins de ses coefficients non nuls.

En permutant $L_1 \leftrightarrow L_{i_0}$, on peut alors supposer que $a_{11} \neq 0$ est non nul.

Le coefficient non nul a_{11} s'appelle **le premier pivot**.

Par des opérations élémentaires, on fait apparaître des 0 dans La première colonne :

$$\left|\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ 0 & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{np} \end{array}\right\|\begin{array}{c} b_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{array}\left|\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} L_1 \\ \vdots \\ L_n \leftarrow L_n - \frac{a_{n1}}{a_{11}} L_1 \end{array}\right.$$

Le système (S) est équivalent au système $\left\{\begin{array}{c} L_1 \\ (S_1) \end{array}\right.$ où (S_1) est un système à $n-1$ équations et $p-1$ inconnues : $x_2, \cdots, x_p$.

Etapes suivantes :

Si La première colonne de (S_1) est non nul, on applique la méthode de la première étape à (S_1).

Si la première colonne de (S_1) est nul

$$\left|\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1p} \\ 0 & 0 & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \alpha_{n3} & \cdots & \alpha_{np} \end{array}\right\|\left.\begin{array}{c} b_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{array}\right|$$

dans ce cas on applique la méthode au système (S_2).

Le processus s'arrête après au plus $q = \min(n,p)$ étapes à éffectuer.

Définition 4.1 *(Réduite de Gauss d'une matrice)*

On dit qu'une ligne L_i d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ admet k zéros en tête si les k premiers coefficients de cette ligne sont nuls et si le $(k+1)^{ème}$ coefficient est non nul.

*Une **matrice échelonnée** est une matrice dont chaque ligne L_i commence par plus de 0 que la ligne précédente L_{i-1}.*

*Dans une matrice échelonnée, le premier coefficient non nul de chaque ligne est appelé **pivot**.*

*Si on applique la méthode de Gauss aux lignes de la matrice A, la matrice R obtenue à la fin du processus est une matrice échelonnée dite **réduite de Gauss** de A.*

Soit r Le nombre de pivots de R alors $r \leq \min(n, p)$.
La réduite de Gauss n'est pas unique, elle dépend des éliminations choisies.
Si R et R' sont deux réduites de Gauss de A alors ils ont le même nombre de pivots $r = r'$.

5 Résolution générale d'un système (S)

Définition 5.1 *Un système écrit sous forme matricielle $RX = B$ est dit échelonné si sa matrice R est échelonnée.*

Soit (S) un système d'équations linéaires de n équations à p inconnues et soit $A \in \mathcal{M}(n,p)$ la matrice associée à (S).

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & a_{1p}x_p & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & a_{2p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & a_{np}x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

d'écriture sous forme matricielle : $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

En appliquant la méthode de Gauss à (S), on obtient un système échelonné équivalent :

$R \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$ où R est la réduite de Gauss de A.

Définition 5.2 .

On appelle rang du système (S) le nombre $\boldsymbol{r}$ de pivots de la réduite de Gauss R, $r \leq \min(n,p)$.
*Les r inconnues correspondant aux pivots de R sont dites **inconnues principales**.*
*Les $n - r$ autres inconnues sont dites **inconnues secondaires**.*

Exemple 5.1 *L'équivalence des systèmes suivants*

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ x & - & 2y & - & z & = & -10 \\ x & - & 2y & - & 2z & = & 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ & & & & z & = & 5 \end{array}\right.$$

s'écrit matriciellement comme suit

$$(S) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ *est la matrice associée au système* (S) *et la matrice* $R = \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *est la réduite de Gauss de* A.

Le nombre de pivots de R *est* $r = 2$ *donc le rang du système est* 2, x *et* z *sont les inconnues correspondant aux pivots de* R *se sont les* ***inconnues principales****, et l'inconnue* y *est* ***l'inconnue secondaire****.*

Théorème 5.1 .

Soit (S) *un système d'équations linéaires de* n *équations à* p *inconnues.*
Soient $A \in \mathcal{M}(n,p)$ *la matrice associée à* (S) *et* R *sa réduite de Gauss.*
Soit $\boldsymbol{r}$ *le rang du système* (S), $r \leq \min(n,p)$.

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow R\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

1^{er} cas : *Si* $\mathbf{r = n}$*, la matrice* R *n'a aucune ligne nulle, alors :*

. • *Si* ***n=p*** *le système* (S) *est de* ***Cramer.***

. • *Si* ***n<p*** *le système* (S) *est* ***indétérminé****.*

$2^{\text{ème}}$ ***cas :*** *Si* $\mathbf{r} < \mathbf{n}$*, les* ***n-r*** *lignes* L_i *,* $i = r+1, \cdots, n$ *de* R *sont nulles, alors :*

i) *S'il existe* $i \in \{r+1, \cdots, n\}$ *tel que* $\beta_i \neq 0$*, alors :*

. • *Le système* (S) *est* ***impossible****.*

ii) *Si pour tout* $i \in \{r+1, \cdots, n\}$ $\beta_i = 0$*, alors :*

. • *Si* ***r=p*** *le système* (S) *est de* ***Cramer****.*

. • *Si* ***r<p*** *le système* (S) *est* ***indétérminé****.*

Preuve :

$\mathbf{1^{er}}$ **cas :** Si $\mathbf{r} = \mathbf{n}$ alors la matrice R n'a aucune ligne nulle.

Dans ce cas alors $\mathbf{p} \geq \mathbf{n}$, le nombre d'inconnues est supérieur ou égale au nombre d'équations.

• Si $\mathbf{p} = \mathbf{n}$ alors le système (S') est triangulaire, les coefficients de la diagonale de R sont tous non nuls, le système (S) est de Cramer.

• Si $\mathbf{p} > \mathbf{n}$ on réécrit le système (S'), en renumérotant les inconnues pour que les $\mathbf{n}$ premières inconnues $x_1, \cdots, x_n$ soient les inconnues principales. le système (S') s'écrit :

$$(S')\left\{\begin{array}{cccccccc}
\boxed{\alpha_{11}}x_1 & + & \alpha_{12}x_2 & + & \cdots & \alpha_{1n}x_n & = & \beta_1 - \alpha_{1n+1}x_{n+1} - \cdots - \alpha_{1p}x_p \\
 & & \boxed{\alpha_{22}}x_2 & + & \cdots & \alpha_{2n}x_n & = & \beta_2 - \alpha_{2n+1}x_{n+1} - \cdots - \alpha_{2p}x_p \\
 & & & \ddots & & & & \\
 & & & & \ddots & & & \\
 & & & & & \boxed{\alpha_{nn}}x_n & = & \beta_n - \alpha_{nn+1}x_{n+1} - \cdots - \alpha_{np}x_p
\end{array}\right.$$

Les coefficients $\alpha_{11}, \cdots, \alpha_{nn}$ sont les pivots de R donc sont non nuls.

Les inconnues $x_{n+1}, \cdots, x_p$ sont les inconnues secondaires, on les considère comme des paramètres. Pour chaque choix des valeurs des paramètres, on a un système triangulaire qui admet une solution unique.

Par conséquent le système (S') admet une infinité de solutions : (S) est indétérminé.

2$^{\text{ème}}$ cas : Si $\mathbf{r} < \mathbf{n}$ alors la matrice R admet **n-r** lignes nulles.

$$(S')\left\{\begin{array}{ccccccccc}
\boxed{\alpha_{11}}x_1 & + & \alpha_{12}x_2 & + & \cdots & \alpha_{1r}x_r & = & \beta_1 - \alpha_{1\,r+1}x_{r+1} - \cdots - \alpha_{1p}x_p \\
 & & \boxed{\alpha_{22}}x_2 & + & \cdots & \alpha_{2n}x_r & = & \beta_2 - \alpha_{2\,r+1}x_{r+1} - \cdots - \alpha_{2p}x_p \\
 & & & \ddots & & & & \\
 & & & & \ddots & & & \\
 & & & & & \boxed{\alpha_{rr}}x_r & = & \beta_r - \alpha_{r\,r+1}x_{r+1} - \cdots - \alpha_{rp}x_p \\
 & & & & & 0 & = & \beta_{r+1} \\
 & & & & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & 0 & = & \beta_n
\end{array}\right.$$

i) S'il existe $i \in \{r+1, \cdots, n\}$ tel que $\beta_i \neq 0$, alors le système (S) est impossible.

ii) Si pour tout $i \in \{r+1, \cdots, n\}$ $\beta_i = 0$, alors on est ramené à un système à r pivots et r équations.

• Si $\mathbf{r} = \mathbf{p}$ le système (S) est de Cramer, donc admet une solution unique.

$$(S')\left\{\begin{array}{cccccccc}
\boxed{\alpha_{11}}x_1 & + & \alpha_{12}x_2 & + & \cdots & \alpha_{1r}x_r & = & \beta_1 \\
 & & \boxed{\alpha_{22}}x_2 & + & \cdots & \alpha_{2n}x_r & = & \beta_2 \\
 & & & \ddots & & & & \\
 & & & & \ddots & & & \\
 & & & & & \boxed{\alpha_{rr}}x_r & = & \beta_r
\end{array}\right.$$

• Si $\mathbf{r} < \mathbf{p}$ le système (S) est indétérminé.

$$(S')\left\{\begin{array}{cccccccc}
\boxed{\alpha_{11}}x_1 & + & \alpha_{12}x_2 & + & \cdots & \alpha_{1r}x_r & = & \beta_1 - \alpha_{1r+1}x_{r+1} - \cdots - \alpha_{1p}x_p \\
 & & \boxed{\alpha_{22}}x_2 & + & \cdots & \alpha_{2n}x_r & = & \beta_2 - \alpha_{2r+1}x_{r+1} - \cdots - \alpha_{2p}x_p \\
 & & & \ddots & & & & \\
 & & & & \ddots & & & \\
 & & & & & \boxed{\alpha_{rr}}x_r & = & \beta_r - \alpha_{rr+1}x_{n+1} - \cdots - \alpha_{rp}x_p
\end{array}\right.$$

Corollaire 5.1 *(Système homogène)*
Soit (S) un système homogène linéaire de n équations à p inconnues.
Soient $A \in \mathcal{M}(n,p)$ la matrice associée à (S) et R sa réduite de Gauss.
Soit $\boldsymbol{r}$ le rang du système (S), $r \leq \min(n,p)$, alors :

i) *Si $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{p}$ le système (S) admet comme unique solution le p-uplet $(0,\cdots,0)$.*

ii) *Si $\boldsymbol{r}<\boldsymbol{p}$ le système (S) est inétérminé.*

Corollaire 5.2 .
Un système (S) est de Cramer, si et seulement si, le système homogène associé n'admet que la solution nulle $(0,\cdots,0)$.

6 Méthode de Gauss-Jordan et calcul de l'inverse d'une matrice

6.1 Méthode de Gauss-Jordan

La méthode de Gauss-Jordan est utilisée en générale pour les systèmes de Cramer de n équations à n inconnues.
Soit $A \in \mathcal{M}_n$ la matrice associée à un système de Cramer.
Cette méthode consiste, en un nombre fini d'opérations élémentaires sur les lignes, à détérminer une matrice diagonale D_n à n pivots non nuls comme réduite de Gauss de la matrice A, d'où on en déduit que la matrice identité I_n est une réduite de Gauss de la matrice A.
Soit le système

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & a_{1n}x_n & = & b_1 & L_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & a_{2n}x_n & = & b_2 & L_2 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & a_{nn}x_n & = & b_n & L_n \end{array}\right.$$

Le système (S) se repésente par le tableau :

$$\left|\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right\|\begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{array}\left|\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{array}\right.$$

Etape 1 :

Cette étape est la même que pour la méthode de Gauss, on peut supposer que a_{11} est le premier pivot.

$$\left|\begin{array}{cccc} \boxed{a_{11}} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^1 & \cdots & a_{2n}^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^1 & \cdots & a_{nn}^1 \end{array}\right\|\begin{array}{c} b_1 \\ b_2^1 \\ \vdots \\ b_n^1 \end{array}\left|\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} L_1 \\ \vdots \\ L_n \leftarrow L_n - \frac{a_{n1}}{a_{11}} L_1 \end{array}\right.$$

Le système (S) est équivalent au système $\left\{\begin{array}{c} L_1 \\ (S_1) \end{array}\right.$ où (S_1) est un système à $n-1$ équations et $n-1$ inconnues : $x_2, \cdots, x_n$.

Etape 2 :

(S) est de Cramer donc la réduite de Gauss admet n pivots, la première colonne de (S_1) est donc non nulle, soit $a_{i_02}^1 \neq 0$ l'un au moins de ses coefficients non nuls.
En permutant $L_2 \leftrightarrow L_{i_0}$, on peut alors supposer que $a_{22}^1 \neq 0$ est le deuxième pivot.

On effectue des opérations élémentaires sur les lignes en gardant la deuxième ligne L_2 et l'on fait apparaître des zéros sur toute la deuxième colonne sauf le terme a_{22}^1.

$$\left|\begin{array}{ccccc} \boxed{a_{11}} & 0 & a_{13}^2 & \cdots & a_{1n}^2 \\ 0 & \boxed{a_{22}^1} & a_{23}^1 & \cdots & a_{2n}^1 \\ 0 & 0 & a_{33}^2 & \cdots & a_{2n}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^2 & \cdots & a_{nn}^2 \end{array}\right\|\begin{array}{c} b_1^2 \\ b_2^2 \\ b_3^2 \\ \vdots \\ b_n^2 \end{array}\left|\begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1 - \frac{a_{12}}{a_{22}^1} L_2 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{a_{32}^1}{a_{22}^1} L_2 \\ \vdots \\ L_n \leftarrow L_n - \frac{a_{n2}^1}{a_{22}^1} L_2 \end{array}\right.$$

Étape k :

On continue le processus en appliquant la même méthode comme au système (S_2), avec $\alpha_{kk} \neq 0$, on garde la ligne L_k et l'on fait apparaître des zéros sur toute la colonne k sauf α_{kk}.

Au bout de n étapes on obtient un tableau sous la forme suivante :

$$\left|\begin{array}{ccccc} \boxed{a_{11}} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boxed{a_{22}^1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{a_{33}^2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \boxed{a_{nn}^{n-1}} \end{array}\right\| \begin{array}{c} b_1^n \\ b_2^n \\ b_3^n \\ \vdots \\ b_n^n \end{array} \left| \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ \vdots \\ L_n \end{array}\right.$$

et à l'étape $n+1$ on obtient :

$$\left|\begin{array}{ccccc} \boxed{1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \boxed{1} \end{array}\right\| \begin{array}{c} \frac{1}{a_{11}} b_1^n \\ \frac{1}{a_{22}^1} b_2^n \\ \frac{1}{a_{33}^2} b_3^n \\ \vdots \\ \frac{1}{a_{nn}^{n-1}} b_n^n \end{array} \left| \begin{array}{c} L_1 \leftarrow \frac{1}{a_{11}} L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{a_{22}^1} L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{a_{33}^2} L_1 \\ \vdots \\ L_n \leftarrow \frac{1}{a_{nn}^{n-1}} L_1 \end{array}\right.$$

la matrice diagonale

$$D_n = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boxed{a_{22}^1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{a_{33}^2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \boxed{a_{nn}^{n-1}} \end{pmatrix}$$

et la matrice identité

$$I_n = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

sont deux réduites de Gauss de la matrice A.

Exemple 6.1 *Soit à résoudre le système :*

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & 8y & - & 2z & = & -4 & & L_1 \\ 3x & + & 15y & + & 7z & = & 30 & & L_2 \\ x & + & 4y & + & 2z & = & 8 & & L_3 \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 8 & -2 \\ 3 & 15 & 7 \\ 1 & 4 & 2 \end{array}\right\|\begin{array}{c} -4 \\ 30 \\ 8 \end{array}\left|\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\right.$$

Étape 1 :

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 8 & -2 \\ 0 & -9 & 13 \\ 0 & -4 & 4 \end{array}\right\|\begin{array}{c} -4 \\ 42 \\ 12 \end{array}\left|\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}\right.$$

Étape 2 :

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 8 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -9 & 13 \end{array}\right\|\begin{array}{c} -4 \\ -3 \\ 42 \end{array}\left|\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{4}L_3 \\ L_3 \leftarrow L_2 \end{array}\right.$$

Étape 3 :

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{array}\right\|\begin{array}{c} 20 \\ -3 \\ 15 \end{array}\left|\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 8L_2 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 9L_2 \end{array}\right.$$

Étape 4 :

$$\left|\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{array}\right\|\begin{array}{c} -5 \\ 3 \\ 15 \end{array}\left|\begin{array}{l} L_1 \leftarrow 2L_1 - 3L_3 \\ L_2 \leftarrow 4L_2 + L_3 \\ L_3 \end{array}\right.$$

Étape 5 : $(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} 2x & = -5 \\ 4y & = 3 \\ 4z & = 15 \end{array}\right.$

$R = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ est une réduite de Gauss de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -2 \\ 3 & 15 & 7 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

Exemple 6.2 ***Choix des pivots***

Soit à résoudre le système : $(S)\left\{\begin{array}{ll} a\,x - z + t = a & L_1 \\ x - y + a\,t = a & L_2 \\ -x + y + a\,z = -a & L_3 \\ a\,y + z - t = -a & L_4 \end{array}\right.$

où a est un paramètre réel.

$$\left|\begin{array}{cccc||c|l} a & 0 & -1 & 1 & a & L_1 \\ 1 & -1 & 0 & a & a & L_2 \\ -1 & 1 & a & 0 & -a & L_3 \\ 0 & a & 1 & -1 & a & L_4 \end{array}\right.$$

Étape 1 : *On choisit le pivot le plus simple et si possible indépendant du paramètre.*

$$\left|\begin{array}{cccc||c|l} 1 & -1 & 0 & a & a & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ a & 0 & -1 & 1 & a & L_2 \leftrightarrow L_1 \\ -1 & 1 & a & 0 & -a & L_3 \\ 0 & a & 1 & -1 & a & L_4 \end{array}\right.$$

Étape 2 :

$$\left|\begin{array}{cccc||c|l} 1 & -1 & 0 & a & a & L_1 \\ 0 & a & -1 & 1-a^2 & a-a^2 & L_2 \leftarrow L_2 - aL_1 \\ 0 & 0 & a & a & 0 & L_3 \leftarrow L_2 + L_1 \\ 0 & a & 1 & -1 & a & L_4 \end{array}\right.$$

On constate qu'il n'est pas possible de choisir le deuxième pivot indépendamment du paramètre a, on commence la discussion. Il y a deux cas :

1^{er} **cas :** Si $a \neq 0$

Étape 3 :

$$\left|\begin{array}{cccc||c|l} 1 & -1 & 0 & a & a & L_1 \\ 0 & a & -1 & 1-a^2 & a-a^2 & L_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & L_3 \leftarrow \frac{1}{a}L_3 \\ 0 & 0 & 2 & -2+a^2 & a^2 & L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{array}\right.$$

Étape 4 :

$$\left|\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 & 1-a^2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4+a^2 \end{array}\right\|\begin{array}{l} a \\ a-a^2 \\ 0 \\ a^2 \end{array}\left|\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_3 \end{array}\right.$$

On obient alors :

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & - & y & + & & + & at & = & a \\ & & ay & - & z & + & (1-a^2)t & = & a-a^2 \\ & & & & z & + & t & = & 0 \\ & & & & & & (-4+a^2)t & = & a^2 \end{array}\right.$$

Il y a encore deux cas :

i) Si $-4+a^2 \neq 0$ la réduite de Gauss admet 4 pivots, le système est de Cramer qu'on résout par la méthode de substitutions remontantes.

$x = \frac{a^2-2a-4}{a^2-4}$, $y = \frac{a^2+2a-4}{a^2-4}$ et $z = -t = \frac{a^2}{a^2-4}$

ii) Si $-4+a^2 = 0$ donc $a \in \{2, -2\}$, l'équation L_4 s'écrit : $0z = 4$, donc le système (S) est impossible.

$2^{\textbf{ème}}$ **cas :** Si $a = 0$

En remplaçant a par 0 dans Étape 2 :

$$\left|\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right\|\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right|$$

En effectuant les opérations élémentaires $L_2 \leftarrow -L_2$ et $L_4 \leftarrow L_4 + L_2$

$$\left|\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\|\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right|$$

Les inconnues principales correspondant aux pivots non nuls sont x et z et les inconnues secondaires sont y et t.

Alors

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x-y & = & 0 \\ z-t & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x & = & y \\ z & = & t \end{array}\right.$$

Le système (S) est indétérminé, l'ensemble des solutions

$$\mathcal{S} = \{(y, y, t, t) \; : \; y, \; t \; \in I\!R\} = \mathrm{vect}_{I\!R}\{(1, 1, 0, 0) \, , \, (0, 0, 1, 1)\}$$

Conclusion :

• Si $a \in I\!R \backslash \{0, 2, -2\}$, le système est de Cramer :

$$\mathcal{S} = \{(\frac{a^2 - 2a - 4}{a^2 - 4} \, , \, \frac{a^2 + 2a - 4}{a^2 - 4} \, , \, \frac{a^2}{a^2 - 4} \, , \, -\frac{a^2}{a^2 - 4})\}$$

• Si $a \in \{2, -2\}$, le système est impossible : $\mathcal{S} = \emptyset$

• Si $a = 0$, le système est indétérminé :

$$\mathcal{S} = \mathrm{vect}_{I\!R}\{(1, 1, 0, 0) \, , \, (0, 0, 1, 1)\}$$

7 Caractérisation de l'inverse d'une matrice. Calcul de l'inverse de Gauss-Jordan

Théorème 7.1 *Soient $A \in \mathcal{M}_n$ et X le vecteur colonne* $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

A inverssible $\Leftrightarrow$ le système homogène $A\,X = O$ n'admet que la solution $X = O$

Preuve : On peut admettre le résultat (cf. Fin du chapitre).

Corollaire 7.1 *Soit$A \in \mathcal{M}_n$.*

A inversible $\Leftrightarrow$ A admet une réduite de Gauss R à n pivots non nuls

Corollaire 7.2 *Une matrice triangulaire inférieure est inversible si et seulement si les coefficients diagonaux sont non nuls.*

Théorème 7.2 *Soit $A \in \mathcal{M}_n$ et soit $B \in \mathcal{M}_n$.*
*Si $AB = I_n$ **ou** $BA = I_n$ alors $A^{-1} = B$ et $A\,B = B\,A$.*

Preuve : On peut admettre le résultat (cf. Fin du chapitre).

7.1 Calcul de l'inverse d'une matrice par la méthode de Gauss-Jordan

Soit $A \in \mathcal{M}_n$ une matrice inversible. D'après le théorème 7.2, il suffit de chercher une matrice $B \in \mathcal{M}_n$ telle que :

$$AB = I_n$$

Soit C_i la $i^{\text{ième}}$ colonne de de B et soit E_i la $i^{\text{ième}}$ colonne de I_n.

$$B = (C_1, \ldots, C_n) \quad \text{et} \quad I_n = (E_1, \ldots, E_n)$$

À l'aide du produit par bloc, cf. la remarque 4.1,

$$A\,(C_1, \ldots, C_n) = (E_1, \ldots, E_n) \;\Leftrightarrow\; AC_i = E_i \quad i = 1, \ldots, n$$

Pour chaque $i \in \{1, \ldots, n\}$, le système $AC_i = E_i$ est de cramer, donc admet une unique solution C_i.
Au lieu de résoudre ces n systèmes séparément , la méthode de de Gauss-Jordan consiste à les résoudre simultanément.

$$A\,(C_1, \ldots, C_n) = (E_1, \ldots, E_n)$$

En effectuant les mêmes opérations élémentaires sur les lignes en suivant la méthode de Gauss-Jordan sur A et I_n afin de transformer A en I_n et alors I_n se transforme en $B = A^{-1}$.

Etape initiale :		Etape finale:
$\mid A \parallel I_n \mid$	après $\xrightarrow{\mathbf{n+1}}$ étapes	$\mid I_n \parallel A^{-1} \mid$

Exemple 7.1 . *Montrons que la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *est inversible et calculons son inverse :*

$$\mid A \parallel I_3 \mid = \left|\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \left| \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\right.$$

Étape 1 :

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \left| \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \end{array}\right.$$

Étape 2:

$$\left|\begin{array}{ccc} \boxed{3} & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{3} & 7 \\ 0 & 0 & \boxed{-4} \end{array}\right\| \begin{array}{ccc} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{array} \left| \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 3L_1 - 2L_2 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow 3L_3 - L_2 \end{array}\right.$$

La réduite de Gauss de A admet trois pivots non nuls, donc A est inversible.

Étape 3 :

$$\left|\begin{array}{ccc} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{array}\right\| \begin{array}{ccc} 3 & -9 & 3 \\ -3 & -3 & 21 \\ -1 & -1 & 3 \end{array} \left| \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 4L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow 4L_2 + 7L_3 \\ L_3 \leftarrow L_3 \end{array}\right.$$

Étape 4 :

$$\mid I_3 \parallel A^{-1} \mid = \left|\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right\| \begin{array}{ccc} \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{7}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{array} \left| \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{12}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{12}L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{1}{4}L_3 \end{array}\right.$$

Alors on obtient :

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 7 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Démonstration du théorème 7.1 et du théorème 7.2

Proposition 7.1 *Soit $A \in \mathcal{M}_n$ et soient $P, Q \in \mathcal{M}_n$ telles que : $AP = QA = I_n$*
Alors A est inversible et $P = Q = A^{-1}$.

Preuve :
En effet :

$$QAP = (QA)P = I_nP = P \text{ et } QAP = Q(AP) = QI_n = Q$$

donc $P = Q = A^{-1}$

Proposition 7.2 .
Soient $A \in \mathcal{M}_n$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}$ un vecteur colonne.
On suppose que le système homogène $A\,X = O$ n'admet que la solution $X = O$. Alors, il existe $P \in \mathcal{M}_n$ telle que $AP = I_n$

Preuve :
Cherchons P une matrice d'ordre n telle que $AP = I_n$.
Soit C_i la $i^{\text{ième}}$ colonne de de P et soit E_i la $i^{\text{ième}}$ colonne de I_n, alors $P = (C_1, \ldots, C_n)$ et $I_n = (E_1, \ldots, E_n)$.
A l'aide du produit par bloc, cf. la remarque 4.1,

$$A\,(C_1, \ldots, C_n) = (E_1, \ldots, E_n) \Leftrightarrow AC_i = E_i \quad i = 1, \ldots, n$$

pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, le système $AC_i = E_i$ est de Cramer, donc admet une unique solution C_i.
Par suite, il existe une unique matrice P telle que $AP = I_n$.

Proposition 7.3 .
Soient A et B dans $\mathcal{M}_n$ telles que : $AB = I_n$
Alors il existe C une matrice d'ordre n telle que $BC = I_n$

Preuve :
$BX = O \Rightarrow ABX = AO$, comme $AB = I_n$,alors $I_nX = O$ et $X = O$. Par suite, d'après la proposition 7.2, il existe C tel que $BC = I_n$.

Proposition 7.4 .
Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n$ telles que : $AB = I_n$
Alors A et B sont inversibles et $A^{-1} = B$, $B^{-1} = A$

Preuve :
D'après la proposition 7.3 $AB = I_n \Rightarrow \exists C \in \mathcal{M}_n : BC = I_n$
Comme $AB = BC = I_n$, alors d'après la proposition 7.1, $C = A = B^{-1}$. D'où le résultat.

Preuve du théorème 7.1 et du théorème 7.2
Le théorème 7.2 est une conséquence de la proposition 7.4.
Montrons le théorème 7.1 :

A inversible $\Leftrightarrow$ l'équation $AX = O$ n'admet que la solution $X = O$

Supposons que A est inversible, alors

$$AX = O \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}O \Rightarrow X = O$$

Réciproquement, supposons que l'équation $AX = O$ n'admet que la solution X=O.
D'après la proposition 7.2, il existe une matrice P telle que $AP = I_n$. Alors on déduit de la proposition 7.4 que la matrice A est inversible.