Chapitre II

Les systèmes d'équations linéaires, calcul de l'inverse d'une matrice

1 Les systèmes d'équations linéaires

Exercice 1.1. *Résoudre le système et déterminer la réduite de Gauss de sa matrice A associée.*

$$(S)\ \begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+y+3z=1 \\ x-y+3z=5 \end{cases}$$

Exercice 1.2. *Résoudre le système et déterminer la réduite de Gauss de sa matrice A associée.*

$$(S)\ \begin{cases} x+y+z+t=4 \\ x+y+6z+4t=3 \\ 2x+2y+3z=5 \end{cases}$$

Exercice 1.3. *Rśoudre le système*

$$(S)\ \begin{cases} x+y+2z=1 \\ x+2y+z=0 \\ 3x+4y+5z=a \\ 2y+3z=2 \\ 2x+5y+6z=b \end{cases}$$

où a et b sont des paramètres réels.

Exercice 1.4. *Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\mathcal{B}=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ une base de E. Soient*

$$u_1=e_1+3e_2+5e_3+e_4\ ,\ \ u_2=2e_1+4e_2+8e_3+e_4\ \ \textit{et}\ \ u_3=3e_1+5e_2+11e_3+e_4$$

trois vecteurs de E.
Déteterminer la dimension et une base de l'espace vectoriel $F = vect\{u_1, u_2, u_3\}$.

Exercice 1.5. *Soit* $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x+y+3z-t = 0 \text{ et } 3x+2y+4z-4t = 0\}$.
Montrer que F *est un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^4$ *et déteterminer sa dimension.*

2 Calcul de l'inverse d'une matrice

Exercice 2.1. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. *Vérifier que* ${}^tA = A^{-1} = -A$.

Exercice 2.2. *Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, calculer leur inverse :*

$$i)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad ii)\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad iii)\ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 8 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 7 & 1 \\ 3 & 6 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.3. *Soient*

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad et \quad A = \begin{pmatrix} \alpha & 2(\beta-\alpha) & 2(\gamma-\beta) \\ 0 & \beta & \gamma-\beta \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad où \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^*$$

i) Montrer que la matrice P *est inversible et calculer son inverse* P^{-1}.
ii) Calculer le produit AP *puis déterminer la matrice* $D = P^{-1}AP$.
iii) En déduire A^n *pour tout entier* n.
iv) Étant donné des réels non nuls α, β *et* γ, *déterminer les suites* x_n, y_n *et* z_n *définies par la relation de récurrence :*

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} x_p = \alpha x_{p-1} + 2(\beta-\alpha)\, y_{p-1} + 2(\gamma-\beta) z_{p-1} \\ y_p = \beta y_{p-1} + (\gamma-\beta)\, z_{p-1} \\ z_p = \gamma z_{p-1} \\ x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$