Chapitre II

Les systèmes d'équations linéaires, calcul de l'inverse d'une matrice

1 Les systèmes d'équations linéaires

Exercice 1.1. *Résoudre le système et déterminer la réduite de Gauss de sa matrice A associée.*

$$(S)\ \begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+y+3z=1 \\ x-y+3z=5 \end{cases}$$

Solution.

Système (S) :

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{array}\right\|\left.\begin{array}{c} 3 \\ 1 \\ 5 \end{array}\right|\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

Étape 1 :

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{array}\right\|\left.\begin{array}{c} 3 \\ -5 \\ 2 \end{array}\right|\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2-2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-L_1 \end{array}$$

Étape 2 :

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right\|\left.\begin{array}{c} 3 \\ -5 \\ 12 \end{array}\right|\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3-2L_2 \end{array}$$

Système équivalent à (S):

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ -y+z=-5 \\ 0=12 \end{cases}$$

La dérnière équation est impossible, donc le système (S) est impossible.

$R = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *est une réduite de Gauss de la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 1.2. *Résoudre le système et déterminer la réduite de Gauss de sa matrice A associée.*

$$(S)\begin{cases} x+y+z+t=4 \\ x+y+6z+4t=3 \\ 2x+2y+3z=5 \end{cases}$$

Solution.

Système (S):

$$\left|\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 6 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right\|\left.\begin{array}{c} 4 \\ 3 \\ 5 \end{array}\right|\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

Étape 1 :

$$\left|\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right\|\left.\begin{array}{c} 4 \\ -1 \\ -3 \end{array}\right|\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array}$$

Étape 2 :

$$\left|\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{array}\right\|\left.\begin{array}{c} 4 \\ -3 \\ -1 \end{array}\right|\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftrightarrow L_3 \\ L_3 \leftrightarrow L_2 \end{array}$$

Étape 3 :

$$\left|\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 13 \end{array}\right\|\left.\begin{array}{c} 4 \\ -3 \\ 14 \end{array}\right|\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2 \end{array}$$

$R = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{13} \end{pmatrix}$ *est une réduite de Gauss de la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 6 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$
.

Les variables x, z, t *correspondant aux pivots sont les variables principales et* y *est la variable secondaire.*

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + t = 4 \\ z - 2t = -3 \\ 13t = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z + t = 4 - y \\ z - 2t = -3 \\ 13t = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{49}{13} - y \\ z = -\frac{11}{13} \\ t = \frac{14}{13} \\ y \in I\!R \end{cases}$$

Le système admet une infinité de solutions, l'ensemble des solutions

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{49}{13} - y,\, y,\, -\frac{11}{13},\, \frac{14}{13}\right) \in I\!R^4 \;:\; y \in I\!R \right\} = \left(\frac{49}{13},\, 0,\, -\frac{11}{13},\, \frac{14}{13}\right) + vect_{I\!R}\{(-1, 1, 0, 0)\}$$

Exercice 1.3. *Rśoudre le système*

$$(S)\begin{cases} x+y+2z=1 \\ x+2y+z=0 \\ 3x+4y+5z=a \\ 2y+3z=2 \\ 2x+5y+6z=b \end{cases}$$

où a et b sont des paramètres réels.

Solution.

Système (S):

$$\left|\begin{array}{ccc}1 & 1 & 2\\1 & 2 & 1\\3 & 4 & 5\\0 & 2 & 3\\2 & 5 & 6\end{array}\right\|\left.\begin{array}{c}1\\0\\a\\2\\b\end{array}\right|\begin{array}{l}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\\L_5\end{array}$$

Étape 1 :

$$\left|\begin{array}{ccc}1 & 1 & 2\\0 & 1 & -1\\0 & 1 & -1\\0 & 2 & 3\\0 & 3 & 2\end{array}\right\|\left.\begin{array}{c}1\\0\\a-3\\2\\b-2\end{array}\right|\begin{array}{l}L_1\\L_2 \leftarrow L_2 - L_1\\L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1\\L_4\\L_5 \leftarrow L_5 - 2L_1\end{array}$$

Étape 2 :

$$\left|\begin{array}{ccc}1 & 1 & 2\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 5\\0 & 0 & 5\end{array}\right\|\left.\begin{array}{c}1\\0\\a-3\\2\\b-2\end{array}\right|\begin{array}{l}L_1\\L_2\\L_3 \leftarrow L_3 - L_2\\L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2\\L_5 \leftarrow L_5 - 3L_2\end{array}$$

Étape 3 :

$$\left|\begin{array}{ccc}1 & 1 & 2\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & 5\\0 & 0 & 5\\0 & 0 & 0\end{array}\right\|\left.\begin{array}{c}1\\0\\b-2\\2\\a-3\end{array}\right|\begin{array}{l}L_1\\L_2\\L_3 \leftrightarrow L_5\\L_4\\L_5 \leftrightarrow L_3\end{array}$$

Étape 4 :

$$\left|\begin{array}{ccc}1 & 1 & 2\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & 5\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{array}\right\|\left.\begin{array}{c}1\\0\\b-2\\-b+4\\a-3\end{array}\right|\begin{array}{l}L_1\\L_2\\L_3\\L_4 \leftarrow L_4 - L_3\\L_5\end{array}$$

Système équivalent à (S):

$$\left\{\begin{array}{rcrcrl}x & + & y & + & 2z & = 1\\ & & y & - & z & = 0\\ & & & & 5z & = b-2\\ & & & & 0 & = -b+4\\ & & & & 0 & = a-2\end{array}\right.$$

Si $a \neq 2$ *ou* $b \neq 4$ *le système est impossible,* $\mathcal{S} = \emptyset$.

Si $a = 2$ *et* $b = 4$ *alors*

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrl}x & + & y & + & 2z & = 1\\ & & y & - & z & = 0\\ & & & & 5z & = 2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}x = -\frac{13}{2}\\ y = z = \frac{5}{2}\end{array}\right.$$

le système est de Cramer, $\mathcal{S} = \{\, (-\frac{13}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2})\,\}$.

Exercice 1.4. *Soient* E *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel et* $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ *une base de* E. *Soient*

$$u_1 = e_1 + 3e_2 + 5e_3 + e_4\ ,\ u_2 = 2e_1 + 4e_2 + 8e_3 + e_4\ \text{ et }\ u_3 = 3e_1 + 5e_2 + 11e_3 + e_4$$

trois vecteurs de E.

Déteterminer la dimension et une base de l'espace vectoriel $F = vect\{u_1, u_2, u_3\}$.

Solution. *La matrice représentant la famille $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3)$ dans la base $\mathcal{B}$:*

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 8 & 11 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vérifions si $\mathcal{F}$ est libre, soient α, β et γ dans $I\!R$, alors :

$$\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = O_E \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 8 & 11 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (S) \left\{ \begin{array}{c} \alpha + 2\beta + 3\gamma = 0 \\ 3\alpha + 4\beta + 5\gamma = 0 \\ 5\alpha + 8\beta + 11\gamma = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{array} \right.$$

Système (S):

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 8 & 11 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right\| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \right.$$

Étape 1 :

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & -2 \end{array} \right\| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array} \right.$$

Étape 3 :

$$\left| \begin{array}{ccc} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - \frac{1}{2}L_2 \end{array} \right.$$

Système équivalent à (S):

$$\left\{ \begin{array}{ccccl} \alpha & + & 2\beta & + & 3\gamma = 0 \\ & & \beta & + & 2\gamma = 0 \\ & & & & 0 = 0 \\ & & & & 0 = 0 \end{array} \right.$$

Alors

$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cccl} \alpha & + & 2\beta & = -3\gamma \\ & & \beta & = -2\gamma \\ \gamma \in I\!R & & & \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \gamma \\ \beta = -2\gamma \\ \gamma \in I\!R \end{array} \right.$$

Le système admet une infinité de solution, la famille $\mathcal{F}$ est liée alors $\dim vect(\mathcal{F}) \leq 2$
En plus on a la relation :

$$\forall \gamma \in I\!R \quad \gamma u_1 - 2\gamma u_2 + \gamma u_3 = \gamma(u_1 - 2u_2 + u_3) = O_E \Rightarrow u_3 = -u_1 + 2u_2$$

donc $vect(\mathcal{F}) = vect\{u_1, u_2\}$.
Soit α et β dans $I\!R$, alors :

$$\alpha u_1 - \beta u_2 = O_E \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cccl} \alpha & + & 2\beta & = 0 \\ & & \beta & = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$$

donc la famille $\{u_1, u_2\}$ est libre et génératrice de $vect(\mathcal{F})$.
par suite la famille $\{u_1, u_2\}$ est une base et $\dim vect(\mathcal{F}) = 2$.

Exercice 1.5. *Soit* $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x+y+3z-t = 0 \text{ et } 3x+2y+4z-4t = 0\}$. *Montrer que* F *est un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^4$ *et déteterminer sa dimension.*

Solution.

$$u = (x, y, z, t) \in F \Leftrightarrow (S) \left\{ \begin{array}{c} 2x + y + 3z - t = 0 \\ 3x + 2y + 4z - 4t = 0 \end{array} \right.$$

Système (S):

$$\left| \begin{array}{cccc} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 4 & -4 \end{array} \right\| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array} \right.$$

Étape 1 :

$$\left| \begin{array}{cccc} \boxed{2} & 1 & 3 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -5 \end{array} \right\| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow 2L_2 - 3L_1 \end{array} \right.$$

x, y *sont les variables principales et* z, t *sont les variables secondaires, alors*

$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccl} 2x & + & y & = & -3z + t \\ & & y & = & z + 5t \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -2z - 2t \\ y = z + 5t \end{array} \right. \quad z,\, t \in \mathbb{R}$$

par suite, pour tous z *et* t *dans* $\mathbb{R}$

$$u = (x, y, z, t) \in F \Leftrightarrow u = (2z - 2t, z + 5t, z, t)$$

donc

$$u = (x, y, z, t) \in F \Leftrightarrow u = (2z, z, z, 0) + (-2t, 5t, 0, t) = z(2, 1, 1, 0) + t(-2, 5, 0, 1)$$

Posons $u_1 = (2, 1, 1, 0)$ *et* $u_2 = (-2, 5, 0, 1)$

$$F = \{z\, u_1 + t\, u_2 \ : \ z, t \in \mathbb{R}\} = vect\{u_1,\, u_2\}$$

Alors F *est le sous-espace vectoriel engendré par* $\{u_1,\, u_1\}$.

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*,alors*

$$\alpha u_1 + \beta u_2 = O_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2\alpha + 5\beta = 0 \\ \alpha - 2\beta = 0 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$$

donc $\{u_1,\, u_2\}$ *est une famille libre.*

D'où $\{u_1,\, u_2\}$ *est une base de* F *et* $\dim F = 2$

2 Calcul de l'inverse d'une matrice

Exercice 2.1. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. *Vérifier que* ${}^tA = A^{-1} = -A$.

Solution. ${}^tA = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *alors* ${}^tA = -A$ *et* ${}^tA\ A = A\ {}^tA = I_4$

Exercice 2.2. *Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, calculer leur inverse :*

$$i)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad ii)\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad iii)\ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 8 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 7 & 1 \\ 3 & 6 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Solution. *:*

i)

$$|\ A \parallel I_3\ | = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{array} \right\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \left| \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \right.$$

Étape 1 :

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & -5 \end{array} \right\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{array} \left| \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array} \right.$$

Étape 2:

$$\left| \begin{array}{ccc} \boxed{1} & 0 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & -5 \\ 0 & 0 & \boxed{5} \end{array} \right\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{array} \left| \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{array} \right.$$

La réduite de Gauss de A *admet* 3 *pivots, alors* A *est inversible.*

Étape 3 :

$$\left| \begin{array}{ccc} \boxed{5} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{5} \end{array} \right\| \begin{array}{ccc} 3 & 4 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{array} \left| \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 5L_1 - 2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ L_3 \end{array} \right.$$

Étape 4:

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| \begin{array}{ccc} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} \\ -1 & -1 & 1 \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{array} \left| \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{5}L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{5}L_3 \end{array} \right.$$

alors

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} \\ -1 & -1 & 1 \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -5 & -5 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

ii)

$$\mid B \parallel I_3 \mid = \left|\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\left| \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\right.$$

Étape 1 :

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\left| \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \end{array}\right.$$

Étape 2:

$$\left|\begin{array}{ccc} \boxed{1} & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{4} \end{array}\right\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\left| \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftrightarrow L_3 \\ L_3 \leftrightarrow L_2 \end{array}\right.$$

La réduite de Gauss de B admet 3 pivots, alors B est inversible.

Étape 3 :

$$\left|\begin{array}{ccc} \boxed{1} & 0 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{4} \end{array}\right\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\left| \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\right.$$

Étape 4:

$$\left|\begin{array}{ccc} \boxed{2} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{4} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{4} \end{array}\right\| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\left| \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 2L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow 4L_2 - L_3 \\ L_3 \end{array}\right.$$

Étape 5 :

$$\left|\begin{array}{ccc} \boxed{2} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{4} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{4} \end{array}\right\| \begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -2 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{array}\left| \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{4}L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{4}L_3 \end{array}\right.$$

alors

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -2 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -8 \\ 1 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

iii)

$$C = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 8 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 7 & 1 \\ 3 & 6 & 8 & 9 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}$$

Étape 1 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -11 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1 \end{matrix}$$

Étape 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -11 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & -90 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow 11L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow 11L_4 - L_2 \end{matrix}$$

Étape 3 :

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{-11} & -13 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-90} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \leftarrow 90L_4 - 8L_2 \end{matrix}$$

Dès la premiere étape on peut déduire que le nombre de pivots r de la réduite de Gauss de C est inférieur ou égale à 3 et donc la matrice C d'ordre 4 n'est pas inversible.

De la troisième étape on déduit que le nombre de pivots $r = 3$, alors le rang des vecteurs colonnes de la matrice C est égale à 3.

Exercice 2.3. *Soient*

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad et \quad A = \begin{pmatrix} \alpha & 2(\beta-\alpha) & 2(\gamma-\beta) \\ 0 & \beta & \gamma-\beta \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad où \quad \alpha, \beta, \gamma \in I\!R^*$$

i) Montrer que la matrice P est inversible et calculer son inverse P^{-1}.
ii) Calculer le produit AP puis déterminer la matrice $D = P^{-1}AP$.
iii) En déduire A^n pour tout entier n.
iv) Étant donné des réels non nuls α, β et γ, déterminer les suites x_n, y_n et z_n définies par la relation de récurrence :

$$\forall\, p \in I\!N^*, \begin{cases} x_p = \alpha x_{p-1} + 2(\beta-\alpha)\, y_{p-1} + 2(\gamma-\beta) z_{p-1} \\ y_p = \beta y_{p-1} + (\gamma-\beta)\, z_{p-1} \\ z_p = \gamma z_{p-1} \\ x_0, y_0, z_0 \in I\!R \end{cases}$$

Solution. .

i) La matrice $P = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *est d'ordre* 3 *et admet* 3 *pivots, alors* A *est inversible.*

Calculons son inverse :

$$| A \parallel I_3 | = \left| \begin{array}{ccc} \boxed{3} & 4 & 2 \\ 0 & \boxed{2} & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{array} \right\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \left| \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \right.$$

Étape 1 :

$$\left| \begin{array}{ccc} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| \begin{array}{ccc} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \left| \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ L_3 \end{array} \right.$$

Étape 2:

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| \begin{array}{ccc} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \left| \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{3} L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_1 \\ L_3 \end{array} \right.$$

alors

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

ii)

$$A\,P = \begin{pmatrix} \alpha & 2(\beta-\alpha) & 2(\gamma-\beta) \\ 0 & \beta & \gamma-\beta \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\alpha & 4\beta & 2\gamma \\ 0 & 2\beta & \gamma \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

$$D = P^{-1}\,A\,P = P^{-1}\,(A\,P) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\alpha & 4\beta & 2\gamma \\ 0 & 2\beta & \gamma \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

iii)

$$D = P^{-1}\,A\,P \Rightarrow P\,D = A\,P \Rightarrow P\,D\,P^{-1} = A$$

par suite $A = P\,D\,P^{-1}$.

Alors on vérifie par récurrence que pour tout entier n : $A^n = P\,D^n\,P^{-1}$.

$$D^n = = \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 & 0 \\ 0 & \beta^n & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^n \end{pmatrix}$$

$$P\,D^n = = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 & 0 \\ 0 & \beta^n & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\alpha^n & 4\beta^n & 2\gamma^n \\ 0 & 2\beta^n & \gamma^n \\ 0 & 0 & \gamma^n \end{pmatrix}$$

Donc

$$A^n = P\,D^n\,P^{-1} = (P\,D^n)\,P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3\alpha^n & 4\beta^n & 2\gamma^n \\ 0 & 2\beta^n & \gamma^n \\ 0 & 0 & \gamma^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6\,\alpha^n & 12\,(\beta^n-\alpha^n) & 12\,(\gamma^n-\beta^n) \\ 0 & 6\,\beta^n & 6\,(\gamma^n-\beta^n) \\ 0 & 0 & 6\gamma^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^n & 2\,(\beta^n-\alpha^n) & 2\,(\gamma^n-\beta^n) \\ 0 & \beta^n & \gamma^n-\beta^n \\ 0 & 0 & \gamma^n \end{pmatrix}$$

iv) Ecriture matricielle du système :

$$\forall\, p \in I\!N^* \qquad \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 2(\beta-\alpha) & 2(\gamma-\beta) \\ 0 & \beta & \gamma-\beta \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{p-1} \\ y_{p-1} \\ z_{p-1} \end{pmatrix} \qquad \text{avec } x_0,\, y_0,\, z_0 \in I\!R$$

Pour tout $p \in I\!N$ *posons* $U_p = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix}$ *alors*

$$\forall\, p \in I\!N^* \qquad U_p = A\,U_{p-1} =, A^2\,U_{p-2} = \ldots = A^p\,U_0$$

Vérifions pa récurrence sur p que $U_p = A^p\,U_0$.

Si p=1 $U_1 = A\,U_0$ *vraie.*

On suppose que $U_p = A^p\,U_0$ *vraie pour p, alors :*

$U_{p+1} = A\,U_p = A\,A^p\,U_0 = A^{p+1}\,U_0$ *vraie pour* $p+1$.

Alors pour tout $n \in I\!N^*$ *et pour tous* $x_0,\, y_0,\, z_0 \in I\!R$

$$U_n = A^n\,U_0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^n & 2\,(\beta^n-\alpha^n) & 2\,(\gamma^n-\beta^n) \\ 0 & \beta^n & \gamma^n-\beta^n \\ 0 & 0 & \gamma^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

Par suite

$$\begin{cases} x_n = \alpha^n\,x_0 + 2\,(\beta^n-\alpha^n)\,y_0 + 2\,(\gamma^n-\beta^n)\,z_0 \\ y_n = \beta^n\,y_0 + (\gamma^n-\beta^n)\,z_0 \\ z_0 = \gamma^n\,z_0 \end{cases} \qquad \text{avec } x_0,\, y_0,\, z_0 \in I\!R$$