Daniel Li

Cours d'analyse fonctionnelle

avec 200 exercices corrigés

ellipses

Références sciences

Cours d'analyse fonctionnelle

avec 200 exercices corrigés

Daniel Li

ellipses

Collection Références sciences
dirigée par Paul de Laboulaye
paul.delaboulaye@editions-ellipses.fr

---

12 ans d'Olympiades académiques de mathématiques, Nicolas Fardin, 336 pages, 2013.
350 exercices corrigés d'Analyse pour Sup, Mohammed Aassila, 408 pages, 2013.
400 exercices corrigés d'Algèbre pour Sup, Mohammed Aassila, 504 pages, 2013.
Arithmétique et cryptologie, Gilles Bailly-Maitre, 312 pages, 2012.
Calcul différentiel, Marcel Grangé, 240 pages, 2012.
Concevoir et programmer en C++, Philippe d'Anfray, 576 pages, 2012.
Convolution, séries et intégrales de Fourier, Jacques Peyrière, 120 pages, 2012.
Cours d'analyse fonctionnelle avec 200 exercices corrigés, *Daniel Li* , 456 pages, 2013.
Distributions, analyse de Fourier et transformation de Laplace - Cours et exercices, Ahmed Lesfari, 384 pages, 2012.
Éléments d'analyse complexe, Jean-François Pabion, 192 pages, 2013.
Éléments d'analyse réelle – Rappels de cours illustrés et exercices corrigés, Mohamed Boucetta, 288 pages, 2012.
Épistémologie mathématique, Henri Lombardi, 216 pages, 2011.
L'évolution des concepts de la physique de Newton à nos jours, Jean-Louis Farvacque, 360 pages, 2012.
Exercices de probabilités pour futurs ingénieurs et techniciens, Antoine Clerc, 168 pages, 2012.
Géométrie euclidienne élémentaire, Aziz El Kacimi Alaoui, 240 pages, 2012.
Géométries pour l'ingénieur, Frédéric Holweck, Jean-Noël Martin, 480 pages, 2013.
Gestion de projet en SSII, Michel Winter, 192 pages, 2013.
Ingénierie Dirigée par les Modèles, Jean-Marc Jézéquel, Benoît Combemale, Didier Vojtisek, 144 pages, 2012.
Intégration - Intégrale de Lebesgue et introduction à l'analyse fonctionnelle, Thierry Goudon, 192 pages, 2011.
Introduction à la géométrie différentielle discrète, Pascal Romon, 216 pages, 2013.
De l'intégration aux probabilités, Olivier Garet, Aline Kurtzmann, 504 pages, 2011.
Introduction à l'analyse des équations de Navier-Stokes, Pierre Dreyfuss, 168 pages, 2012.
Introduction à l'optimisation - 2e édition, Jean-Christophe Culioli, 384 pages, 2012.
Une introduction moderne à l'algèbre linéaire, Vincent Blanlœil, 216 pages, 2012.
Mathématiques- 2e année de classes préparatoires intégrées, Frédéric Butin, Martine Picq et Jérôme Pousin, 936 pages, 2013.
Les mathématiques de l'IUT - Rappels de cours et travaux dirigés corrigés, Angela Gammella-Mathieu, 408 pages, 2013.
Mesure, intégration, probabilités, Thierry Gallouët, Raphaèle Herbin, 600 pages, 2013.
Les objets fondamentaux en mathématiques - Les nombres, Marcel Grangé, 240 pages, 2013.
Physique des systèmes complexes, Jean-Louis Farvacque, 312 pages, 2013.
Le plan, la sphère et le théorème de Jordan, Jean-Yves Le Dimet, 144 pages, 2012.
Principes mathématiques pour biologistes, chimistes et bioingénieurs - Applications et exercices corrigés, Khalid Addi, Daniel Goeleven, Rachid Oujja, 672 pages, 2013.
Probabilités via l'intégrale de Riemann, Charles Suquet, 528 pages, 2013.
Processus aléatoires à temps discret, Jacques Franchi, 360 pages, 2013.
Recherche Opérationnelle – Tome 1 – Méthodes d'optimisation, Jacques Teghem, 624 pages, 2012.
Recherche Opérationnelle – Tome 2 – Gestion de production, Modèles aléatoires, Aide multicritère, Jacques Teghem, 624 pages, 2013.
Statistique mathématique, Benoît Cadre, Céline Vial, 192 pages, 2012.
Suites et séries numériques. Suites et séries de fonctions, Mohammed El Amrani, 456 pages, 2011.
Systèmes biologiques à dynamique non-linéaire, Michel Laurent, 360 pages, 2013.
Systèmes de communications numériques, Gaël Mahé, 216 pages, 2012.
Théorie de la mesure et de l'intégration pour les probabilités, Maryse Béguin, 216 pages, 2013.
Théorie des groupes, Felix Ulmer, 192 pages, 2012.
Thermodynamique fondamentale - Cours et problèmes résolus, Robert Bédoret, 360 pages, 2013.
Traité de géométrie affine, Dominique Bourn, 168 pages, 2012.
Traitement numérique du signal - Signaux et systèmes discrets, Guy Binet, 264 pages, 2013.
D'UML à C++, Passage d'une conception UML à une implémentation C++, Alexandre Guidet, 384 pages, 2013.

ISBN 978-2-7298-83058

32, rue Bargue 75740 Paris cedex 15

www.editions-ellipses.fr

Préface

L'Analyse Fonctionnelle étudie les fonctions, non pas en tant qu'objets individuels, mais comme éléments de certains *espaces*, dits *fonctionnels*, possédant certaines propriétés en commun. On peut dire que l'on fait de la *sociologie* des fonctions.

Ce point de vue permet, notamment, de montrer l'existence de certaines fonctions sans avoir besoin de les construire, du moins explicitement. On peut obtenir par exemple l'existence de solutions d'équations différentielles, ou encore établir le Théorème de la représentation conforme de Riemann.

Presque toujours, les espaces fonctionnels utilisés sont des *espaces vectoriels topologiques*, c'est-à-dire des espaces vectoriels, réels ou complexes, munis d'une topologie pour laquelle les deux opérations sont continues. Parmi ceux-ci, les plus importants sont ceux dont la topologie peut être définie par une *norme* : les *espaces vectoriels normés* ; mais il en existe d'autres : ceux intervenant dans la définition des Distributions, l'espace des fonctions continues sur un ouvert de $\mathbb{C}$ pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact, utilisé notamment pour prouver le Théorème de Riemann de représentation conforme, ou encore les espaces vectoriels normés munis de leur topologie faible. L'Analyse fonctionnelle s'est donc développée principalement en se basant sur l'étude des espaces vectoriels normés [1] ; et, plus particulièrement, des espaces vectoriels normés *complets* (*espaces de Banach*). L'intérêt d'avoir des espaces normés complets est que l'on a en leur sein des *propriétés d'existence* : pour toute suite de Cauchy, il *existe* un élément qui en est la limite. Les conséquences de cet aspect ont été poussées très loin par Banach, *via* le Théorème de Baire (voir le Chapitre IV). On sait qu'une autre voie pour obtenir des résultats d'existence est d'utiliser de la *compacité*. Pour les espaces normés de dimension infinie (ceux principalement utilisés), les compacts (pour la topologie de la norme) sont très petits : ils sont d'intérieur vide ; ils sont par conséquent de peu d'utilité. L'introduction de la *topologie faible* dans les espaces réflexifs, et de la topologie *préfaible* dans les espaces duaux, remédie à cela (voir le Chapitre VIII).

1. Bien que, dans les années 1950, on ait cru (Bourbaki) que leur structure était trop pauvre, et que c'était l'étude des espaces vectoriels topologiques localement convexes qui devait primer. On pourra voir dans le livre de D. Li et H. Queffélec *Introduction à l'étude des espaces de Banach* combien ce point de vue est erroné. Il convient de saluer ici la mémoire de A. Pełczyński et J. Lindenstrauss, tous deux disparus en 2012, année pendant laquelle j'écrivais ce livre, qui ont été, entre 1958 et 1964, à l'origine du renouveau de l'étude des espaces de Banach.

Selon J. Dhombres, la naissance de l'Analyse fonctionnelle remonte à 1748, lorsque Euler considère des "espèces" de fonctions qu'il traite ensuite de "manière uniforme". Au cours du 19ème siècle, d'autres mathématiciens (Dirichlet, Riemann, ...) essaieront d'utiliser cette façon de voir pour prouver l'existence de certaines fonctions. Mais ils n'y arrivent pas, faute d'avoir en main les notions de compacité et de complétude. Néanmoins, la fin du 19ème siècle verra le réel début de l'Analyse fonctionnelle (en fait celle-ci n'acquiert ce nom qu'en 1922, avec la publication du livre de Paul Lévy *Leçons d'analyse fonctionnelle*; on parlait avant cela de *Calcul fonctionnel*).

Comme le dit Paul Lévy dans son livre : *On peut, d'une manière précise, dire que c'est en 1887 que le calcul fonctionnel prit naissance, lorsque M. V. Volterra commença à publier* (...) *une série de Notes, rapidement devenues célèbres, sur ce sujet*. Se basant sur les différents exemples particuliers considérés avant, il envisagea, de façon générale, *une quantité qui dépend de toutes les valeurs d'une autre fonction*, et qu'il nomme *fonction de lignes* (car les fonctions sont représentées par des lignes). Hadamard (1903) emploie le terme de *opération fonctionnelle*, et se limite au cas où cette "opération" est linéaire; il donne à cette occasion la première représentation "concrète" des "opérations fonctionnelles" (*i.e.* les formes linéaires continues) sur l'espace de fonctions continues sur un segment (cette représentation était toutefois peu maniable : elle se présentait sous la forme d'une limite). Peu après (1904 ou 1905), dans une lettre à Maurice Fréchet, il dit préférer appeler par *fonctionnelles* les "fonctions de fonctions".

Une deuxième avancée est venue de Fredholm. Dirichlet avait cru pouvoir résoudre le problème suivant (appelé par la suite "problème de Dirichlet" par Riemann) : trouver une fonction harmonique dans un domaine plan, continue jusqu'au bord, et dont les valeurs au bord sont données. Il donnait la solution en minimisant une certaine intégrale. À l'époque, les questions d'existence étaient considérées comme allant de soi. Toutefois, Weierstrass donna en 1869 un exemple pour lequel la borne inférieure d'intégrales du type considéré n'était pas atteinte; la résolution complète du problème de Dirichlet ne fut faite qu'en 1896 par Arzelá et, indépendemment, par Hilbert en 1897. C'est à partir de l'étude du problème de Dirichlet que Fredholm a développé, à partir de 1900, ses travaux sur la théorie spectrale (publiés en 1903). Hilbert en complétant ses travaux fut conduit à la notion de ce qui fut appelé ensuite l'"espace de Hilbert", c'est-à-dire l'espace ℓ_2, le premier espace de dimension infinie qui ait été utilisé.

L'Analyse fonctionnelle est devenue une discipline à part entière à partir de 1906, grâce à l'introduction de l'*intégrale de Lebesgue* (1902), et au développement des notions topologiques (définition par Fréchet des *espaces métriques* en 1906), permettant d'introduire des espaces normés *complets*, les espaces L^p de Lebesgue. F. Riesz joua un rôle prépondérant dans ces débuts de l'Analyse fonctionnelle. Dans les années 1920, Banach découvrira les théorèmes généraux fondamentaux concernant les espaces normés complets, appelés maintenant "espaces de Banach". Son livre *Théorie des opérations linéaires* (1932) marque l'aboutissement de toute cette période, ainsi que le début de l'Analyse fonctionnelle "abstraite".

L'Analyse fonctionnelle est maintenant à la base de pratiquement toute l'Analyse, et d'autres branches des Mathématiques y font largement appel.

Disons quelques mots sur le contenu de ce livre.

Il s'adresse principalement aux étudiants de Master 1, mais il pourra aussi rendre service aux candidats à l'Agrégation, aux élèves-ingénieurs, ainsi qu'à toute personne s'intéressant à l'Analyse fonctionnelle. Il nécessite une bonne connaissance de la Topologie générale et de l'Intégrale de Lebesgue. Avoir quelques notions sur les fonctions de variable complexe sera aussi utile ça et là.

Le cours n'a évidemment rien de très original. On y retrouve l'empreinte de maîtres dont j'ai suivi les cours (il y a longtemps...!), en particulier H. Brézis, J. Dixmier, et J. Neveu, dont j'ai pu apprécier les remarquables qualités d'exposition, ainsi que du livre de W. Rudin *Analyse réelle et complexe*; il est peut-être plus original par son traitement de la dualité et des topologies faibles, que l'on ne trouve habituellement pas à ce niveau. On y trouve à la fois les aspects "abstraits" et "concrets" de l'Analyse fonctionnelle, et il permettra à ceux qui l'ont bien assimilé de poursuivre des études dans toute branche des Mathématiques dans laquelle l'Analyse fonctionnelle intervient.

En ce qui concerne les exercices, ils sont, bien sûr, de difficulté et longueur variées ; néanmoins, je n'ai pas voulu indiquer de niveau de difficulté, car, d'une part, il s'agit d'une notion très subjective, et, d'autre part, indiquer un exercice comme étant difficile pourrait susciter un blocage malvenu. L'ordre dans lequel ils sont rangés n'est pas non plus un ordre de difficulté, mais plutôt un classement thématique (ou du moins, c'est ce que j'ai essayé de faire). Une bonne partie de ces exercices ont été donnés en examen, ou proposés en T.D. ; je remercie mes collègues, "et néanmoins amis", les Professeurs P. Lefèvre et É. Matheron de m'avoir autorisé à puiser dans leurs feuilles d'exercices. Je les remercie également, ainsi que H. Queffélec, pour l'ingrat travail de relecture qu'ils ont bien voulu faire, et en me suggérant des améliorations.

Il va de soi qu'il est indispensable, pour en tirer profit, d'avoir sérieusement travaillé sur ces exercices avant d'en regarder les solutions proposées.

Dans toute le livre $\mathbb{K}$ désignera soit le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels, soit le corps $\mathbb{C}$ nombres complexes. Tous les espaces vectoriels considérés seront réels ou complexes.

Table des matières

Chapitre I

ESPACES NORMÉS

Dans ce chapitre d'introduction, on donnera quelques généralités sur les espaces normés abstraits, avec des exemples, et on traitera le cas des espaces de dimension finie. C'est essentiellement un rappel des cours de Licence. Ce sera aussi l'occasion de fixer certaines notations.

I.1. Espaces vectoriels normés

I.1.1. Norme

Définition I.1.1. *Soit E un espace vectoriel réel ou complexe. Une* **norme** *sur E est une application, le plus souvent notée $\|\,.\,\|$:*

$$\|\,.\,\|: E \longrightarrow \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$$

ayant les trois propriétés suivantes :

1) *a)* $\|x\| \geqslant 0$ *pour tout* $x \in E$ *et b)* $\boxed{\|x\| = 0 \iff x = 0}$*;*

2) $\boxed{\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|}$, $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ (homogénéité)*;*

3) $\boxed{\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|}$, $\forall x, y \in E$ (inégalité triangulaire).

Si on supprime le 1) b), on dit que $\|\,.\,\|$ est une *semi-norme*. Notons qu'alors 2) entraîne néanmoins que $\|0\| = 0$.

À partir d'une norme, on obtient une distance sur E en posant $\boxed{d(x,y) = \|x - y\|}$. On définit alors les :

- boules ouvertes : $\overset{\circ}{B}(x,r) = \{y \in E\,;\ \|x - y\| < r\}$;
- boules fermées : $B(x,r) = \{y \in E\,;\ \|x - y\| \leqslant r\}$,

ce qui permet de définir une *topologie* sur E ; une partie A de E est *ouverte* (et on dit aussi que A est *un ouvert* de E) si pour tout $x \in A$ il existe une boule centrée en x, de rayon $r = r_x > 0$, contenue dans A. Il n'y a pas besoin de préciser s'il s'agit d'une boule ouverte ou d'une boule fermée. En effet, si A contient la boule fermée $B(x,r)$, elle contient *a fortiori* la boule ouverte $\overset{\circ}{B}(x,r)$; et, inversement, si A contient la boule ouverte $\overset{\circ}{B}(x,r)$, elle contient la boule fermée $B(x,r')$, pour tout $r' < r$. Notons que l'ensemble vide $\emptyset$ est un ouvert (puisqu'il n'y a aucun x dans A, la propriété définissant les ouverts est trivialement vérifiée). L'espace E tout entier est clairement un ouvert. Il résulte de la définition que toute réunion d'ouverts est un ouvert. Toute intersection d'un nombre fini d'ouverts est un ouvert : si $x \in A = A_1 \cap \cdots \cap A_n$, et $\overset{\circ}{B}(x,r_k) \subseteq A_k$, alors $\overset{\circ}{B}(x,r) \subseteq A$, avec $r = \min(r_1, \ldots, r_n)$.

Une partie V contenant le point $x_0 \in E$ est un *voisinage* de x_0 si elle contient une boule (ouverte ou fermée) de centre x_0, de rayon $r > 0$.

Une partie est *fermée* (on dit aussi que c'est *un fermé*) si son complémentaire est ouvert. Par complémentation, on obtient que $\emptyset$ et E sont des fermés, que l'intersection de toute famille de fermés est encore un fermé, ainsi que toute réunion d'un nombre fini de fermés.

Si $A \subseteq E$ est une partie de E, on appelle *intérieur* de A, et on note $\overset{\circ}{A}$, ou $\operatorname{int}(A)$, le plus grand ouvert contenu dans A (c'est la réunion de tous les ouverts contenus dans A), et on appelle *adhérence*, ou *fermeture*, de A le plus petit fermé contenant A (c'est l'intersection de tous les fermés contenant A). On note $\overline{A}$ l'adhérence de A. On rappelle (c'est facile à voir) que $x \in \overline{A}$ si, et seulement si, il existe une suite d'éléments de A convergeant vers x. On dit que A est *dense* dans E si $\overline{A} = E$.

Proposition I.1.2. *Toute boule ouverte est un ouvert et toute boule fermée est un fermé.*

Preuve. 1) Soit $x \in \overset{\circ}{B}(x_0, r_0)$ et soit $0 < r < r_0 - \|x - x_0\| > 0$. Pour $\|x - y\| \leqslant r$, on a $\|y - x_0\| \leqslant \|y - x\| + \|x - x_0\| \leqslant r + \|x - x_0\| < r_0$; donc $B(x,r) \subseteq \overset{\circ}{B}(x_0, r_0)$.

2) Soit $x \notin B(x_0, r_0)$ et soit $0 < r < \|x - x_0\| - r_0$; alors $B(x,r) \subseteq [B(x_0,r_0)]^c$, puisque, si $\|y - x\| \leqslant r$, on a $\|y - x_0\| \geqslant \|x_0 - x\| - \|x - y\| \geqslant \|x_0 - x\| - r > r_0$. □

Toutes les notions topologiques précédentes ne font pas intervenir le fait que E soit un espace vectoriel, ni que la distance est définie à partir d'une norme ; elles sont donc valables dans tout espace métrique. Par contre, on a une propriété spécifique dans les espaces normés, qui justifie la notation des boules ouvertes : l'intérieur de $B(x,r)$ est la boule ouverte $\overset{\circ}{B}(x,r)$ et l'adhérence de la boule ouverte $\overset{\circ}{B}(x,r)$ est la boule fermée $B(x,r)$ (voir ci-dessous).

Définition I.1.3. *Lorsqu'un espace vectoriel E est muni d'une norme et de la topologie associée à cette norme, on dit que c'est un* espace vectoriel normé, *ou, plus simplement, un* espace normé.

Notation. On notera par B_E la boule fermée $B(0,1)$ de centre 0 et de rayon 1. On dira que c'est la **boule unité** de E.

Proposition I.1.4. *Si E est un espace normé, alors les applications :*

$$+:\ \begin{array}{ccc} E\times E & \longrightarrow & E \\ (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{K}\times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda,x) & \longmapsto & \lambda x \end{array}$$

sont continues.

Définition I.1.5. *Soit E un espace vectoriel réel ou complexe, muni d'une topologie. On dit que E est un* espace vectoriel topologique (e.v.t.) *si les applications :*

$$+:\ \begin{array}{ccc} E\times E & \longrightarrow & E \\ (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{K}\times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda,x) & \longmapsto & \lambda x \end{array}$$

sont continues.

On dit qu'un espace vectoriel topologique est un espace vectoriel topologique localement convexe, *ou* espace localement convexe (e.l.c.), *si tout point possède une base de voisinages convexes.*

Il résulte de la Proposition I.1.4, et du fait que les boules sont convexes, que tout espace normé est un *e.v.t.* localement convexe.

Preuve de la Proposition I.1.4. $E\times E$ et $\mathbb{K}\times E$ sont munis de la topologie-produit, qui peut être définie par les normes :

$$\|(x,y)\| = \max\{\|x\|,\|y\|\} \qquad \text{et} \qquad \|(\lambda,x)\| = \max\{|\lambda|,\|x\|\}.$$

Il suffit ensuite d'utiliser les inégalités :

$$\|(x+y)-(x_0+y_0)\| = \|(x-x_0)+(y-y_0)\| \leqslant \|x-x_0\|+\|y-y_0\|\,;$$

et :

$$\begin{aligned} \|\lambda x-\lambda_0x_0\| &= \|(\lambda-\lambda_0)(x-x_0)+\lambda_0(x-x_0)+(\lambda-\lambda_0)x_0\| \\ &\leqslant |\lambda-\lambda_0|\,\|x-x_0\|+|\lambda_0|\,\|x-x_0\|+|\lambda-\lambda_0|\,\|x_0\|. \end{aligned} \qquad \square$$

Corollaire I.1.6. *Les translations :*

$$\tau_a:\ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x+a \end{array} \qquad (a\in E)$$

et les homothéties :

$$h_\lambda:\ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \lambda x \end{array} \qquad (\lambda\in\mathbb{K})$$

sont continues. Ce sont des homéomorphismes (si $\lambda\neq 0$ pour les homothéties).

Corollaire I.1.7. *Toutes les boules fermées de rayon $r>0$ sont homéomorphes entre-elles, donc à B_E. Toutes les boules ouvertes de rayon $r>0$ sont homéomorphes entre-elles.*

Corollaire I.1.8. *L'adhérence de la boule ouverte $\overset{\circ}{B}(x,r)$ est la boule fermée $B(x,r)$ et l'intérieur de la boule fermée $B(x,r)$ est la boule ouverte $\overset{\circ}{B}(x,r)$.*

Preuve. 1) L'adhérence de la boule ouverte est évidemment contenue dans la boule fermée, puisque celle-ci est fermée dans E. Inversement, si $y \in B(x,r)$, on a $y_n = \frac{1}{n}x + (1-\frac{1}{n})y \in \overset{\circ}{B}(x,r)$ car $\|x - [\frac{1}{n}x + (1-\frac{1}{n})y]\| = (1-\frac{1}{n})\,\|x-y\| < r$; comme $y = \lim_{n\to\infty} y_n$, on obtient $y \in \overline{\overset{\circ}{B}(x,r)}$.

2) Étant ouverte dans E, la boule ouverte est contenue dans l'intérieur de la boule fermée. Pour montrer l'inclusion inverse, il faut montrer que si y n'est pas dans la boule ouverte, alors aucune boule $B(y,\rho)$ de centre y et de rayon $\rho > 0$ n'est contenue dans $B(x,r)$. Or si $y \notin \overset{\circ}{B}(x,r)$, on a $\|y-x\| \geqslant r$. Pour tout $\rho > 0$, le vecteur $z = y + \frac{\rho}{\|y-x\|}(y-x)$ est dans $B(y,\rho)$, puisque $\|z-y\| = \frac{\rho}{\|y-x\|}\,\|y-x\| = \rho$, mais n'est pas dans $B(x,r)$, car $\|z-x\| = \left\|y + \frac{\rho}{\|y-x\|}(y-x) - x\right\| = \left(1+\frac{\rho}{\|y-x\|}\right)\|y-x\| \geqslant \left(1+\frac{\rho}{\|y-x\|}\right) r > r$. Donc y n'est pas dans l'intérieur de $B(x,r)$. □

Corollaire I.1.9. *Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors son adhérence $\overline{F}$ aussi.*

Preuve. Soit $x, y \in \overline{F}$ et $a, b \in \mathbb{K}$. Il existe $x_n, y_n \in F$ tels que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ et $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$. Par la Proposition I.1.4, on a $ax+by = \lim_{n\to\infty}(ax_n+by_n)$; et comme $ax_n+by_n \in F$, on obtient $ax+by \in \overline{F}$. □

Proposition I.1.10. *L'application $x \in E \longmapsto \|x\| \in \mathbb{R}_+$ est continue.*

Preuve. Il suffit d'utiliser l'inégalité $\big|\,\|x\| - \|y\|\,\big| \leqslant \|x-y\|$. □

I.1.2. Quelques exemples usuels

I.1.2.1. Espaces de suites

1) a) Il est immédiat de voir que si l'on pose, pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$:

$$\begin{cases} \|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n| \,; \\ \|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}\,, \end{cases}$$

alors $\|\,.\,\|_1$ et $\|\,.\,\|_\infty$ sont deux normes sur $\mathbb{K}^n$.

On note $\ell_1^n = (\mathbb{K}^n, \|\,.\,\|_1)$ et $\ell_\infty^n = (\mathbb{K}^n, \|\,.\,\|_\infty)$.

b) Si p est un nombre réel vérifiant $1 < p < \infty$, on obtient une norme sur $\mathbb{R}^n$ en posant :

$$\boxed{\|x\|_p = \Big(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\Big)^{1/p}}\,.$$

On note $\ell_p^n = (\mathbb{K}^n, \|\,.\,\|_p)$.

Seule l'inégalité triangulaire :

$$\boxed{\Big(\sum_{k=1}^n |x_k+y_k|^p\Big)^{1/p} \leqslant \Big(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{k=1}^n |y_k|^p\Big)^{1/p}}\,,$$

appelée **inégalité de Minkowski**, n'est pas évidente ; elle peut se démontrer ainsi : Par convexité de la fonction $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto t^p$, on a $[\alpha u + (1-\alpha)v]^p \leqslant \alpha u^p + (1-\alpha)v^p$ si $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ et $u, v \geqslant 0$. Prenons $\alpha = \frac{\|x\|_p}{\|x\|_p + \|y\|_p}$ (de sorte que $1 - \alpha = \frac{\|y\|_p}{\|x\|_p + \|y\|_p}$), $u = \frac{|x_k|}{\|x\|_p}$ et $v = \frac{|y_k|}{\|y\|_p}$ (si $\|x\|_p = 0$ ou $\|y\|_p = 0$, le résultat est évident). En sommant, on obtient $\frac{1}{(\|x\|_p + \|y\|_p)^p} \sum_{k=1}^n (|x_k| + |y_k|)^p \leqslant 1$, ce qui donne le résultat, puisque $|x_k + y_k| \leqslant |x_k| + |y_k|$ pour tout $k = 1, \ldots, n$. □

Une inégalité *très utile* est l'**inégalité de Hölder**. Rappelons que si $1 < p < \infty$, l'**exposant conjugué** de p est le nombre q vérifiant $\boxed{\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1}$. Explicitement, $\boxed{q = \dfrac{p}{p-1}}$. On a $1 < q < \infty$, et p est l'exposant conjugué de q. Ils sont aussi liés par l'égalité $\boxed{(p-1)(q-1) = 1}$.

L'inégalité de Hölder s'énonce alors ainsi : si $1 < p < \infty$ et q est l'exposant conjugué de p, alors, pour tous $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{K}$, on a :

$$\boxed{\sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leqslant \Big(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\Big)^{1/p} \Big(\sum_{k=1}^n |y_k|^q\Big)^{1/q}},$$

Lorsque $p = 2$, alors $q = 2$: c'est l'**inégalité de Cauchy-Schwarz** (due, sous cette forme, à Cauchy en 1821).

Pour montrer l'inégalité de Hölder, on part de l'inégalité $ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$, pour $a, b \geqslant 0$ (c'est une conséquence de la convexité de la fonction $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto t^p/p$ et du fait que sa dérivée $t \mapsto t^{p-1}$ est la réciproque de la dérivée $t \mapsto t^{q-1}$ de $t \mapsto t^q/q$, comme on peut s'en convaincre en faisant un dessin ; mais on peut le voir aussi simplement, par exemple en étudiant les variations de la fonction $t \mapsto \frac{t^p}{p} + \frac{b^q}{q} - bt$) ; on l'applique avec $a = |x_k|/\|x\|_p$ et $b = |y_k|/\|y\|_q$ (on peut supposer $\|x\|_p > 0$ et $\|y\|_q > 0$), et on somme. On obtient $\frac{1}{\|x\|_p \|y\|_q} \sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, d'où l'inégalité de Hölder. □

2) Ces exemples se généralisent en dimension infinie.

a) Soit :

$$\boxed{c_0 = \{x = (x_n)_{n \geqslant 1} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}^*} \; ; \; \lim_{n \to \infty} x_n = 0\}},$$

et :

$$\boxed{\ell_\infty = \{x = (x_n)_{n \geqslant 1} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}^*} \; ; \; (x_n)_n \text{ soit bornée}\}};$$

on les munit de la norme définie par :

$$\boxed{\|x\|_\infty = \sup_{n \geqslant 1} |x_n|}.$$

b) Pour $1 \leqslant p < \infty$, on pose :

$$\boxed{\ell_p = \Big\{x = (x_n)_{n \geqslant 1} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}^*} \; ; \; \sum_{n=1}^\infty |x_n|^p < +\infty\Big\}};$$

on le munit de la norme définie par :

$$\boxed{\|x\|_p = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\Big)^{1/p}}.$$

Le fait que ℓ_p soit un sous-espace vectoriel de l'espace des suites, et que $\|\,.\,\|_p$ soit une norme sur ℓ_p se déduit de l'inégalité de Minkowski (évidente lorsque $p = 1$), généralisée comme suit :

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p\Big)^{1/p} \leqslant \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p\Big)^{1/p},$$

pour tous $x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots \in \mathbb{K}$. On l'obtient à partir de la précédente en faisant tendre le nombre de termes vers l'infini : pour tout $N \geqslant 1$, on a $\big(\sum_{n=1}^{N} |x_n+y_n|^p\big)^{1/p} \leqslant \big(\sum_{n=1}^{N} |x_n|^p\big)^{1/p} + \big(\sum_{n=1}^{N} |y_n|^p\big)^{1/p} \leqslant \big(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\big)^{1/p} + \big(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p\big)^{1/p}$.

L'inégalité de Hölder se généralise de la même façon. Si $1 < p < \infty$ et si q est l'exposant conjugué de p, on a :

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leqslant \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\Big)^{1/p}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q\Big)^{1/q}.$$

En particulier, lorsque $x = (x_n)_n \in \ell_p$ et $y = (y_n)_n \in \ell_q$, on a $xy \in \ell_1$ et $\|xy\|_1 \leqslant \|x\|_p\|y\|_q$.

Les espaces ℓ_p sont en fait des cas particuliers des espaces de Lebesgue $L^p(m)$, dont nous rappellerons la définition ci-dessous, correspondant à la mesure de comptage sur $\mathbb{N}^*$.

I.1.2.2. Espaces de fonctions

1) a) Soit A un ensemble et soit l'espace $\mathscr{F}_b(A)$ l'espace (que l'on note aussi $\ell_\infty(A)$ si l'on veut privilégier l'aspect "famille d'éléments") des fonctions bornées sur A, à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si l'on pose :

$$\boxed{\|f\|_\infty = \sup_{x \in A} |f(x)|},$$

on a une norme, appelée *norme uniforme*. La topologie associée à cette norme est la *topologie de la convergence uniforme* ; en effet, il est clair que $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ si et seulement si $(f_n)_n$ converge uniformément sur A vers f.

b) Soit K un espace compact et $\boxed{\mathscr{C}(K)}$ l'espace des fonctions continues sur K (à valeurs scalaires). Toute fonction continue sur un compact étant bornée, $\mathscr{C}(K)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}_b(K)$. On le munit usuellement de la norme induite $\|f\|_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)|$.

Notons que, lorsque $K = [0,1]$, par exemple, on peut aussi munir $\mathscr{C}([0,1])$ de la norme définie par :

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt\,,$$

qui vérifie $\|f\|_1 \leqslant \|f\|_\infty$.

c) Sur l'espace $\mathscr{C}^k([0,1])$ des fonctions k fois continûment dérivables sur $[0,1]$, on peut mettre la norme :

$$\|f\|^{(k)} = \max\{\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty, \ldots, \|f^{(k)}\|_\infty\}\,.$$

2) *Les espaces de Lebesgue.*

Soit $(S, \mathscr{T}, m)$ un espace mesuré ; pour $1 \leqslant p < \infty$, on note $\boxed{\mathscr{L}^p(m)}$ l'espace de toutes les fonctions mesurables $f\colon S \to \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ telles que :

$$\int_S |f(t)|^p\,dm(t) < +\infty,$$

et l'on pose :

$$\boxed{\|f\|_p = \left(\int_S f(t)|^p\,dm(t)\right)^{1/p}}\,.$$

Notons que $\|f\|_p = 0$ si et seulement $f = 0$ m-presque partout.

Théorème I.1.11 (Inégalité de Minkowki). *Soit* $1 \leqslant p < \infty$. *Pour* $f, g \in \mathscr{L}^p(m)$, *on a l'***inégalité de Minkowski** *:*

$$\boxed{\left(\int_S |f+g|^p\,dm\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_S |f|^p\,dm\right)^{1/p} + \left(\int_S |g|^p\,dm\right)^{1/p}}$$

Il en résulte que $\mathscr{L}^p(m)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions mesurables et que $\|\,.\,\|_p$ est une *semi-norme* sur $\mathscr{L}^p(m)$. Pour $p = 1$, l'inégalité est évidente.

Preuve. La preuve est la même que pour les suites. On se place dans le cas $p > 1$. On peut supposer $\|f\|_p > 0$ et $\|g\|_p > 0$ (car sinon $f = 0$ *m-p.p.* et alors $f + g = g$ *m-p.p.*, ou $g = 0$ *m-p.p.* et alors $f + g = f$ *m-p.p.*). On applique l'inégalité de convexité $[\alpha u + (1-\alpha)v]^p \leqslant \alpha u^p + (1-\alpha)v^p$ avec $\alpha = \|f\|_p/(\|f\|_p + \|g\|_p) \in [0,1]$, $u = |f(t)|/\|f\|_p$ et $v = |g(t)|/\|g\|_p$. Comme $\alpha/\|f\|_p = (1-\alpha)/\|g\|_p = 1/(\|f\|_p + \|g\|_p)$, on a $\left(\dfrac{|f(t)| + |g(t)|}{\|f\|_p + \|g\|_p}\right)^p \leqslant \dfrac{\alpha}{\|f\|_p^p}\,|f(t)|^p + \dfrac{1-\alpha}{\|g\|_p^p}\,|g(t)|^p$, d'où, en intégrant :

$$\begin{aligned}\int_S \frac{(|f(t)| + |g(t)|)^p}{(\|f\|_p + \|g\|_p)^p}\,dm(t) &\leqslant \frac{\alpha}{\|f\|_p^p}\int_S |f(t)|^p\,dm(t) + \frac{1-\alpha}{\|g\|_p^p}\int_S |g(t)|^p\,dm(t)\\ &= \alpha + (1-\alpha) = 1\,;\end{aligned}$$

cela donne le résultat puisque $|f(t) + g(t)| \leqslant |f(t)| + |g(t)|$. $\square$

On a vu que $\|\,.\,\|_p$ n'est pas une norme en général, puisque $\|f\|_p = 0$ si et seulement $f = 0$ m-presque partout. Si $\mathscr{N}$ désigne l'espace des fonctions mesurables $f : S \to \mathbb{K}$ nulles m-presque partout, l'espace-quotient $\boxed{L^p(m) = \mathscr{L}^p(m)/\mathscr{N}}$ est alors normé si l'on pose $\|\widetilde{f}\|_p = \|f\|_p$ (voir l'Exercice 15).

Dans la pratique, on ne fera pas de distinction entre la fonction f et sa classe d'équivalence m-presque partout $\widetilde{f}$, et on écrira donc $f \in L^p(m)$ au lieu de $f \in \mathscr{L}^p(m)$. Toutefois, il faut parfois faire attention, notamment lorsque l'on manipule des quantités non dénombrables de fonctions. Cette distinction peut déjà intervenir pour des questions de mesurabilité. On peut aussi le voir sur l'exemple suivant :

Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble de toutes les parties finies de $[0,1]$; pour tout $A \in \mathscr{F}$, on a, relativement à la mesure de Lebesgue, $\mathbb{1}_A = 0$ *p.p.* ; donc $\widetilde{\mathbb{1}_A} = \widetilde{0}$. Mais, d'un autre côté, $\sup_{A\in\mathscr{F}} \mathbb{1}_A(x) = 1$ pour tout $x \in [0,1]$; donc $(\sup_{A\in\mathscr{F}} \mathbb{1}_A)^{\sim} = \widetilde{\mathbb{1}}$.

Comme pour les suites, l'inégalité de Hölder est *très utile.*

Théorème I.1.12 (Inégalité de Hölder). *Si $1 < p < \infty$ et si q est l'exposant conjugué de p, on a, pour $f \in \mathscr{L}^p(m)$ et $g \in \mathscr{L}^q(m)$, l'**inégalité de Hölder**:*

$$\boxed{\int_S |fg|\,dm \leqslant \left(\int_S |f|^p\,dm\right)^{1/p}\left(\int_S |g|^q\,dm\right)^{1/q}}.$$

Pour $p = q = 2$, on l'appelle **inégalité de Cauchy-Schwarz** :

$$\boxed{\int_S |fg|\,dm \leqslant \left(\int_S |f|^2\,dm\right)^{1/2}\left(\int_S |g|^2\,dm\right)^{1/2}},$$

si $f, g \in \mathscr{L}^2(m)$ (elle a été démontrée par Bouniakowski en 1859 et redémontrée par Schwarz en 1885 ; elle généralise l'inégalité pour les sommes démontrée par Cauchy). Elle se démontre de la même façon que pour les sommes, en intégrant au lieu de sommer.

Preuve. On peut supposer $\|f\|_p > 0$ et $\|g\|_q > 0$ car sinon $f = 0$ *m-p.p.* ou $g = 0$ *m-p.p.*, et alors $fg = 0$ *m-p.p.*. On utilise l'inégalité $ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ avec $a = |f(t)|/\|f\|_p$ et $b = |g(t)|/\|g\|_q$. En intégrant, on obtient :

$$\int_S \frac{|f(t)\,g(t)|}{\|f\|_p\|g\|_q}\,dm(t) \leqslant \frac{1}{p}\int_S \frac{|f(t)|^p}{\|f\|_p^p}\,dm(t) + \frac{1}{q}\int_S \frac{|g(t)|^q}{\|g\|_q^q}\,dm(t) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,,$$

d'où le résultat. □

Comme application on a le résultat suivant.

Proposition I.1.13. *Soit $(S, \mathscr{T}, m)$ un espace mesuré de <u>mesure finie</u>. Alors, pour $1 \leqslant p_1 \leqslant p_2 < \infty$, on a $\mathscr{L}^{p_2}(m) \subseteq \mathscr{L}^{p_1}(m) \subseteq \mathscr{L}^1(m)$. De plus si $m(S) = 1$ (c'est-à-dire que m est une mesure de probabilité), alors $\|f\|_1 \leqslant \|f\|_{p_1} \leqslant \|f\|_{p_2}$ pour toute $f \in \mathscr{L}^{p_2}(m)$.*

Preuve. On peut supposer $p_1 < p_2$. Posons $p = p_2/p_1$. Comme $p > 1$, on peut utiliser l'inégalité de Hölder :

$$\int_S |f|^{p_1}\,dm \leqslant \left(\int_S 1^q\,dm\right)^{1/q}\left(\int_S (|f|^{p_1})^p\,dm\right)^{1/p} = [m(S)]^{1/q}\left(\int_S |f|^{p_2}\,dm\right)^{1/p};$$

d'où $\|f\|_{p_1} \leqslant [m(S)]^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}}\|f\|_{p_2}$.

La seconde inclusion s'obtient en remplaçant p_2 par p_1 et en prenant $p_1 = 1$. □

Remarque 1. Au contraire, pour les espaces ℓ_p, on a les inclusions inverses ; pour $1 \leqslant p_1 \leqslant p_2 < \infty$:

$$\ell_1 \subseteq \ell_{p_1} \subseteq \ell_{p_2} \subseteq c_0 \subseteq \ell_\infty .$$

De plus $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_{p_2} \leqslant \|x\|_{p_1} \leqslant \|x\|_1$ pour tout $x \in \ell_1$.

En effet, si $x \in \ell_{p_2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^{p_2} < +\infty$; donc $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. De plus, pour tout $n \geqslant 1$, $|x_n| \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^{p_2}\right)^{1/p_2} = \|x\|_{p_2}$; donc $\|x\|_\infty = \sup_{n\geqslant 1} |x_n| \leqslant \|x\|_{p_2}$.

Maintenant, si $x \in \ell_{p_1}$ n'est pas nul, posons $x' = x/\|x\|_{p_1}$. On a $\|x'\|_{p_1} = 1$, c'est-à-dire $\sum_{n=1}^{\infty} |x'_n|^{p_1} = 1$. Il en résulte que $|x'_n|^{p_1} \leqslant 1$, et donc $|x'_n| \leqslant 1$, pour tout $n \geqslant 1$. Alors, pour tout $n \geqslant 1$, $|x'_n|^{p_2} \leqslant |x'_n|^{p_1}$, puisque $p_2 \geqslant p_1$. Il en résulte que $\sum_{n=1} |x'_n|^{p_2} \leqslant \sum_{n=1} |x'_n|^{p_1} = 1$, c'est-à-dire que $\sum_{n=1} |x_n|^{p_2} \leqslant \|x\|_{p_1}^{p_2}$. Donc $x \in \ell_{p_2}$ et $\|x\|_{p_2} \leqslant \|x\|_{p_1}$. □

Remarque 2. Par contre, il est important de noter que $\boxed{\mathscr{L}^{p_1}(\mathbb{R}) \not\subseteq \mathscr{L}^{p_2}(\mathbb{R})}$ pour tous $p_1 \neq p_2$.

En effet, si $p_1 < p_2$, la fonction définie par $f(t) = 1/t^{1/p_2}$ pour $0 < t \leqslant 1$, et par $f(t) = 0$ ailleurs, est dans $\mathscr{L}^{p_1}(\mathbb{R})$ car $p_1/p_2 < 1$, mais pas dans $\mathscr{L}^{p_2}(\mathbb{R})$. Si $p_1 > p_2$, alors la fonction définie par $f(t) = 1/t^{1/p_2}$ pour $t \geqslant 1$, et $f(t) = 0$ pour $t < 1$, est dans $\mathscr{L}^{p_1}(\mathbb{R})$ car cette fois-ci $p_1/p_2 > 1$, mais n'est pas dans $\mathscr{L}^{p_2}(\mathbb{R})$.

I.1.3. Espaces de Banach

Définition I.1.14. *Une suite $(x_k)_k$ d'éléments d'un espace normé E est dite* suite de Cauchy *si :*

$$(\forall\varepsilon > 0) \quad (\exists N \geqslant 1) \qquad k, l \geqslant N \quad\Longrightarrow\quad \|x_k - x_l\| \leqslant \varepsilon.$$

Toute suite convergente est de Cauchy.

Définition I.1.15. *On dit qu'un espace normé est* complet *si toute suite de Cauchy est convergente. On appelle* **espace de Banach** *tout espace normé complet.*

Exemples.

a) Il est immédiat de voir que $\ell_p^n = (\mathbb{K}^n, \|\,.\,\|_p)$ est complet pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

b) Les espaces c_0 et ℓ_p, pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$ sont complets (*Exercice 3*).

c) $\big(\mathscr{C}(K), \|\,.\,\|_\infty\big)$ est complet : toute suite uniformément de Cauchy est uniformément convergente, et si elles sont continues, la limite est continue.

Par contre, $\big(\mathscr{C}([0,1]), \|\,.\,\|_1\big)$ n'est pas complet (*Exercice 3*).

d) $\big(\mathscr{C}^k([0,1]), \|\,.\,\|_\infty\big)$ n'est pas complet pour $k \geqslant 1$, mais $\big(\mathscr{C}^k([0,1]), \|\,.\,\|^{(k)}\big)$ est complet.

e) Les espaces de Lebesgue sont complets. C'est l'objet du théorème suivant.

Théorème I.1.16 (Théorème de Riesz-Fisher). *Pour tout espace mesuré $(S, \mathscr{T}, m)$, et pour $1 \leqslant p < \infty$, l'espace $L^p(m)$ est un espace de Banach.*

E. Fisher et F. Riesz ont en fait démontré, indépendamment, en 1907 que $L^2([0,1])$ est isomorphe à ℓ_2 ; cela repose essentiellement sur le fait que $L^2([0,1])$ est *complet* (voir le Chapitre 2 sur les espaces de Hilbert) ; c'est pourquoi on donne le nom de Riesz-Fisher à ce théorème, démontré en fait, pour $L^p([0,1])$ et $1 < p < \infty$, par F. Riesz en 1910 (et pour le distinguer des nombreux autres théorèmes dus à F. Riesz).

Preuve. Soit $(F_n)_n$ une suite de Cauchy dans $L^p(m)$. Choisissons un représentant $f_n \in \mathscr{L}^p(m)$ de F_n.

a) Comme la suite est de Cauchy, on peut construire une sous-suite $(f_{n_k})_j$ (avec $n_1 < n_2 < \cdots$) telle que :

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \leqslant \frac{1}{2^k} \quad \forall k \geqslant 1.$$

Posons :

$$\begin{cases} g_k = \sum_{j=1}^k |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}| \\ g = \sum_{j=1}^\infty |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}| \,. \end{cases}$$

Ces fonctions sont mesurables et l'on a :

$$\|g_k\|_p \leqslant \sum_{j=1}^k \|\, |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}|\, \|_p = \sum_{j=1}^k \|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\|_p \leqslant \sum_{j=1}^k \frac{1}{2^j} \leqslant 1.$$

Le **Lemme de Fatou**, appliqué à la suite $(g_k^p)_{k \geqslant 1}$, donne :

$$\int_S g^p \, dm \leqslant \liminf_{k \to \infty} \int_S g_k^p \, dm = \liminf_{k \to \infty} \|g_k\|_p^p \leqslant 1.$$

La fonction g^p est donc intégrable. En particulier elle est *finie presque partout* ; donc g aussi. Cela signifie que la série $\sum_{k \geqslant 1} \big(f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t)\big)$ converge absolument, pour presque tout $t \in S$.

Posons alors :

$$f(t) = \begin{cases} f_{n_1}(t) + \displaystyle\sum_{k=1}^\infty \big(f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t)\big) & \text{si } g(t) < +\infty; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors f est mesurable et :

$$f(t) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(t) \quad \text{pour presque tout } t \in S.$$

b) Il reste à voir que la suite $(f_n)_n$ converge vers f dans $\mathscr{L}^p(m)$, c'est-à-dire pour la (semi)-norme $\|\,.\,\|_p$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme la suite est de Cauchy, il existe un entier $N \geqslant 1$ tel que :

$$n, k \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad \|f_n - f_k\|_p \leqslant \varepsilon.$$

Pour $k \geqslant N$, le **Lemme de Fatou** donne :

$$\int_S |f - f_k|^p \, dm \leqslant \liminf_{j\to\infty} \int_S |f_{n_j} - f_k|^p \, dm \leqslant \varepsilon^p.$$

On en déduit d'abord que $(f - f_k) \in \mathscr{L}^p(m)$, donc que $f = (f - f_k) + f_k \in \mathscr{L}^p(m)$; et ensuite, puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire, que $\lim_{k\to\infty} \|f - f_k\|_p = 0$.

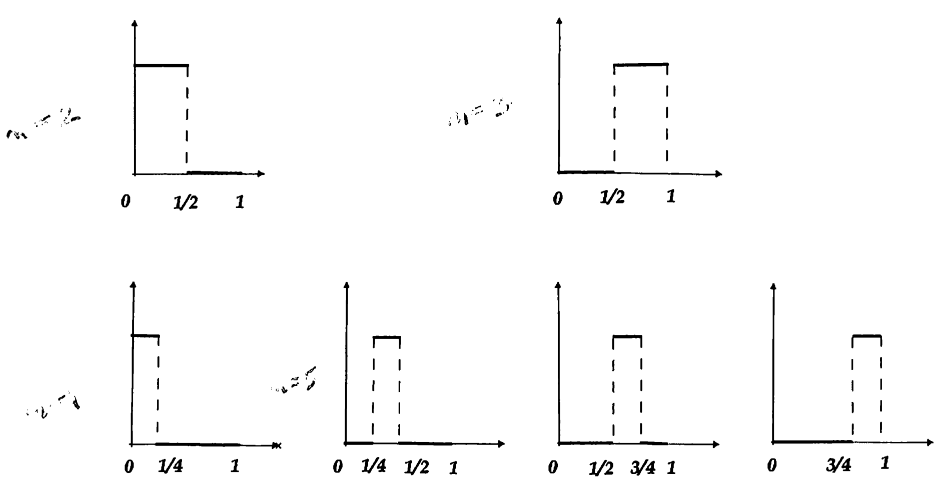
c) Finalement si l'on note $F \in L^p(m)$ la classe d'équivalence m-presque partout de f, on a $\lim_{k\to\infty} \|F - F_k\|_p = \lim_{k\to\infty} \|f - f_k\|_p = 0$. □

Remarque. Notons qu'au passage, on a prouvé le **très important** résultat suivant (on ne fera plus désormais de distinction entre une fonction et sa classe d'équivalence presque partout) :

Théorème I.1.17. *Si* $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ *dans* $L^p(m)$, *avec* $1 \leqslant p < \infty$, *alors on peut extraire une* **sous-suite** $(f_{n_k})_k$ *qui* **converge presque partout** *vers* f.

Remarque. La suite elle-même peut très bien ne converger nulle part.

Par exemple, sur $S =]0, 1]$, soit $f_n = \mathbb{1}_{\left]\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}\right]}$ lorsque $n = 2^k + l$, $0 \leqslant l \leqslant 2^k - 1$:



Alors, $\|f_n\|_p = \frac{1}{2^{k/p}}$ pour $2^k \leqslant n \leqslant 2^{k+1} - 1$; donc $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ dans $L^p([0,1])$, mais pour <u>aucun</u> $t \in]0,1[$, la suite $\big(f_n(t)\big)_n$ n'est convergente. Toutefois, la sous-suite $(f_{2^k})_{k\geqslant 0}$, par exemple, converge ponctuellement vers 0.

I.1.4. Applications linéaires

Pour les application linéaires, on a un critère très simple, et très utile, de continuité.

Proposition I.1.18. *Soit $(E, \|\,.\,\|_E)$ et $(F, \|\,.\,\|_F)$ deux espaces normés et soit $T\colon E \to F$ une application* **linéaire**. *Alors T est continue si et seulement s'il existe une constante $K \geqslant 0$ telle que :*

$$\boxed{\|T(x)\|_F \leqslant K\,\|x\|_E\,, \quad \forall x \in E}\,.$$

Preuve. Il est clair que cette propriété entraîne la continuité de T car on a, grâce à la linéarité :

$$\|T(x) - T(y)\|_F \leqslant K\,\|x - y\|_E\,, \quad \forall x, y \in E\,;$$

T est donc même lipschitzienne.

Inversement, si T est continue en 0, on a, par définition :

$$(\exists K > 0) \quad \|y - 0\|_E = \|y\|_E \leqslant 1/K \quad \Longrightarrow \quad \|T(y)\|_F = \|T(y) - T(0)\|_F \leqslant 1.$$

Pour tout $x \in E$, non nul, posons $y = \dfrac{1}{K\,\|x\|_E}x$; on a $\|y\|_E = 1/K$ et l'implication ci-dessus donne, grâce à l'homogénéité de T et de la norme :

$$\frac{1}{K\,\|x\|_E}\,\|T(x)\|_F \leqslant 1,$$

d'où $\|T(x)\|_F \leqslant K\,\|x\|_E$. Comme cette inégalité est évidemment vraie pour $x = 0$, cela montre la Proposition I.1.18. □

On a donc $\sup_{x\neq 0} \frac{\|T(x)\|_F}{\|x\|_E} < +\infty$. La proposition suivante est alors évidente :

Proposition I.1.19. *Soit $T\colon E \to F$ une application linéaire continue. Si l'on pose* $\boxed{\|T\| = \sup\limits_{x\neq 0} \dfrac{\|T(x)\|_F}{\|x\|_E}}$, *alors :*

$$\boxed{\|T(x)\|_F \leqslant \|T\|\,\|x\|_E\,, \quad \forall x \in E}\,;$$

$\|T\|$ est donc la plus petite constante $K \geqslant 0$ apparaissant dans la Proposition I.1.18.

Proposition I.1.20. *On a aussi*

$$\boxed{\|T\| = \sup_{\|x\|_E \leqslant 1} \|T(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E = 1} \|T(x)\|_F}.$$

Preuve. Appelons S la première expression et S_1 la suivante. On a bien sûr $S_1 \leqslant S$, et aussi $S \leqslant \|T\|$, puisque $\|T(x)\|_F \leqslant \|T\|$ si $\|x\|_E \leqslant 1$, par définition de $\|T\|$. Il reste à voir que $\|T\| \leqslant S_1$; mais :

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{x \neq 0} \left\| T\Big(\frac{x}{\|x\|_E}\Big) \right\|_F \leqslant S_1,$$

car $x/\|x\|_E$ est de norme 1. □

Proposition I.1.21. *Soit $\mathscr{L}(E,F)$ l'espace de toutes les applications linéaires continues de E dans F. L'application $T \mapsto \|T\|$ est une norme sur $\mathscr{L}(E,F)$, appelée la* norme opérateur.

Si F est complet, $\mathscr{L}(E,F)$ aussi.

Preuve. Le fait que ce soit une norme est facile à vérifier.

Supposons F complet, et soit $(T_n)_n$ une suite de Cauchy dans $\mathscr{L}(E,F)$. Alors, pour tout $x \in E$, la suite $\big(T_n(x)\big)_n$ est de Cauchy dans F, en vertu de l'inégalité :

$$\|T_n(x) - T_k(x)\|_F \leqslant \|T_n - T_k\| \, \|x\|_E. \tag{I.1}$$

Elle converge donc vers un élément $T(x) \in F$. Il est facile de voir qu'alors $T\colon E \to F$ est linéaire. Elle est continue car :

$$\|Tx\|_F = \lim_{n\to\infty} \|T_n x\|_F \leqslant \limsup_{n\to\infty} \|T_n\| \, \|x\|_E \leqslant \Big(\sup_{n \geqslant 1} \|T_n\|\Big) \|x\|_E$$

et car $\big(\sup_{n\geqslant 1} \|T_n\|\big) < +\infty$ puisque toute suite de Cauchy est bornée.

Pour finir, en faisant tendre k vers l'infini dans (I.1), on obtient :

$$\|T_n(x) - T(x)\|_F \leqslant \Big(\limsup_{k\to\infty} \|T_n - T_k\|\Big) \|x\|_E$$

pour tout $x \in E$, de sorte que $\|T_n - T\| \leqslant \limsup_{k\to\infty} \|T_n - T_k\|$, qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini, puisque $(T_n)_n$ est de Cauchy. Donc $(T_n)_n$ converge vers T pour la norme opérateur. □

En particulier, si $F = \mathbb{K}$, $\mathscr{L}(E,\mathbb{K})$ est **toujours complet**.

Définition I.1.22. *$\mathscr{L}(E,\mathbb{K})$ est noté E^* et est appelé le* **dual de** *E. C'est toujours un espace de Banach.*

Notons que E^* est le dual *topologique* de E, et est strictement plus petit que le dual *algébrique*, l'espace de toutes les formes linéaires, de E, du moins si E est de dimension infinie (voir l'Exercice 8).

La norme de $\varphi \in E^*$ est donc définie par :

$$\boxed{\|\varphi\| = \|\varphi\|_{E^*} = \sup_{x\neq 0} \frac{|\varphi(x)|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |\varphi(x)| = \sup_{\|x\|=1} |\varphi(x)|}.$$

Notation. On utilise souvent la notation $\boxed{\langle \varphi, x\rangle = \varphi(x)}$.

Définition I.1.23. *Si l'application linéaire $T\colon E \to F$ est bijective continue* <u>*et*</u> *si $T^{-1}\colon F \to E$ est continue, on dit que T est un* isomorphisme *(d'espaces normés) entre E et F.*

On dit que E et F sont isomorphes *s'il existe un isomorphisme entre E et F ; on dit qu'il sont* isométriques *s'il existe un isomorphisme isométrique $T\colon E \to F$.*

Notons que dire qu'une application $T\colon E \to F$ est isométrique signifie que l'on a $\|T(x_1) - T(x_2)\|_F = \|x_1 - x_2\|_E$ pour tous $x_1, x_2 \in E$. Lorsque T est linéaire, cela s'exprime par $\|T(x)\|_F = \|x\|_E$ pour tout $x \in E$; T est donc en particulier de norme $\|T\| = 1$. Toute isométrie est injective ; dire qu'elle est bijective équivaut donc à dire qu'elle est surjective. Dans ce cas, T^{-1} est aussi une isométrie ; elle est donc automatiquement continue.

Dire que T est un isomorphime signifie que T est linéaire bijective et qu'il existe deux constantes $0 < \alpha < \beta < \infty$ telles que

$$\boxed{\alpha \|x\|_E \leqslant \|Tx\|_F \leqslant \beta \|x\|_E} \qquad \text{pour tout } x \in E.$$

En effet, si T est un isomorphisme, la continuité de T^{-1} permet d'écrire : $\|T^{-1}y\|_E \leqslant \|T^{-1}\|\,\|y\|_F$ pour tout $y \in F$, soit $\|x\|_E \leqslant \|T^{-1}\|\,\|Tx\|_F$ pour tout $x \in E$. On a donc la double inégalité, avec $\alpha = 1/\|T^{-1}\|$ et $\beta = \|T\|$. Inversement, si on a cette double inégalité, alors T est continue et $\|T\| \leqslant \beta$ et T^{-1} est continue et $\|T^{-1}\| \leqslant 1/\alpha$, puisque $\alpha \|T^{-1}y\|_E \leqslant \|y\|_F$ pour tout $y \in F$.

On peut aussi remarquer que l'inégalité de gauche entraîne l'injectivité de T.

I.1.5. Normes équivalentes

Définition I.1.24. *Soit E un espace vectoriel muni de deux normes $\|\,.\,\|$ et $|||\,.\,|||$. On dit que $|||\,.\,|||$ est* plus fine *que $\|\,.\,\|$ (et que $\|\,.\,\|$ est* moins fine *que $|||\,.\,|||$) s'il existe une constante $K > 0$ telle que :*

$$\|x\| \leqslant K\,|||x|||, \quad \forall x \in E.$$

Cela équivaut à dire que l'**application identité** :

$$id_E\colon (E, |||\,.\,|||) \to (E, \|\,.\,\|)$$

est continue.

Cela équivaut encore à dire que :

$$B_{|||\,.\,|||}(0, r/K) \subseteq B_{\|\,.\,\|}(0, r)\,;$$

les boules pour $|||\,.\,|||$ sont donc "plus petites" que les boules pour $\|\,.\,\|$: elles séparent mieux les points ; plus précisément, la topologie définie par $|||\,.\,|||$ est plus fine que celle définie par $\|\,.\,\|$ (il y a plus d'ouverts).

Exemple. Dans $\mathscr{C}([0,1])$, la norme $\|\,.\,\|_\infty$ est plus fine que la norme $\|\,.\,\|_1$.

Définition I.1.25. *On dit que deux normes $\|\,.\,\|$ et $|||\,.\,|||$ sur l'espace vectoriel E sont* équivalentes *s'il existe deux constantes $K_1, K_2 > 0$ telles que :*

$$K_1\,\|x\| \leqslant |||x||| \leqslant K_2\,\|x\|\,, \quad \forall x \in E.$$

En d'autres termes, chacune est plus fine que l'autre.

Cela revient à dire que l'**application identité** id_E réalise un isomorphisme de E sur lui-même (ou plutôt de E muni de $\|\,.\,\|$ sur E muni de $|||\,.\,|||$). Cela revient aussi à dire que $\|\,.\,\|$ et $|||\,.\,|||$ définissent la même topologie sur E.

Exemples.

1) Dans $\mathbb{K}^n$, les normes $\|\,.\,\|_p$ pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$ sont équivalentes :

$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_p \leqslant \|x\|_1 \leqslant n\,\|x\|_\infty.$$

On va voir qu'en fait **toutes** les normes sur $\mathbb{K}^n$ sont équivalentes entre-elles.

2) Dans $\mathscr{C}([0,1])$, les normes $\|\,.\,\|_\infty$ et $\|\,.\,\|_1$ ne sont pas équivalentes, comme on peut le vérifier facilement (voir par exemple l'Exercice 2).

I.2. Espaces vectoriels normés de dimension finie

I.2.1. Equivalence des normes

Théorème I.2.1. *Sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes entre-elles.*

Preuve. 1) Soit $\|\,.\,\|$ une norme arbitraire sur E. Nous allons montrer qu'elle est équivalente à une norme particulière sur E, de sorte que, par transitivité, deux normes arbitraires seront équivalentes.

2) Soit $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E. Si $x = \sum_{k=1}^n \xi_k e_k$, on pose :

$$|||x||| = \max\{|\xi_1|, \ldots, |\xi_n|\}\,.$$

Ainsi, $(E, |||\,.\,|||)$ est isométrique à $(\mathbb{K}^n, \|\,.\,\|_\infty) = \ell_\infty^n(\mathbb{K})$, par l'application

$$\begin{array}{rccc} V: & \mathbb{K}^n & \longrightarrow & E \\ & a = (a_1, \ldots, a_n) & \longrightarrow & V(\xi) = \sum_{k=1}^n a_k e_k\,. \end{array}$$

On a de plus :

$$\|x\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |\xi_k| \, \|e_k\| \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{n} \|e_k\| \Big) . \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |\xi_k| = K \, |||x||| \, .$$

3) Cela signifie que l'application identité $id_E \colon (E, |||\,.\,|||) \to (E, \|\,.\,\|)$ est continue. Alors, l'application :

$$\begin{array}{rccc} N\colon & (E, |||\,.\,|||) & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & x & \longmapsto & \|x\| \end{array}$$

est aussi continue, par la Proposition I.1.10.

4) Soit :

$$S_n = \{a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \, ; \ \|a\|_\infty = 1\}.$$

C'est une partie fermée et bornée, donc **compacte**, de $\mathbb{K}^n$ (on notera que la norme $\|\,.\,\|_\infty$ définit la topologie usuelle sur $\mathbb{K}^n$). Donc :

$$S = \{x \in E \, ; \ |||x||| = 1\}$$

est une partie compacte de $(E, |||\,.\,|||)$ (par isométrie : $S = V(S_\infty)$).

5) Il en résulte qu'il existe $x_0 \in S$ tel que $\|x_0\| = N(x_0) = \inf_{x \in S} N(x) = \inf_{x \in S} \|x\|$. Comme $x_0 \neq 0$ (puisque $|||x_0||| = 1$), on a $c = \|x_0\| > 0$. Cela signifie que :

$$(\forall x \in S) \qquad \|x\| \geqslant c \, .$$

Par homogénéité (pour tout $x \neq 0$, $x' = x / |||x||| \in S$), on obtient :

$$(\forall x \in E) \qquad \|x\| \geqslant c \, |||x||| \, ,$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Remarque. Au passage, on a montré :

Corollaire I.2.2. *Tout espace normé de dimension finie n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$, muni de l'une de ses normes usuelles.*

Il en résulte :

Corollaire I.2.3. *Si E est un espace normé de dimension finie, ses parties fermées bornées sont compactes.*

Corollaire I.2.4.

1) *Tout espace normé de dimension finie est complet.*

2) *Tout sous-espace vectoriel de* dimension finie *dans un espace normé est* fermé *dans cet espace.*

3) *Si E est un espace normé de* dimension finie, *alors toute application linéaire $T \colon E \to F$ dans un espace normé arbitraire est* continue.

Preuve. 1) résulte immédiatement du Corollaire I.2.2, et 2) de ce que tout sous-espace complet est fermé. Pour le 3), il suffit de remarquer que si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est une base de E, et $|||\,.\,|||$ la norme associée comme dans la preuve du Théorème I.2.1, alors, pour $x = \sum_{k=1}^n a_k e_k \in E$, on a :

$$\|T(x)\|_F \leqslant \Big(\sum_{k=1}^n \|T(e_k)\|_F\Big) \max_{k \leqslant n} |a_k| = C\,|||x||| \leqslant C\,K\,\|x\|_E,$$

puisque $|||\,.\,|||$ et $\|\,.\,\|_E$ sont équivalentes. □

On fera attention, par contre, que si c'est l'espace d'arrivée qui est de dimension finie, la continuité n'est pas automatique (puisqu'il existe des formes linéaires non continues, si E est de dimension infinie : Exercice 8).

I.2.2. Compacité des boules

Nous avons vu dans la preuve du Théorème I.2.1 que le point essentiel (*via* le Corollaire I.2.3) est que les parties fermées bornées d'un espace normé de dimension finie sont compactes. Notons qu'il est équivalent de dire que toutes les boules fermées sont compactes. Nous allons voir que cela n'arrive en fait qu'en dimension finie.

Théorème I.2.5 (Théorème de Riesz, 1918). *Si un espace normé E possède une boule compacte $B(x_0, r)$, de rayon $r > 0$, alors il est de dimension finie.*

On en déduit que dans un espace de dimension infinie, les compacts sont "très minces" :

Corollaire I.2.6. *Si E est un espace normé de* dimension infinie, *alors tout compact de E est d'intérieur vide.*

En effet, si K est un compact d'intérieur non vide, il contient une boule fermée de rayon > 0, qui est donc compacte, et donc E est de dimension finie.

Notons que si une boule est compacte, c'est forcément une boule fermée. D'autre part, si *une* boule, de rayon > 0, est compacte, alors *toutes* les boules fermées le sont, puisqu'elles sont homéomorphes entre-elles (celles de rayon nul étant de toute façon compactes). Il suffit donc de montrer que si E est de dimension infinie, alors sa boule-unité B_E n'est pas compacte. Pour cela, on utilisera un lemme.

Lemme I.2.7 (Lemme de Riesz). *Soit F un sous-espace vectoriel* **fermé** *d'un espace normé E, qui n'est pas E tout entier. Alors, pour tout nombre δ tel que $0 < \delta < 1$, il existe $x \in E$ tel que :*

$$\begin{cases} \|x\| = 1 \\ \operatorname{dist}(x, F) \geqslant 1 - \delta. \end{cases}$$

Rappelons que :

$$\operatorname{dist}(x,F) = \inf_{y\in F} \|x-y\|.$$

Si F est de dimension finie, un argument de compacité permet de montrer qu'en fait on peut choisir un tel $x \in E$, de norme 1, avec $\operatorname{dist}(x,F) = 1$, mais nous n'en aurons pas besoin. Dans le cas de l'espace euclidien $(\mathbb{R}^n, \|\,.\,\|_2)$, il suffit de prendre x de norme 1 et orthogonal à F (car alors, pour tout $y \in F$, on a $\|x-y\|_2^2 = \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2$, par le *Théorème de Pythagore* ; donc $\operatorname{dist}(x,F) \geqslant \|x\|_2 = 1$, d'où l'égalité car $\|x\| \geqslant \operatorname{dist}(x,F)$, puisque $0 \in F$). C'est pourquoi ce lemme est parfois appelé *Lemme de la quasi-perpendiculaire.*

Preuve du Théorème de Riesz. Soit E un espace normé de dimension infinie.

Fixons un nombre $\delta \in]0,1[$; par exemple $\delta = 1/2$.

Partons d'un $x_1 \in E$, de norme 1, et prenons pour F le sous-espace vectoriel F_1 engendré par x_1. Comme il est de dimension 1, il est fermé, et n'est pas égal à E, puisque E est de dimension infinie. Le lemme donne un $x_2 \in E$, de norme 1 tel que :

$$\|x_2 - x_1\| \geqslant \operatorname{dist}(x_2, F_1) \geqslant 1/2.$$

Prenons ensuite pour F le sous-espace vectoriel F_2 engendré par x_1 et x_2. Il est de dimension 2 (car $x_2 \notin F_1$), et est donc fermé, et différent de E ; il existe donc $x_3 \in E$, de norme 1 tel que :

$$\|x_3 - x_1\| \text{ et } \|x_3 - x_2\| \geqslant \operatorname{dist}(x_3, F_2) \geqslant 1/2.$$

Comme E est de dimension infinie, on peut itérer le procédé indéfiniment. On obtient une suite $(x_k)_{k\geqslant 1}$ de vecteurs de norme 1 telle que :

$$\|x_k - x_l\| \geqslant 1/2\,, \quad \forall k \neq l.$$

Cette suite ne peut avoir aucune sous-suite convergente. Comme elle est contenue dans la boule-unité de E, cette boule n'est pas compacte. □

Remarque. On a en fait démontré un peu plus que ce qui était énoncé, à savoir que si E est de dimension infinie, sa *sphère unité* S_E n'est pas compacte (noter que S_E est fermée dans B_E ; donc si B_E est compacte, S_E aussi).

Preuve du lemme. Comme $F \neq E$, on peut trouver $x_0 \in E$ tel que $x_0 \notin F$. Comme F est fermé, on a :

$$d = \operatorname{dist}(x_0, F) > 0.$$

Comme $0 < \delta < 1$, on a $\dfrac{d}{1-\delta} > d$ et l'on peut donc trouver un $y_0 \in F$ tel que $\|x_0 - y_0\| \leqslant d/(1-\delta)$. Il ne reste plus qu'à "corriger" x_0 par y_0 et à normer ce vecteur : soit $x = \dfrac{x_0 - y_0}{\|x_0 - y_0\|}$; c'est bien un vecteur de norme 1 et, comme $y_0 + \|x_0 - y\|\, y \in F$, on a :

$$\begin{aligned}
\|x-y\| &= \frac{1}{\|x_0 - y_0\|}\, \big\|(x_0 - y_0) - \|x_0 - y_0\|\, y\big\| \\
&\geqslant \frac{1}{\|x_0 - y_0\|} \operatorname{dist}(x_0, F) = \frac{d}{\|x_0 - y_0\|} \geqslant 1 - \delta,
\end{aligned}$$

pour tout $y \in F$. □

I.3. Exercices

Exercice 1.

Montrer que $B_\infty = \{f \in L^2([0,1])\,;\ |f| \leqslant 1 \text{ presque partout}\}$ est fermé dans $L^2([0,1])$.

Exercice 2.

Soit $\delta_0\colon \mathscr{C}([0,1]) \to \mathbb{K}$ la forme linéaire définie par $\delta_0(f) = f(0)$. Montrer qu'elle est continue pour la norme $\|\,.\,\|_\infty$, mais pas pour la norme $\|\,.\,\|_1$.

Exercice 3.

1) Montrer que c_0 est fermé dans ℓ_∞.

2) Montrer que les espaces c_0 et ℓ_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ sont complets.

3) Montrer que $(\mathscr{C}([0,1]), \|\,.\,\|_1)$ n'est pas complet.

4) On rappelle qu'une fonction $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est convexe si $\varphi\big(tu + (1-t)v\big) \leqslant t\varphi(u) + (1-t)\varphi(v)$ pour tous $u, v \in I$ et $t \in [0,1]$.

Soit $\varphi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction convexe strictement croissante telle que $\varphi(0) = 0$.

a) Montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et bijective.

On note ℓ_φ l'ensemble des suites de nombres complexes $x = (x_n)_{n\geqslant 1}$ pour lesquelles il existe $C > 0$ tel que $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(|x_n|/C) < +\infty$ et on pose :

$$\|x\|_\varphi = \inf\big\{C > 0\,;\ \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(|x_n|/C) \leqslant 1\big\}.$$

b) Montrer que ℓ_φ est un espace vectoriel et que $\|\,.\,\|_\varphi$ est une norme sur ℓ_φ (*on montrera que* $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(|x_n|/\|x\|_\varphi) \leqslant 1$). On dit que ℓ_φ est un *espace d'Orlicz.*

c) Montrer que ℓ_φ est complet.

Exercice 4.

Soit (X, d) un espace métrique. On note $\mathrm{Lip}\,(X)$ l'ensemble des fonctions lipschitziennes, à valeurs réelles, sur X. Pour $f \in \mathrm{Lip}\,(X)$, on note $\mathrm{Lip}\,(f)$ la constante de Lipschitz de f, à savoir $\mathrm{Lip}\,(f) = \sup\Big\{\frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)}\,;\ x, y \in X, x \neq y\Big\}$.

1) Montrer que $\mathrm{Lip}\,(X)$ est un espace vectoriel.

2) Soit $a \in X$. Pour $f \in \mathrm{Lip}\,(X)$, on pose $\|f\|_{Lip,a} = |f(a)| + \mathrm{Lip}\,(f)$.

a) Montrer que $\|\ \|_{Lip,a}$ est une norme sur $\mathrm{Lip}\,(X)$.

b) Montrer que si b est un autre point de X, alors le norme $\|\ \|_{Lip,b}$ est équivalente à la norme $\|\ \|_{Lip,a}$.

c) On suppose que X est un espace vectoriel normé (et que d est la distance associée à la norme de X). Montrer que toute forme linéaire continue sur X est dans $\mathrm{Lip}\,(X)$, et que l'on a $\|\varphi\|_{Lip,0} = \|\varphi\|_{X^*}$ pour toute $\varphi \in X^*$.

3) On revient au cas d'un espace métrique (X, d) quelconque. Montrer que $\mathrm{Lip}\,(X)$ est complet pour n'importe quelle norme $\|f\|_{Lip,a}$.

Exercice 5.

Soit $\mathscr{C}^1([0,1])$ l'espace vectoriel (réel) des fonctions $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ continûment dérivables. On pose, pour $f \in \mathscr{C}^1([0,1])$: $\|f\| = \big([f(0)]^2 + \int_0^1 |f'(t)|^2\, dt\big)^{1/2}$.

1) Montrer que l'on définit ainsi une norme sur $\mathscr{C}^1([0,1])$.

2) Montrer que si la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge pour cette norme, alors elle converge uniformément sur $[0,1]$.

3) On pose $f_n(t) = t^n(1-t)$, $n \geqslant 1$. Calculer $\|f_n\|$.

Exercice 6.

1) Soit $\mathscr{C}_b(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}$ muni de la norme uniforme. On considère l'application linéaire $T\colon \mathscr{C}_b(\mathbb{R}) \to \mathscr{C}_b(\mathbb{R})$ définie par $(Tf)(x) = 3f(x) - 2f(x+4)$. Montrer que T est continue et calculer $\|T\|$.

2) On considère la forme linéaire $\varphi\colon c_0 \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{2^n}$ Montrer qu'elle est continue et calculer sa norme. Montrer que $\sup_{\|x\|_\infty \leqslant 1} |\varphi(x)|$ n'est pas atteint.

Exercice 7.

On identifie l'espace $M_d(\mathbb{R})$ des matrices réelles d'ordre d avec l'espace des applications linéaires (automatiquement continues) de $\mathbb{R}^d$ dans lui-même. Pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$, on note $\|\,.\,\|_{p,p}$ la norme sur $M_d(\mathbb{R})$ associée à la norme $\|\,.\,\|_p$ sur $\mathbb{R}^d$.

1) Montrer que si $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant d} \in M_d(\mathbb{R})$, alors $\|A\|_{1,1} = \max_{1\leqslant j\leqslant d} \sum_{i=1}^{d} |a_{i,j}|$.

2) Déterminer de même $\|A\|_{\infty,\infty}$ en fonction des coefficients de A.

3) Pour $A \in M_d(\mathbb{R})$, on note A^* la transposée de A. Montrer que $\|A\|_{2,2} = \sup\{\sqrt{\lambda}\,;\ \lambda$ valeur propre de $A^*A\}$ (*utiliser une base orthonormée de vecteurs propres de* A^*A).

Exercice 8.

Montrer que sur tout espace normé de dimension infinie, il existe des formes linéaires non continues (*on commencera par considérer une suite de vecteurs linéairement indépendants et on construira une forme linéaire non continue sur le sous-espace vectoriel qu'ils engendrent*).

Exercice 9.

Montrer qu'un espace vectoriel normé est complet si et seulement si toute *série absolument convergente*, c'est-à-dire telle que $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < +\infty$ (on dit aussi *série normalement convergente*) est convergente (*on montrera que de toute suite de Cauchy* $(u_n)_{n\geqslant 1}$, *on peut extraire une sous-suite* $(u_{n_k})_{k\geqslant 1}$ *telle que* $\sum_{k=1}^{\infty} \|u_{n_{k+1}} - u_{n_k}\| < +\infty$).

Exercice 10.

Soit X un espace de Banach, Y un espace vectoriel normé et $T\colon X \to Y$ une application linéaire continue. On suppose qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $\|T(x)\| \geqslant c\,\|x\|$ pour tout $x \in X$. Montrer que $\mathrm{im}\,(T)$ est fermée dans Y, et que T réalise un isomorphisme entre X et $\mathrm{im}\,(T)$.

Exercice 11.

Soit $(S, \mathscr{T}, m)$ un espace mesuré et $(f_n)_n$ une suite bornée dans $L^1(m)$: il existe un nombre $M > 0$ tel que $\|f_n\|_1 \leqslant M$ pour tout $n \geqslant 1$. On suppose que $(f_n)_n$ converge m-presque partout vers une fonction f.

1) Montrer que $f \in L^1(m)$.

2) Montrer que si $(f_n)_n$ converge pour la norme $\|\ \|_1$, c'est forcément vers f. Donner un exemple pour lequel $(f_n)_n$ ne converge pas pour la norme $\|\ \|_1$.

3) Montrer que, en utilisant le Théorème de convergence dominée, que :

$$\lim_{n\to\infty} \int_S \big(|f_n - f| - |f_n| + |f|\big)\, dm = 0\,.$$

4) Déduire de la question 3) que, si l'on suppose de plus que $\|f_n\|_1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|f\|_1$, alors $\|f_n - f\|_1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 12.

Soit E un espace vectoriel normé *réel*, F un sous-espace vectoriel fermé de E et $a \in E \setminus F$. On pose $d(a, F) = \inf\{\|a - x\|\,;\ x \in F\}$.

1) Montrer que si F est de dimension finie, il existe $x_0 \in F$ tel que $d(a, F) = \|a - x_0\|$ (*utiliser un argument de compacité*).

Soit φ une forme linéaire continue non nulle sur E et $a \in E$ tel que $\varphi(a) \neq 0$; on considère $F = \ker \varphi$.

2) Montrer que $\|\varphi\| \geqslant \dfrac{|\varphi(a)|}{d(a, \ker \varphi)}$ ·

3) a) Montrer que $\dfrac{|\varphi(u + ta)|}{\|u + ta\|} \leqslant \dfrac{|\varphi(a)|}{d(a, \ker \varphi)}$ pour tout $u \in \ker \varphi$ et tout $t \in \mathbb{R}^*$ (*on rappelle que* $E = \ker \varphi \oplus \mathbb{R}a$).

b) En déduire que $\|\varphi\| = \dfrac{|\varphi(a)|}{d(a, \ker \varphi)}$ ·

4) Montrer, en utilisant la question précédente, que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) il existe $u_0 \in \ker \varphi$ tel que $d(a, \ker \varphi) = \|a - u_0\|$;

(ii) il existe $x_0 \in E$ tel que $\|x_0\| = 1$ et $|\varphi(x_0)| = \|\varphi\|$.

(*Pour* (ii) $\Rightarrow$ (i), *écrire* $x_0 = v_0 + t_0 a$, *avec* $v_0 \in \ker \varphi$, *et montrer que* $|t_0|\, d(a, \ker \varphi) = 1$).

5) On prend $E = \mathscr{C}([0, 1])$, muni de la norme uniforme. On considère la forme linéaire $\varphi\colon E \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(f) = \displaystyle\int_0^{1/2} f(t)\, dt - \int_{1/2}^1 f(t)\, dt$, $f \in E$.

a) Montrer que φ est continue et calculer $\|\varphi\|$.

b) Montrer que si $|\varphi(f)| = 1$ avec $\|f\|_\infty = 1$, alors on doit avoir $f(t) = 1$ pour $0 \leqslant t \leqslant 1/2$ et $f(t) = -1$ pour $1/2 \leqslant t \leqslant 1$. Conclusion ?

Exercice 13 (*Base canonique de ℓ_p et c_0*).

On considère $E = \ell_p$, pour $1 \leqslant p < \infty$, ou $E = c_0$. On note $\mathbf{e}_n$, $n \geqslant 1$, l'élément de E dont la $n^{ème}$ coordonné vaut 1 et les autres valent 0. Montrer que pour tout $\mathbf{x} = (x_n)_{n \geqslant 1} \in E$, on a $\mathbf{x} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \mathbf{e}_n$, la série convergeant pour la norme de E.

On dit que $(\mathbf{e}_n)_{n \geqslant 1}$ est la *base canonique* de E.

Exercice 14 (*Dual des espaces ℓ_p et c_0*).

Montrer que toute forme linéaire continue φ sur $X = \ell_p$, $1 \leqslant p < \infty$, ou sur $X = c_0$, est de la forme $\varphi = \varphi_{\mathbf{b}}$, où $\varphi_{\mathbf{b}}(a_1, a_2, \ldots) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, avec $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^q = \|\mathbf{b}\|_q^q < +\infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ si $1 < p < \infty$, $q = 1$ si $X = c_0$, et $\sup_{n \geqslant 1} |b_n| = \|\mathbf{b}\|_\infty < +\infty$ si $X = \ell_1$. Montrer de plus qu'alors $\|\varphi\| = \|\mathbf{b}\|_q$ (*utiliser la base canonique* $(\mathbf{e}_n)_{n \geqslant 1}$ *de X : voir l'Exercice 13*).

Exercice 15 (*Espace normé quotient*).

On rappelle que si E est un espace vectoriel et N un sous-espace vectoriel de E, alors la relation définie par : $x \sim y$ si et seulement si $x - y \in N$, est une relation d'équivalence sur E, appelée *relation d'équivalence modulo* N, et que, en désignant par $\widetilde{x} = x + N$ la classe d'équivalence de x, on peut définir sur E/N une addition par $\widetilde{x} + \widetilde{y} = (x+y)\widetilde{}$ et une multiplication par les scalaires en posant $\alpha\,\widetilde{x} = \widetilde{\alpha x}$, faisant de E/N un espace vectoriel, appelé *espace vectoriel quotient* de E par N.

1) Soit $E = (E, \| \,.\, \|)$ un espace vectoriel normé, et N un sous-espace fermé de E.

a) Montrer que si $\widetilde{x} = x + N$ est la classe d'équivalence de x *modulo* N, et que si l'on pose $\|\widetilde{x}\|_\sim = \inf\{\|y\|\,;\ x - y \in N\}$, alors $\| \,.\, \|_\sim$ est une norme sur E/N, et que la surjection canonique $q\colon E \to E/N$ est continue.

b) Montrer que l'image par q de la boule *ouverte* de centre 0 et de rayon $r > 0$ est la boule ouverte de centre $\widetilde{0}$ et de rayon r (est-ce vrai pour les boules fermées ?). En déduire que $\|q\| = 1$, que l'image par q de tout ouvert de E est ouvert dans E/N, et qu'une partie O de E/N est ouverte si et seulement si $q^{-1}(O)$ est ouvert dans E.

c) Montrer que si X est un espace topologique et $f\colon E/N \to X$ une application, alors f est continue si et seulement si $f \circ q\colon E \to X$ l'est.

d) Montrer que E/N est complet si E l'est.

2) Montrer que, pour $x \in \ell_\infty$, on a $\|q(x)\|_{\ell_\infty/c_0} = \limsup_{n\to\infty} |x_n|$.

On rappelle que si E et F sont deux espaces vectoriels (sur le même corps), et si $T\colon E \to F$ est une application linéaire, alors on peut définir une application linéaire $\widetilde{T}\colon E/\ker T \to F$ en posant $\widetilde{T}(\widetilde{x}) = T(x)$, et que $E/\ker T$ est de dimension finie si T est de rang fini (c'est-à-dire que $T(E)$ est de dimension finie).

3) Soit E et F deux espaces normés et $T\colon E \to F$ une application linéaire continue. Montrer que $\widetilde{T}$ est continue.

4) Soit E et F deux espaces normés et $T\colon E \to F$ une application linéaire de rang fini telle que $\ker T$ soit fermé. Montrer que T est continue et $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$.

5) Soit c_0 l'espace des suites $\mathbf{a} = (a_n)_{n\geqslant 1}$ de nombres réels qui convergent vers 0, muni de la norme $\|\mathbf{a}\|_\infty = \sup_{n\geqslant 1} |a_n|$. On note $\mathbf{e}_n$ l'élément de c_0 qui vaut 1 au $n^{\text{ème}}$ rang et 0 ailleurs.

Montrer qu'une forme linéaire $\varphi\colon c_0 \to \mathbb{R}$ est continue si et seulement si on peut écrire $\varphi(a_1, a_2, \ldots) = \sum_{n=1}^\infty b_n a_n$, avec $\sum_{n=1}^\infty |b_n| < +\infty$ (voir Exercice 14).

6) Soit $\varphi\colon c_0 \to \mathbb{R}$ une forme linéaire discontinue (*on en donnera un exemple*). On définit l'application linéaire $T\colon c_0 \to c_0$ par $T(a_1, a_2, \ldots) = \big(\varphi(\mathbf{a}), a_1, a_2, \ldots\big)$. Montrer que $\ker T$ est fermé, mais que T n'est pas continue.

Exercice 16 (*suite de l'Exercice 15*).

Les deux questions suivantes sont indépendantes l'une de l'autre.

1) Soit F et G deux sous-espaces vectoriels fermés de E. On note $q\colon E \to E/F$ la surjection canonique. On suppose G de dimension finie. Montrer que $q(G)$ est fermé dans E/F et en déduire que $F + G$ est fermé dans E.

2) On suppose que la boule unité (fermée) de E peut être recouverte par un nombre fini n de boules ouvertes de rayon $1/2$. Soit $x_1, \dots, x_n$ les centres de ces boules et $F = \text{vect}\,(x_1, \dots, x_n)$.

a) Montrer que $q[B_E(0,1)] \subseteq B_{E/F}(0,1/2)$, $q\colon E \to E/F$ étant la surjection canonique.

b) En déduire que $E/F = \{\widetilde{0}\}$ (*utiliser l'Exercice 15*). Qu'en conclut-on ?

Exercice 17 (*Jauge d'un convexe*).

Soit E un espace vectoriel réel. On dit qu'une partie K de E est *absorbante* si pour tout $x \in E$, il existe un $t > 0$ tel que le segment $[0, tx]$ soit contenu dans K.

1) Montrer que si K est convexe contenant 0, alors K est absorbant si et seulement si $E = \bigcup_{\lambda > 0} \lambda K$.

2) Montrer que si E est un espace vectoriel normé, tout voisinage de 0 est absorbant.

Soit K une partie de E convexe, non vide, et symétrique par rapport à 0 et absorbante. On pose $j_K(x) = \inf\{\lambda > 0\,;\ x \in \lambda K\}$. On dit que c'est la *jauge*, ou *fonctionnelle de Minkowski* de K.

3) a) Montrer que j_K est une semi-norme sur E.

b) Montrer que $\{x \in E\,;\ j_K(x) < 1\} \subseteq K \subseteq \{x \in E\,;\ j_K(x) \leqslant 1\}$.

c) Montrer que si E est normé et K est bornée dans E (et vérifiant les précédentes propriétés), alors j_K est une norme sur E.

4) Soit E un espace normé et K une partie fermée bornée, convexe, symétrique par rapport à 0, et telle que 0 soit dans l'intérieur de K. Montrer que j_K est une norme sur E, équivalente à la norme de E, et que K est la boule unité de (E, j_K).

Exercice 18 (*Propriété de Schur de ℓ_1*).

Soit $(\mathbf{x}_n)_{n\geqslant 1}$ une suite dans ℓ_1. On suppose, en écrivant $\mathbf{x}_n = (x_{n,k})_{k\geqslant 1}$, que $\sum_{k=1}^{\infty} b_k x_{n,k} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ pour toute suite bornée $(b_k)_{k\geqslant 1}$.

On veut montrer que $\|\mathbf{x}_n\|_1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

1) On suppose qu'il existe $a > 0$ tel que $\|\mathbf{x}_n\|_1 \geqslant a$ pour tout $n \geqslant 1$.

a) Montrer qu'il existe deux suites d'entiers strictement croissantes $(n_j)_{j\geqslant 1}$ et $(k_j)_{j\geqslant 1}$ telles que, pour tout $j \geqslant 1$, on ait :

$$\sum_{k=k_j+1}^{\infty} |x_{n_j,k}| \leqslant \frac{a}{5} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{k_j} |x_{n_{j+1},k}| \leqslant \frac{a}{5}$$

(c'est ce qu'on appelle la *méthode de la bosse glissante*).

b) Montrer qu'il existe une suite bornée $(b_k)_{k\geqslant 1}$ telle que $\sum_{k=1}^{\infty} b_k x_{n_j,k} \geqslant a/5$ pour tout $j \geqslant 1$.

2) Conclure.

Remarque. Une autre preuve est proposée dans l'Exercice 14 du Chapitre VIII.

Exercice 19 (*Non séparabilité de ℓ_∞*).

On veut montrer que ℓ_∞ n'est pas séparable, c'est-à-dire qu'il ne contient aucune partie dénombrable qui soit dense.

Supposons qu'une telle partie $\Delta = \{v_n\,;\ n \geq 1\}$ existe. Soit x une suite ne prenant que les valeurs 0 ou 1. On note $\omega_x = B^\circ(x, 1/2)$ la boule ouverte de ℓ_∞ de centre x et de rayon $1/2$.

1) Montrer que si x et x' sont deux suites ne prenant que les valeurs 0 ou 1, alors $\omega_x \cap \omega_{x'} = \emptyset$ pour $x \neq x'$, .

2) Montrer que pour tout $x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$, il existe un entier $n(x)$ tel que $v_{n(x)} \in \omega_x$. Justifier que pour $x \neq x'$, on a $n(x) \neq n(x')$.

3) Montrer que ce n'est pas possible et conclure.

Exercice 20 (*Une preuve quantitative du Théorème de Riesz*).

1) Montrer que si F est un espace vectoriel normé réel de dimension d, et si $0 < \varepsilon < 1$, il faut au moins $(1/\varepsilon)^d$ boules (fermées) de rayon ε pour recouvrir la boule unité B_F de F (*majorer le volume, i.e. la mesure de Lebesgue, F étant identifié à $\mathbb{R}^d$, de B_F*).

2) En déduire que si la boule unité d'un espace vectoriel normé réel E peut être recouverte par N boules fermées de rayon ε $(0 < \varepsilon < 1)$, alors E est de dimension finie et $\dim E \leqslant \log N / \log(1/\varepsilon)$.

3) Soit E un espace normé réel de dimension finie d, que l'on peut considérer comme $\mathbb{R}^d$ muni d'une norme $\|\,.\,\|$. Pour $0 < \varepsilon < 1$, on note $N(\varepsilon)$ le plus petit nombre de boules fermées de rayon ε nécessaires pour recouvrir la boule unité B_E de E.

a) Soit $x_1, \ldots, x_k$ des points de B_E tels que $\|x_i - x_j\| > \varepsilon$ pour tout $i \neq j$. Montrer que $k \leqslant \left(1 + \frac{2}{\varepsilon}\right)^d$ (*utiliser le fait que les boules $B(x_i, \varepsilon/2)$ sont deux-à-deux disjointes et contenues dans $B\big(0, 1 + \frac{\varepsilon}{2}\big)$*).

b) En déduire que $N(\varepsilon) \leqslant \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^d$ (*prendre k maximal*).

c) Montrer que $\dim E = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)}$.

Exercice 21.

Soit $(P_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de polynômes de degré au plus 2013. On suppose que l'on a $\int_0^1 |P_n(t)|\, dt \leqslant 33$ pour tout $n \geqslant 1$. Montrer que $(P_n)_{n \geqslant 1}$ possède une sous-suite qui converge uniformément sur l'intervalle $[\pi^{1874}, \pi^{1932}]$.

Exercice 22 (*Compacité dans $L^p(\mathbb{R})$*).

On rappelle qu'une partie A d'un espace topologique est relativement compacte si son adhérence est compacte et que dans un espace métrique complet, cela équivaut à dire que A est précompacte, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, A peut-être recouverte par un nombre fini de boules de rayon $\leqslant \varepsilon$ centrées sur A. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, on note $f_t(x) = f(x - t)$, pour $t, x \in \mathbb{R}$.

Soit $1 \leqslant p < \infty$, et A une partie bornée de $L^p(\mathbb{R})$.

1) Montrer que si A est précompacte alors :

$$(i)\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists R_\varepsilon > 0 : \quad \int_{|x| > R_\varepsilon} |f(x)|^p\, dx \leqslant \varepsilon^p, \quad \forall f \in A\,;$$

$$(ii)\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_\varepsilon > 0 : \quad \|f_t - f\|_p \leqslant \varepsilon, \quad \text{pour } |t| \leqslant \delta_\varepsilon, \quad \forall f \in A.$$

2) Réciproquement, on suppose les conditions (i) et (ii) satisfaites par A. Pour tout $\varepsilon > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $[\varphi_\varepsilon(f)](x) = \frac{1}{\delta_\varepsilon} \int_x^{x+\delta_\varepsilon} f(u)\,du$.

a) Montrer que pour toute $f \in L^p(\mathbb{R})$, la fonction $\varphi_\varepsilon(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

b) On fixe $R > 0$. Montrer que $\{\varphi_\varepsilon(f)_{|[-R,R]}\,;\ f \in A\}$ est précompacte dans $\mathscr{C}([-R,R])$ (*utiliser le* Théorème d'Ascoli *: voir Théorème VII.4.1 à l'Annexe du Chapitre VII*).

c) Montrer $\|f - \varphi_\varepsilon(f)\|_p \leqslant \varepsilon$ pour toute $f \in A$.

d) En déduire que A est précompacte dans $L^p(\mathbb{R})$ (*utiliser b) avec* $R = R_\varepsilon$).

Exercice 23 (*Inégalité de Hardy*).

Soit p un nombre réel tel que $1 < p < +\infty$ et soit q son conjugué : $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

1) Montrer que si $f \in L^p(\mathbb{R}_+^*)$, la formule

$$(Tf)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\,dt$$

a un sens pour tout $x > 0$, et que la fonction Tf ainsi définie est continue sur $]0, +\infty[$ et vérifie $|(Tf)(x)| \leqslant x^{-1/p}\|f\|_p$ pour tout $x > 0$.

2) Si $f, g \in L^p(\mathbb{R}_+^*)$, montrer que $|(Tg)(x) - (Tf)(x)| \leqslant x^{-1/p}\|g - f\|_p$ pour tout $x > 0$.

3) Soit g une fonction continue à support compact *contenu dans* $]0, +\infty[$. On pose $G(x) = \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^x |g(t)|\,dt$.

a) Montrer que G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, qu'elle est nulle au voisinage de 0 et que $0 \leqslant G(x) \leqslant (1/x)\|g\|_1$.

En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,[G(x)]^p = 0$ et que $\int_0^{+\infty} G(x)^p\,dx < +\infty$.

b) Montrer que l'on a :

$$\int_0^{+\infty} x\,G'(x)\,G(x)^{p-1}\,dx + \int_0^{+\infty} G(x)^p\,dx = \int_0^{+\infty} |g(x)|\,G(x)^{p-1}\,dx\,,$$

et en déduire, en intégrant par parties la première intégrale, que :

$$\frac{p-1}{p} \int_0^{+\infty} G(x)^p\,dx = \int_0^{+\infty} |g(x)|\,G(x)^{p-1}\,dx\,.$$

c) En utilisant l'inégalité de Hölder pour l'intégrale de droite, en déduire que $\|G\|_p \leqslant \frac{p}{p-1}\|g\|_p$, puis que $\|Tg\|_p \leqslant \frac{p}{p-1}\|g\|_p$.

4) En considérant $L^p(\mathbb{R}_+^*)$ comme sous-espace de $L^p(\mathbb{R})$, montrer que l'espace $\mathcal{K}(\mathbb{R}_+^*)$ des fonctions continues à support compact contenu dans $]0, +\infty[$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}_+^*)$.

5) En utilisant 4) et 2), puis 3)c), et en utilisant le lemme de Fatou, en déduire l'*inégalité de Hardy* :

$$\|Tf\|_p \leqslant \frac{p}{p-1}\|f\|_p\,.$$

6) Montrer que $p/(p-1)$ est la meilleure constante possible.

7) Pour $p = 1$, est-il vrai que Tf est intégrable si f l'est ?

Exercice 24 (*Points extrémaux*).

Soit E un espace vectoriel. On rappelle qu'une partie C de E est dite *convexe* si le segment $[x, y] = \{tx + (1-t)y\,;\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ est contenu dans C pour tous $x, y \in C$. Si C est convexe, on dit qu'un point $e \in C$ est un *point extrémal* de C s'il n'existe aucun segment $[x, y]$ de longueur strictement positive contenu dans C tel que $e \in]x, y[$. Autrement dit, $e \in C$ est extrémal si et seulement si l'égalité $e = tx + (1-t)y$, avec $0 < t < 1$ et $x, y \in C$, entraîne $x = y = e$ ($t = 1/2$ suffit).

1) Déterminer les points extrémaux de la boule unité de $(\mathbb{R}^2, \|\,.\,\|_\infty)$.

2) Montrer que tout point de la sphère unité d'un espace de Hilbert est extrémal dans la boule unité.

3) Soit E un espace normé. Montrer que si x_0 est dans l'intérieur d'un convexe $C \subseteq E$, ce n'est pas un point extrémal de ce convexe.

4) Montrer que la boule unité de c_0 ne possède aucun point extrémal.

5) Montrer que la boule unité de $L^1(0,1)$ ne possède aucun point extrémal (*si* $\|f\|_1 = 1$, *on pourra montrer qu'il existe* $x_0 \in [0,1]$ *tel que* $\int_0^{x_0} |f(t)|\,dt = 1/2$).

Remarque. Voir aussi l'Exercice 9 du Chapitre V et l'Exercice 28 du Chapitre VIII.

Exercice 25 (*Théorème de Mazur-Ulam*).

1) Soit X et Y deux espaces vectoriels normés **réels** et $T\colon X \to Y$ une application continue telle que $T(u+v) = T(u) + T(v)$ pour tous $u, v \in X$. Montrer que T est linéaire (*montrer que* $T(\lambda u) = \lambda T(u)$ *successivement pour* $\lambda \in \mathbb{Z}$, $\lambda \in \mathbb{Q}$, *puis* $\lambda \in \mathbb{R}$).

On dit que T est une *isométrie* si elle conserve les distances : $\|T(u) - T(v)\| = \|u - v\|$ pour tous $u, v \in X$.

2) Soit $T\colon \ell_\infty \to \ell_\infty$ définie par $T(x_1, x_2, \ldots) = (|x_1|, x_1, x_2, \ldots)$. Montrer que T est une isométrie non linéaire.

On désire maintenant montrer le résultat suivant : si $T\colon X \to Y$ est une isométrie **surjective** entre les espaces normés X et Y, telle que $T(0) = 0$, alors T est linéaire (*Théorème de Mazur-Ulam*).

3) Soit E un espace normé et $a, b \in E$. On définit par récurrence une suite de parties $K_n(a,b)$ de E en posant $K_0(a,b) = \{u \in E\,;\ \|u - a\| = \|b - a\|/2 = \|u - b\|\}$ et $K_{n+1}(a,b) = \{u \in K_n(a,b)\,;\ K_n(a,b) \subseteq B(u, d_n/2)\}$, où $d_n = \operatorname{diam}[K_n(a,b)]$.

a) Montrer que chaque $K_n(a,b)$ est symétrique par rapport à $(a+b)/2$, puis qu'il contient ce point (*considérer* $K_0' = K_0(a,b) - \frac{a+b}{2}$, *puis raisonner par récurrence*).

b) Montrer que $\operatorname{diam}[K_{n+1}(a,b)] \leqslant \operatorname{diam}[K_n(a,b)]/2$.

c) En déduire que $\bigcap_{n \geqslant 0} K_n(a,b) = \{(a+b)/2\}$.

4) Montrer $T\big(\frac{x+y}{2}\big) = \frac{T(x)+T(y)}{2}$ pour tous $x, y \in X$.

5) En déduire que T est linéaire.

Remarque. Le résultat n'est pas vrai pour les espaces de Banach *complexes* : J. Bourgain a construit en 1986 un espace de Banach complexe X tel que X et $\overline{X}$ ne soient pas $\mathbb{C}$-isomorphes, où $\overline{X}$ est l'espace vectoriel obtenu à partir de X en remplaçant la multiplication scalaire αx par $\overline{\alpha} x$, et qui est clairement $\mathbb{R}$-isométrique à X.

Chapitre II

ESPACES DE HILBERT

II.1. Généralités

II.1.1. Définitions

Définition II.1.1. *Soit H un espace vectoriel réel, resp. complexe. On appelle* **produit scalaire** *sur H toute* forme bilinéaire symétrique, *resp.* hermitienne, *qui est* définie positive.

On notera $(x \mid y)$ le produit scalaire des vecteurs $x, y \in H$.

Cela signifie que l'application :

$$\begin{array}{rccc} (\,.\mid .\,): & H \times H & \longrightarrow & \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \\ & (x, y) & \longmapsto & (x \mid y) \end{array}$$

vérifie :

1) pour tout $y \in H$, l'application $x \in H \mapsto (x \mid y) \in \mathbb{K}$ est une forme linéaire ;

2) pour tous $x, y \in H$, on a :

$$\begin{cases} (y \mid x) = (x \mid y) & \text{si l'espace est réel} \\ (y \mid x) = \overline{(x \mid y)} & \text{si l'espace est complexe ;} \end{cases}$$

3) pour tout $x \in H$, on a $(x \mid x) \geqslant 0$ et $(x \mid x) = 0$ si et seulement si $x = 0$.

Remarque. Notons que dans le cas complexe, on a donc, pour $x, y \in H$ et $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\boxed{(x \mid \lambda y) = \bar{\lambda}\,(x \mid y)}\,.$$

Définition II.1.2. *Si l'espace vectoriel H est muni d'un produit scalaire, on dit que c'est un* **espace préhilbertien**.

Exemples.

1) a) Le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$ est défini par :

$$\boxed{(x \mid y) = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n}$$

pour $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Le produit scalaire usuel de $\mathbb{C}^n$ est défini par :

$$\boxed{(x \mid y) = x_1\overline{y}_1 + \cdots + x_n\overline{y}_n}$$

pour $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{C}^n$.

b) On peut définir d'autres produits scalaires sur $\mathbb{K}^n$ en se donnant des *poids*, c'est-à-dire des nombres $w_1, \ldots, w_n > 0$, et en posant :

$$\begin{cases} (x \mid y) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} w_k x_k y_k\,, & \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{R}\,; \\ (x \mid y) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} w_k x_k \overline{y}_k\,, & \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{C}\,. \end{cases}$$

2) Si $(S, \mathscr{T}, m)$ est un espace mesuré, on munit $H = L^2(m)$ d'un produit scalaire (que l'on qualifiera de *naturel*) en posant, pour $f, g \in L^2(m)$:

$$\boxed{(f \mid g) = \int_S fg\, dm} \quad \text{dans le cas réel,}$$

et :

$$\boxed{(f \mid g) = \int_S f\overline{g}\, dm} \quad \text{dans le cas complexe.}$$

En particulier, sur ℓ_2, on a le produit scalaire naturel défini par :

$$\boxed{(x \mid y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n} \quad \text{dans le cas réel,}$$

et :

$$\boxed{(x \mid y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y}_n} \quad \text{dans le cas complexe.}$$

pour $x = (x_n)_{n\geqslant 1}, y = (y_n)_{n\geqslant 1} \in \ell_2$.

II.1.2. Propriétés élémentaires

Notation. Puisque $(x \mid x) \geqslant 0$, on peut poser :

$$\boxed{\|x\| = \sqrt{(x \mid x)}}\,.$$

Proposition II.1.3. *Pour tous $x, y \in H$:*

a) $\boxed{\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,(x \mid y)}$ *(cas réel)* ;

b) $\boxed{\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(x \mid y)}$ *(cas complexe).*

Preuve. Il suffit de développer :

$$\|x+y\|^2 = (x+y \mid x+y) = (x \mid x) + (y \mid y) + (x \mid y) + (y \mid x)\,,$$

et utiliser le fait que $(x \mid y) + (y \mid x) = (x \mid y) + \overline{(x \mid y)} = 2(x \mid y)$ dans le cas réel, et $= 2\,\mathrm{Re}\,(x \mid y)$ dans le cas complexe. □

Théorème II.1.4 (inégalité de Cauchy-Schwarz). *Pour tous $x, y \in H$:*

$$\boxed{|(x \mid y)| \leqslant \|x\|\,\|y\|}\,.$$

Exemple. Dans le cas où $H = L^2(m)$, elle est équivalente à l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les intégrales :

$$\left| \int_S fg\,dm \right| \leqslant \int_S |fg|\,dm \leqslant \left(\int_S |f|^2\,dm \right)^{1/2} \left(\int_S |g|^2\,dm \right)^{1/2}$$

Preuve. On ne la fera que dans le cas complexe ; c'est un peu plus facile dans le cas réel (on considère le signe du produit scalaire au lieu de son argument). En fait la preuve est valable même pour les *semi-produits scalaires*, c'est-à-dire si la forme bilinéaire symétrique (resp. hermitienne) est seulement positive (c'est-à-dire que l'on ne demande pas que $(x \mid x) = 0$ entraîne $x = 0$).

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$(\mathrm{e}^{-i\theta} x \mid y) = \mathrm{e}^{-i\theta} (x \mid y) \in \mathbb{R}_+$$

(si $(x \mid y) \neq 0$, θ est l'argument du nombre complexe $(x \mid y)$). Posons $x' = \mathrm{e}^{-i\theta} x$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a, par la Proposition II.1.3 :

$$\|x'\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(x' \mid y)\,t + \|y\|^2 t^2 = \|x' + ty\|^2 \geqslant 0.$$

Si $\|y\| = 0$, on a $\|x'\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(x' \mid y)\,t \geqslant 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$; cela n'est possible que si $\mathrm{Re}\,(x' \mid y) = 0$. Si $\|y\| \neq 0$, on a un trinôme du second degré en t, qui est toujours positif ou nul ; son discriminant doit être négatif ou nul :

$$\mathrm{Re}\,(x' \mid y) - \|x'\|^2 \|y\|^2 \leqslant 0.$$

Comme :

$$(x' \mid y) = \mathrm{e}^{-i\theta} (x \mid y) = |(x \mid y)| \in \mathbb{R}_+\,,$$

on a :

$$\mathrm{Re}\,(x' \mid y) = (x' \mid y) = |(x \mid y)|.$$

Comme, de plus, $\|x'\| = \|x\|$, on obtient l'inégalité annoncée. □

Corollaire II.1.5. *L'expression* $\|x\| = \sqrt{(x \mid x)}$ *définit une* <u>*norme*</u> *sur* H, *appelée* **norme hilbertienne**.

Preuve. Il suffit de vérifier l'inégalité triangulaire :

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(x \mid y) \leqslant \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\|x\|\,\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2\,,$$

grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz. □

Corollaire II.1.6. *Pour chaque* $y \in H$, *la forme linéaire :*

$$\boxed{\begin{array}{rccc} \Phi_y : & H & \longrightarrow & \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \\ & x & \longmapsto & (x \mid y) \end{array}}$$

est <u>*continue*</u>. *Sa norme dans* H^* *est* $\boxed{\|\Phi_y\| = \|y\|}$.

Preuve. On peut supposer $y \neq 0$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz dit que :

$$|\Phi_y(x)| = |(x \mid y)| \leqslant \|y\|\,\|x\|\,;$$

cela prouve que Φ_y est continue et que $\|\Phi_y\| \leqslant \|y\|$.

Comme $\Phi_y(y) = \|y\|^2$, on a $\|\Phi_y\| \geqslant \dfrac{|\Phi_y(y)|}{\|y\|} = \|y\|$. □

Remarque importante. *Cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz.* Lorsque l'on regarde la preuve de l'inégalité (dans le cas d'un *produit scalaire*), on voit que l'on a $|(x \mid y)| = \|x\|\,\|y\|$ si et seulement si $y = 0$ ou bien si $y \neq 0$ et le discriminant du trinôme du second degré en t est nul ; cela signifie que ce trinôme possède une racine (double) : il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\|x' + t_0 y\| = 0$; autrement dit $\mathrm{e}^{-i\theta}x + t_0 y = 0$: les vecteurs x et y sont **linéairement liés**.

Inversement, si x et y sont linéairement dépendants, il est clair que l'on a égalité.

II.1.3. Orthogonalité

Définition II.1.7. *On dit que deux vecteurs* x *et* y *d'un espace préhilbertien* H *sont* orthogonaux *si* $(x \mid y) = 0$. *On note* $\boxed{x \perp y}$.

Exemple. Dans $H = \mathbb{R}^2$, pour le produit scalaire usuel, on a $(-1,1) \perp (1,1)$.

Notons que la relation d'orthogonalité est symétrique : si $x \perp y$, alors $y \perp x$ (car $(y \mid x) = \overline{(x \mid y)}$).

D'après la Proposition II.1.3, on a, **dans le cas réel** :

$$\boxed{x \perp y \quad \Longleftrightarrow \quad \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2}\,,$$

ce que l'on peut appeler le "*Théorème de Pythagore*".

Dans le **cas complexe** :

$$x \perp y \quad \Longleftrightarrow \quad \Big[\ \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad \text{et} \quad \|x+iy\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2\ \Big].$$

En effet, pour tout nombre complexe a, on a $\mathrm{Im}\,(a) = \mathrm{Re}\,(-ia)$ et par conséquent $\mathrm{Im}\,(x \mid y) = \mathrm{Re}\,(x \mid iy)$.

Des parties $A, B \subseteq H$ sont dites **orthogonales** si tout $x \in A$ est orthogonal à tout $y \in B$:

$$x \perp y\,, \qquad \forall x \in A,\ \forall y \in B.$$

On dit aussi que l'une est orthogonale à l'autre.

Définition II.1.8. *L'***orthogonal** *d'une partie $A \subseteq H$ est l'ensemble :*

$$\boxed{A^\perp = \{y \in H\,;\ y \perp x\,,\ \forall x \in A\}}.$$

On a $B^\perp \subseteq A^\perp$ si $A \subseteq B$; donc en particulier $\left(\overline{A}\right)^\perp \subseteq A^\perp$; mais la continuité des applications $\Phi_y\colon x \mapsto (x \mid y)$ entraîne que $\boxed{\left(\overline{A}\right)^\perp = A^\perp}$.

Proposition II.1.9. *Pour toute partie A de H, $A^\perp$ est orthogonal à A ; c'est la plus grande partie orthogonale à A.*

De plus $A^\perp$ est un <u>sous-espace vectoriel</u> **fermé** *de H.*

Preuve. Le début est clair. Pour le reste, remarquons que :

$$\boxed{A^\perp = \bigcap_{x \in A} \ker \Phi_x}$$

et que chaque sous-espace vectoriel $\ker \Phi_x = \Phi_x^{-1}(\{0\})$ est fermé puisque Φ_x est continue. □

II.1.4. Espaces de Hilbert

Définition II.1.10. *Si un espace préhilbertien est* complet, *pour sa norme hilbertienne, on dit que c'est un* **espace de Hilbert**.

C'est donc un cas particulier d'espace de Banach.

Exemples. 1) Tout espace préhilbertien de dimension finie est un espace de Hilbert. Lorsque le corps de base est réel, on dit que c'est un *espace euclidien*, et que c'est un *espace hermitien* lorsque le corps de base est complexe.

2) Pour toute mesure positive m, $\boxed{L^2(m) \text{ est un espace de Hilbert}}$, en vertu du Théorème de Riesz-Fisher, puisque la norme $\|\,.\,\|_2$:

$$\|f\|_2 = \left(\int_S |f(t)|^2\, dm(t)\right)^{1/2}$$

est la norme hilbertienne associée au produit scalaire usuel :

$$(f \mid g) = \int_S f(t)\overline{g(t)}\, dm(t).$$

En particulier, $\boxed{\ell_2 \text{ est un espace de Hilbert}}$.

II.2. Le Théorème de projection et ses conséquences

II.2.1. Le Théorème de projection

C'est grâce à ce théorème que l'on obtient toutes les "*bonnes*" propriétés des espaces de Hilbert.

Rappelons d'abord qu'une partie C d'un espace vectoriel est dite **convexe** si le segment $[x,y]$ est contenu dans C dès lors que $x, y \in C$:

$$x, y \in C \quad \Longrightarrow \quad [x,y] \subseteq C,$$

où $[x,y] = \{tx + (1-t)y\,;\ t \in [0,1]\}$.

Tout sous-espace vectoriel est convexe; toute boule est convexe.

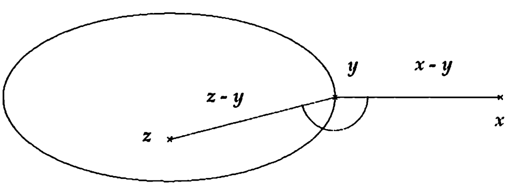
Théorème II.2.1 (Théorème de projection). *Soit H un espace de* **Hilbert** *et soit C une partie* **convexe** *et* **fermée**, *non vide, de H. Alors, pour tout $x \in H$, il existe un unique $y \in C$ tel que :*

$$\|x - y\| = \operatorname{dist}(x, C).$$

On dit que $y = P_C(x)$ est la projection de x sur C. *Il est caractérisé par la propriété :*

$$y \in C \quad \textit{et} \quad \operatorname{Re}(x - y \mid z - y) \leqslant 0\,,\ \forall z \in C. \tag{$*$}$$

Dans le cas réel, l'inégalité dans la caractérisation $(*)$ signifie que l'angle $\alpha = \widehat{(x-y, z-y)}$ est obtus.



Notons que la complétude de H n'est pas absolument indispensable : on peut la supprimer, mais en supposant que c'est C qui est complet.

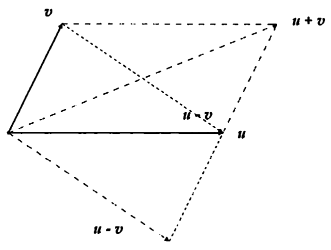
Preuve.

1) *Existence.* On aura besoin du lemme suivant, dont la preuve est immédiate, avec la Proposition II.1.3.

Lemme II.2.2 (identité du parallélogramme). *Pour tous $u, v \in H$:*

$$\boxed{\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\big(\|u\|^2 + \|v\|^2\big)}\,.$$

Cela signifie que la somme des carrés des diagonales d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés des quatre côtés.



Soit $d = \operatorname{dist}(x, C) = \inf_{z \in C} \|x - z\|$.

Notons que si $d = 0$, alors $x \in C$ (car C est fermé), et $y = x$ est l'unique point de C tel que $\|x - y\| = d$.

Pour tout $n \geqslant 1$, il existe $z_n \in C$ tel que :

$$\|x - z_n\|^2 \leqslant d^2 + \frac{1}{n}\cdot$$

Appliquons alors, pour $n, p \geqslant 1$, l'identité du parallélogramme à $u = x - z_n$ et $v = x - z_p$; on obtient :

$$4\left\|x - \frac{z_n + z_p}{2}\right\|^2 + \|z_n - z_p\|^2 = 2\big(\|x - z_n\|^2 + \|x - z_p\|^2\big)\,.$$

Mais, C étant *convexe*, on a $\dfrac{z_n + z_p}{2} \in C$; donc :

$$\left\|x - \frac{z_n + z_p}{2}\right\| \geqslant d\,;$$

de sorte que l'on obtient :

$$\|z_n - z_p\|^2 \leqslant 2\left(d^2 + \frac{1}{n} + d^2 + \frac{1}{p}\right) - 4d^2 = 2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{p}\right)\cdot$$

La suite $(z_n)_n$ est par conséquent une suite de Cauchy. Comme H est complet, elle converge donc vers un élément $y \in H$. Mais comme C est fermé, on a en fait, puisque les z_n sont dans C, $y \in C$.

De plus, le fait que $\|x - z_n\|^2 \leqslant d^2 + 1/n$ entraîne, en passant à la limite, que $\|x - y\| \leqslant d$. On a donc $\|x - y\| = d$, puisque $y \in C$.

2) *Unicité.* Si $\|x - y_1\| = \|x - y_2\| = d$, avec $y_1, y_2 \in C$, alors, comme ci-dessus, l'identité du parallélogramme donne :

$$\begin{aligned} 4d^2 + \|y_1 - y_2\|^2 &\leqslant 4\left\|x - \frac{y_1 + y_2}{2}\right\|^2 + \|y_1 - y_2\|^2 \\ &= 2\left(\|x - y_1\|^2 + \|x - y_2\|^2\right) = 2\left(d^2 + d^2\right); \end{aligned}$$

d'où $\|y_1 - y_2\|^2 \leqslant 0$, ce qui n'est possible que si $y_1 = y_2$.

3) *Preuve de* $(*)$.

a) Si $z \in C$, on a $(1-t)y + tz \in C$ pour $0 \leqslant t \leqslant 1$, par la convexité de C ; donc :

$$\|x - (1-t)y - tz\|^2 \geqslant \|x - y\|^2 ,$$

soit en développant $\|x-(1-t)y-tz\|^2 = \|(x-y)+t(y-z)\|^2$ avec la Proposition II.1.3 :

$$t^2 \|y - z\|^2 + 2t \operatorname{Re}(x - y \mid y - z) \geqslant 0.$$

Pour $t \neq 0$, divisons par t, puis faisons ensuite tendre t vers 0 ; il vient $\operatorname{Re}(x - y \mid y - z) \geqslant 0$, soit :

$$\operatorname{Re}(x - y \mid z - y) \leqslant 0 .$$

b) Réciproquement, si y vérifie $(*)$, on a, pour tout $z \in C$:

$$\begin{aligned}\|x - z\|^2 &= \|(x - y + (y - z))\|^2 = \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 + 2\operatorname{Re}(x - y \mid y - z) \\ &= \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 - 2\operatorname{Re}(x - y \mid z - y) \geqslant \|x - y\|^2 ;\end{aligned}$$

donc $y = P_C(x)$, par unicité. □

II.2.2. Conséquences

Proposition II.2.3. *L'application $P_C \colon H \to C$ est continue ; plus précisément, on a, pour tous $x_1, x_2 \in H$:*

$$\|P_C(x_1) - P_C(x_2)\| \leqslant \|x_1 - x_2\| .$$

Preuve. Posons $y_1 = P_C(x_1)$ et $y_2 = P_C(x_2)$; la condition $(*)$ donne :

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(x_1 - y_1 \mid z - y_1) \leqslant 0 & \forall z \in C; \\ \operatorname{Re}(x_2 - y_2 \mid z' - y_2) \leqslant 0 & \forall z' \in C. \end{cases}$$

En prenant $z = y_2$ et $z' = y_1$, et en additionnant, il vient :

$$\operatorname{Re}\big([x_1 - y_1] - [x_2 - y_2] \mid y_2 - y_1\big) \leqslant 0.$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned}\|y_1 - y_2\|^2 &= \operatorname{Re}\|y_1 - y_2\|^2 = \operatorname{Re}\big([y_2 - x_2] + [x_2 - x_1] + [x_1 - y_1] \mid y_2 - y_1\big) \\ &= \operatorname{Re}\big([x_1 - y_1] - [x_2 - y_2] \mid y_2 - y_1\big) + \operatorname{Re}(x_2 - x_1 \mid y_2 - y_1) \\ &\leqslant \operatorname{Re}(x_2 - x_1 \mid y_2 - y_1) \\ &\leqslant |(x_2 - x_1 \mid y_2 - y_1)| \leqslant \|x_2 - x_1\| \, \|y_2 - y_1\|\end{aligned}$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Il en résulte, en divisant par $\|y_2 - y_1\|$ (que l'on peut supposer non nul, car sinon le résultat est évident), que l'on a bien $\|y_1 - y_2\| \leqslant \|x_2 - x_1\|$. □

Dans le cas où le convexe C est un sous-espace vectoriel, on a de meilleures propriétés.

Théorème II.2.4. *Si F est un* **sous-espace vectoriel fermé** *de l'espace de* **Hilbert** *H, alors l'application $P_F : H \to F$ est une application* linéaire continue, *et $P_F(x)$ est l'unique point $y \in F$ tel que :*

$$\boxed{y \in F \quad et \quad x - y \in F^{\perp}}.$$

Preuve. D'abord, si $y \in F$ et $x - y \in F^{\perp}$, on a :

$$\operatorname{dist}(x, F)^2 = \inf_{z \in F} \|x - z\|^2 = \inf_{z \in F} \left[\|x - y\|^2 + \|y - z\|^2\right] = \|x - y\|^2;$$

donc $\|x - y\| = \operatorname{dist}(x, F)$ et $y = P_F(x)$.

La réciproque résulte de la condition $(*)$:

$$\operatorname{Re}(x - y \mid z - y) \leqslant 0, \quad \forall z \in F;$$

en effet, comme F est un sous-espace vectoriel, on a :

$$z = y + \lambda w \in F, \quad \forall w \in F \quad \text{et} \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}.$$

Lorsque H est réel, on a donc, pour tout $w \in F$:

$$\lambda(x - y \mid w) = \big(x - y \mid \lambda w\big) \leqslant 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

ce qui n'est possible que si $(x - y \mid w) = 0$.

Lorsque l'espace H est complexe, on a, de même, pour tout $w \in F$:

$$\lambda \operatorname{Re}(x - y \mid w) = \operatorname{Re}(x - y \mid \lambda w) \leqslant 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

et, avec $z = y + i\lambda w$:

$$\lambda \operatorname{Im}(x - y \mid w) = \operatorname{Re}(x - y \mid i\lambda w) \leqslant 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

ce qui, de nouveau, n'est possible que si $(x - y \mid w) = 0$.

La linéarité de P_F est alors facile à voir, grâce à l'unicité ; en effet, si $y_1 = P_F(x_1)$, $y_2 = P_F(x_2)$, alors $(x_1 - y_1), (x_2 - y_2) \in F^{\perp}$; donc, pour $a_1, a_2 \in \mathbb{K}$, $(a_1 x_1 + a_2 x_2) - (a_1 y_1 + a_2 y_2) \in F^{\perp}$; donc $P_F(a_1 x_1 + a_2 x_2) = a_1 y_1 + a_2 y_2$. □

Notons que la continuité a été vue à la Proposition II.2.3, et qu'en prenant $x_2 = 0$ dans cette proposition, on a : $\|P_F(x)\| \leqslant \|x\|$ pour tout $x \in H$; la norme de P_F est donc $\leqslant 1$. Mais comme $P_F(x) = x$ pour tout $x \in F$, on obtient, si $F \neq \{0\}$, que $\boxed{\|P_F\| = 1}$.

À titre d'exercice, on pourra montrer que, pour un convexe fermé C, P_C est linéaire si et seulement si C est un sous-espace vectoriel.

Théorème II.2.5. *Si H est un espace de* **Hilbert**, *alors, pour tout sous-espace vectoriel* **fermé**, *on a :*

$$\boxed{H = F \oplus F^{\perp}},$$

et la projection sur F parallèlement à $F^{\perp}$ associée est P_F. Elle est donc continue, de sorte que la somme directe est une somme directe topologique.

On dit que P_F est la **projection orthogonale** *sur F.*

Le fait que H soit la somme directe de F et $F^{\perp}$ signifie que tout $x \in H$ s'écrit, de façon unique, $\boxed{x = y + z}$, avec $\boxed{y \in F,\ z \in F^{\perp}}$. Notons que, puisque F et $F^{\perp}$ sont orthogonaux, on a : $\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$; en d'autres termes :

$$\boxed{\|x\|^2 = \|P_F(x)\|^2 + \|x - P_F(x)\|^2}.$$

On retrouve le fait que P_F est continue et de norme 1, si $F \neq \{0\}$. On voit aussi que $\|Id_H - P_F\| = 1$, si $F^{\perp} \neq \{0\}$; mais on verra juste après qu'en fait $Id_H - P_F$ est la projection orthogonale sur $F^{\perp}$.

Preuve. On a $x = P_F(x) + \big(x - P_F(x)\big)$, avec $x - P_F(x) \in F^{\perp}$, par le Théorème II.2.4. D'autre part, si $x \in F \cap F^{\perp}$, on a, en particulier, $(x \mid x) = 0$; donc $x = 0$. □

Remarque. Le Théorème II.2.5 est vraiment spécifique aux espaces de Hilbert ; en effet, J. Lindenstraus et L. Tzafriri ont montré en 1971 que si E est un espace de Banach dans lequel tout sous-espace vectoriel fermé est l'image d'une projection continue, alors cet espace E est isomorphe à un espace de Hilbert. La preuve repose sur le Théorème de Dvoretzky, disant que tout sous-espace vectoriel de dimension finie n d'un espace normé contient un sous-espace vectoriel, de dimension "*assez grande*", de l'ordre de $\log n$, qui est très proche d'un espace de Hilbert (voir le Chapitre 8 du livre : D. Li – H. Queffélec, *Introduction à l'étude des espaces de Banach – Analyse et Probabilités*, Cours Spécialisés 12, Société Mathématique de France, 2004).

Le résultat suivant peut être montré directement, mais il est facilement obtenu à partir du Théorème II.2.5.

Corollaire II.2.6. *On a $F^{\perp\perp} = \overline{F}$ pour tout sous-espace vectoriel F de l'espace de Hilbert H.*

Preuve. Comme $F^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel fermé, par la Proposition II.1.9, on peut lui appliquer le Théorème II.2.5 : $H = F^{\perp} \oplus F^{\perp\perp}$, que l'on peut aussi écrire : $H = F^{\perp\perp} \oplus F^{\perp}$.

D'autre part, on peut aussi appliquer ce théorème au sous-espace vectoriel fermé $\overline{F}$: $H = \overline{F} \oplus \big(\overline{F}\big)^{\perp} = \overline{F} \oplus F^{\perp}$.

Il en résulte, puisque l'on sait que $\overline{F} \subseteq F^{\perp\perp}$, que $F^{\perp\perp} = \overline{F}$. □

Notons qu'en général un sous-espace vectoriel a une infinité de supplémentaires ; mais il n'a qu'un seul supplémentaire orthogonal.

On en déduit, puisque $H^\perp = \{0\}$ et $\{0\}^\perp = H$, le critère **très pratique** suivant de densité.

Corollaire II.2.7. *Soit H un espace de Hilbert, et F un sous-espace vectoriel de H. Alors F est* **dense** *dans H si et seulement si $F^\perp = \{0\}$.*

Ainsi, pour montrer qu'un sous-espace vectoriel F est **dense** dans H, il suffit de vérifier que :

$$\boxed{\big[(x \mid y) = 0\,, \quad \forall x \in F\big] \quad \Longrightarrow \quad y = 0}\,.$$

Voyons un exemple d'application. Rappelons que le *support* de $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, noté $\operatorname{supp} f$, est l'adhérence de $\{x \in \mathbb{R}\,;\ f(x) \neq 0\}$.

Théorème II.2.8. *L'espace $\mathscr{K}(\mathbb{R})$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à support compact est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.*

Ce théorème se démontre, sous une forme plus générale d'ailleurs, dans tout cours d'Intégration (voir aussi le Théorème III.1.2) ; mais il s'agit ici, même si le résultat est important par lui-même, de voir comment appliquer le Corollaire II.2.7.

Notons que $\mathscr{K}(\mathbb{R})$ n'est pas réellement contenu dans $L^2(\mathbb{R})$, puisque ce dernier est un espace de classes d'équivalence de fonctions, mais, comme deux applications continues qui sont égales presque partout, pour la mesure de Lebesgue, le sont en fait partout, l'application canonique $j\colon \mathscr{K}(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, qui associe à chaque fonction sa classe d'équivalence, est *injective* ; on peut donc identifier chaque $f \in \mathscr{K}(\mathbb{R})$ à sa classe d'équivalence $j(f)$, c'est-à-dire $\mathscr{K}(\mathbb{R})$ à $j\big[\mathscr{K}(\mathbb{R})\big]$.

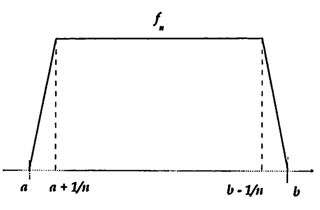
Preuve. Soit $g \in L^2(\mathbb{R})$ telle que :

$$(f \mid g) = \int_{\mathbb{R}} f\overline{g}\, d\lambda = 0\,, \quad \forall f \in \mathscr{K}(\mathbb{R}).$$

On veut montrer que $g = 0$.

En prenant les parties réelles et imaginaires, on peut supposer que g est à valeurs réelles, et l'on écrit $g = g^+ - g^-$. On a, pour toute $f \in \mathscr{K}(\mathbb{R})$:

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\, g^+(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, g^-(t)\, dt\,.$$



Soit $a < b$. Il existe des $f_n \in \mathscr{K}(\mathbb{R})$ telles que :

$$\begin{cases} 0 \leqslant f_n \leqslant \mathbb{1}_{]a,b[}, \\ f_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{1}_{]a,b[}(t) \text{ pour } t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

et telles que la suite $(f_n)_n$ soit croissante.

Le Théorème de convergence monotone donne :

$$\int_a^b g^+(t)\,dt = \lim_{n\to\infty}\!\uparrow \int_{\mathbb{R}} f_n(t)\,g^+(t)\,dt = \lim_{n\to\infty}\!\uparrow \int_{\mathbb{R}} f_n(t)\,g^-(t)\,dt = \int_a^b g^-(t)\,dt.$$

Cela veut dire que les mesures positives $\mu = g^+.\lambda$ et $\nu = g^-.\lambda$ sont égales sur tous les intervalles $]a,b[$ et y prennent des valeurs finies :

$$\int_a^b g^+(t)\,dt \leqslant \int_a^b |g(t)|\,dt = \int_{\mathbb{R}} |g(t)|\,\mathbb{1}_{[a,b]}(t)\,dt \leqslant \sqrt{b-a}\,\|g\|_2 < +\infty\,,$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Le Théorème d'unicité des mesures dit alors que $\mu = \nu$. Cela signifie que $g^+ = g^-$ presque partout, c'est-à-dire $g = 0$ dans $L^2(\mathbb{R})$. □

Corollaire II.2.9. *$\mathscr{C}([0,1])$ est dense dans $L^2(0,1)$.*

Preuve. Soit $f \in L^2(0,1)$. Prolongeons-la en $\widetilde{f}$ sur $\mathbb{R}$ par 0 en dehors de $[0,1]$. On a $\widetilde{f} \in L^2(\mathbb{R})$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g \in \mathscr{K}(\mathbb{R})$ telle que $\|f - g\|_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant \varepsilon$. Soit $h = g_{|[0,1]}$ la restriction de g à $[0,1]$. On a, d'une part, $h \in \mathscr{C}([0,1])$ et, d'autre part, $\|f - h\|_{L^2(0,1)} \leqslant \|\widetilde{f} - g\|_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant \varepsilon$. □

II.2.3. Représentation du dual

Rappelons que le dual est :

$$H^* = \{\Phi\colon H \to \mathbb{K}\,;\ \Phi \text{ linéaire continue}\}\,,$$

où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est le corps de base.

Savoir donner une représentation "*concrète*" du dual d'un espace fonctionnel permet souvent de résoudre des problèmes sur l'espace lui-même. Dans le cas des espaces de Hilbert, c'est particulièrement simple.

Rappelons d'abord que nous avons vu que, pour tout $y \in H$, la forme linéaire $\Phi_y\colon x \in H \mapsto (x \mid y)$ est continue, c'est-à-dire est un élément du dual H^*, et que $\|\Phi_y\| = \|y\|$. Il s'avère que *tous* les éléments du dual sont de cette forme.

Théorème II.2.10 (Théorème de représentation de Fréchet-Riesz).
Soit H un espace de **Hilbert**. *Pour toute $\Phi \in H^*$, il* **existe** *un (unique) $y \in H$ tel que* $\boxed{\Phi(x) = (x \mid y)}$ *pour tout $x \in H$.*

Ce théorème a été prouvé, de façon indépendante, par M. Fréchet et F. Riesz en 1907, pour $H = L^2(0,1)$; les deux articles ont été publiés, par coïncidence, dans le même numéro des Notes aux Compte-rendus de l'Académie des Sciences.

Une autre façon de voir ce théorème est de dire que l'application :

$$\begin{array}{rccc} J\colon & H & \longrightarrow & H^* \\ & y & \longmapsto & \Phi_y = J(y) \end{array}$$

est **surjective**. Elle est donc bijective car c'est une isométrie (au sens des espaces métriques) : $\|J(y) - J(y')\| = \|\Phi_y - \Phi_{y'}\| = \|\Phi_{y-y'}\| = \|y - y'\|$.

Notons que dans le cas réel, J est linéaire, mais que dans le cas complexe, elle n'est que *semi-linéaire*.

Preuve. Nous savons déjà que J est une isométrie métrique; cela prouve l'unicité. Ce qu'il faut voir, c'est la surjectivité.

Soit $\Phi \in H^*$, non nulle. Comme Φ est continue, le sous-espace vectoriel $F = \ker \Phi$ est fermé. Donc :

$$H = (\ker \Phi) \oplus (\ker \Phi)^{\perp}.$$

Mais comme Φ est une forme linéaire non nulle, $\ker \Phi$ est de codimension 1 ; donc $(\ker \Phi)^{\perp}$ est de dimension 1.

Soit $u \in (\ker \Phi)^{\perp}$, de norme 1, et posons $y = \overline{\Phi(u)}\, u$. Alors, comme $y \in (\ker \Phi)^{\perp}$, Φ_y est nulle sur $\ker \Phi$; mais, d'autre part :

$$\Phi_y(u) = (u \mid y) = \Phi(u)\,(u \mid u) = \Phi(u)\,\|u\|^2 = \Phi(u).$$

Ainsi l'on a bien $\Phi = \Phi_y$. □

Remarque. La valeur $y = \overline{\Phi(u)}\, u$ peut sembler "tomber du ciel". En fait, si l'on veut avoir $\Phi(x) = (x \mid y)$ pour tout $x \in H$, on doit l'avoir pour $x \in \ker \Phi$; donc y doit être dans $(\ker \Phi)^{\perp}$. Ainsi $y = c\,u$, et l'égalité $\Phi(u) = (u \mid y)$ entraîne $\Phi(u) = \bar{c}\,(u \mid u) = \bar{c}\,\|u\|^2 = \bar{c}$. On a donc forcément $y = \overline{\Phi(u)}\, u$.

II.2.4. Adjoint d'un opérateur

On appelle *opérateur* sur H toute application linéaire continue $T\colon H \to H$.

Proposition II.2.11. *Soit H un espace de Hilbert. Pour tout $T \in \mathscr{L}(H)$, il existe un autre opérateur, noté T^*, et appelé l'***adjoint** *de T, tel que :*

$$\boxed{(Tx \mid y) = (x \mid T^*y)}, \quad \forall x, y \in H.$$

De plus $\|T^*\| = \|T\|$.

Preuve. Soit $y \in H$. L'application :

→ K !

$$\begin{array}{rccc} \Phi_y \circ T\colon & H & \longrightarrow & H \\ & x & \longmapsto & (Tx \mid y) \end{array}$$

est une forme linéaire continue sur H ; il existe donc, par le Théorème de Fréchet-Riesz, un unique élément de H, que l'on notera T^*y, tel que :

$$(x \mid T^*y) = (Tx \mid y)\,, \quad \forall x \in H.$$

A cause de l'unicité, l'application $T^*\colon y \in H \mapsto T^*y \in H$ est clairement linéaire : si $y_1, y_2 \in H$ et $a_1, a_2 \in \mathbb{K}$, on a, pour tout $x \in H$:

$$\begin{aligned} \big(x \mid T^*(a_1y_1 + a_2y_2)\big) &= (Tx \mid a_1y_1 + a_2y_2) = \bar{a}_1(Tx \mid y_1) + \bar{a}_2(Tx \mid y_2) \\ &= \bar{a}_1(x \mid T^*y_1) + \bar{a}_2(x \mid T^*y_2) = (x \mid a_1T^*y_1 + a_2T^*y_2); \end{aligned}$$

donc $T^*(a_1y_1 + a_2y_2) = a_1T^*y_1 + a_2T^*y_2$.

D'autre part, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$|(\Phi_y \circ T)(x)| = |(Tx \mid y)| \leqslant \|Tx\| \, \|y\| \leqslant \|T\| \, \|x\| \, \|y\| \, ;$$

donc $\|T^*y\| = \|\Phi_y \circ T\| \leqslant \|T\| \, \|y\|$. Cela prouve que l'application linéaire T^* est continue et que $\|T^*\| \leqslant \|T\|$.

Pour voir que $\|T\| \leqslant \|T^*\|$, remarquons que T^* a lui-même un adjoint T^{**}, et que l'on a $T^{**} = T$:

$$(y \mid T^{**}x) = (T^*y \mid x) = (y \mid Tx)$$

pour tous $x, y \in H$; cela implique que $T^{**}x = Tx$ pour tout $x \in H$. Alors $\|T\| = \|T^{**}\| \leqslant \|T^*\|$. □

II.3. Bases orthonormées

Pour éviter de parler de familles sommables, on se restreindra aux espaces **séparables**. Pour le cas général, on pourra se reporter, par exemple, au livre de G. Choquet, *Cours d'Analyse*, Masson.

II.3.1. Espaces séparables

Définition II.3.1. *Un espace topologique E est dit* séparable *s'il existe une partie $D \subseteq E$ qui est dénombrable et dense dans E : $\overline{D} = E$.*

Dans le cas des espaces normés, on a une notion équivalente.

Proposition II.3.2. *Soit E un espace vectoriel normé. Pour que E soit séparable, il faut et il suffit qu'il existe dans E une partie Δ qui soit dénombrable et* **totale** *dans E.*

On dit qu'une partie Δ d'un espace vectoriel normé E est *totale* lorsque le *sous-espace vectoriel* vect (Δ) *engendré* par cette partie est dense.

Preuve. Le $\mathbb{Q}$-sous-espace vectoriel (respectivement le $(\mathbb{Q}+i\mathbb{Q})$-sous-espace vectoriel) engendré par Δ est dénombrable et son adhérence est la même que celle de vect (Δ). □

Exemples.

1) Tout espace vectoriel de dimension finie est séparable.

2) Les espaces c_0 et ℓ_p, pour $1 \leqslant p < \infty$, sont séparables, car si

$$e_n = (0, \ldots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ n^{\text{ième}} \text{ place}}}{1}, 0, \ldots) \, ,$$

alors $\Delta = \{e_n \, ; \, n \geqslant 1\}$ est totale, puisque, pour tout $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots) \in \ell_p$, on a :

$$\|x - (\xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n)\|^p = \sum_{k=n+1}^{\infty} |\xi_k|^p \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \, ;$$

et lorsque $x \in c_0$:

$$\|x - (\xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n)\|_\infty = \sup_{k \geqslant n+1} |\xi_k| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

On peut montrer (*Exercice 19 du Chapitre I*) que ℓ_∞ n'est *pas* séparable.

Proposition II.3.3. *Tout sous-espace d'un espace* métrique *séparable est séparable.*

Preuve. Soit E un espace métrique séparable, $D = \{x_n\,;\ n \geqslant 1\}$ une partie de E dénombrable dense, et $F \subseteq E$. Pourtout couple d'entiers $n, k \geqslant$ tels que $F \cap B(x_n, 1/k)$ ne soit pas vide, choisissons un élément $y_{n,k} \in F \cap B(x_n, 1/k)$; sinon (pour des questions de notation), posons $y_{n,k} = y_0$, où y_0 est un élément fixe donné de F (on peut supposer F non vide). Alors $D_F = \{y_{n,k}\,;\ n, k \geqslant 1\}$ est une partie dénombrable de F, et elle est dense dans F : soit $y \in F$; il existe, pour tout $k \geqslant 1$, un entier $n \geqslant 1$ tel que $d(y, x_n) \leqslant 1/k$; on a donc $y \in B(x_n, 1/k)$; donc $F \cap B(x_n, 1/k) \neq \emptyset$, et $y_{n,k} \in F \cap B(x_n, 1/k)$; alors $d(y, y_{n,k}) \leqslant d(y, x_n) + d(x_n, y_{n,k}) \leqslant 2/k$. □

Remarque. Ce n'est pas vrai dans les espaces topologiques généraux. En effet, pour tout ensemble I, il existe un “gros” espace compact βI, appelé *compactifié de Stone-Čech* de I dans lequel I est dense (il a la propriété que toute fonction bornée sur I à valeurs scalaires se prolonge de façon unique en une fonction continue sur βI, avec les mêmes bornes). Le compactifié de Stone-Čech $\beta\mathbb{N}$ de $\mathbb{N}$ est donc séparable ; mais on peut montrer que $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ n'est pas séparable.

Notons que, d'après la propriété de prolongement, l'espace $\mathscr{C}(\beta\mathbb{N})$ des fonctions continues sur $\beta\mathbb{N}$ est isométrique à ℓ_∞. Alors c_0 est isométrique au sous-espace $\{f \in \mathscr{C}(\beta\mathbb{N})\,;\ f(x) = 0 \text{ pour } x \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}\}$. La non séparabilité de l'espace topologique $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ correspond à la non séparabilité de l'espace de Banach quotient ℓ_∞ / c_0.

II.3.2. Systèmes orthonormés

Nous supposerons dans la suite que H est un espace préhilbertien, de **dimension infinie**.

Définition II.3.4. *Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de H, indexée par un ensemble arbitraire I, non vide. On dit que c'est une* **famille orthonormée**, *ou un* **système orthonormé**, *si :*

1) $\|u_i\| = 1\,,\ \forall i \in I$;
2) $u_i \perp u_j\,,\ \forall i \neq j$.

Notons que tout sous-système $(u_i)_{i\in J}$ $(J \subseteq I)$ d'un système orthonormé $(u_i)_{i\in I}$ est encore orthonormé.

Exemples.

1) Dans ℓ_2, la suite $(e_n)_{n\geqslant 1}$ est orthonormée.
2) Dans $L^2(0,1)$, on pose :

$$\boxed{e_n(t) = \mathrm{e}^{2\pi i n t}}, \quad n \in \mathbb{Z}\,;$$

le système $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est orthonormé ; on dit que c'est le **système trigonométrique**.

Proposition II.3.5. *Si le système fini $(u_1, \ldots, u_n)$ est orthonormé, alors, pour tous $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$:*

$$\Big\| \sum_{k=1}^{n} a_k u_k \Big\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2.$$

Preuve. Il suffit de développer en utilisant la Proposition II.1.3 :

$$\Big\| \sum_{k=1}^{n} a_k u_k \Big\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|a_k u_k\|^2 + \sum_{k \neq j} (a_k u_k \mid a_j u_j),$$

et d'utiliser que $\|a_k u_k\| = |a_k| \, \|u_k\| = |a_k|$ et que, pour $k \neq j$, $(a_k u_k \mid a_j u_j) = a_k \overline{a}_j (u_k \mid u_j) = 0$. □

Corollaire II.3.6. *Toute famille orthonormée est libre (c'est-à-dire que les vecteurs la composant sont linéairement indépendants).*

Proposition II.3.7 (Inégalité de Bessel). *Soit H un espace préhilbertien. Pour toute famille orthonormée $(u_i)_{i \in I}$ dans H, on a, pour tout $x \in H$:*

$$\boxed{\sum_{i \in I} |(x \mid u_i)|^2 \leqslant \|x\|^2}.$$

Dans l'inégalité ci-dessus, la somme au premier membre est définie de la façon suivante : si $(a_i)_{i \in I}$ est une famille de nombres réels **positifs**, alors :

$$\sum_{i \in I} a_i \overset{déf}{=} \sup_{J \subseteq I, \, J \text{ finie}} \sum_{i \in J} a_i .$$

Si $\ell_2(I) = \{(a_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I \, ; \, \sum_{i \in I} |a_i|^2 < +\infty\}$, l'inégalité de Bessel entraîne que l'on a une application :

$$\begin{array}{rccc} S\colon & H & \longrightarrow & \ell_2(I) \\ & x & \longmapsto & \big((x \mid u_i)\big)_{i \in I} \end{array} \quad ;$$

elle est linéaire, et l'inégalité de Bessel dit de plus qu'elle est continue, et de norme $\leqslant 1$.

Preuve. Si $\xi_i = (x \mid u_i)$, on a, puisque la famille est orthonormée, pour toute partie finie J de I :

$$0 \leqslant \Big\| x - \sum_{i \in J} \xi_i u_i \Big\|^2 = \|x\|^2 - 2 \sum_{i \in J} \mathrm{Re}\,(x \mid \xi_i u_i) + \sum_{i \in J} |\xi_i|^2 ,$$

ce qui donne le résultat car $(x \mid \xi_i u_i) = \overline{\xi}_i (x \mid u_i) = \overline{\xi}_i \xi_i = |\xi_i|^2$. □

Proposition II.3.8. *Soit H un espace préhilbertien et soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une* **suite** *orthonormée dans H. Si un vecteur $x \in H$ peut s'écrire $x = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n u_n$, alors on a forcément* $\boxed{\xi_n = (x \mid u_n)}$ *pour tout $n \geqslant 1$.*

Ici "*suite*" signifie "famille dénombrable".

Preuve. Pour chaque $k \geqslant 1$, la forme linéaire Φ_{u_k} est continue ; donc :

$$(x \mid u_k) = \Phi_{u_k}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{u_k}(\xi_n u_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n (u_n \mid u_k) = \xi_k . \qquad \square$$

Proposition II.3.9. *Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une* **suite** *orthonormée et $x = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n u_n$. Soit F_n le sous-espace vectoriel engendré par $u_1, \ldots, u_n$. Alors :*

$$P_{F_n}(x) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k u_k .$$

Preuve. Comme on a $\xi_k = (x \mid u_k)$, par la proposition précédente, on obtient que $\big(x - \sum_{k=1}^{n} \xi_k u_k \mid u_j\big) = 0$ pour tout $j \leqslant n$; donc si $y_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k u_k$, on a $x - y_n \in F_n^{\perp}$. Comme $y_n \in F_n$, la caractérisation du Théorème II.2.4 dit que $y_n = P_{F_n}(x)$. $\square$

Proposition II.3.10. *Si H est un espace de* **Hilbert**, *et $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite orthonormée dans H, alors, pour* **toute** *suite $(\xi_n)_{n\geqslant 1} \in \ell_2$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n u_n$ converge dans H.*

En d'autres termes (en utilisant la Proposition II.3.8), l'application linéaire continue :

$$\begin{array}{rccc} S\colon & H & \longrightarrow & \ell_2 \\ & x & \longmapsto & \big((x \mid u_n)\big)_{n\geqslant 1} \end{array}$$

est **surjective**.

Preuve. Il suffit de remarquer que la série vérifie le *critère de Cauchy*, car la Proposition II.3.5 donne :

$$\Big\| \sum_{k=n}^{n+p} \xi_k u_k \Big\|^2 = \sum_{k=n}^{n+p} |\xi_n|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 ,$$

uniformément en p. $\square$

II.3.3. Bases orthonormées

Définition II.3.11. *On dit qu'une suite orthonormée $(u_n)_{n\geqslant 1}$ dans un espace préhilbertien H est une* **base orthonormée** *de H si l'ensemble $\{u_n \,;\, n \geqslant 1\}$ est* <u>*total*</u> *dans H. On dit aussi que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est une* **base hilbertienne**.

Notons que, comme on s'est restreint à prendre des familles dénombrables, l'espace H sera forcément séparable.

D'autre part, il faut noter que cette notion de *base orthonormée* est, en dimension infinie, différente de la notion de base, au sens algébrique du terme : une famille de vecteurs d'un espace vectoriel est une base si tout vecteur peut s'écrire, de façon unique, comme combinaison linéaire d'un nombre fini de termes de la famille ; or le théorème qui suit dit que, pour une base orthonormée, tout élément s'écrit comme la somme d'une série, qui fait intervenir *tous* les termes de la base orthonormée.

Théorème II.3.12. *Soit H un espace préhilbertien et soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une base orthonormée de H. Alors, tout élément $x \in H$ s'écrit :*

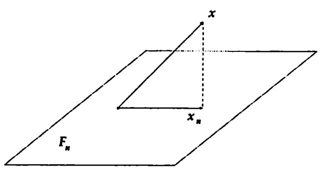
$$\boxed{x = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n u_n}, \qquad \textit{avec} \quad \boxed{\xi_n = (x \mid u_n)}.$$

De plus, pour tous $x, y \in H$, on a les **formules de Parseval** *:*

1) $\boxed{\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x \mid u_n)|^2}$;

2) $\boxed{(x \mid y) = \sum_{n=1}^{\infty} (x \mid u_n)\,\overline{(y \mid u_n)}}$, *la série convergeant absolument.*

Preuve. Notons F_n le sous-espace vectoriel engendré par $u_1, \ldots, u_n$, et posons $x_n = P_{F_n}(x)$.



L'ensemble $\{u_n\,;\ n \geqslant 1\}$ étant total, le sous-espace $\bigcup_{n\geqslant 1} F_n$ est dense dans H ; alors, la suite $(F_n)_{n\geqslant 1}$ étant croissante, on a :

$$\|x - x_n\| = \operatorname{dist}(x, F_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

D'autre part, d'après le Corollaire II.3.6, $\{u_1, \ldots, u_n\}$ est une base, au sens usuel, de F_n ; et, par la Proposition II.3.8, on a donc :

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} (x_n \mid u_k)\, u_k\,.$$

Mais $(x - x_n) \in F_n^{\perp}$; donc, pour $k \leqslant n$, $(x_n \mid u_k) = (x \mid u_k) = \xi_k$ ne dépend pas de n. On a donc bien :

$$x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \xi_k u_k = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k u_k\,.$$

De même $y = \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k u_k$, avec $\zeta_k = (y \mid u_k)$. Alors, par continuité (Corollaire II.1.6) :

$$(x \mid y) = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k u_k \mid y\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k (u_k \mid y) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \overline{\zeta_k}\,,$$

qui donne l'autre identité lorsque $y = x$. □

Il résulte du Théorème II.3.12 et de la Proposition II.3.10 que l'on a :

Corollaire II.3.13. *Soit H un espace de* **Hilbert**, *séparable, et soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une base orthonormée de H. Alors l'application linéaire :*

$$\begin{array}{rccl} S\colon & H & \longrightarrow & \ell_2 \\ & x & \longmapsto & \big((x \mid u_n)\big)_{n\geqslant 1} \end{array}$$

est un <u>*isomorphisme*</u> *d'espaces de Hilbert, c'est-à-dire un isomorphisme conservant le produit scalaire : $\big(S(\xi) \mid S(\zeta)\big) = (\xi \mid \zeta)$ pour tous $\xi, \zeta \in \ell_2$.*

C'est en particulier une isométrie : $\|S(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in H$. Lorsque H n'est pas complet, on a toujours une isométrie conservant le produit scalaire, mais elle n'est pas surjective.

L'isomorphisme récipoque est :

$$\begin{array}{rccl} S^{-1}\colon & \ell_2 & \longrightarrow & H \\ & (\xi_n)_{n\geqslant 1} & \longmapsto & \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n u_n \end{array}$$

Nous allons voir qu'en fait *tout* espace de Hilbert séparable possède des bases orthonormées, et donc le corollaire précédent s'applique à tous les espaces de Hilbert séparables.

II.3.4. Existence des bases orthonormées

Théorème II.3.14. *Tout espace de Hilbert séparable possède des bases orthonormées.*

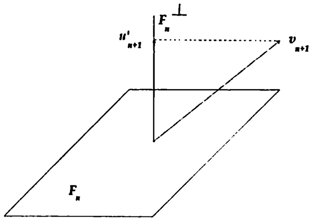
En fait la complétude ne sert pas ici (car à chaque étape, on ne travaille que dans des sous-espaces vectoriels de dimension finie, donc complets).

On obtient, comme conséquence du Théorème II.3.14 et du Corollaire II.3.13, le résultat essentiel suivant, dans lequel, cette fois-ci l'hypothèse de complétude ne peut être omise.

Théorème II.3.15. *Tous les espaces de* **Hilbert** *séparables, de dimension infinie, sont* <u>*isomorphes*</u> *entre-eux, et en particulier à ℓ_2.*

Preuve du Théorème II.3.14 . On utilise tout simplement le *procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.*

Prenons une partie dénombrable $\{v_n\,;\ n \geqslant 1\}$ totale. On peut supposer que les v_n, $n \geqslant 1$, sont linéairement indépendants (en supprimant ceux qui sont combinaison linéaire des précédents).



Soit F_n le sous-espace vectoriel engendré par $v_1, \ldots, v_n$. On pose $u_1 = \dfrac{v_1}{\|v_1\|}$, et

$$u'_{n+1} = P_{F_n^\perp}(v_{n+1})\,, \quad u_{n+1} = \frac{u'_{n+1}}{\|u'_{n+1}\|}\,.$$

Alors la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est orthonormée, et l'ensemble $\{u_n\,;\ n \geqslant 1\}$ est total car le sous-espace vectoriel engendré par $u_1, \ldots, u_n$ est F_n. En effet, par le Théorème II.2.4, pour $2 \leqslant k \leqslant n$, on a $u'_k - v_k \in F_{k-1}^{\perp\perp} = F_{k-1}$, et donc $u'_k \in F_k$ puisque $v_k \in F_k$ et $F_{k-1} \subseteq F_k$. □

II.4. Séparabilité de $L^2(0,1)$

II.4.1. Théorème de Stone-Weierstrass

C'est un théorème de densité dans l'espace $\mathscr{C}_\mathbb{R}(K)$ ou $\mathscr{C}_\mathbb{C}(K)$ des fonctions continues $f\colon K \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, où K est un espace compact. Selon que l'espace est réel ou complexe, il ne s'énonce pas de la même façon : il faut ajouter une hypothèse dans le cas complexe.

II.4.1.1. Cas réel

Théorème II.4.1 (Théorème de Stone-Weierstrass, cas réel). *Soit K un espace compact et A une* **sous-algèbre** *de l'algèbre de Banach* **réelle** $\mathscr{C}_\mathbb{R}(K)$.
On suppose de plus que :
a) A **sépare les points** *de K ;*
b) A **contient les constantes**.
Alors A est **dense** *dans $\mathscr{C}_\mathbb{R}(K)$.*

Remarques. 1) Une sous-algèbre de $\mathscr{C}(K)$ est un sous-espace vectoriel stable par multiplication.

2) Dire que A *sépare les points* de K signifie que si $x, y \in K$ sont distincts, alors il existe $f \in A$ telle que $f(x) \neq f(y)$.

3) L'hypothèse que A contienne les fonctions constantes n'est faite que pour éliminer le cas des sous-algèbres $A = \{f \in \mathscr{C}(K)\,;\ f(a) = 0\}$ pour un $a \in K$ donné.

Notons que, A étant un sous-espace vectoriel, A contient les constantes si et seulement si $\mathbb{1} \in A$.

On obtient la conséquence immédiate suivante.

Théorème II.4.2. *Soit K une partie compacte de $\mathbb{R}^d$; alors l'ensemble $\mathscr{P}_{\mathbb{R}}(K)$ de tous les* **polynômes réels** *à d variables, restreints à K, est* *dense* *dans $\mathscr{C}_{\mathbb{R}}(K)$.*

Théorème II.4.3. *L'espace réel $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ est* **séparable**.

Preuve. Nous savons que $\mathscr{C}_{\mathbb{R}}([0,1])$ est dense dans $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$. D'autre part, le Théorème II.4.2 nous dit que $\mathscr{P}_{\mathbb{R}}([0,1])$ est dense dans $\mathscr{C}_{\mathbb{R}}([0,1])$. Donc $\mathscr{P}_{\mathbb{R}}([0,1])$ est dense dans $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$, *parce que la norme uniforme* sur $\mathscr{C}_{\mathbb{R}}([0,1])$ est *plus fine* que la norme de $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$: pour toute $f \in L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $g \in \mathscr{C}_{\mathbb{R}}([0,1])$ telle que $\|f-g\|_2 \leqslant \varepsilon/2$; il existe ensuite $p \in \mathscr{P}_{\mathbb{R}}([0,1])$ tel que $\|g-p\|_\infty \leqslant \varepsilon/2$; mais alors $\|g-p\|_2 \leqslant \|g-p\|_\infty \leqslant \varepsilon/2$, et donc $\|f-p\|_2 \leqslant \varepsilon$.

Il ne reste plus qu'à remarquer que $\mathscr{P}_{\mathbb{R}}([0,1])$ est engendré par la suite définie par :

$$p_0(t)=1\,,\quad p_1(t)=t\,,\quad p_2(t)=t^2\,,\qquad\quad,\quad p_n(t)=t^n\,,\qquad\quad,$$

pour obtenir la séparabilité de $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$. □

Notons qu'au passage, nous avons prouvé la séparabilité de $\mathscr{C}_{\mathbb{R}}([0,1])$.

Corollaire II.4.4. $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ *est isomorphe à l'espace réel ℓ_2.*

C'est le théorème démontré par Fisher et Riesz en 1907. Le point essentiel étant le fait que $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ soit *complet.*

Preuve du Théorème de Stone-Weierstrass.

Elle se fait en plusieurs étapes.

Étape 1. Il existe une suite de polynômes *réels $(r_n)_{n\geqslant 0}$ qui converge* uniformément *sur* $[0,1]$ *vers la fonction racine carrée $r\colon t \mapsto \sqrt{t}$.*

Preuve. On définit $(r_n)_{n\geqslant 0}$ par récurrence, en partant de $r_0 = 0$ et en posant, pour tout $n \geqslant 0$:

$$r_{n+1}(t) = r_n(t) + \frac{1}{2}\big(t - [r_n(t)]^2\big)\,.$$

Il est clair, par récurrence, que les r_n sont des polynômes.

De plus, pour tout $n \geqslant 0$, on a $0 \leqslant r_n(t) \leqslant \sqrt{t}$; en effet, par récurrence : on a, d'une part, $t - [r_n(t)]^2 \geqslant 0$ et donc $r_{n+1}(t) \geqslant r_n(t) \geqslant 0$, et d'autre part :

$$\sqrt{t} - r_{n+1}(t) = \big[\sqrt{t} - r_n(t)\big]\Big[1 - \frac{1}{2}\big(\sqrt{t} + r_n(t)\big)\Big] \geqslant 0\,,$$

car $\sqrt{t} + r_n(t) \leqslant \sqrt{t} + \sqrt{t} = 2\sqrt{t} \leqslant 2$. Notons qu'au passage, on a vu que la suite $(r_n)_{n\geqslant 0}$ est *croissante.*

Étant croissante et majorée, elle converge, vers une limite $r(t)$. La relation de récurrence montre que $r(t) = \sqrt{t}$.

Reste à voir qu'il y a convergence uniforme.

Première méthode : "à la main".

Posons $\varepsilon_n(t) = \sqrt{t} - r_n(t)$. On a vu ci-dessus, puisque $r_n(t) \geqslant 0$, que :

$$0 \leqslant \varepsilon_{n+1}(t) = \varepsilon_n(t)\Big[1 - \frac{1}{2}\big(\sqrt{t} + r_n(t)\big)\Big] \leqslant \varepsilon_n(t)\Big(1 - \frac{\sqrt{t}}{2}\Big)\,;$$

donc :

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \varepsilon_n(t) \leqslant \varepsilon_0(t)\Big(1 - \frac{\sqrt{t}}{2}\Big)^n &= \sqrt{t}\Big(1 - \frac{\sqrt{t}}{2}\Big)^n \\ &\leqslant \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1/2} 2(1-x)x^n \qquad (\text{poser } x = 1 - \sqrt{t}/2) \\ &= 2x_n(1-x_n)x_n^n \qquad \text{avec } x_n = n/(n+1); \\ &= \frac{2}{n+1}x_n^n \leqslant \frac{2}{n+1}\,. \end{aligned}$$

□

Deuxième méthode. Il suffit d'utiliser le théorème suivant.

Théorème II.4.5 (Théorème de Dini). *Soit K un espace* **compact**.

Si $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite **croissante** *de fonctions* **continues** *$u_n \colon K \to \mathbb{R}$ qui converge simplement vers une fonction* **continue** *$u \colon K \to \mathbb{R}$, la convergence est* **uniforme**.

C'est bien sûr évidemment faux si l'on ne suppose pas la limite continue.

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$.

Pour chaque $x \in K$, il existe un entier $N(x)$ tel que :

$$n \geqslant N(x) \quad \Longrightarrow \quad 0 \leqslant u(x) - u_n(x) \leqslant \varepsilon/3.$$

Comme u et $u_{N(x)}$ sont *continues*, il existe un voisinage de x, que l'on peut prendre <u>ouvert</u>, tel que :

$$x' \in V(x) \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} |u(x) - u(x')| \leqslant \varepsilon/3\,; \\ |u_{N(x)}(x') - u_{N(x)}(x)| \leqslant \varepsilon/3. \end{cases}$$

Comme K est compact, il existe $x_1, \dots, x_m \in K$ tels que :

$$K = \bigcup_{i=1}^{m} V(x_i)\,.$$

Si $N = \max\{N(x_1), \dots, N(x_m)\}$, on a, pour $n \geqslant N$:

$$0 \leqslant u(x) - u_n(x) \leqslant \varepsilon\,, \quad \forall x \in K\,,$$

car x appartient à l'un des $V(x_i)$ et $n \geqslant N(x_i)$; donc :

$$\begin{aligned} 0 \leqslant u(x) - u_n(x) &\leqslant u(x) - u_{N(x_i)}(x) \\ &\leqslant \big(u(x) - u(x_i)\big) + \big(u(x_i) - u_{N(x_i)}(x_i)\big) + \big(u_{N(x_i)}(x_i) - u_{N(x_i)}(x)\big) \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon . \end{aligned}$$ □

<u>*Étape 2*</u>. *Si $f \in A$, alors $|f| \in \overline{A}$.*

Preuve. En effet, on peut supposer $f \neq 0$. Soit $a = \|f\|_\infty$. On a $[f(x)]^2/a^2 \in [0,1]$ pour tout $x \in K$. Mais, comme r_n est un polynôme, et A est une algèbre, on a $r_n(f^2/a^2) \in A$ si $f \in A$. En passant à la limite, on obtient :

$$|f| = a \lim_{n\to\infty} r_n(f^2/a^2) \in \overline{A},$$

la limite étant uniforme, c'est-à-dire prise pour la norme de $\mathscr{C}_{\mathbb{R}}(K)$. □

<u>*Étape 3*</u>. *Si $f, g \in A$, alors* $\max\{f,g\}, \min\{f,g\} \in \overline{A}$.

Preuve. Il suffit de remarquer que :

$$\begin{cases} \max\{f,g\} = \dfrac{1}{2}\,(f + g + |f-g|) \\ \min\{f,g\} = \dfrac{1}{2}\,(f + g - |f-g|)\,, \end{cases}$$

et d'utiliser l'Étape 2 (ainsi que le fait que $\overline{A}$ est un sous-espace vectoriel). □

<u>*Étape 3 bis*</u>. *Si $f, g \in \overline{A}$, alors* $\max\{f,g\}, \min\{f,g\} \in \overline{A}$.

Preuve. Cela résulte de ce que $\overline{A}$ vérifie les conditions demandées pour A : elle reste une sous-algèbre (rappelons que la convergence dans $\mathscr{C}(K)$ est la convergence uniforme), et, puisque A contient les constantes et sépare les points de K, il en est *a fortiori* de même pour $\overline{A}$. □

Bien sûr, par récurrence :

$$f_1, \dots, f_n \in \overline{A} \qquad \Longrightarrow \qquad \max\{f_1,\dots,f_n\} \in \overline{A} \quad \text{et} \quad \min\{f_1,\dots,f_n\} \in \overline{A}.$$

<u>*Étape 4*</u>. *Si $x, y \in K$ et $x \neq y$, alors :*

$$(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}) \quad (\exists h \in A) \qquad h(x) = \alpha \quad \textit{et} \quad h(y) = \beta.$$

C'est la première étape dans l'approximation : on peut obtenir avec une fonction de A des valeurs données en deux points donnés distincts de K.

Preuve. Comme A *sépare les points*, il existe $g \in A$ telle que $g(x) \neq g(y)$. Posons :

$$h = \alpha\,\mathbb{1} + \frac{\beta - \alpha}{g(y) - g(x)}\,\big(g - g(x)\,\mathbb{1}\big)\,.$$

On a bien $h(x) = \alpha$, $h(y) = \beta$, et $h \in A$, car $g \in A$, $\mathbb{1} \in A$, et A est un sous-espace vectoriel. □

<u>Étape 5</u>. Pour toute $f \in \mathscr{C}(K)$, pour tout $x \in K$, et tout $\varepsilon > 0$, il existe $g \in \overline{A}$ telle que :

$$g(x) = f(x) \quad \textit{et} \quad g(y) \leqslant f(y) + \varepsilon\,, \forall y \in K.$$

Preuve. Pour tout $z \in K$ tel que $z \neq x$, il existe, par l'Étape 4, en prenant $\alpha = f(x)$ et $\beta = f(z)$, une $h_z \in A$ telle que $h_z(x) = f(x)$ et $h_z(z) = f(z)$.

Notons h_x la fonction constante égale à $f(x)\,\mathbb{1}$. Alors :

$$(\forall z \in K) \qquad h_z(x) = f(x) \quad \text{et} \quad h_z(z) = f(z)\,.$$

La continuité de f et celle de h_z donnent un voisinage, que l'on peut prendre ouvert, V_z de z tel que :

$$y \in V(z) \quad \Longrightarrow \quad h_z(y) \leqslant f(y) + \varepsilon\,.$$

Comme K est <u>compact</u>, il existe un nombre fini d'éléments $z_1, \ldots, z_m \in K$ tels que :

$$K = V(z_1) \cup \cdots \cup V(z_m)\,.$$

Alors $g = \inf\{h_{z_1}, \ldots, h_{z_m}\} \in \overline{A}$, par l'Étape 3 *bis*, et l'on a, pour tout $y \in K$: $g(y) \leqslant f(y) + \varepsilon$, puisque y appartient à l'un des $V(z_i)$. □

<u>Étape 6</u>. On a $\overline{A} = \mathscr{C}_{\mathbb{R}}(K)$.

Preuve. Soit $f \in \mathscr{C}_{\mathbb{R}}(K)$, et soit $\varepsilon > 0$.

Pour tout $x \in K$, il existe $g_x \in \overline{A}$ vérifiant les conditions données dans l'Étape 5.

La continuité de f et celle de g_x donnent un voisinage, que l'on peut choisir ouvert, $U(x)$ de x tel que :

$$y \in U(x) \quad \Longrightarrow \quad g_x(y) \geqslant f(y) - \varepsilon\,.$$

La <u>compacité</u> de K permet de trouver un nombre fini d'éléments $x_1, \ldots, x_p \in K$ tels que :

$$K = U(x_1) \cup \cdots \cup U(x_p)\,.$$

Alors $\varphi = \max\{g_{x_1}, \ldots, g_{x_p}\} \in \overline{A}$, grâce à l'Étape 3 bis ; et elle vérifie :

$$f(y) - \varepsilon \leqslant \varphi(y) \leqslant f(y) + \varepsilon\,, \qquad \forall y \in K\,,$$

car chaque $y \in K$ est dans l'un des $U(x_j)$.

Cela veut dire que $\|f - \varphi\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

Comme $\varepsilon > 0$ était arbitraire, on a bien $f \in \overline{(\overline{A})} = \overline{A}\,.$

Cela achève la preuve du Théorème II.4.1. □

La preuve de Bernstein pour un intervalle compact de $\mathbb{R}$

La forme générale du Théorème de Stone-Weierstrass a été donnée par Stone en 1948. À l'origine, Weierstrass avait montré, en 1885, que toute fonction continue sur un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ pouvait y être approchée uniformément par des polynômes. Il utilisait pour cela un produit de convolution (voir le chapitre suivant).

En 1913, Bernstein en a donné une belle preuve probabiliste, que l'on va exposer ci-dessous. Notons d'abord que, par un changement de variable, on peut supposer que l'intervalle en question est $[0,1]$.

L'idée de départ est la suivante : on fixe $t \in [0,1]$ (aussi bien, si on veut, on peut ne prendre que $0 < t < 1$), et on considère des *variables aléatoires indépendantes* $X_1, \ldots, X_n$ suivant toutes la *loi de Bernoulli* de paramètre t. Alors $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ suit la loi binômiale $\mathscr{B}(n,t)$ de paramètres n et t. La loi faible des grands nombres dit que $\frac{S_n}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} t = \mathbb{E}\,(X_1)$ en probabilité. Alors, pour toute fonction f continue sur $[0,1]$, on a $\mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(t)$. En effet, si $\varepsilon > 0$ est donné, l'uniforme continuité de f sur $[0,1]$ permet de trouver $\delta > 0$ tel que $|f(x) - f(x')| \leqslant \varepsilon$ pour $|x - x'| \leqslant \delta$; la convergence en probabilité donne alors un $N \geqslant 1$ tel que $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - t\right| > \delta\right) \leqslant \varepsilon$ si $n \geqslant N$. Alors, pour $n \geqslant N$, on a :

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] - f(t)\right| &= \int_{\left\{\left|\frac{S_n}{n} - t\right| > \delta\right\}} \left|f\left[\frac{S_n(\omega)}{n}\right] - f(t)\right| d\,\mathbb{P}\,(\omega) \\ &\quad + \int_{\left\{\left|\frac{S_n}{n} - t\right| \leqslant \delta\right\}} \left|f\left[\frac{S_n(\omega)}{n}\right] - f(t)\right| d\,\mathbb{P}\,(\omega) \\ &\leqslant 2\,\|f\|_\infty\,\varepsilon + \varepsilon\,.\end{aligned}$$

Or $\mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] = \sum_{k=0}^n C_n^k\, t^k (1-t)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$. On pose :

$$[B_n(f)](t) = \sum_{k=0}^n C_n^k\, t^k (1-t)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) ;$$

c'est un polynôme de degré n. On l'appelle le $n^{\text{ème}}$ *polynôme de Bernstein* de f.

On vient de voir que l'on a convergence simple de $B_n(f)$ vers f.

Nous allons voir que, grâce à une estimation uniforme de la variance des variables de Bernoulli, la preuve de la loi faible des grands nombres pour ces variables permet d'obtenir la convergence uniforme de $B_n(f)$ vers f.

Rappelons d'abord que si X est une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre t, alors sa variance vaut $\operatorname{Var}(X) = t(1-t)$. On a, par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour tout $\delta > 0$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - t\right| > \delta\right) &= \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}\,(X)\right| > \delta\right) = \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| > \delta\right) \\ &\leqslant \frac{1}{\delta^2} \operatorname{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2\delta^2} \operatorname{Var}(S_n) \\ &= \frac{1}{n^2\delta^2} \sum_{j=1}^n \operatorname{Var}(X_j) \quad \text{(par indépendance)} \\ &= \frac{\operatorname{Var(X)}}{n\delta^2} = \frac{t(1-t)}{n\delta^2} \leqslant \frac{1/4}{n\delta^2}\,.\end{aligned}$$

Considérons le *module de continuité* de f, défini par :

$$\omega_f(h) = \sup\{|f(t) - f(t')|\,;\ |t - t'| \leqslant h\}\,.$$

Dire que f est uniformément continue signifie que $\omega_f(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$. Fixons un $\delta > 0$, que l'on précisera après. On a, pour tout $t \in [0,1]$ (on prendra garde à différencier l'occurence $\omega \in \Omega$ du module de continuité ω_f ; on aurait pu modifier ces notations, mais ce sont celles habituellement utilisées !) :

$$\begin{aligned}
|f(t) - [B_n(f)](t)| &= \left|\mathbb{E}\left[f(t) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right]\right| \\
&\leqslant \mathbb{E}\left(\left|f(t) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right|\right) = \int_\Omega \left|f(t) - f\left(\frac{S_n(\omega)}{n}\right)\right| d\mathbb{P}(\omega) \\
&= \int_{\left\{\left|t-\frac{S_n(\omega)}{n}\right|\leqslant\delta\right\}} + \int_{\left\{\left|t-\frac{S_n(\omega)}{n}\right|>\delta\right\}} \\
&\leqslant \omega_f(\delta) + 2\,\|f\|_\infty \mathbb{P}\left(\left|t - \frac{S_n}{n}\right| > \delta\right) \\
&\leqslant \omega_f(\delta) + 2\,\|f\|_\infty \frac{1}{4n\delta^2} \cdot
\end{aligned}$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ donné, choisissons maintenant δ de sorte que $\omega_f(\delta) \leqslant \varepsilon/2$, puis $N \geqslant 1$ tel que $\|f\|_\infty \frac{1}{2N\delta^2} \leqslant \varepsilon/2$. On aura, pour $n \geqslant N$, $|f(t) - [B_n(f)]t)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $t \in [0,1]$, ce qui prouve que $B_n(f)$ tend uniformément vers f. □

II.4.1.2. Cas complexe

Tel quel, l'énoncé du Théorème II.4.1 est faux pour les espaces de fonctions à valeurs complexes. Par exemple, si K est le disque unité fermé $\overline{\mathbb{D}}$ du plan complexe, toute limite uniforme sur K de polynômes p_n est holomorphe dans le disque ouvert $\mathbb{D}$, grâce au Théorème de Weierstrass sur la convergence uniforme des suites de fonctions holomorphes. L'adhérence de l'algèbre des polynômes n'est donc pas $\mathscr{C}_\mathbb{C}(K)$ tout entier : par exemple, la fonction $z \mapsto \bar{z}$ n'est pas dedans. En fait, cet exemple est essentiellement le seul cas dont il faut tenir compte ; en effet, on a :

Théorème II.4.6 (Théorème de Stone-Weierstrass, cas complexe).
Soit K un espace compact et soit A une sous-algèbre, complexe, de l'espace de Banach complexe $\mathscr{C}_\mathbb{C}(K)$. Si :

a) A sépare les points de K ;

b) A contient les fonctions constantes ;

c) A est **stable par conjugaison** *: $f \in A \Rightarrow \overline{f} \in A$,*

alors A est dense dans $\mathscr{C}_\mathbb{C}(K)$.

Notons qu'ici $\overline{f}$ désigne la fonction $t \in K \mapsto \overline{f(t)} \in \mathbb{C}$, où $\overline{f(t)}$ est le nombre complexe conjugué de $f(t)$.

Preuve. La condition c) permet de dire que :

$$f \in A \quad\Longrightarrow\quad \operatorname{Re} f = \frac{f+\overline{f}}{2} \in A \quad\text{et}\quad \operatorname{Im} f = \frac{f-\overline{f}}{2i} \in A\,.$$

Soit :

$$A_{\mathbb{R}} = \{f \in A\,;\ f(t) \in \mathbb{R}\,,\ \forall t \in K\}\,.$$

La remarque ci-dessus permet de dire que :

$$A = A_{\mathbb{R}} + iA_{\mathbb{R}}\,.$$

De plus, $A_{\mathbb{R}}$ est une sous-algèbre de $\mathscr{C}_{\mathbb{R}}(K)$, qui contient les fonctions constantes (réelles), et sépare les points de K : si $u \neq v$, il existe $f \in A$ telle que $f(u) \neq f(v)$; mais alors $\operatorname{Re} f(u) \neq \operatorname{Re} f(v)$ ou $\operatorname{Im} f(u) \neq \operatorname{Im} f(v)$, et $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f \in A_{\mathbb{R}}$. Il résulte du cas réel que $A_{\mathbb{R}}$ est dense dans $\mathscr{C}_{\mathbb{R}}(K)$. Mais alors, $A = A_{\mathbb{R}} + iA_{\mathbb{R}}$ est dense dans $\mathscr{C}_{\mathbb{C}}(K) = \mathscr{C}_{\mathbb{R}}(K) + i\mathscr{C}_{\mathbb{R}}(K)$. □

Exemple. Soit K une partie compacte de $\mathbb{C}$. L'ensemble des polynômes, à coefficients complexes, en les **deux variables** z **et** $\bar{z}$ est dense dans $\mathscr{C}_{\mathbb{C}}(K)$.

On notera que c'est aussi, en identifiant $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$, l'ensemble des polynômes, à coefficients complexes, en les deux variables réelles x et y, en identifiant $z = x+iy \in \mathbb{C}$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

II.4.2. Le système trigonométrique

Nous allons considérer ici des fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ **périodiques**, de période 1 sur $\mathbb{R}$.

L'application *surjective* :

$$\begin{array}{rccl} e_1\colon & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}\,;\ |z| = 1\} \\ & t & \longmapsto & \mathrm{e}^{2\pi it} = u \end{array}$$

permet des les identifier aux fonctions définies sur $\mathbb{U}$. On peut aussi les identifier aux fonctions définies sur le tore $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

De plus, on sait que pour toute fonction f continue sur $\mathbb{R}$ de période 1, il existe une unique fonction continue $\widetilde{f}\colon \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ telle que $f = \widetilde{f} \circ e_1$ (resp. $\ddot{f}\colon \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ telle que $f(x) = \ddot{f}(x + \mathbb{Z})$). L'espace $\mathscr{C}_1(\mathbb{R})$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ de période 1, muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$, s'identifie donc à l'espace $\mathscr{C}(\mathbb{U})$ des fonctions continues sur le compact $\mathbb{U}$.

Il s'identifie aussi au sous-espace $\widetilde{\mathscr{C}} = \{f \in \mathscr{C}([0,1])\,;\ f(0) = f(1)\}$.

Ces identifications sont isométriques puisque :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| = \sup_{u\in\mathbb{U}} |\widetilde{f}(u)| = \sup_{\xi\in\mathbb{T}} |\ddot{f}(\xi)|\,.$$

Définition II.4.7. *On appelle* **polynôme trigonométrique** *toute somme finie*

$$\sum_{n=N_1}^{N_2} a_n \mathrm{e}^{2\pi int}$$

avec $a_n \in \mathbb{C}$ *et* $N_1, N_2 \in \mathbb{Z}$, $N_1 \leqslant N_2$.

Notons qu'en ajoutant au besoin des coefficients nuls, on peut toujours écrire un polynôme trigonométrique sous la forme symétrique :

$$\sum_{n=-N}^{N} a_n \mathrm{e}^{2\pi i n t},$$

où N est un entier positif.

On notera, pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$\boxed{e_n(t) = \mathrm{e}^{2\pi i n t}}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

L'ensemble $\{e_n \,;\ n \in \mathbb{Z}\}$ s'appelle le **système trigonométrique**.

Les polynômes trigonométriques s'identifient aux polynômes usuels en u et $\bar{u}$ sur $\mathbb{U}$, puisque tout $u \in \mathbb{U}$ s'écrit sous la forme $u = e_1(t) = \mathrm{e}^{2\pi i t}$, et qu'alors $u^n = \mathrm{e}^{2\pi i n t} = e_n(t)$, et que $\bar{u} = \mathrm{e}^{-2\pi i n t} = e_{-n}(t)$. Le théorème de Stone-Weierstrass complexe appliqué à $\mathscr{C}_{\mathbb{C}}(\mathbb{U})$ donne donc :

Théorème II.4.8. *L'ensemble des polynômes trigonométriques est dense dans l'espace des fonctions continues de période* 1 *sur* $\mathbb{R}$.

Considérons maintenant l'espace des fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mesurables de période 1 telles que :

$$\int_0^1 |f(t)|^2 \, dt < +\infty.$$

Lorsque l'on le quotiente par le sous-espace des fonctions négligeables, ce quotient s'identifie à $L^2(0,1) = L^2_{\mathbb{C}}(0,1)$; en effet, pour toute fonction mesurable $g\colon [0,1] \to \mathbb{C}$, la fonction mesurable :

$$\begin{array}{rccl} \widetilde{g}\colon & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & t & \longmapsto & \begin{cases} g(t) \text{ si } 0 \leqslant t < 1\,; \\ g(0) \text{ si } t = 1 \end{cases} \end{array}$$

se prolonge par périodicité en une fonction mesurable $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de période 1, et $\int_0^1 |g(t)|^2 \, dt = \int_0^1 |f(t)|^2 \, dt$.

Ces identifications étant faites, on peut énoncer :

Théorème II.4.9. *Le système trigonométrique est une* base orthonormée *de* $L^2_{\mathbb{C}}(0,1)$.

Corollaire II.4.10. *L'espace* réel $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ *possède une base orthonormée formée des fonctions :*

$$1, \sqrt{2}\cos(2\pi t), \sqrt{2}\cos(4\pi t), \ldots, \sqrt{2}\cos(2\pi n t), \ldots,$$
$$\sqrt{2}\sin(2\pi t), \sqrt{2}\sin(4\pi t), \ldots, \sqrt{2}\sin(2\pi n t), \ldots .$$

Remarques. 1) $\mathbb{Z}$ étant dénombrable, on pourrait ré-indexer le système trigonométrique avec les entiers positifs.

2) Le théorème signifie que, pour toute $f \in L^2_{\mathbb{C}}(0,1)$, on a :

$$\lim_{N\to\infty} \left\| f - \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n)\, e_n \right\|_2 = 0\,,$$

où les produits scalaires :

$$\boxed{\widehat{f}(n) = (f \mid e_n) = \int_0^1 f(t)\,\overline{e_n(t)}\,dt = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{e}^{-2\pi i n t}\,dt}\,,$$

pour $n \in \mathbb{Z}$, sont appelés les **coefficients de Fourier** de f. La formule de Parseval s'écrit alors $\boxed{\int_0^1 |f(x)|^2\,dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|^2}$.

Nous savons qu'il existe alors une suite strictement croissante d'entiers $(l_n)_{n\geqslant 1}$ telle que :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-l_n}^{l_n} \widehat{f}(k)\,\mathrm{e}^{2\pi i k t} = f(t)$$

pour presque tout $t \in [0,1]$.

Répondant à une question posée par Lusin en 1913, L. Carleson a montré en 1966 qu'en fait, **sans prendre de sous-suite**, on a, pour toute $f \in L^2(0,1)$:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)\,\mathrm{e}^{2\pi i k t} = f(t)$$

pour presque tout $t \in [0,1]$. C'est un résultat d'une **extrême** difficulté.

Preuve du théorème II.4.9. Il est d'abord facile de voir que $\{e_n\,;\ n \in \mathbb{Z}\}$ est orthonormé :

$$(e_n \mid e_p) = \int_0^1 \mathrm{e}^{2\pi i n t}\,\mathrm{e}^{-2\pi i p t}\,dt = \int_0^1 \mathrm{e}^{2\pi i (n-p) t}\,dt = \begin{cases} 1 \text{ si } n = p\,; \\ 0 \text{ si } n \neq p\,. \end{cases}$$

Il est total car les polynômes trigonométriques sont denses dans $\mathscr{C}(\mathbb{U})$ et $\|\cdot\|_\infty \geqslant \|\cdot\|_2$, en utilisant le lemme suivant :

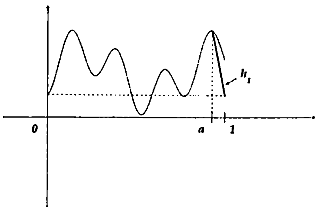
Lemme II.4.11. *L'ensemble $\mathscr{C}_1(\mathbb{R})$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ de période 1, identifié à $\widetilde{\mathscr{C}} = \{f \in \mathscr{C}([0,1])\,;\ f(0) = f(1)\}$, est dense dans $L^2(0,1)$.*

En effet, si $f \in L^2(0,1)$, il existe alors, pour tout $\varepsilon > 0$, $g \in \widetilde{\mathscr{C}} \cong \mathscr{C}(\mathbb{U})$ telle que $\|f-g\|_2 \leqslant \varepsilon/2$; il existe ensuite un polynôme trigonométrique p tel que $\|g-p\|_\infty \leqslant \varepsilon/2$; mais $\|g-p\|_2 \leqslant \|g-p\|_\infty \leqslant \varepsilon/2$; donc $\|f-p\|_2 \leqslant \varepsilon$. □

Preuve du lemme. Soit $f \in L^2(0,1)$ et soit $\varepsilon > 0$. Nous savons (Corollaire II.2.9) qu'il existe $h \in \mathscr{C}([0,1])$ telle que $\|f-h\|_2 \leqslant \varepsilon/2$.

Soit $M > 0$ tel que $|h(t)| \leqslant M$ pour tout $t \in [0,1]$, et notons $a = 1 - \left(\frac{\varepsilon}{4M}\right)^2$.

Nous allons modifier h sur $[a,1]$ en posant $h_1(1) = h(0)$ et en prenant h_1 affine entre a et 1. Alors $h_1 \in \widetilde{\mathscr{C}}$, $\|h_1\|_\infty \leqslant M$, et :

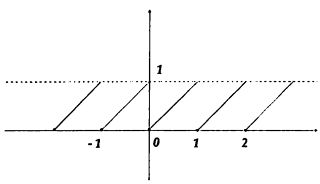


$$\begin{aligned}\|h-h_1\|_2 &= \left(\int_a^1 |h(t)-h_1(t)|^2\,dt\right)^{1/2}\\ &\leqslant (1-a)^{1/2} \sup_{a\leqslant t\leqslant 1} \big(|h(t)|+|h_1(t)|\big)\\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{4M} \times (M+M) = \frac{\varepsilon}{2}\,\cdot\end{aligned}$$

On a donc $\|f-h_1\|_2 \leqslant \varepsilon$. □

Exemple d'application.

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(t) = t$ pour $0 \leqslant t < 1$, et prolongée par périodicité sur $\mathbb{R}$.



Alors $f \in L^2(0,1)$ et :

$$\|f\|_2^2 = \int_0^1 t^2\,dt = \frac{1}{3}\,\cdot$$

Les coefficients de Fourier de f sont :

$$\widehat{f}(n) = \int_0^1 t\,\mathrm{e}^{-2\pi i n t}\,dt\,, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Pour $n = 0$: $\int_0^1 t\,dt = 1/2$; pour $n \neq 0$:

$$\widehat{f}(n) = \left[\frac{t\,\mathrm{e}^{-2\pi i n t}}{-2\pi i n}\right]_0^1 - \int_0^1 \cancel{\frac{\mathrm{e}^{-2\pi i n t}}{-2\pi i n}}\,dt = \frac{1}{-2\pi i n} = \frac{i}{2\pi n}\,\cdot$$

La formule de Parseval $\|f\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|^2$ donne donc :

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \sum_{n\neq 0} \frac{1}{4\pi^2 n^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\,;$$

d'où :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 2\pi^2 \Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\Big) = \frac{\pi^2}{6}\cdot$$

II.4.2.1. Coefficient de Fourier des fonctions de $L^1(0,1)$

Pour toute $f\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ mesurable, l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\int_0^1 |f(t)|\,dt \leqslant \Big(\int_0^1 1^2\,dt\Big)^{1/2} \Big(\int_0^1 |f(t)|^2\,dt\Big)^{1/2} = \Big(\int_0^1 |f(t)|^2\,dt\Big)^{1/2}$$

dit que $\mathscr{L}^2([0,1]) \subseteq \mathscr{L}^1([0,1])$. On a donc une injection naturelle de $L^2(0,1)$ dans $L^1(0,1)$. Par identification de $L^2(0,1)$ avec son image dans $L^1(0,1)$, on écrira : $\boxed{L^2(0,1) \subseteq L^1(0,1)}$.

Pour toute $f \in L^1(0,1)$, on peut définir les **coefficients de Fourier** :

$$\boxed{\widehat{f}(n) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{e}^{-2\pi int}\,dt}, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

puisque $|\mathrm{e}^{-2\pi int}| = 1$. On a $\boxed{|\widehat{f}(n)| \leqslant \|f\|_1}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. De plus :

Théorème II.4.12 (Lemme de Riemann-Lebesgue). *Pour toute fonction $f \in L^1(0,1)$, ses coefficients de Fourier tendent vers* 0 *quand $|n|$ tend vers l'infini :*

$$\boxed{\widehat{f}(n) \xrightarrow[|n|\to\infty]{} 0}.$$

Preuve. Si $g \in L^2(0,1)$, la formule de Parseval :

$$\|g\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{g}(n)|^2$$

montre que l'on a, en particulier, $\widehat{g}(n) \xrightarrow[|n|\to\infty]{} 0$.

Maintenant, si $f \in L^1(0,1)$, il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, une fonction $g \in L^2(0,1)$ (par exemple g étagée, ou bien g continue) telle que $\|f-g\|_1 \leqslant \varepsilon$. Comme on a $|\widehat{f}(n) - \widehat{g}(n)| \leqslant \|f-g\|_1 \leqslant \varepsilon$, on obtient $|\widehat{f}(n)| \leqslant |\widehat{g}(n)| + \varepsilon$; donc :

$$\limsup_{|n|\to\infty} |\widehat{f}(n)| \leqslant \limsup_{|n|\to\infty} |\widehat{g}(n)| + \varepsilon = \varepsilon.$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on obtient $\limsup_{|n|\to\infty} |\widehat{f}(n)| = 0$.

Donc $\lim_{|n|\to\infty} |\widehat{f}(n)| = 0$. □

Variante de la preuve. Il existe un polynôme trigonométrique p tel que $\|g - p\|_2 \leqslant \varepsilon$. Mais il existe un entier $N \geqslant 1$ tel que $\widehat{p}(n) = 0$ pour $|n| \geqslant N$. Donc, pour $|n| \geqslant N$, on a, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\widehat{g}(n)| = |\widehat{g}(n) - \widehat{p}(n)| \leqslant \|g - p\|_1 \leqslant \|g - p\|_2 \leqslant \varepsilon.$$

Ainsi, puisque $|\widehat{f}(n) - \widehat{g}(n)| \leqslant \|f - g\|_1 \leqslant \varepsilon$, on a $|\widehat{f}(n)| \leqslant 2\varepsilon$, pour $|n| \geqslant N$. Cela signifie que $\widehat{f}(n)$ tend vers 0 quand $|n|$ tend vers l'infini. □

Pour $f \in L^2(0,1)$, la formule de Parseval $\int_0^1 |f(t)|^2\,dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|^2$ montre que si $\widehat{f}(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, alors $f = 0$ (presque partout). C'est encore vrai pour les fonctions de $L^1(0,1)$, comme on va le voir.

Théorème II.4.13 (Injectivité de la transformation de Fourier). *La transformation de Fourier* $\mathscr{F} : f \in L^1(0,1) \mapsto \big(\widehat{f}(n)\big)_{n\in\mathbb{Z}} \in c_0(\mathbb{Z})$ *est* injective *: si* $f \in L^1(0,1)$ *et* $\widehat{f}(n) = 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{Z}$*, alors* $f = 0$.

Pour montrer cela, nous aurons besoin du *Théorème de Fejér*. Rappelons que le *noyau de Dirichlet* D_n *d'ordre* n est défini par $D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{2\pi ikt}$ et le *noyau de Fejér* F_n *d'ordre* n par :

$$F_n(t) = \frac{D_0(t) + D_1(t) + \cdots + D_n(t)}{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(t)\,.$$

Comme $\widehat{D_n}(0) = 1$, on a $\int_0^1 F_n(t)\,dt = \widehat{F_n}(0) = 1$ pour tout $n \geqslant 1$.

D'autre part, on a $F_n(t) = \dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{\sin(n+1)\pi t}{\sin(\pi t)}\right)^2$ pour tout $t \notin \mathbb{Z}$; en particulier $F_n(t) \geqslant 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ (c'est clair pour $t \in \mathbb{Z}$ car $D_k(0) = 2k+1$). La positivité de F_n est sa propriété essentielle. Vérifions l'égalité précédente. On sait que pour $t \notin \mathbb{Z}$, on a $D_k(t) = \frac{\sin[(2k+1)\pi t]}{\sin(\pi t)}$; donc :

$$F_n(t) = \frac{1}{n+1}\,\frac{1}{2\sin^2(\pi t)}\sum_{k=0}^{n} 2\sin(\pi t)\sin[(2k+1)\pi t]\,.$$

Or $2\sin[(2k+1)\pi t]\sin(\pi t) = \cos(2k\pi t) - \cos[(2(k+1)\pi t]$; donc :

$$\sum_{k=0}^{n} 2\sin(\pi t)\sin[(2k+1)\pi t] = 1 - \cos[2(n+1)\pi t] = 2\sin^2(n+1)\pi t\,,$$

d'où le résultat.

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est de période 1 et $f \in L^1(0,1)$, la $n^{\text{ème}}$ *somme de Fejér* de f est

$$\boxed{(\mathcal{F}_n f)(x) = \int_0^1 f(x-t)\, F_n(t)\, dt}\,.$$

C'est un polynôme trigonométrique. En effet, en posant $u = x - t$, on a, par périodicité :

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}_n f)(x) &= \int_0^1 f(u)\, F_n(x-u)\, du = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \Big(\sum_{j=-k}^{k} \int_0^1 f(u)\, e^{2\pi i j(x-u)}\, du \Big) \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \Big(\sum_{j=-k}^{k} \widehat{f}(j)\, e^{2\pi i j x} \Big).\end{aligned}$$

Théorème II.4.14 (Théorème de Fejér (1905)). *Pour toute fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue de période 1, on a :*

$$\mathcal{F}_n f \xrightarrow[n\to\infty]{} f \quad \textit{uniformément sur } \mathbb{R}.$$

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$.

Comme f est continue et périodique, elle est uniformément continue sur $\mathbb{R}$:

$$(\exists \delta > 0) \qquad |x - x'| \leqslant \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(x')| \leqslant \varepsilon/2.$$

Comme on peut diminuer δ sans changer l'implication ci-dessus, on peut supposer $\delta < 1/2$. Notons que :

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}_n f)(x) - f(x) &= \int_0^1 [f(x-t) - f(x)]\, F_n(t)\, dt \\ &\underset{\text{périodicité}}{=} \int_{-1/2}^{1/2} [f(x-t) - f(x)]\, F_n(t)\, dt\,.\end{aligned}$$

- Comme $F_n(t) \geqslant 0$, on a :

$$\begin{aligned}\Big| \int_{-\delta}^{\delta} [f(x-t) - f(x)]\, F_n(t)\, dt \Big| &\leqslant \int_{-\delta}^{\delta} |f(x-t) - f(x)|\, F_n(t)\, dt \\ &\leqslant \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\varepsilon}{2}\, F_n(t)\, dt \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \int_{-1/2}^{1/2} F_n(t)\, dt = \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

- D'autre part :

$$\begin{aligned}\Big| \int_{\delta}^{1/2} [f(x-t) - f(x)]\, F_n(t)\, dt \Big| &\leqslant 2\, \|f\|_\infty \int_{\delta}^{1/2} F_n(t)\, dt \\ &\leqslant \frac{2\, \|f\|_\infty}{n+1} \int_{\delta}^{1/2} \frac{dt}{\sin^2(\pi t)} = \frac{2\, \|f\|_\infty}{n+1} C_\delta \leqslant \frac{\varepsilon}{4}\end{aligned}$$

pour $n \geqslant n_\varepsilon$.

De même, en augmentant au besoin n_ε, on a, pour $n \geqslant n_\varepsilon$:

$$\left| \int_{-1/2}^{-\delta} [f(x-t) - f(x)]\, F_n(t)\, dt \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}.$$

• Il en résulte que :

$$|(\mathcal{F}_n f)(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon \quad \text{pour } n \geqslant n_\varepsilon\,,$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Indiquons rapidement une autre preuve, plus “fonctionnelle”. On vérifie facilement que pour un polynôme trigonométrique p, on a $\int_0^1 p(x-t)D_k(t)\,dt = p(x)$ pour $k \geqslant 0$ assez grand (plus grand que le degré de p) ; il en résulte que $\mathcal{F}_n p \xrightarrow[n\to\infty]{} p$ uniformément (sur $[0,1]$ ou sur $\mathbb{R}$). On a, d'autre part, $\|\mathcal{F}_n h\|_\infty \leqslant \|h\|_\infty$ pour toute $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue de période 1. Soit alors $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue de période 1. Les polynômes trigonométriques étant denses dans l'espaces des fonctions continues de période 1 (Théorème II.4.8), pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme trigonométrique p tel que $\|f - p\|_\infty \leqslant \varepsilon$. Alors :

$$\|\mathcal{F}_n f - f\|_\infty \leqslant \|\mathcal{F}_n(f-p)\|_\infty + \|\mathcal{F}_n p - p\|_\infty + \|p - f\|_\infty \leqslant \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon\,,$$

pour n assez grand, et donc $\|\mathcal{F}_n f - f\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. □

Corollaire II.4.15. *Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue de période 1. Si $\widehat{f}(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, alors $f = 0$.*

Preuve. On a $\mathcal{F}_n f = 0$ si $\widehat{f}(j) = 0$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$. Comme $(\mathcal{F}_n f)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers f, on obtient $f = 0$. □

Il suffit maintenant d'utiliser la densité des fonctions continues de période 1 dans $L^1(0,1)$.

Lemme II.4.16. *L'ensemble $\mathscr{C}_1(\mathbb{R})$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ de période 1, identifié à $\widetilde{\mathscr{C}} = \{f \in \mathscr{C}([0,1])\,;\ f(0) = f(1)\}$, est dense dans $L^1(0,1)$.*

Preuve. On peut faire la même que celle du Lemme II.4.11. Mais on va en donner une légèment différente. Considérons les fonctions de $L^1(0,1)$ comme étant définies sur $]0,1[$. Soit $f \in L^1(0,1)$ et $\varepsilon > 0$. Il existe (voir Cours d'Intégration) $g \in \mathscr{K}(]0,1[)$ telle que $\|f - g\|_1 \leqslant \varepsilon$.

Comme $\operatorname{supp}(g)$ est compact et contenu dans $]0,1[$, la distance d de $\operatorname{supp}(g)$ au complémentaire (fermé) de $]0,1[$ est > 0, et $\operatorname{supp}(g) \subseteq [d, 1-d]$. La fonction g est donc nulle sur $]0,d]$ et sur $[1-d,1[$, et on peut la prolonger d'abord sur $[0,1]$ en posant $g(0) = g(1) = 0$, puis en une fonction continue $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue de période 1. Pour ce prolongement $\widetilde{g}$, on a encore $\|f - \widetilde{g}\|_1 \leqslant \varepsilon$. □

Corollaire II.4.17. *Pour toute $f \in L^1(0,1)$, on a $\|\mathcal{F}_n f - f\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.*

Preuve. Il est clair que l'application $\mathcal{F}_n\colon f \in L^1(0,1) \mapsto \mathcal{F}_n f \in L^1(0,1)$ ($\mathcal{F}_n f$ est un polynôme trigonométrique) est linéaire. Elle est continue, de norme $\leqslant 1$, car, par le Théorème de Fubini-Tonelli, en utilisant la positivité du noyau de Fejér F_n :

$$\begin{aligned}\|\mathcal{F}_n f\|_1 &= \int_0^1 \left|\int_0^1 f(x-t)\,F_n(t)\,dt\right| dx \leqslant \int_0^1 \left[\int_0^1 |f(x-t)|\,F_n(t)\,dt\right] dx \\ &= \int_0^1 \left[\int_0^1 |f(x-t)|\,dx\right] F_n(t)\,dt = \|f\|_1 \int_0^1 F_n(t)\,dt = \|f\|_1\,,\end{aligned}$$

en prolongeant f en une fonction de période 1 sur $\mathbb{R}$, puis en posant $u = x - t$ et en utilisant la périodicité de f.

Soit alors $\varepsilon > 0$ et $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue de période 1 telle que $\|g - f\|_1 \leqslant \varepsilon/3$. Par le Théorème de Fejér, il existe un entier $N \geqslant 1$ tel que $\|\mathcal{F}_n g - g\|_\infty \leqslant \varepsilon/3$ pour $n \geqslant N$. Comme $\|\mathcal{F}_n g - g\|_1 \leqslant \|\mathcal{F}_n g - g\|_\infty$, on obtient :

$$\begin{aligned}\|\mathcal{F}_n f - f\|_1 &\leqslant \|\mathcal{F}_n(f-g)\|_1 + \|\mathcal{F}_n g - g\|_1 + \|g - f\|_1 \\ &\leqslant \|f - g\|_1 + \|\mathcal{F}_n g - g\|_1 + \|g - f\|_1 \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\,,\end{aligned}$$

pour $n \geqslant N$, de sorte que $\|\mathcal{F}_n f - f\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. □

Preuve du Théorème II.4.13. C'est exactement la même que pour le Corollaire II.4.15. □

II.5. Exercices

Exercice 1.

Soit H un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire et de la norme associée. En développant $\big\| \|y\|\, x - \|x\|\, y \big\|^2$, pour $x, y \in H$, montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 2.

Soit E un espace vectoriel normé réel (pour simplifier). On suppose que la norme vérifie l'identité du parallélogramme :

$$\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2\left(\|a\|^2 + \|b\|^2\right), \quad \forall a, b \in E.$$

Le but de l'exercice est de montrer que cette norme est hilbertienne, c'est-à-dire qu'il existe un produit scalaire sur E auquel elle est associée.

On pose $B(x,y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$, pour $x, y \in E$.

1) Soit $x_1, x_2, y \in E$.

a) Montrer que $\|x_1 + x_2 + 2y\|^2 = 2\left(\|x_1 + y\|^2 + \|x_2 + y\|^2\right) - \|x_1 - x_2\|^2$, et donner une formule analogue pour $\|x_1 + x_2 - 2y\|^2$.

b) En déduire que $B(x_1 + x_2, 2y) = 2\,[B(x_1, y) + B(x_2, y)]$.

2) Déduire de 1) que $B(u + u', v) = B(u, v) + B(u', v)$ pour tous $u, u', v \in E$.

3) Démontrer le résultat souhaité (*utiliser le 1) de l'Exercice 25 du Chapitre I*).

Exercice 3.

Soit H un espace préhilbertien réel et $T \colon H \to H$ une isométrie : $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$ pour tous $x, y \in H$, telle que $T(0) = 0$.

1) Montrer que T conserve le produit scalaire : $\big(T(x) \mid T(y)\big) = (x \mid y)$ pour tous $x, y \in H$.

2) En déduire que T est linéaire (*développer* $\|T(x+y) - T(x) - T(y)\|^2$).

Remarque. On comparera avec l'Exercice 25 du Chapitre I.

Exercice 4.

Montrer que si $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite de vecteurs orthogonaux dans un espace de Hilbert, alors la série $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ converge si et seulement si $\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|^2 < +\infty$.

Exercice 5 (*Identité du parallélogramme généralisée*)**.**

Soit H un espace de Hilbert. Montrer, à l'aide de l'identité du parallélogramme, que pour tous $x_1, \ldots, x_n \in H$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2 = \frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon_k = \pm 1} \Big\| \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k x_k \Big\|^2.$$

En déduire que ℓ^p n'est pas isomorphe à ℓ^2 pour $p \neq 2$ (*utiliser les vecteurs de la base canonique : voir l'Exercice 13 du Chapitre I, et séparer les cas* $1 \leqslant p < 2$ *et* $2 < p < \infty$).

Exercice 6.

Soit H un espace de Hilbert complexe. Montrer que pour tous $x, y \in H$, on a :

$$(x \mid y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|x + e^{i\theta} y\|^2 \, e^{i\theta} \, d\theta.$$

Exercice 7.

1) Soit H un espace de Hilbert et a un élément non nul de H. Montrer que pour tout $x \in H$, on a :

$$d(x, \{a\}^\perp) = \frac{|(x \mid a)|}{\|a\|}.$$

2) On considère l'espace de Hilbert $L^2([0,1])$.

a) Montrer que toute $f \in L^2([0,1])$ est intégrable sur $[0,1]$.

On considère l'ensemble F des $f \in L^2([0,1])$ telles que $\int_0^1 f(t)\,dt = 0$.

b) Montrer que F est un sous-espace vectoriel *fermé* de $L^2([0,1])$.

c) Déterminer $F^\perp$.

d) Calculer $d(f, F)$ pour $f(t) = e^t$.

Exercice 8 (*Noyau de l'adjoint d'un opérateur*).

Soit H un espace de Hilbert et $T \in \mathscr{L}(H)$. Montrer que l'on a $\ker(T^*) = [\mathrm{im}\,(T)]^\perp$.

Exercice 9.

Soit H un espace préhilbertien. Montrer que pour tout $T \in \mathscr{L}(H)$, on a $\|T\| = \sup\{|(Tx \mid y)|\,;\ \|x\|, \|y\| \leqslant 1\}$.

Exercice 10 (*Projecteurs*).

Soit H un espace de Hilbert et $P \colon H \to H$ un *projecteur*, c'est-à-dire une application linéaire telle que $P^2 = P$.

1) Montrer que $\mathrm{im}\, P = \ker(\mathrm{Id}_H - P)$ et que H est la somme directe algébrique de $\ker P$ et $\mathrm{im}\, P$.

On suppose dans la suite P continu et non nul.

2) a) Montrer que $\|P\| \geqslant 1$.

b) Montrer que l'opérateur adjoint P^* est aussi un projecteur.

3) On suppose dans cette question que P est auto-adjoint.

a) Montrer que $\|P\| = 1$.

b) Montrer que P est la projection orthogonale sur $\mathrm{im}\, P$.

4) On suppose dans cette question que $\|P\| = 1$.

a) Développer $\|x - P^*x\|^2$, et en déduire que $\ker(\mathrm{Id}_H - P) \subseteq \ker(\mathrm{Id}_H - P^*)$, puis que $\ker(\mathrm{Id}_H - P) = \ker(\mathrm{Id}_H - P^*)$.

b) Montrer que P est auto-adjoint.

Exercice 11.

Soit H un espace de Hilbert. Montrer que si $T \in \mathscr{L}(H)$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) T est inversible ;

(i') T^* est inversible ;

(ii) il existe une constante $c > 0$ telle que $\|Tx\| \geqslant c\,\|x\|$ et $\|T^*x\| \geqslant c\,\|x\|$ pour tout $x \in H$ (*pour montrer que* (ii) *implique* (i), *on montrera que* $\operatorname{im} T$ *est à la fois fermée et dense dans* H).

Exercice 12 (*Isométries*).

1) Soit H un espace de Hilbert muni du produit scalaire $(\,.\mid.\,)$, et T un endomorphisme continu de H. On note T^* l'adjoint de T. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $T^*T = \mathrm{Id}_H$;

(ii) $(Tx \mid Ty) = (x \mid y)$ pour tous $x, y \in H$;

(iii) T est une isométrie.

2) Soit $S\colon \ell_2 \to \ell_2$ l'opérateur (que l'on appelle *shift*, ou *décalage à droite*) défini par $S(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$.

a) Montrer que S est une isométrie.

b) Calculer $B = S^*$ (on l'appelle le *backward shift*, ou *décalage à gauche*).

3) Si T est une isométrie de l'espace de Hilbert H, a-t-on $TT^* = \mathrm{Id}_H$?

4) Montrer que T est une isométrie surjective si et seulement si T est *unitaire*, c'est-à-dire que $T^*T = TT^* = \mathrm{Id}_H$.

Exercice 13.

Si $w = (w_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de nombres réels strictement positifs, on note $\ell_2(w)$ l'espace vectoriel de toutes les suites $(x_n)_{n\geqslant 1}$ de nombres complexes telles que $\sum_{n=1}^{\infty} w_n |x_n|^2 < +\infty$.

1) Montrer que $(x \mid y)_w = \sum_{n=1}^{\infty} w_n x_n \overline{y}_n$ définit un produit scalaire sur $\ell_2(w)$. On munit $\ell_2(w)$ de la norme associée à ce produit scalaire.

2) Montrer que $i_w\colon x = (x_n)_{n\geqslant 1} \in \ell_2(w) \mapsto (\sqrt{w_n}\,x_n)_{n\geqslant 1} \in \ell_2$ est un isomorphisme isométrique. En déduire que $\ell_2(w)$ est un espace de Hilbert.

3) a) Soit E un espace vectoriel normé et A une partie bornée de E. Montrer que A est précompacte si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un sous-espace vectoriel F_ε de E de dimension finie tel que $d(x, F_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$ pour tout $x \in A$.

b) Montrer que si $w = (w_n)_{n\geqslant 1}$ et $v = (v_n)_{n\geqslant 1}$ sont deux suites de nombres réels strictement positifs telles que $w_n/v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, alors la boule unité fermée de $\ell_2(v)$ est une partie compacte de $\ell_2(w)$.

Exercice 14 (*Théorème de Lax-Milgram et approximation de Galerkin*).

Soit H un espace de Hilbert réel. On considère une forme bilinéaire B sur H, que l'on suppose continue et *coercive*, c'est-à-dire qu'il existe des constantes $C < +\infty$ et $a > 0$ telles que $|B(x, y)| \leqslant C\,\|x\|\,\|y\|$ pour tous $x, y \in H$, et $B(x, x) \geqslant a\,\|x\|^2$ pour tout $x \in H$.

1) a) Montrer qu'il existe un opérateur continu T sur H tel que $B(x,y) = (Tx \mid y)$ pour tous $x, y \in H$.

b) Montrer que pour tout $x \in H$, $\|Tx\| \geqslant a\,\|x\|$. En déduire que T est un isomorphisme de H sur lui-même (*utiliser l'Exercice 11*).

2) (*Théorème de Lax-Milgram*). Soit L une forme linéaire continue sur H.

a) Déduire des questions précédentes qu'il existe un unique $u \in H$ tel que $B(u,y) = L(y)$ pour tout $y \in H$.

b) On suppose dans cette question que B est symétrique et on définit $J(x) = B(x,x) - 2\,L(x)$. Démontrer que le point u est caractérisé par la condition $J(u) = \min_{x\in H} J(x)$.

3) On reprend les notations de 2) a). Soit $(F_n)_{n\geqslant 1}$ une suite croissante de sous-espaces vectoriels fermés de H dont la réunion est dense dans H.

a) Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe un unique $u_n \in F_n$ tel que $B(u_n, y) = L(y)$ pour tout $y \in F_n$.

b) Démontrer que $\|u - u_n\| \leqslant (C/a)\, d(u, F_n)$ pour tout entier $n \geqslant 1$. En déduire que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers u.

Exercice 15.

On pose, pour $f \in L^2([0,1])$ (on supposera les fonctions à valeurs réelles) et $x \in [0,1]$:

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(t)\,dt\,.$$

1) Justifier l'existence de $(Tf)(x)$ et montrer que T définit une application linéaire continue $T\colon L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$.

2) Calculer l'adjoint T^* de T (*on remarquera que* $\mathbb{1}_{[0,x]}(t) = \mathbb{1}_{[t,1]}(x)$).

Exercice 16.

Soit $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ son développement en série entière. Montrer que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 = \sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} |f(r\,\mathrm{e}^{it})|^2 \,\frac{dt}{2\pi}\,.$$

Exercice 17 (*Espace de Bergman*).

On note $\mathbb{D}$ le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$, et $\mathscr{H}(\mathbb{D})$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}$.

1) Montrer que si $f \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$ et si $\overline{D} = \overline{D}(z_0, r_0)$ est un disque fermé contenu dans $\mathbb{D}$, alors $f(z_0) = \frac{1}{r_0^2}\int_{\overline{D}} f(w)\,dA(w)$, où $A = \frac{1}{\pi}\,\lambda_2$ est la mesure d'aire normalisée de $\mathbb{D}$ (*i.e.* la restriction à $\mathbb{D}$ de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, divisée par π). En déduire que pour tout point $z \in \mathbb{D}$ et pour toute fonction $f \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$, on a :

$$|f(z)| \leqslant \frac{1}{(1-|z|)^2}\,\|f\|_{L^2(\mathbb{D})}\,,$$

où l'on a posé $\|f\|_{L^2(\mathbb{D})} = \big(\int_{\mathbb{D}} |f|^2\,dA\big)^{1/2}$.

2) On définit l'*espace de Bergman* $B^2(\mathbb{D})$ par $B^2(\mathbb{D}) = L^2(\mathbb{D}) \cap \mathscr{H}(\mathbb{D})$, c'est-à-dire que $f \in B^2(\mathbb{D})$ si et seulement si $f \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$ et $\int_{\mathbb{D}} |f|^2 \, dA < +\infty$). On le munit de la norme induite par $L^2(\mathbb{D})$.

a) En utilisant le 1), montrer que si $(f_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite de Cauchy dans $B^2(\mathbb{D})$, alors $(f_n)_{n \geqslant 1}$ est uniformément de Cauchy sur tout compact de $\mathbb{D}$.

b) Montrer que $B^2(\mathbb{D})$ est un espace de Hilbert, et que la convergence dans $B^2(\mathbb{D})$ entraîne la convergence uniforme sur les compacts de $\mathbb{D}$. Donner l'expression du produit scalaire de $B^2(\mathbb{D})$.

3) a) Montrer que si $f \in B^2(\mathbb{D})$ et $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, alors $\|f\|^2_{B^2(\mathbb{D})} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|c_n|^2}{n+1}$.

b) On pose $e_n(z) = \sqrt{n+1}\, z^n$. Montrer que la suite $(e_n)_{n \geqslant 0}$ est une base orthonormée de $B^2(\mathbb{D})$. Donner une autre expression du produit scalaire de $B^2(\mathbb{D})$

4) Montrer que si $a \in \mathbb{D}$, alors il existe une unique fonction $K_a \in B^2(\mathbb{D})$ telle que $f(a) = (f \mid K_a)$ pour toute $f \in B^2(\mathbb{D})$ (on dit que K_a *est un noyau reproduisant* pour $B^2(\mathbb{D})$).

5) En utilisant le 3), déterminer explicitement la fonction K_a, pour tout $a \in \mathbb{D}$.

6) En conclure que si f est une fonction holomorphe au voisinage de $\mathbb{D}$, alors, pour tout point $a \in \mathbb{D}$, on a $f(a) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(z)}{(1-\bar{z}a)^2} \, dA(z)$.

Exercice 18.

1) En utilisant la fonction définie sur $]-\pi, \pi]$ par $f(t) = t^2$, calculer $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ ·

2) Soit $a \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}$ et $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction de période 1 définie par $f(t) = \exp(2\pi i a t)$ pour $-1/2 \leqslant t < 1/2$.

a) Calculer les coefficients de Fourier de f puis montrer que $\pi \text{cotan}\,(\pi a) = \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a}{a^2 - n^2}$ ·

b) En faisant un développement limité en $a = 0$ à l'ordre 3 de $\text{cotan}\,(\pi a) - \frac{1}{\pi a}$, en déduire la valeur des sommes $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n=1} \frac{1}{n^4}$ ·

Exercice 19 (Théorème de Bernstein).

Soit $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction de période 1. On suppose qu'elle est höldérienne d'ordre $\alpha > 0$ *i.e.* qu'il existe $C_\alpha > 0$ tel que $|f(x) - f(y)| \leqslant C_\alpha |x - y|^\alpha$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

1) On note $f_x(t) = f(t - x)$ pour $x, t \in \mathbb{R}$. Calculer $\widehat{f_x}(n)$ en fonction de $\widehat{f}(n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

2) Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $C\, 2^{-2j\alpha} \geqslant \sum_{2^j + 1 \leqslant |n| \leqslant 2^{j+1}} |\widehat{f}(n)|^2$ pour tout $j \in \mathbb{N}$ (*considérer* $\|f - f_x\|_2$ *avec* x *choisi convenablement et utiliser la propriété höldérienne de* f).

3) Montrer que la suite des coefficients de Fourier de f est dans $\ell_p(\mathbb{Z})$ pour $p > 2/(2\alpha + 1)$ (*appliquer l'inégalité de Hölder*).

Exercice 20.

Soit $a > 0$, et soit $g \in L^2(0, a)$, à valeurs réelles.

On suppose que $\int_0^a g(t)\, \mathrm{e}^{nt} \, dt = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $g = 0$ (*on pourra faire un changement de variable, puis utiliser le Théorème de Stone-Weierstrass ; conclure ensuite*).

Exercice 21.

Soit K un espace métrique compact ; on munit le produit $K^2 = K \times K$ de la topologie produit. Si u et v sont des fonctions continues sur K, à valeurs réelles, on définit leur produit tensoriel par $(u \otimes v)(x, y) = u(x)\, v(y)$, pour $x, y \in K$. Montrer que le sous-espace vectoriel $\mathscr{C}(K) \otimes \mathscr{C}(K)$ de $\mathscr{C}(K^2)$ engendré par toutes les fonctions $u \otimes v$, pour $u, v \in \mathscr{C}(K)$, est dense dans $\mathscr{C}(K^2)$.

Exercice 22.

Soit (K, d) un espace métrique compact.

1) Montrer que K est séparable.

2) a) Pour $a \in K$, on note d_a la fonction continue définie par $d_a(x) = d(x, a)$. Montrer que si D est une partie dense de K, la famille $\{d_a\,;\ a \in D\}$ sépare les points de K. Que peut-on dire de la sous-algèbre A de $\mathscr{C}(K)$ engendrée par $\mathbb{1}$ et les fonctions d_a, pour $a \in D$?

b) En déduire que $\mathscr{C}(K)$ est séparable.

3) Montrer que l'ensemble des fonctions lipschitziennes sur K est dense dans l'espace $\mathscr{C}(K)$ des fonctions continues sur K, muni de la norme uniforme (voir l'Exercice 4 du Chapitre I).

Exercice 23 (*Opérateurs de Hilbert-Schmidt*).

Soit H un espace de Hilbert séparable, que l'on supposera réel, par convenance. On dit qu'un opérateur $T \colon H \to H$ est de *Hilbert-Schmidt* s'il existe une base orthonormée $(e_n)_{n\geqslant 1}$ de H telle que $\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 < +\infty$.

1) Soit T un opérateur de Hilbert-Schmidt sur H. Montrer que si $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ est une autre base orthonormée de H, alors $\sum_{n=1}^{\infty} \|T^* e_n\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|T\varepsilon_k\|^2$, et en déduire que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|T\varepsilon_k\|^2.$$

2) Soit $(S, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré tel que $L^2(\mu)$ soit séparable, et soit $(e_n)_{n\geqslant 1}$ une base orthonormée de $L^2(\mu)$.

a) Si $K \in L^2(\mu \otimes \mu)$, montrer que l'on peut définir un opérateur $T_K \colon L^2(\mu) \to L^2(\mu)$ par :

$$T_K(f)(y) = \int_S K(x, y)\, f(x)\, d\mu(x)\,,$$

et que T_K est de Hilbert-Schmidt (*on pourra remarquer que si l'on pose $K_y(x) = K(x, y)$, alors, pour toute $f \in L^2(\mu)$, on a $(T_K f)(y) = (f \mid K_y)$ pour μ-presque tout y*).

b) Montrer que si on pose $(e_n \otimes e_m)(x, y) = e_n(x)\, e_m(y)$, alors $(e_n \otimes e_m)_{n,m\geqslant 1}$ est une base orthonormée de $L^2(\mu \otimes \mu)$.

c) Soit T un opérateur de Hilbert-Schmidt sur $L^2(\mu)$. Montrer que la série double :

$$K(x, y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} (Te_n \mid e_m)\, e_n(x)\, e_m(y)$$

converge dans $L^2(\mu \otimes \mu)$, que $K \in L^2(\mu \otimes \mu)$, et que $T = T_K$.

On revient au cas général d'un espace de Hilbert séparable (réel) arbitraire et on fixe une base orthonormée $(e_n)_{n\geqslant 1}$.

On pose $\mathfrak{S}_2(H) = \{T \in \mathscr{L}(H)\,;\ \sum_{n=1}^{\infty} \|T(e_n)\|^2 < +\infty\}$.

3) a) Montrer que $\mathfrak{S}_2(H)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(H)$.

b) Montrer que pour tous $A, B \in \mathfrak{S}_2(H)$, la série $\sum_{n\geqslant 1}(Ae_n \mid Be_n)$ est convergente, et que l'on définit un produit scalaire sur $\mathfrak{S}_2(H)$ en posant :

$$(A \mid B)_{\mathfrak{S}_2(H)} = \sum_{n=1}^{\infty}(Ae_n \mid Be_n)\,.$$

On notera $\|\,.\,\|_{\mathfrak{S}_2(H)}$ la norme associée (on la note aussi souvent $\|\,.\,\|_{\mathfrak{H}\mathfrak{S}}$).

4) a) Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'éléments de H telle que $\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|^2 < +\infty$. Montrer que pour tout $x \in H$ la série $\sum_{n\geqslant 1}(x \mid e_n)\, u_n$ converge normalement dans H et que l'on a :

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty}(x \mid e_n)\, u_n \right\| \leqslant \|x\| \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|^2 \right)^{1/2}.$$

b) En déduire que $\|T\| \leqslant \|T\|_{\mathfrak{S}_2(H)}$ pour tout $T \in \mathfrak{S}_2(H)$.

5) Montrer que $\big(\mathfrak{S}_2(H), \|\ \|_{\mathfrak{S}_2(H)}\big)$ est un espace de Hilbert.

Exercice 24 (*Rayon numérique d'un opérateur).*

Soit H un espace de Hilbert.

Pour tout opérateur T sur H, on note :

$$v(T) = \sup\{|(Tx \mid x)|\,;\ \|x\| = 1\}.$$

On dit que $v(T)$ est le *rayon numérique* de T.

On rappelle que T est dit auto-adjoint si $T^* = T$.

1) a) Montrer que v est une semi-norme sur l'espace $\mathscr{L}(H)$ des opérateurs sur H et que $|(Tx \mid x)| \leqslant v(T)\, \|x\|^2$ pour tout $x \in H$.

b) Montrer que si T est auto-adjoint et si $v(T) = 0$, alors $T = 0$.

Dans la suite (à part la question 6)), on suppose que H est un espace de Hilbert **complexe**, non réduit à $\{0\}$.

2) Soit U un opérateur auto-adjoint sur H. Soit $x, y \in H$.

a) Pour $t \in \mathbb{R}$, développer $\big(U(x+ty) \mid x+ty\big) - \big(U(x-ty) \mid x-ty\big)$, en en déduire que :

$$4\,|t|\,|\mathrm{Re}\,(Ux \mid y)| \leqslant v(U)\,(\|x+ty\|^2 + \|x-ty\|^2).$$

b) En déduire que $|\mathrm{Re}\,(Ux \mid y)| \leqslant v(U)\, \|x\|\, \|y\|$.

3) Montrer que, pour tout opérateur $S\colon H \to H$, on a $|\mathrm{Re}\,[(Sx \mid y) + (x \mid Sy)]| \leqslant 2\,v(S)\, \|x\|\, \|y\|$.

4) En déduire que, pour tout opérateur T sur H, on a :

$$v(T) \leqslant \|T\| \leqslant 2\,v(T)$$

(*pour tout* $x \in H$, *choisir un nombre complexe* λ *de module* 1 *tel que* $\lambda^2(T^2x \mid x) \in \mathbb{R}_+$, *puis prendre* $S = \lambda T$ *et* $y = Sx$).

5) Montrer que T est auto-adjoint si et seulement si $(Tx \mid x) \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in H$ (*remarquer que* $T^* = T$ *si et seulement si* $v(T - T^*) = 0$).

6) Donner un exemple d'opérateur $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, non nul, tel que $v(T) = 0$ (*prendre une rotation convenable*).

Exercice 25 (*Théorème ergodique de von Neumann*).

Dans cet exercice, H est un espace de Hilbert et $T\colon H \to H$ une application linéaire continue telle que $\|T\| \leqslant 1$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose :

$$S_n = \frac{1}{n}\left(I + T + \cdots + T^{n-1}\right).$$

1) Montrer que pour tout $x \in H$, on a $\|T^*(x) - x\|^2 \leqslant 2\big[\|x\|^2 - (x \mid T(x))\big]$.

2) En utilisant la question précédente, montrer que l'on a $\ker(I - T) = \ker(I - T^*)$. En déduire une décomposition de H à l'aide de $\ker(I - T)$ et de $\mathrm{im}\,(I - T)$.

3) Calculer $S_n(x)$ pour $x \in \ker(I - T)$, puis déterminer $\lim_{n\to\infty} S_n(x)$ pour $x \in \mathrm{Im}\,(I - T)$.

4) Montrer que pour tout $x \in H$, la suite $\big(S_n(x)\big)_{n\geqslant 1}$ converge vers $P(x)$, où P est la projection orthogonale sur $\ker(I - T)$.

Exercice 26.

Soit H un espace de Hilbert. On dit qu'un opérateur $T\colon H \to H$ est *positif* s'il est auto-adjoint et si $(Tx \mid x) \geqslant 0$ pour tout $x \in H$.

1) Montrer que si T est un opérateur positif, on a $|(Tx \mid y)|^2 \leqslant (Tx \mid x)\,(Ty \mid y)$ pour tous $x, y \in H$. En déduire que $\|Tx\|^2 \leqslant \|T\|\,(Tx \mid x)$ pour tout $x \in H$.

Soit $(S_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'opérateurs auto-adjoints ; on suppose cette suite *croissante* (c'est-à-dire que $S_{n+1} - S_n$ est un opérateur positif pour tout $n \geqslant 1$) et *bornée*. On pose $M = \sup_n \|S_n\|$.

2) Montrer que $\|S_{n+p}(x) - S_n(x)\|^2 \leqslant 2M[(S_{n+p}x \mid x) - (S_n x \mid x)]$ pour tout $x \in H$ et tous $n, p \in N^*$.

3) En déduire que la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers une application linéaire continue $S\colon H \to H$.

Exercice 27 (*Racine carrée d'un opérateur positif*).

Soit H un espace de Hilbert *complexe*.

1) Montrer que si $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ sont tels que $\alpha + \beta \in \mathbb{R}$ et $i(\alpha - \beta) \in \mathbb{R}$, alors $\beta = \overline{\alpha}$.

2) Soit $S \in \mathscr{L}(H)$ tel que $(Sx \mid x) \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in H$.

a) Montrer que $(Sx \mid y) + (Sy \mid x) \in \mathbb{R}$ pour tous $x, y \in H$.

b) En déduire que $S = S^*$ (*on pourra changer* y *en* iy).

On dit que $S \in \mathscr{L}(H)$ est *positif* ($S \geqslant 0$) si $(Sx \mid x) \geqslant 0$ pour tout $x \in H$. Si $S, T \in \mathscr{L}(H)$, on dit que $S \geqslant T$ si $S - T \geqslant 0$.

3) Soit T un opérateur positif et soit R_1 et R_2 deux opérateurs positifs *commutant* et tels que $R_1^2 = R_2^2 = T$.

a) Montrer que $\mathrm{im}\,(R_1 - R_2) \subseteq \ker(R_1 + R_2)$.

b) Montrer que $\ker(R_1 + R_2) = (\ker R_1) \cap (\ker R_2)$.

c) En déduire que $R_1 = R_2$ (*écrire* $H = \overline{\mathrm{im}\,(R_1 + R_2)} \oplus \ker(R_1 + R_2)$).

4) Montrer que si $T \geqslant 0$, alors $T^k \geqslant 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ (où $T^k = T \circ \cdots \circ T$, k fois).

5) Montrer que si $0 \leqslant S \leqslant Id_H$, alors $\|S\| \leqslant 1$ (*utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour la forme sesquilinéaire positive* $(x, y) \mapsto (Sx \mid y)$).

6) Soit $S_n \in \mathcal{L}(H)$ tels que $0 \leqslant S_n \leqslant S_{n+1} \leqslant Id_H$, $n \geqslant 1$.

a) Justifier l'existence de $N(x) = [\lim_{n\to\infty}(S_n x \mid x)]^{1/2}$.

b) En considérant $N(x+y)^2$ et $N(x+iy)^2$, montrer que $\sigma_x(y) = \lim\limits_{n\to\infty}(S_n x \mid y)$ existe pour tous $x, y \in H$.

c) Montrer que, pour tout $x \in H$, il existe $Sx \in H$ tel que $(Sx \mid y) = \lim_{n\to\infty}(S_n x \mid y)$ pour tout $y \in H$.

d) Montrer que l'application $S\colon x \in H \mapsto Sx \in H$ est linéaire et continue.

7) Soit $T \in \mathscr{L}(H)$ telle que $\|T\| = 1$ et $T \geqslant 0$. On pose $V = Id_H - T$.

a) Montrer que $V \geqslant 0$ et $\|V\| \leqslant 1$.

On définit $S_0 = 0$ et $S_{n+1} = (1/2)\,(V + S_n^2)$ pour $n \geqslant 0$.

b) Montrer que $0 \leqslant S_n \leqslant Id_H$.

c) Montrer que $S_n = P_n(V)$ où P_n est un polynôme à coefficients positifs.

d) Montrer que $S_{n+1} - S_n = (1/2)\,(S_n^2 - S_{n-1}^2)$, et en déduire que $S_{n+1} - S_n = Q_n(V)$, où Q_n est un polynôme à coefficients positifs.

e) En déduire que $S_{n+1} \geqslant S_n$.

f) Montrer qu'il existe un unique opérateur positif $R \in \mathscr{L}(H)$ tel que $R^2 = T$ (*utiliser les questions précédentes*). On notera $R = \sqrt{T}$

8) *Décomposition polaire.* Montrer que si $A \in \mathscr{L}(H)$ est inversible, alors A peut s'écrire de manière unique sous la forme $A = UR$, où $R \in \mathscr{L}(H)$ est positif et $U \in \mathscr{L}(H)$ est unitaire, c'est-à-dire que $UU^* = U^*U = \mathrm{Id}_H$ (*prendre* $R = \sqrt{A^*A}$).

Exercice 28 (*Décomposition de Halmos-Wold des isométries*).

Soit H un espace de Hilbert (*réel* pour simplifier) et $U\colon H \to H$ une isométrie, c'est-à-dire une application linéaire telle que $\|U(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in H$.

1) Montrer que si K est un sous-espace fermé de H, alors $U(K)$ est fermé.

2) On pose $U^k = U \circ \cdots \circ U$ (k fois), et $M = \bigcap_{k\geqslant 1} U^k(H)$. Montrer que M est fermé et que $U(M) = M$.

3) Montrer que $U_{|M}\colon M \to M$ est unitaire (*voir l'Exercice 12*).

4) Soit N l'orthogonal de $U(H)$ (dans H). Montrer que les espaces $U^k(N)$ sont deux-à-deux orthogonaux et orthogonaux à M.

On pose $Z = \bigoplus_{n=0}^{\infty} U^n(N)$.

5) Montrer que H se décompose en la somme directe orthogonale $H = M \oplus Z$.

6) Montrer que Z s'identifie à $\ell_2(N) = \{(u_n)_{n\geqslant 1}\,;\ u_n \in N \text{ et } \sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|^2 < +\infty\}$ et décrire l'action de $U_{|Z}$ quand on l'identifie à un opérateur sur $\ell_2(N)$.

7) Montrer que si E est un sous-espace fermé de Z invariant par U et non réduit à $\{0\}$, alors $U_{|E}\colon E \to E$ n'est pas unitaire (on dit alors que $U_{|Z}$ *est complètement non-unitaire*).

8) Expliciter M et Z lorsque U est le shift $S\colon \ell_2 \to \ell_2$ (*voir l'Exercice 12*).

Exercice 29 (*Inégalité isopérimétrique*).

Soit $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ une application continue et de classe C^1 par morceaux telle que $\gamma(0) = \gamma(1)$, et qui soit injective sur $]\,0,1]$ (on dit que γ est une *courbe de Jordan*). On rappelle que la longueur de γ est donnée par $L = \int_0^1 |\gamma'(s)|\, ds$.

On supposera que $\underline{L = 1}$, et on rappelle que l'on peut paramétrer γ de sorte que $|\gamma'(s)| = 1$ pour tout $s \in [0,1]$, ce que l'on supposera fait pour la suite.

On *admettra* que $\mathbb{C}\backslash\gamma([0,1])$ possède une unique composante connexe bornée, dont la surface est donnée par la formule de Green-Riemann (la courbe étant parcourue dans le sens positif) : $S = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_0^1 \gamma'(s)\overline{\gamma(s)}\, ds$.

1) Vérifier que si $\gamma(s) = a + \frac{1}{2\pi}\, e^{2\pi i s}$, $0 \leqslant s \leqslant 1$, alors $L = 1$ et $S = 1/(4\pi)$.

2) Calculer les coefficients de Fourier $\widehat{\gamma'}(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, de γ' en fonction de ceux $c_n = \widehat{\gamma}(n)$ de γ.

3) Exprimer S en fonction des c_n (*remarquer que* $S = \frac{1}{2} \operatorname{Im}\,(\gamma' \mid \gamma)_{L^2(0,1)}$).

4) Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} 4\pi^2 n^2 |c_n|^2 = 1$ (*remarquer que* $|\gamma'(s)|^2 = |\gamma'(s)|$).

5) En déduire que $S \leqslant 1/(4\pi)$.

6) Montrer que $S = 1/(4\pi)$ si et seulement si γ est un cercle de rayon $1/(2\pi)$ parcouru une fois.

Scholie. Utiliser cette méthode pour montrer l'*inégalité de Wirtinger* : pour toute fonction $f\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ de classe C^1 par morceaux, on a $\int_0^1 |f(x)|^2\, dx - \big|\int_0^1 f(x)\, dx\big|^2 \leqslant \frac{1}{4\pi^2} \int_0^1 |f'(x)|^2\, dx$, et étudier le cas d'égalité.

Exercice 30.

Soit H un espace de Hilbert et $(e_n)_{n\geqslant 1}$ une base orthonormée de H.

Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite dans H telle que, pour une certaine constante C, avec $0 < C < 1$, on ait :

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} a_n (e_n - f_n) \right\|^2 \leqslant C^2 \sum_{n=1}^{N} |a_n|^2 \tag{$*$}$$

pour toute suite finie de nombres complexes $a_1, \ldots, a_N$.

1) Montrer que pour tout $x \in H$, la série $\sum_{n\geqslant 1} (x \mid e_n)\,(e_n - f_n)$ converge dans H.

2) On note $K(x)$ la somme de la série ci-dessus. Montrer que l'on définit ainsi une application linéaire continue $K\colon x \in H \mapsto K(x) \in H$, de norme $\leqslant C$.

3) On pose $T = I - K$, où I est l'application identique de H. Montrer que $T(e_n) = f_n$ pour tout $n \geqslant 1$ et que T a un inverse continu, que l'on notera U.

4) On pose $g_n = U^*(e_n)$, pour tout $n \geqslant 1$. Montrer que $(f_k \mid g_l) = 1$ si $k = l$ et $(f_k \mid g_l) = 0$ si $k \neq l$.

5) Montrer que, pour tout $x \in H$, on a $x = \sum_{k=1}^{\infty} (x \mid g_k) f_k = \sum_{l=1}^{\infty} (x \mid f_l) g_l$.

En déduire que les deux familles $(f_n)_{n\geqslant 1}$ et $(g_n)_{n\geqslant 1}$ sont totales dans H.

Exercice 31 (*Espace de Hardy*).

On considère l'espace de Hilbert $L^2 = L^2(0,1)$, que l'on peut voir aussi comme l'espace des classes de fonctions mesurables $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de période 1 et telles que $\int_0^1 |f(t)|^2\, dt < +\infty$. On note $e_n(t) = \mathrm{e}^{2\pi int}$, pour $n \in \mathbb{Z}$.

Soit $H^2 = \{f \in L^2\,;\ \widehat{f}(n) = 0\,,\ \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}\}$, $\widehat{f}(n)$ étant le coefficient de Fourier de f en n. On l'appelle l'*espace de Hardy*.

1) a) Montrer que H^2 est un sous-espace vectoriel *fermé* de L^2.

b) Caractériser l'orthogonal de H^2.

c) Montrer que $\{e_n\,;\ n \in \mathbb{N}\}$ est total dans H^2.

2) Montrer que si $f \in H^2$ et f est à valeurs réelles, alors f est constante.

3) a) Montrer que si $f \in H^2$, il existe une fonction analytique $F\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ telle que $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n)\, z^n$ et $\sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} |F(r\,\mathrm{e}^{it})|^2\, \frac{dt}{2\pi} = \|f\|_2^2$ (*voir l'Exercice 16*).

b) Réciproquement, si $F\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ telle que $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ et :

$$\sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} |F(r\,\mathrm{e}^{it})|^2\, \frac{dt}{2\pi} < +\infty\,,$$

montrer qu'il existe $f \in H^2$ telle que $\widehat{f}(n) = c_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4) Soit A un borélien de $[0,1]$ et soit $V_A = \{f \in H^2\,;\ f = 0 \text{ p.p. sur } A\}$.

a) Montrer que V_A est un sous-espace vectoriel *fermé* de H^2.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si f est dans H^2, alors le produit $f\,e_n$ aussi.

c) Soit P_A la projection orthogonale sur V_A et $u = P_A(e_0)$.

(*i*) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u\,e_n$ est orthogonale à $e_0 - u$.

(*ii*) En déduire que $\int_0^1 |u(t)|^2 \mathrm{e}^{2\pi int}\, dt = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(*iii*) En déduire que $|u|$ est constante (presque partout).

On suppose maintenant que A est de mesure strictement positive.

d) Montrer que $u = 0$. Que peut-on en conclure pour e_0 par rapport à V_A ?

e) Soit $f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, e_n \in V_A$.

(*i*) Montrer, en utilisant 4) c), que $c_0 = 0$, puis que $e_{-1} f \in H^2$.

(*ii*) En déduire que $e_{-1} f$ est orthogonal à e_0, puis que f est orthogonal à e_1.

f) En conclure que $V_A = \{0\}$.

Exercice 32 (*Opérateurs à noyau et test de Schur*).

Soit $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ un espace mesuré σ-fini, et soit $K\colon \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable.

1) On suppose qu'il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\int_\Omega \left(\int_\Omega |K(x,y)|\, |f(y)|\, d\mu(y) \right)^2 d\mu(x) \leqslant C^2\, \|f\|_2^2$$

pour toute $f \in L^2(\mu)$. Montrer que pour toute $f \in L^2(\mu)$, la fonction $y \mapsto K(x,y)\, f(y)$ est intégrable sur Ω pour presque tout $x \in \Omega$, que la fonction $T_K f$ définie presque partout par la formule :

$$T_K f(x) = \int_\Omega K(x,y)\, f(y)\, d\mu(y)$$

appartient à $L^2(\mu)$, et que l'application linéaire $T_K \colon L^2(\mu) \to L^2(\mu)$ ainsi définie est continue $\|T_K\| \leqslant C$.

On dira que K est un *noyau borné* sur $L^2(\mu)$.

2) Montrer que si K est un noyau borné sur $L^2(\mu)$, alors $T_K^* = T_{K^*}$, où $K^*(x,y) = \overline{K(y,x)}$.

3) Montrer que si $K \in L^2(\Omega \times \Omega, \mu \otimes \mu)$, alors K est un noyau borné sur $L^2(\mu)$.

4) *Test de Schur.* Dans cette question, on suppose qu'il existe une fonction mesurable strictement positive w sur Ω et une constante $C > 0$ telles que les propriétés (H_1) et (H_2) suivantes soient vérifiées :

(H_1) $\int_\Omega |K(x,y)|\, w(y)\, d\mu(y) \leqslant C\, w(x)$ pour presque tout $x \in \Omega$;

(H_2) $\int_\Omega |K(x,y)|\, w(x)\, d\mu(x) \leqslant C\, w(y)$ pour presque tout $y \in \Omega$.

a) Soit $f \in L^2(\mu)$. Montrer que pour tout $x \in \Omega$, on a :

$$\int_\Omega |K(x,y)|\, |f(y)|\, d\mu(y) \leqslant C^{1/2} w(x)^{1/2} \Big(\int_\Omega |K(x,y)|\, \frac{|f(y)|^2}{w(y)}\, d\mu(y) \Big)^{1/2}.$$

b) Montrer que K est un noyau borné sur $L^2(\mu)$, avec $\|T_K\| \leqslant C$.

Exercice 33 (*Matrice de Hilbert*).

Montrer qu'on définit un opérateur borné $H \colon \ell_2 \to \ell_2$ en posant :

$$(Hx)_i = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{i+j}\, x_j\,,$$

et que l'on a $\|H\| \leqslant \pi$ (*utiliser le test de Schur de l'Exercice 32, pour la mesure de comptage sur* $\Omega = \mathbb{N}^*$, *avec* $w(i) = 1/\sqrt{i}$).

Exercice 34 (*Opérateur de moyenne*).

1) Montrer que la formule $Af(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\, dt$, $x > 0$, définit un opérateur borné $A \colon L^2(\mathbb{R}_+^*) \to L^2(\mathbb{R}_+^*)$, et que $\|A\| \leqslant 2$ (*utiliser le test de Schur de l'Exercice 32 avec* $w(t) = t^{-\alpha}$, *pour* $\alpha > 0$ *convenablement choisi*).

2) Montrer qu'en fait $\|A\| = 2$ (*utiliser* $f_\beta(t) = \mathbb{1}_{]0,1]}(t)\, t^{-\beta}$, $0 < \beta < 1/2$).

3) Déterminer l'adjoint de l'opérateur A.

4) Montrer que l'on a $A^*A = A + A^* = AA^*$. En déduire que l'opérateur $U = I - A$ est unitaire (c'est-à-dire que U est inversible et que $U^{-1} = U^*$).

Exercice 35 (*Théorème de prolongement de Tietze*).

Soit (Y, d) un espace métrique. On note $\mathscr{C}_b(Y)$ l'espace vectoriel des fonctions réelles continues et bornées sur Y, muni de la norme uniforme : $\|f\|_Y = \sup_{y \in Y} |f(y)|$.

1) Montrer que $\mathscr{C}_b(Y)$ est un espace de Banach.

Soit X une partie compacte non vide de Y, et soit $\mathscr{C}(X)$ l'espace des fonctions réelles continues sur X muni de la norme uniforme $\|g\|_X = \sup_{x \in X} |g(x)|$. Pour $f \in$

$\mathscr{C}_b(Y)$, on note $R_X(f) = f_{|X}$ la restriction de f à X. Cela définit une application linéaire continue $R_X : \mathscr{C}_b(Y) \to \mathscr{C}(X)$ de norme 1.

2) Soit $h \in \mathscr{C}_b(Y)$ non identiquement nulle sur X.

a) On pose $U(t) = \frac{t}{\max(|t|,1)}$ pour $t \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction définie par $S_h = \|R_X(h)\|_X \, U\big(\frac{h}{\|R_X(h)\|_X}\big)$ est continue et bornée sur Y.

b) Montrer que S_h et h coïncident sur X.

c) En utilisant la compacité de X, montrer que $\|S_h\|_Y = \|R_X(h)\|_X$.

3) a) Pour $x \in X$ fixé, montrer que $f_x(y) = \min\big(d(x,y), 1\big)$, $y \in Y$, définit une fonction continue bornée sur Y.

b) En déduire que $\operatorname{im} R_X$ est dense dans $\mathscr{C}(X)$ (*on remarquera que* $\operatorname{im} R_X$ *est une sous-algèbre de* $\mathscr{C}(X)$).

4) On veut maintenant montrer le *Théorème de prolongement de Tietze* : toute fonction continue réelle g sur X peut être prolongée en une fonction f continue sur Y et telle que $\|f\|_Y = \|g\|_X$. Soit donc $g \in \mathscr{C}(X)$, non identiquement nulle.

a) Montrer qu'il existe une suite de fonctions $h_n \in \mathscr{C}_b(Y)$, $n \geqslant 0$, vérifiant $\|R_X(h_n) - g\|_X \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et $\|R_X(h_{n+1}) - R_X(h_n)\|_X \leqslant 2^{-(n+1)}\|g\|_X$ pour tout $n \geqslant 1$.

b) Montrer que la série $\sum_{n=0}^{\infty} S_{h_{n+1}-h_n}$ converge dans $\mathscr{C}_b(Y)$.

c) En déduire qu'il existe $h \in \mathscr{C}_b(Y)$ telle que $R_X(h) = g$.

d) Montrer que l'on peut modifier h en une fonction $f \in \mathscr{C}_b(Y)$ telle que $R_X(f) = g$ et $\|f\|_Y = \|g\|_X$ (*tronquer* h).

Chapitre III

CONVOLUTION ET INTÉGRALES DE FOURIER

On rédigera ce chapitre pour des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, mais tout se transcrit sur $\mathbb{R}^d$ en remplaçant le produit xy par le produit scalaire $(x \mid y) = x_1y_1 + \cdots + x_dy_d$ de $\mathbb{R}^d$.

III.1. Convolution

III.1.1. Introduction

La convolution permet de <u>régulariser</u> les fonctions : la convolée de deux fonctions hérite des "bonnes propriétés" de chacune de deux fonctions dont on est parti ; elle peut même en avoir de meilleures.

Si $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, on dit que *la convolée* (ou *le produit de convolution*) de f et g en $x \in \mathbb{R}$ *existe* si la fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & f(x-t)\,g(t) \end{array}$$

est intégrable sur $\mathbb{R}$ (pour la mesure de Lebesgue). On pose alors :

$$\boxed{(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)\,g(t)\,dt}$$

On notera, et c'est le *point essentiel*, que dans l'intégrale, x et t sont liés par la relation $\boxed{(x-t)+t = x}$.

En faisant le changement de variable $u = x - t$, on a, grâce à l'invariance de la mesure de Lebesgue par translation :

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(u)\,g(x-u)\,du\,;$$

donc $(f * g)(x)$ existe si et seulement si $(g * f)(x)$ existe, et on a l'égalité :

$$\boxed{(f * g)(x) = (g * f)(x)}.$$

Pour obtenir une *nouvelle fonction* $f * g$, on va chercher des conditions pour que $(f * g)(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$, ou au moins pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.

Il n'y a pas vraiment de condition générale qui permette d'assurer l'existence de $f * g$. Cela est dû au fait que, si l'on a :

$$L^{p_2}(0,1) \subseteq L^{p_1}(0,1) \subseteq L^1(0,1)$$

pour $1 \leqslant p_1 \leqslant p_2$, par contre aucun des espaces $L^p(\mathbb{R})$ n'en contient un autre.

Nous allons regarder trois situations.

III.1.2. Existence dans le cas "$L^p - L^q$"

Théorème III.1.1. *Soit* $\boxed{1 < p < \infty}$ *et* $\boxed{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1}$.

Si $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $g \in L^q(\mathbb{R})$, alors $(f * g)(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$ et de plus $\boxed{f * g \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R})}$.

$\mathscr{C}_0(\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ qui tendent vers 0 à l'infini.

Cela s'applique en particulier lorsque $p = q = 2$.

La première assertion résulte de l'inégalité de Hölder :

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x-t)\, g(t)|\, dt \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-t)|^p\, dt \right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}} |g(t)|^q\, dt \right)^{1/q} = \|f\|_p\, \|g\|_q < +\infty\,;$$

cela entraîne que la fonction $f * g$ est définie sur $\mathbb{R}$, est bornée, et :

$$\|f * g\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |(f * g)(x)| \leqslant \|f\|_p\, \|g\|_q.$$

Pour la seconde assertion, on aura besoin de résultats auxiliaires. Le premier généralise ce que l'on a déjà vu pour $L^2(\mathbb{R})$ (Théorème II.2.8).

Théorème III.1.2. *Pour $1 \leqslant p < \infty$, l'espace $\mathscr{K}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$.*

Preuve. On sait que l'espace $\mathscr{E}t_p(\mathbb{R})$ des fonctions étagées qui sont dans $L^p(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$. Il suffit donc de montrer que si $\lambda(A) < +\infty$, alors $\mathbb{1}_A$ peut être approchée par des fonctions de $\mathscr{K}(\mathbb{R})$.

Par *régularité de la mesure de Lebesgue*, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K et un ouvert Ω tels que :

$$\begin{cases} K \subseteq A \subseteq \Omega \\ \lambda(\Omega \setminus K) \leqslant \varepsilon^p. \end{cases}$$

Soit N assez grand pour que $K \subseteq]-N,N[$; alors les fermés K et $F = (\Omega \cap]-N,N[)^c$ sont disjoints et la fonction φ, définie par :

$$\varphi(t) = \frac{\operatorname{dist}(t,F)}{\operatorname{dist}(t,F) + \operatorname{dist}(t,K)}$$

est continue, à support compact (contenu dans $[-N,N]$) et vérifie :

$$\begin{cases} 0 \leqslant \varphi(t) \leqslant 1\,; & \\ \varphi(t) = 1 & \text{si } t \in K\,; \\ \varphi(t) = 0 & \text{si } t \notin \Omega \end{cases}$$

(on vient de montrer un cas particulier du Théorème d'Urysohn). On a :

$$\|\mathbb{1}_A - \varphi\|_p^p \leqslant \lambda(\Omega \setminus K) \leqslant \varepsilon^p. \qquad \square$$

Remarque. Soit $\mathscr{K}_n(\mathbb{R}) = \{f \in \mathscr{K}(\mathbb{R})\,;\ \operatorname{supp} f \subseteq [-n,n]\}$ muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|$. L'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{K}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{C}([-n,n]) \\ f & \longmapsto & f_{|[-n,n]} \end{array}$$

est une <u>isométrie</u> (non surjective). Puisque $\mathscr{C}([-n,n])$ est séparable, $\mathscr{K}_n(\mathbb{R})$ l'est donc aussi. Par conséquent :

Corollaire III.1.3. *L'espace $L^p(\mathbb{R})$ est séparable pour* $1 \leqslant p < \infty$.

Preuve. Pour tout $N \geqslant 1$, choisissons une partie dénombrable Δ_N dense dans $\mathscr{K}_N(\mathbb{R})$. Montrons qu'alors l'ensemble dénombrable $\Delta = \bigcup_{N\geqslant 1} \Delta_N$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$.

Soit $f \in L^p(\mathbb{R})$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g \in \mathscr{K}(\mathbb{R})$ telle que $\|f - g\|_p \leqslant \varepsilon/2$. Soit $N \geqslant 1$ tel que $\operatorname{supp} g \subseteq [-N,N]$. Alors $g \in \mathscr{K}_N(\mathbb{R})$; il existe donc $\varphi \in \Delta_N$ telle que :

$$\|g - \varphi\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} |g(t) - \varphi(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\,(2N)^{1/p}}.$$

Il en résulte que :

$$\|g - \varphi\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |g(t) - \varphi(t)|^p\,dt\right)^{1/p} = \left(\int_{-N}^{N} |g(t) - \varphi(t)|^p\,dt\right)^{1/p} \leqslant \varepsilon/2\,,$$

et $\|f - \varphi\|_p \leqslant \varepsilon$. $\square$

Le résultat suivant est **essentiel** et sera souvent utilisé par la suite.

Théorème III.1.4. *Soit* $1 \leqslant p < \infty$ *et* $f \in L^p(\mathbb{R})$. *On pose* $\boxed{f_x(t) = f(t-x)}$. *Alors l'application*

$$\begin{array}{cccc} \tau_f\colon & \mathbb{R} & \longrightarrow & L^p(\mathbb{R}) \\ & x & \longmapsto & f_x \end{array}$$

est **uniformément continue**.

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$. On cherche $\delta > 0$ tel que :

$$|x-y| \leqslant \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \|f_x - f_y\|_p \leqslant \varepsilon.$$

a) Montrons d'abord ce résultat lorsque $f = g \in \mathscr{K}(\mathbb{R})$.

Soit $A > 0$ tel que $\operatorname{supp} g \subseteq [-A, A]$.

Comme toute fonction continue à support compact est uniformément continue (conséquence du Théorème de Heine), on a :

$$(\exists \delta > 0) \quad (\forall x, y \in \mathbb{R}) \qquad |x-y| \leqslant \delta \quad \Rightarrow \quad |g(x) - g(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3(4A)^{1/p}}\,.$$

Choisissons un tel $\delta > 0$ de sorte que $\delta \leqslant A$.

Alors, pour $|x-y| \leqslant \delta$, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |g(t-x) - g(t-y)|^p\, dt &= \int_{\mathbb{R}} |g(u) - g(u+x-y)|^p\, du \\ &= \int_{-A-\delta}^{A+\delta} |g(u) - g(u+x-y)|^p\, du \\ &\leqslant 2(A+\delta)\, \frac{\varepsilon^p}{3^p(4A)} \leqslant \frac{\varepsilon^p}{3^p}\,, \end{aligned}$$

c'est-à-dire $\|g_x - g_y\|_p \leqslant \varepsilon/3$.

b) Soit maintenant $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $g \in \mathscr{K}(\mathbb{R})$ telle que $\|f-g\|_p \leqslant \varepsilon/3$.

Il ne reste plus qu'à remarquer que, comme la mesure de Lebesgue est invariante par translation, on a :

$$f \in L^p(\mathbb{R}) \quad \Longrightarrow \quad f_x \in L^p(\mathbb{R})$$

et $\|f_x\|_p = \|f\|_p$.

Alors, si δ est le module d'uniforme continuité de g introduit au a), on a, pour $|x-y| \leqslant \delta$:

$$\begin{aligned} \|f_x - f_y\|_p &\leqslant \|f_x - g_x\|_p + \|g_x - g_y\|_p + \|g_y - f_y\|_p \\ &= \|(f-g)_x\|_p + \|g_x - g_y\|_p + \|(g-f)_y\|_p \\ &= 2\|f-g\|_p + \|g_x - g_y\|_p \leqslant \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Preuve du Théorème III.1.1. La continuité vient du Théorème III.1.4. En effet, par l'inégalité de Hölder, la forme linéaire

$$\begin{array}{cccc} \Phi_g : & L^p(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \\ & h & \longmapsto & \Phi_g(h) = \int_{\mathbb{R}} h(t) g(t)\, dt \end{array}$$

est, pour $g \in L^q(\mathbb{R})$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, continue :

$$|\Phi_g(h)| \leqslant \|g\|_q\, \|h\|_p\,, \qquad \forall h \in L^p(\mathbb{R})\,.$$

Alors, si l'on pose :

$$\boxed{\check{f}(t) = f(-t)}$$

(de sorte que $\check{f}_{-x}(t) = f(x-t)$), on a :

$$(f*g)(x) = \Phi_g(\check{f}_{-x}) = (\Phi_g \circ \tau_{\check{f}})(-x)\,,$$

d'où la continuité de $f*g$.

On a ensuite déjà vu que :

$$\|f*g\|_\infty \leqslant \|g\|_q\,\|f\|_p.$$

Il reste à voir que :

$$(f*g)(x) \underset{|x|\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Soit pour cela $\varepsilon > 0$, et choisissons $\varphi \in \mathscr{K}(\mathbb{R})$ telle que :

$$\begin{cases} \|f-\varphi\|_p & \leqslant \varepsilon \\ \|f-\varphi\|_p\,\|g\|_q & \leqslant \varepsilon/2, \end{cases}$$

puis $\psi \in \mathscr{K}(\mathbb{R})$ telle que :

$$\|g-\psi\|_q\,(\|f\|_p + \varepsilon) \leqslant \varepsilon/2.$$

Alors :

$$\begin{aligned} \|f*g-\varphi*\psi\|_\infty &\leqslant \|f*g-\varphi*g\|_\infty + \|\varphi*g-\varphi*\psi\|_\infty \\ &\leqslant \|f-\varphi\|_p\,\|g\|_q + \|\varphi\|_p\,\|g-\psi\|_q \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + (\|f\|_p+\varepsilon)\,\|g-\psi\|_q \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Soit maintenant $A > 0$ tel que $\varphi(t) = 0$ et $\psi(t) = 0$ pour $|t| \geqslant A$. Pour $|x| \geqslant 2A$, on a $\psi(t) = 0$ si $|t| \geqslant A$ et $\varphi(x-t) = 0$ si $|t| \leqslant A$; donc $(\varphi*\psi)(x) = 0$. Par conséquent, pour $|x| \geqslant 2A$, on a $|(f*g)(x)| \leqslant |(\varphi*\psi)(x)| + \|f*g-\varphi*\psi\|_\infty \leqslant \varepsilon$. □

III.1.3. Existence dans le cas "$L^1 - L^\infty$"

Commençons par définir l'espace L^∞.

Soit $(X, \mathscr{T}, m)$ un espace mesuré.

On dit que l'application mesurable $f\colon X \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est *essentiellement bornée* s'il existe un nombre $M < +\infty$ tel que :

$$|f(t)| \leqslant M \quad \text{pour presque tout } t \in X\,.$$

On appelle *borne supérieure essentielle* de f le nombre

$$\boxed{\|f\|_\infty \overset{\text{déf}}{=} \operatorname*{sup\,ess}_{t\in X} |f(t)| = \inf\{M \geqslant 0\,;\ |f| \leqslant M\ m-p.p.\}}\,.$$

Remarque. Si $m = \lambda_d$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ et $X \subseteq \mathbb{R}^d$ une partie mesurable telle que $\Omega \subseteq X \subseteq \overline{\Omega}$, où Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^d$ dont la frontière est de mesure nulle, alors, pour toute fonction <u>continue</u> et bornée $f\colon X \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on a $\operatorname{sup\,ess}_{t\in X} |f(t)| = \sup_{t\in X} |f(t)|$. En effet, on a $\operatorname{sup\,ess}_{t\in X} |f(t)| = \operatorname{sup\,ess}_{t\in\Omega} |f(t)|$ car $\lambda_d(X\setminus\Omega) = 0$, et $\sup_{t\in X} |f(t)| = \sup_{t\in\Omega} |f(t)|$, par continuité. Or on a évidemment $\operatorname{sup\,ess}_{t\in\Omega} |f(t)| \leqslant \sup_{t\in\Omega} |f(t)|$, et, d'autre part, pour tout $M < \sup_{t\in\Omega} |f(t)|$, l'ensemble $\{t \in \Omega\,;\ |f(t)| > M\}$ est un ouvert non vide ; il est donc de mesure non nulle, de sorte que $M \leqslant \operatorname{sup\,ess}_{t\in\Omega} |f(t)|$ et donc $\sup_{t\in\Omega} |f(t)| \leqslant \operatorname{sup\,ess}_{t\in\Omega} |f(t)|$. Ainsi la notation $\|f\|_\infty$ n'offrira en général pas d'ambiguïté.

Proposition III.1.5. *On a :*

$$\boxed{|f| \leqslant \|f\|_\infty \qquad m-p.p.}\,.$$

En d'autre termes, la borne inférieure de la définition est atteinte.

Preuve. Par définition, l'ensemble $N_n = \{t \in X\,;\ |f(t)| \geqslant \|f\|_\infty + 1/n\}$ est m-négligeable ; donc $\bigcup_{n\geqslant 1} N_n = \{t \in X\,;\ |f(t)| > \|f\|_\infty\}$ aussi. □

On note $\mathscr{L}^\infty(X,\mathscr{T},m) = \mathscr{L}^\infty(m)$ l'espace de toutes les fonctions mesurables $f\colon X \to \mathbb{K}$ qui sont essentiellement bornées ; $\|\,.\,\|_\infty$ est une semi-norme sur $\mathscr{L}^\infty(m)$. L'espace-quotient par le sous-espace des fonctions m-négligeables (qui sont celles pour lesquelles $\|\,.\,\|_\infty = 0$) est noté par $L^\infty(X,\mathscr{T},m) = L^\infty(m)$; $\|\,.\,\|_\infty$ définit une *norme* (voir l'Exercice 15 du Chapitre I) sur $L^\infty(m)$, appelée la *norme supérieure essentielle*, qui en fait un *espace de Banach*. Montrons ce dernier point. Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de Cauchy dans $L^\infty(m)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n(\varepsilon) \geqslant 1$ tel que $\|f_n - f_k\|_\infty \leqslant \varepsilon$ pour $n,k \geqslant n(\varepsilon)$. Soit $N_{n,k}(\varepsilon) = \{t \in X\,;\ |f_n(t) - f_k(t)| > \varepsilon\}$; on a $m[N_{n,k}(\varepsilon)] = 0$ pour $n,k \geqslant n(\varepsilon)$. Alors, si $N = \bigcup_{j\geqslant 1}\bigcup_{n,k\geqslant n(1/j)} N_{n,k}(1/j)$, on a $m(N) = 0$ et $|f_n(t) - f_k(t)| \leqslant 1/j$ pour tout $t \in X \setminus N$ lorsque $n,k \geqslant n(1/j)$. Ainsi $(f_n)_{n\geqslant 1}$ est uniformément de Cauchy sur $X \setminus N$. Elle converge donc uniformément sur $X \setminus N$. Si l'on note f la limite prolongée par 0 sur N, f est mesurable et bornée sur $X \setminus N$, donc essentiellemnet bornée sur X, et l'on a $\|f_n - f\|_\infty = \operatorname{sup\,ess}_{t\in X} |f_n(t) - f(t)| \leqslant \sup_{t\in X\setminus N} |f_n(t) - f(t)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. □

Si $f \in L^1(m)$ et $g \in L^\infty(m)$, on a : $\boxed{\left|\int_{\mathbb{R}} f(t)\,g(t)\,dm(t)\right| \leqslant \|g\|_\infty\,\|f\|_1}$
(c'est l'analogue de l'inégalité de Hölder pour $p = 1$ et $q = \infty$) ; l'application

$$\begin{array}{rccc} \Phi_g\colon & L^1(m) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & f & \longmapsto & \int_X f\,g\,dm \end{array}$$

est donc une forme linéaire continue sur $L^1(m)$.

Théorème III.1.6. *Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^\infty(\mathbb{R})$, alors $(f * g)(x)$ existe pour* <u>*tout*</u> *$x \in \mathbb{R}$ et $f * g \in \mathscr{C}_b(\mathbb{R})$.*

$\mathscr{C}_b(\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}$.

Preuve. On fait comme dans la preuve du Théorème III.1.1 (le Théorème III.1.4 est vrai pour $p = 1$).

On notera aussi que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a$|(f * g)(x)| \leqslant \|f\|_1\,\|g\|_\infty$. □

Remarque. On ne peut <u>pas</u> dire que $f * g$ tend vers 0 à l'infini, car la preuve donnée dans le cas $L^p - L^q$ utilisait la densité de $\mathscr{K}(\mathbb{R})$ dans $L^p(\mathbb{R})$ et $L^q(\mathbb{R})$; or $\mathscr{K}(\mathbb{R})$ n'est <u>pas</u> dense dans $L^\infty(\mathbb{R})$: son adhérence est $\mathscr{C}_0(\mathbb{R})$.

Ce n'est d'ailleurs en général pas vrai, comme le montre l'exemple suivant : prenons $g = \mathbb{1}$, la fonction constante égale à 1, qui est dans $L^\infty(\mathbb{R})$; pour toute $f \in L^1(\mathbb{R})$, on a :

$$(f * \mathbb{1})(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}(x-t)\,f(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)\,dt\,;$$

$f * \mathbb{1}$ est donc constante (et non nulle si l'intégrale de f n'est pas nulle).

III.1.4. Existence dans le cas "$L^1 - L^1$"

Théorème III.1.7. *Si f et g sont dans $L^1(\mathbb{R})$, alors $(f * g)(x)$ existe pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, et la fonction $f * g$ est dans $L^1(\mathbb{R})$. De plus*

$$\boxed{\|f * g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \, \|g\|_1} .$$

Preuve. Cela résulte du Théorème de Fubini : on considère la fonction définie par :

$$F(t,x) = f(x-t)\, g(t) .$$

F est mesurable sur $\mathbb{R}^2$ et, grâce à l'invariance de la mesure de Lebesgue par translation, on a :

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} |F(t,x)|\, dt\, dx &= \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} |f(x-t)|\, dx \right] |g(t)|\, dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \|f\|_1 \, |g(t)|\, dt = \|f\|_1 \, \|g\|_1 < +\infty ; \end{aligned}$$

donc F est intégrable sur $\mathbb{R}^2$, et il en résulte que, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x-t)\, g(t)|\, dt = \int_{\mathbb{R}} |F(t,x)|\, dt < +\infty,$$

et par conséquent

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)\, g(t)\, dt$$

existe pour ces $x \in \mathbb{R}$, et donc presque partout. De plus, la fonction

$$x \longmapsto (f * g)(x) ,$$

définie presque partout, est intégrable sur $\mathbb{R}$, et :

$$\int_{\mathbb{R}} |(f * g)(x)|\, dx \leqslant \iint_{\mathbb{R}^2} |F(t,x)|\, dt\, dx \leqslant \|f\|_1 \, \|g\|_1,$$

soit $\|f * g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \, \|g\|_1$. □

Proposition III.1.8. *$L^1(\mathbb{R})$ est une algèbre de Banach commutative pour la convolution.*

Preuve. On a déjà vu la commutativité. Seule l'associativité n'est pas évidente. Pour la voir, soit $f, g, h \in L^1(\mathbb{R})$ et prenons $x \in \mathbb{R}$ tel que $\big[(|f| * |g|) * |h|\big](x) < +\infty$; cela a lieu pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, et alors $[(f*g)*h](x)$ existe. On a :

$$\begin{aligned}
[(f*g)*h](x) &= \int_{\mathbb{R}} (f*g)(x-t)\,h(t)\,dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(x-t-u)\,g(u)\,du\right] h(t)\,dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(x-v)\,g(v-t)\,dv\right] h(t)\,dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(x-v) \left[\int_{\mathbb{R}} g(v-t)\,h(t)\,dt\right] dv\,,
\end{aligned}$$

en utilisant le Théorème de Fubini, ce qui est possible car :

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |f(x-v)\,g(v-t)\,h(t)|\,dt\,dv = \big[(|f|*|g|)*|h|\big](x) < +\infty.$$

Donc :

$$[(f*g)*h](x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-v)\,(g*h)(v)\,dv = [f*(g*h)](x),$$

ce que l'on voulait montrer. □

Remarque. On verra que cette algèbre n'a pas d'élément unité.

Il existe néanmoins une notion suppléant ce manque, celle d'*unité approchée.*

Théorème III.1.9. *Soit p une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ telle que $p \leqslant 1$, c'est-à-dire que : $p \in L^1(\mathbb{R})$, $0 \leqslant p \leqslant 1$ et $\int_{\mathbb{R}} p(t)\,dt = 1$.*

Posons, pour $a > 0$:

$$\boxed{p_a(t) = \frac{1}{a}\,p\left(\frac{t}{a}\right)}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Alors :

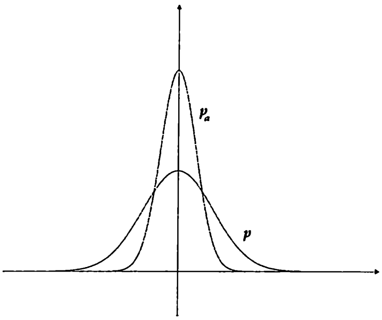
a) Pour toute $g \in \mathscr{C}_b(\mathbb{R})$, on a $\boxed{\lim_{a\to 0}(g*p_a)(x) = g(x)}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) Pour $\boxed{1 \leqslant r < \infty}$ et pour toute $f \in L^r(\mathbb{R})$, on a $f*p_a \in L^r(\mathbb{R})$ et :

$$\boxed{\lim_{a\to 0}(f*p_a) = f},$$

la limite étant prise pour la norme de $L^r(\mathbb{R})$.

De plus, si $g \in \mathscr{C}_b(\mathbb{R})$ est uniformément continue, alors la convergence de $g*p_a$ vers g est uniforme.



Remarque 1. Si les fonctions sont définies sur $\mathbb{R}^d$, on a le même résultat, à condition de remplacer la définition de p_a par :

$$p_a(t) = \frac{1}{a^d}\, p\left(\frac{t}{a}\right), \qquad t \in \mathbb{R}^d.$$

Remarque 2. Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors $f * p_a \in \mathscr{C}_b(\mathbb{R})$; en effet, on a $0 \leqslant p_a \leqslant 1/a$; donc $p_a \in L^\infty(\mathbb{R})$, et on peut utiliser le Théorème III.1.6.

Lorsque $f \in L^r(\mathbb{R})$, avec $1 < r < \infty$, on a $f * p_a \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R})$. En effet, comme $0 \leqslant p \leqslant 1$, on a $0 \leqslant p^s \leqslant p$ (avec $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$).

Définition III.1.10. *On appellera* unité approchée pour la convolution *toute famille de fonctions $p_a \in L^1(\mathbb{R})$, indexée par $a > 0$, telles que $\int_{\mathbb{R}} p_a(t)\, dt = 1$, et vérifiant les conditions a) et b) du Théorème III.1.9.*

Parfois on ne considérera que les valeurs $a = 1/n$; l'unité approchée sera alors noté $(p_n)_{n \geqslant 1}$ (au lieu de $p_{1/n}$).

Preuve. Remarquons d'abord que :

$$\int_{\mathbb{R}} p_a(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}} p(t)\, dt = 1\,;$$

donc $p_a \in L^1(\mathbb{R})$.

a) Par conséquent $g * p_a \in \mathscr{C}_b(\mathbb{R})$, puisque $g \in \mathscr{C}_b(\mathbb{R}) \subseteq L^\infty(\mathbb{R})$.

En particulier, $g * p_a(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$. Comme $\int_{\mathbb{R}} p_a(t)\, dt = 1$, on a :

$$\begin{aligned}
(g * p_a)(x) - g(x) &= \int_{\mathbb{R}} [g(x-t) - g(x)]\, p_a(t)\, dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} [g(x-t) - g(x)]\, \frac{1}{a}\, p\left(\frac{t}{a}\right) dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} [g(x-au) - g(x)]\, p(u)\, du \\
&\xrightarrow[a\to 0]{} 0,
\end{aligned}$$

par le Théorème de convergence dominée, puisque :

$$|g(x-au)-g(x)|\,p(u) \leqslant 2\,\|g\|_\infty\, p(u)\,.$$

Lorsque g est en plus uniformément continue, cette uniforme continuité s'exprime par $\sup_{x\in\mathbb{R}} |g(x-au)-g(x)| \xrightarrow[a\to 0]{} 0$ pour tout $u\in\mathbb{R}$. Si l'on note $S_a(u) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |g(x-au)-g(x)|$, on a, d'après le calcul précédent :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |(g*p_a)(x)-g(x)| \leqslant \int_{\mathbb{R}} \sup_{x\in\mathbb{R}} |g(x-au)-g(x)|\,p(u)\,du = \int_{\mathbb{R}} S_a(u)\,p(u)\,du \xrightarrow[a\to 0]{} 0\,,$$

par le Théorème de convergence dominée, puisque $S_a(u)\,p(u) \xrightarrow[a\to 0]{} 0$ pour tout $u\in\mathbb{R}$ et que $0\leqslant S_a(u)\,p(u) \leqslant 2\,\|g\|_\infty\, p(u)$.

b) D'après la Remarque 2 précédente, $(f*p_a)(x)$ existe pour tout $x\in\mathbb{R}$. Comme dans le *a*), écrivons :

$$(f*p_a)(x)-f(x) = \int_{\mathbb{R}} [f(x-t)-f(x)]\,p_a(t)\,dt\,.$$

En utilisant l'inégalité de Hölder pour la mesure de probabilité $p_a.\lambda$, on obtient :

$$\begin{aligned} |(f*p_a)(x)-f(x)| &\leqslant \int_{\mathbb{R}} |f(x-t)-f(x)|\,d(p_a.\lambda)(t) \\ &\leqslant \left[\int_{\mathbb{R}} |f(x-t)-f(x)|^r\,d(p_a.\lambda)(t)\right]^{1/r} \\ &= \left[\int_{\mathbb{R}} |f(x-t)-f(x)|^r\,p_a(t)\,dt\right]^{1/r}\ ; \end{aligned}$$

d'où, en utilisant le Théorème de Fubini-Tonelli :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |(f*p_a)(x)-f(x)|^r\,dx &\leqslant \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} |f(x-t)-f(x)|^r\,dx\right] p_a(t)\,dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \|f_t - f\|_r^r\, p_a(t)\,dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(-t)\,p_a(t)\,dt = (g*p_a)(0) \xrightarrow[a\to 0]{} g(0) = 0\,, \end{aligned}$$

grâce à la partie *a*), puisque la fonction :

$$g\colon t \longmapsto \|f_{-t} - f\|_r^r$$

est continue (car $\tau_f\colon t\in\mathbb{R} \longmapsto f_t \in L^r(\mathbb{R})$ l'est, par le Théorème III.1.4) et bornée (par $2^r\|f\|_r^r$).

On notera que, au passage, on a obtenu $\|f*p_a - f\|_r^r \leqslant (g*p_a)(0) < +\infty$; donc $(f*p_a - f)\in L^r(\mathbb{R})$ et par conséquent $f*p_a\in L^r(\mathbb{R})$. □

III.1.5. Propriétés de régularité de la convolution

On n'étudiera pas toutes les possibilités et l'on se contentera de donner deux résultats.

III.1.5.1. Densité des fonctions indéfiniment dérivables à support compact

On note $\mathscr{D}^k(\mathbb{R})$ $(0 \leqslant k \leqslant \infty)$ l'espace des fonctions k fois continûment dérivables sur $\mathbb{R}$ à support compact : $\mathscr{D}^0(\mathbb{R}) = \mathscr{K}(\mathbb{R})$ et $\mathscr{D}^k(\mathbb{R}) = \mathscr{K}(\mathbb{R}) \cap \mathscr{C}^k(\mathbb{R})$. L'espace $\mathscr{D}^\infty(\mathbb{R})$ des fonctions indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ à support compact est simplement noté $\mathscr{D}(\mathbb{R})$.

Théorème III.1.11. *Si $f \in L^r(\mathbb{R})$ $(1 \leqslant r < \infty)$ et $\varphi \in \mathscr{D}^k(\mathbb{R})$, alors $f * \varphi$ est k fois continûment dérivable.*

De plus $(f * \varphi)^{(h)} = f * \varphi^{(h)}$ pour $0 \leqslant h \leqslant k$.

Preuve. C'est une conséquence des théorèmes de continuité et de dérivabilité sous le signe intégral. On ne peut pas dominer par $|f|$ (si $r > 1$), mais si $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\operatorname{supp} \varphi \subseteq [-A, A]$, alors $\widetilde{f} = f_{|[-A+x_0-1, A+x_0+1]} \in L^1(\mathbb{R})$. Donc, puisque pour $|x - x_0| \leqslant 1$, on a $(f * \varphi)(x) = (\widetilde{f} * \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}} \widetilde{f}(t)\, \varphi(x-t)\, dt$; on peut donc utiliser ces théorèmes sur $]x_0 - 1, x_0 + 1[$, et l'on obtient que $f * \varphi$ est continûment dérivable en x_0. □

Application. Soit

$$\sigma(u) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-u^2}\right) & \text{si} \quad |u| < 1 \\ 0 & \text{si} \quad |u| \geqslant 1. \end{cases}$$

Il est facile de voir que σ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

Soit :

$$A = \int_{\mathbb{R}} \sigma(u)\, du.$$

C'est un nombre > 0. Posons :

$$p(t) = \sigma(At) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-A^2t^2}\right) & \text{si} \quad |t| < 1/A \\ 0 & \text{si} \quad |t| \geqslant 1/A. \end{cases}$$

On a $0 \leqslant p \leqslant 1$, $\int_{\mathbb{R}} p(t)\, dt = 1$ et $\operatorname{supp}(p) \subseteq \left[-1/A, 1/A\right]$. On pose, comme d'habitude, $p_a(x) = \frac{1}{a} p\left(\frac{x}{a}\right)$. Alors, pour $f \in L^r(\mathbb{R})$ $(1 \leqslant r < \infty)$, la fonction $f * p_a \in L^r(\mathbb{R})$, est indéfiniment dérivable, et converge vers f dans $L^r(\mathbb{R})$ lorsque $a \to 0$. On en déduit :

Théorème III.1.12. *Pour $1 \leqslant r < \infty$, l'espace $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ des fonctions indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ à support compact est <u>dense</u> dans $L^r(\mathbb{R})$.*

Preuve. Soit $f \in L^r(\mathbb{R})$ et soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\varphi \in \mathscr{K}(\mathbb{R})$ telle que $\|f - \varphi\|_r \leqslant \varepsilon/2$.

Comme $\varphi \in L^r(\mathbb{R})$, $\varphi * p_a$ est indéfiniment dérivable. Elle est de plus à support compact, en vertu du lemme suivant.

Lemme III.1.13. *Si $u, v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sont des fonctions convolables, on a l'inclusion :*

$$\operatorname{supp}(u * v) \subseteq \overline{(\operatorname{supp} u) + (\operatorname{supp} v)}.$$

Notons que la somme de deux compacts K et K' est compacte (image du produit $K \times K'$ par l'application continue $(x, y) \mapsto x + y$). Si $a > 0$ est tel que $\|\varphi - \varphi * p_a\|_r \leqslant \varepsilon/2$, on a $\|f - \varphi * p_a\|_r \leqslant \varepsilon$. □

Preuve du Lemme III.1.13. Soit $x \notin (\operatorname{supp} u) + (\operatorname{supp} v)$. Comme $v(t) = 0$ pour $t \notin \operatorname{supp} v$, on a :

$$(u * v)(x) = \int_{\mathbb{R}} u(x - t)\, v(t)\, dt = \int_{\operatorname{supp} v} u(x - t)\, v(t)\, dt\,.$$

Mais si $t \in \operatorname{supp} v$, on a forcément $x - t \notin \operatorname{supp} u$ (car sinon $x = (x - t) + t$ serait dans $(\operatorname{supp} u) + (\operatorname{supp} v)$) ; donc $u(x - t) = 0$. On a ainsi $(u * v)(x) = 0$. □

III.1.5.2. Partition de l'unité $\mathcal{C}^\infty$

Les partitions de l'unité permettent de "découper" les fonctions en morceaux, qui seront "réguliers" si la partition l'est, comme dans l'énoncé ci-dessous. Nous nous placerons sur un compact pour simplifier. Il existe des énoncés plus généraux.

Théorème III.1.14. *Soit K un compact de $\mathbb{R}$ et $(\Omega_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ un recouvrement ouvert fini de K. Il existe des fonctions* positives $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ *telles que* $\operatorname{supp} \varphi_k \subseteq \Omega_k$ *pour tout $k = 1, \ldots, n$, $\sum_{k=1}^n \varphi_k \leqslant 1$, et :*

$$\boxed{\sum_{k=1}^n \varphi_k(x) = 1 \text{ pour tout } x \in K.}$$

On dit que $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est une **partition de l'unité** de K subordonnée au recouvrement $(\Omega_1, \ldots, \Omega_n)$.

Lemme III.1.15. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$ et K un compact contenu dans Ω. Il existe $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ telle que $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$ pour tout $x \in \Omega$, et $\varphi(x) = 1$ dans un voisinage de K.*

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $K_\varepsilon = K + [-\varepsilon, \varepsilon]$ soit contenu dans Ω. Soit $p \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ telle que $0 \leqslant p \leqslant 1$ et $\int_{\mathbb{R}} p(x)\, dx = 1$ (comme dans la preuve du Théorème III.1.12), et $p_a(x) = \frac{1}{a} p\big(\frac{x}{a}\big)$. Pour $a > 0$ assez petit, on a $\operatorname{supp} p_a \subseteq [-\varepsilon/4, \varepsilon/4]$. Alors la fonction $\varphi = \mathbb{1}_{K_{\varepsilon/2}} * p_a$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, puisque p_a l'est, elle est positive car $\mathbb{1}_{K_{\varepsilon/2}}$ et p_a le sont, et l'on a $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant \|\mathbb{1}_{K_{\varepsilon/2}}\|_\infty \|p_a\|_1 = 1$. De plus, $\operatorname{supp} \varphi \subseteq (\operatorname{supp} \mathbb{1}_{K_{\varepsilon/2}}) + (\operatorname{supp} p_a) \subseteq K_{\varepsilon/2} + [-\varepsilon/4, \varepsilon/4] \subseteq K_\varepsilon \subseteq \Omega$. Finalement, pour $x \in K_{\varepsilon/4}$, on a $x + [-\varepsilon/4, \varepsilon/4] \subseteq K_{\varepsilon/2}$; donc $\varphi(x) = \int_{x - K_{\varepsilon/2}} p_a(t)\, dt \geqslant \int_{[-\varepsilon/4, \varepsilon/4]} p_a(t)\, dt = 1$; par conséquent $\varphi(x) = 1$. □

Preuve du Théorème III.1.14. Pour chaque $k = 1, \ldots, n$, soit K_k un compact contenu dans Ω_k tel que $K \subseteq \bigcup_{1 \leqslant k \leqslant n} K_k$. En vertu du lemme, il existe des fonctions $\psi_k \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ telles que $0 \leqslant \psi_k \leqslant 1$ et valant 1 sur un voisinage de K_k. On pose $\varphi_1 = \psi_1$, $\varphi_2 = \psi_2(1 - \psi_1), \ldots, \varphi_n = \psi_n(1 - \psi_1) \cdots (1 - \psi_{n-1})$. On a $\varphi_k \geqslant 0$ et $1 - (\varphi_1 + \varphi_2) = (1 - \psi_1)(1 - \psi_2)$; en itérant, cela donne $\sum_{k=1}^n \varphi_k = 1 - (1 - \psi_1) \cdots (1 - \psi_n)$; par conséquent $\sum_{k=1}^n \varphi_k \leqslant 1$ et $\sum_{k=1}^n \varphi_k(x) = 1$ pour tout $x \in K$. □

III.2. Transformation de Fourier

III.2.1. Transformation de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$

Définition III.2.1.

1) *On appelle* **transformée de Fourier**, *ou* **intégrale de Fourier**, *de* $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ *la fonction* $\mathscr{F} f = \widehat{f}\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ *définie par :*

$$\boxed{\widehat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, \mathrm{e}^{-2\pi i (x|y)}\, dx}, \quad \forall y \in \mathbb{R}^d.$$

2) *La* **transformation de Fourier** *sur* $L^1(\mathbb{R}^d)$ *est l'application linéaire*

$$\begin{array}{rccc} \mathscr{F}\colon & L^1(\mathbb{R}^d) & \longrightarrow & \mathbb{C}^{\mathbb{R}^d} \\ & f & \longmapsto & \mathscr{F} f = \widehat{f}. \end{array}$$

On rappelle que $(x \mid y)$ est le produit scalaire de x et y. Pour des raisons de simplification d'écriture, on supposera que $d = 1$. Alors :

$$\boxed{\widehat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \mathrm{e}^{-2\pi i x y}\, dx\,, \qquad \forall y \in \mathbb{R}};$$

mais tous les résultats pour $d \geqslant 2$ se prouvent de la même façon.

Notons qu'en particulier $\boxed{\widehat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx}$.

Théorème III.2.2. *On a :*

$$f \in L^1(\mathbb{R}) \quad \Longrightarrow \quad \mathscr{F} f \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R}).$$

Preuve. La continuité résulte du Théorème de convergence dominée, car :

$$|f(x)\, \mathrm{e}^{-2\pi i x y}| = |f(x)|$$

est intégrable et indépendante de y.

Il s'agit maintenant de voir que $\lim_{|y| \to +\infty} \widehat{f}(y) = 0$ (noter que c'est l'analogue du Lemme de Riemann-Lebesgue pour les séries de Fourier).

Pour cela, remarquons que $\mathrm{e}^{-\pi i} = -1$; cela permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \widehat{f}(y) = -\int_{\mathbb{R}} f(x)\, \mathrm{e}^{-2\pi i x y}\, \mathrm{e}^{-\pi i}\, dx &= -\int_{\mathbb{R}} f(x)\, \mathrm{e}^{-2\pi i \left(x + \frac{1}{2y}\right) y}\, dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}} f\Big(t - \frac{1}{2y}\Big)\, \mathrm{e}^{-2\pi i t y}\, dt\,; \end{aligned}$$

d'où :

$$2\,\widehat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} \Big[f(t) - f\Big(t - \frac{1}{2y}\Big)\Big]\,\mathrm{e}^{-2\pi i t y}\,dt\,,$$

et :

$$2\,|\widehat{f}(y)| \leqslant \|f - f_{1/2y}\|_1 \xrightarrow[|y|\to+\infty]{} 0,$$

par le Théorème III.1.4. □

Théorème III.2.3. *Pour toutes $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, on a :*

$$\boxed{\mathscr{F}(f * g) = (\mathscr{F} f)\,(\mathscr{F} g)}\,.$$

Autrement dit, $\mathscr{F}$ est un homomorphisme d'algèbres. De façon plus explicite, cela s'écrit :

$$\boxed{\widehat{(f * g)}(y) = \widehat{f}(y)\,\widehat{g}(y)}\,, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

C'est l'un des grands intérêts de la transformation de Fourier. En effet, la convolution régularise les fonctions mais n'est pas facile à calculer ; un passage "du côté Fourier" simplifie souvent.

Preuve. Cela résulte du Théorème de Fubini :

$$\begin{aligned}
\widehat{f * g}(y) &= \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(x-t)\,g(t)\,dt\Big)\,\mathrm{e}^{-2\pi i x y}\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(x-t)\,\mathrm{e}^{-2\pi i (x-t) y} g(t)\,\mathrm{e}^{-2\pi i t y}\,dt\Big)\,dx\,.
\end{aligned}$$

Comme :

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |f(x-t)\,\mathrm{e}^{-2\pi i (x-t) y} g(t)\,\mathrm{e}^{-2\pi i t y}|\,dt\,dx = \|\,|f| * |g|\,\|_1 < +\infty\,,$$

on peut appliquer le Théorème de Fubini, et on obtient :

$$\begin{aligned}
\widehat{f * g}(y) &= \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(x-t)\,\mathrm{e}^{-2\pi i (x-t) y}\,dx\Big)\,g(t)\,\mathrm{e}^{-2\pi i t y}\,dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(u)\,\mathrm{e}^{-2\pi i u y}\,du\Big)\,g(t)\,\mathrm{e}^{-2\pi i t y}\,dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(y)\,g(t)\,\mathrm{e}^{-2\pi i t y}\,dt = \widehat{f}(y)\,\widehat{g}(y)
\end{aligned}$$

□

Corollaire III.2.4. *L'algèbre $L^1(\mathbb{R})$ n'a pas d'unité pour la convolution.*

Preuve. S'il y en avait une, disons $\varepsilon \in L^1(\mathbb{R})$, on aurait $\varepsilon * f = f$, donc $\widehat{\varepsilon}\widehat{f} = \widehat{f}$ pour toute $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Prenons par exemple $f = \mathbb{1}_{[0,1]}$. On a :

$$\widehat{\mathbb{1}_{[0,1]}}(y) = \int_0^1 \mathrm{e}^{-2\pi i x y}\,dx = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad y = 0 \\ \frac{\mathrm{e}^{-2\pi i y}-1}{-2\pi i y} = \mathrm{e}^{-\pi i y}\frac{\sin(\pi y)}{\pi y} & \text{si} \quad y \neq 0. \end{cases}$$

Comme $\widehat{\mathbb{1}_{[0,1]}}(y) \neq 0$ pour $y \notin \mathbb{Z}^*$, on devrait avoir $\widehat{\varepsilon}(y) = 1$ pour $y \notin \mathbb{Z}^*$ (et donc en fait $\widehat{\varepsilon}(y) = 1$ pour tout $y \in \mathbb{R}$, par continuité) ; mais cela contredit le fait que $\widehat{\varepsilon}(y)$ tend vers 0 quand $|y|$ tend vers l'infini. □

Remarque. Il existe en fait bien une unité pour la convolution, mais elle n'est pas dans $L^1(\mathbb{R})$: on peut étendre la définition de la convolution à l'espace de toutes les mesures complexes sur $\mathbb{R}$; dans cette algèbre $\mathscr{M}(\mathbb{R})$, qui contient $L^1(\mathbb{R})$, il y a une unité qui est la mesure de Dirac δ_0 en 0.

Corollaire III.2.5. *L'application linéaire $\mathscr{F}\colon L^1(\mathbb{R}) \to \mathscr{C}_0(\mathbb{R})$ est continue et de norme* 1.

Preuve. De façon claire, $\mathscr{F}$ est linéaire et $\boxed{\|\mathscr{F}f\|_\infty \leqslant \|f\|_1}$; donc $\mathscr{F}$ est continue et de norme $\|\mathscr{F}\| \leqslant 1$.

Pour voir que $\|\mathscr{F}\| = 1$, nous allons donner deux méthodes (dont l'intérêt est bien plus grand que savoir que $\|\mathscr{F}\| = 1$).

<u>1ère méthode</u>. On va utiliser une unité approchée p définie comme dans le Théorème III.1.9. Nous avons vu que :

$$f * p_a \xrightarrow[a\to 0]{L^1(\mathbb{R})} f\,;$$

donc, puisque $\mathscr{F}$ est continue :

$$\widehat{f}\,\widehat{p_a} = \mathscr{F}(f * p_a) \xrightarrow[a\to 0]{\|\ \|_\infty} \mathscr{F}f = \widehat{f}.$$

Alors :

$$\|\widehat{f}\|_\infty = \lim_{a\to 0} \|\widehat{f}\,\widehat{p_a}\|_\infty \leqslant \liminf_{a\to 0} \|\widehat{f}\|_\infty\, \|\widehat{p_a}\|_\infty \leqslant \|\widehat{f}\|_\infty \sup_{a>0} \|\widehat{p_a}\|_\infty.$$

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\mathscr{F}f$ ne soit pas identiquement nulle (par exemple $f = \mathbb{1}_{[0,1]}$), de sorte que $\|\widehat{f}\|_\infty > 0$; en simplifiant l'inégalité ci-dessus, on obtient :

$$1 \leqslant \sup_{a>0} \|\mathscr{F}p_a\|_\infty.$$

Comme $p_a \geqslant 0$, on a $\widehat{p_a}(0) = \|p_a\|_1$; donc $\|\widehat{p_a}\|_\infty \geqslant \widehat{p_a}(0) = \|p_a\|_1 = \|p\|_1 = 1$, et l'on obtient :

$$\|\mathscr{F}\| = \sup_{\|\varphi\|_1 \leqslant 1} \|\mathscr{F}\varphi\|_\infty \geqslant \sup_{a>0} \|\mathscr{F}p_a\|_\infty \geqslant 1.$$

<u>2ème méthode</u>. On va montrer que si :

$$\boxed{f_0(x) = \mathrm{e}^{-\pi x^2}},$$

alors $\boxed{\mathscr{F} f_0 = f_0}$.

Si l'on ne tenait pas compte du fait que $\mathscr{F}$ n'envoie pas $L^1(\mathbb{R})$ dans lui-même, on pourrait dire que f_0 est un point fixe pour $\mathscr{F}$, ou aussi que f_0 est un vecteur propre pour $\mathscr{F}$, associé à la valeur propre 1. Cet inconvénient sera aboli pour l'espace $L^2(\mathbb{R})$, puisque l'on verra que l'on peut prolonger $\mathscr{F}$ à $L^2(\mathbb{R})$ et qu'alors $\mathscr{F}$ envoie $L^2(\mathbb{R})$ dans lui-même.

On sait que :

$$\int_{\mathbb{R}} f_0(x)\, dx = 1$$

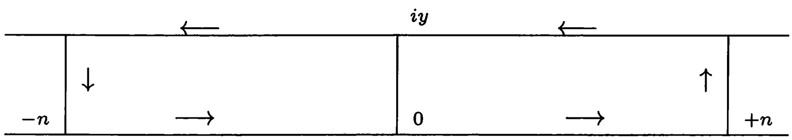
(il suffit de passer en coordonnées polaires dans $\left[\int_{\mathbb{R}} f_0(x)\, dx\right]^2 = \iint_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-\pi(x^2+y^2)}\, dxdy$). Ensuite :

$$\widehat{f_0}(y) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\pi x^2}\, \mathrm{e}^{-2\pi i x y}\, dx = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\pi(x+iy)^2 - \pi y^2}\, dx = \mathrm{e}^{-\pi y^2} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\pi(x+iy)^2}\, dx\,.$$

Considérons la fonction entière (*i.e.* holomorphe dans $\mathbb{C}$) :

$$F(z) = \mathrm{e}^{-\pi z^2}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Par le Théorème de Cauchy, son intégrale sur le bord du rectangle ci-dessous (pour $y > 0$) est nulle.



Sur les côtés verticaux, on a :

$$|F(z)| = |\mathrm{e}^{-\pi(\pm n + iv)^2}| = \mathrm{e}^{-\pi n^2} \mathrm{e}^{\pi v^2} \leqslant \mathrm{e}^{-\pi n^2} \mathrm{e}^{\pi y^2}\,;$$

l'intégrale de F sur ces côtés est donc majorée par $|y|\,\mathrm{e}^{-\pi n^2} \mathrm{e}^{\pi y^2}$, de sorte qu'elle tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Il en résulte que :

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\pi(x+iy)^2}\, dx = \int_{\mathbb{R}+iy} F(z)\, dz = \int_{\mathbb{R}} F(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} f_0(x)\, dx = 1\,.$$

Donc :

$$\boxed{\widehat{f_0}(y) = \mathrm{e}^{-\pi y^2} = f_0(y)}, \qquad \text{(III.1)}$$

comme cela a été annoncé. □

III.2.2. Le théorème d'inversion

Théorème III.2.6 (Théorème d'inversion). *Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et si sa transformée de Fourier est intégrable : $\mathscr{F}f = \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors f est (p.p.) égale à la fonction continue g définie par :*

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(y)\, e^{+2\pi ixy}\, dy.$$

Pour $u \in L^1(\mathbb{R})$, on appelle *co-transformée de Fourier* de u la fonction définie par :

$$(\overline{\mathscr{F}}u)(y) = \int_{\mathbb{R}} u(x)\, e^{+2\pi ixy}\, dx\,,$$

c'est-à-dire que $(\overline{\mathscr{F}}u)(y) = (\mathscr{F}u)(-y) = \overline{(\mathscr{F}\bar{u})(y)}$.

Le Théorème d'inversion s'exprime donc par :

$$\boxed{f \text{ et } \mathscr{F}f \in L^1(\mathbb{R}) \quad \Longrightarrow \quad f = \overline{\mathscr{F}}(\mathscr{F}f)}\,.$$

Voyons tout de suite une conséquence **très** importante.

Théorème III.2.7. *La transformation de Fourier $\mathscr{F} : L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{C}_0(\mathbb{R})$ est* **injective**.

Preuve. $\mathscr{F}$ étant linéaire, il suffit de voir que $\ker \mathscr{F} = \{0\}$. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\mathscr{F}f = 0$. Comme $0 \in L^1(\mathbb{R})$ (!), le Théorème d'inversion assure que $f = \overline{\mathscr{F}}(\mathscr{F}f) = \overline{\mathscr{F}}(0) = 0$. □

La preuve du Théorème d'inversion utilisera le lemme suivant.

Lemme III.2.8. *Soit $P \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $p = \overline{\mathscr{F}}P$ soit une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$. Alors, pour toute $f \in L^1(\mathbb{R})$, on a :*

$$(f * p_a)(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(y)\, e^{2\pi ixy}\, P(ay)\, dy\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Rappelons que :

$$p_a(t) = \frac{1}{a}\, p\left(\frac{t}{a}\right).$$

Remarque. Si P est elle-même une densité de probabilité, on aura :

$$\|p\|_\infty = \|\overline{\mathscr{F}}P\|_\infty \leqslant \|P\|_1 = 1\,;$$

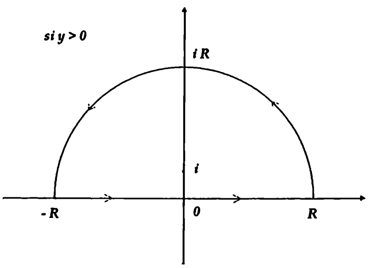
donc $0 \leqslant p \leqslant 1$ et p vérifie les conditions du Théorème III.1.9 sur l'existence des unités approchées pour la convolution dans $L^1(\mathbb{R})$.

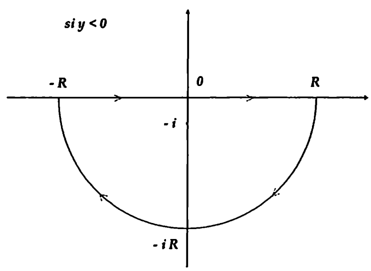
Exemples.

1) Prenons $\boxed{P(x) = \mathrm{e}^{-\pi x^2}}$. Alors on a vu que $\boxed{p(y) = \mathrm{e}^{-\pi y^2}}$; on dit que p est la **densité de Gauss**.

2) Si $\boxed{P(x) = \mathrm{e}^{-2\pi|x|}}$, on voit facilement que $\boxed{p(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}}$; on dit que p est la **densité de Cauchy**.

3) Si $\boxed{P(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}}$, alors $\boxed{p(y) = \mathrm{e}^{-2\pi|y|}}$. Cela se voit, soit en intégrant sur le chemin formé du segment $[-R, R]$ union le demi-cercle de centre 0 et de rayon R (dans le demi-plan supérieur si $y > 0$, et dans le demi-plan inférieur si $y < 0$) et en utilisant le Théorème des résidus, soit en utilisant l'exemple précédent et le Théorème d'inversion (bien sûr, on ne pourra pas dans ce cas utiliser cette fonction pour prouver le théorème !). On dit que p est la **densité de Poisson**.





Preuve du Théorème d'inversion à partir du lemme. On utilisera la fonction de l'exemple 2) :

$$P(y) = \mathrm{e}^{-2\pi|y|}.$$

On a :

$$\begin{cases} P(ay) \xrightarrow[a\to 0]{} 1 \\ 0 \leqslant P(ay) \leqslant 1; \end{cases}$$

donc :

$$\begin{cases} \widehat{f}(y)\,\mathrm{e}^{2\pi ixy}P(ay) \xrightarrow[a\to 0]{} \widehat{f}(y)\,\mathrm{e}^{2\pi ixy}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\ |\widehat{f}(y)\,\mathrm{e}^{2\pi ixy}P(ay)| \leqslant |\widehat{f}(y)|. \end{cases}$$

Le Lemme III.2.8 et le Théorème de convergence dominée donnent donc :

$$\lim_{a\to 0}(f * p_a)(x) = g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Mais, par ailleurs, comme on a :

$$\|f * p_a - f\|_1 \xrightarrow[a\to 0]{} 0,$$

on peut trouver une suite de nombres $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ telle que $(f * p_{a_n})_n$ converge presque partout vers f.

Il en résulte que $f = g$ presque partout. $\square$

Preuve du Lemme III.2.8. Remarquons d'abord que $(f * p_a)(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$ (car $p \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R})$ entraîne $p_a \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R}) \subseteq L^\infty(\mathbb{R})$). Ensuite, on a, par définition :

$$p(y) = \int_{\mathbb{R}} P(x)\, \mathrm{e}^{2\pi i x y}\, dx\,;$$

d'où :

$$p_a(y) = \frac{1}{a} p\left(\frac{y}{a}\right) = \int_{\mathbb{R}} P(at)\, \mathrm{e}^{2\pi i t y}\, dt.$$

Le Théorème de Fubini donne alors :

$$\begin{aligned}
(f * p_a)(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x-y) \left(\int_{\mathbb{R}} P(at)\, \mathrm{e}^{2\pi i t y}\, dt \right) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x-y)\, \mathrm{e}^{2\pi i t y}\, dy \right) P(at)\, dt \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}} f(u)\, \mathrm{e}^{2\pi i (x-u) t}\, du \right) P(at)\, dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(t)\, \mathrm{e}^{2\pi i x t}\, P(at)\, dt\,.
\end{aligned}$$

□

Proposition III.2.9. *$\mathscr{F}L^1(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathscr{C}_0(\mathbb{R})$.*

On verra plus tard (Corollaire IV.3.5) que $\mathscr{F} : L^1(\mathbb{R}) \to \mathscr{C}_0(\mathbb{R})$ n'est pas surjective.

Preuve. On va utiliser le Théorème de Stone-Weierstrass. Comme $\mathbb{R}$ n'est pas compact, on utilisera son compactifié d'Alexandrov $K = \widetilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\omega\}$.

$\mathscr{C}_0(\mathbb{R})$ s'identifie à $\{h \in \mathscr{C}(\widetilde{\mathbb{R}})\,;\ h(\omega) = 0\}$.

Soit :

$$A = \mathbb{C}.\mathbb{I}_{\widetilde{\mathbb{R}}} \oplus \mathscr{F}L^1(\mathbb{R}).$$

Alors :

(*i*) A est une sous-algèbre de $\mathscr{C}(\widetilde{\mathbb{R}})$ car $\mathscr{F}L^1(\mathbb{R})$ est une sous-algèbre de $\mathscr{C}_0(\mathbb{R})$;

(*ii*) A sépare les points de $\widetilde{\mathbb{R}}$. En effet :

• $\mathscr{F}L^1(\mathbb{R})$ (donc *a fortiori* A) sépare les points de $\mathbb{R}$: si $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ sont tels que $\widehat{f}(y_1) = \widehat{f}(y_2)$ pour toutes les $f \in L^1(\mathbb{R})$, on a :

$$0 = \widehat{f}(y_1) - \widehat{f}(y_2) = \int_{\mathbb{R}} (\mathrm{e}^{-2\pi i x y_1} - \mathrm{e}^{-2\pi i x y_2})\, f(x)\, dx\,,$$

et, en appliquant ceci pour $f(x) = (\mathrm{e}^{2\pi i x y_1} - \mathrm{e}^{2\pi i x y_2})\, u(x)$, avec $u \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $u(x) > 0$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}} |\mathrm{e}^{-2\pi i x y_1} - \mathrm{e}^{-2\pi i x y_2}|^2\, u(x)\, dx = 0,$$

d'où :

$$\mathrm{e}^{-2\pi i x y_1} = \mathrm{e}^{-2\pi i x y_2}$$

pour presque tout $x \in \mathbb{R}$. Par continuité, c'est en fait vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$. En dérivant, on obtient :

$$-2\pi i y_1 \mathrm{e}^{-2\pi i x y_1} = -2\pi i y_2 \mathrm{e}^{-2\pi i x y_2},$$

d'où $y_1 = y_2$ (faire $x = 0$).

• $\mathscr{F}L^1(\mathbb{R})$ (donc *a fortiori* A) sépare chaque $y_0 \in \mathbb{R}$ de ω car on peut trouver $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle $\widehat{f}(y_0) \neq 0$ (on a même vu que l'on pouvait trouver $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\widehat{f}(y) \neq 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}$) ; d'où le résultat car le prolongement de $\widehat{f}$ à $\widetilde{\mathbb{R}}$ est nul en ω.

(*iii*) A est stable par conjugaison, car $\mathscr{F}L^1(\mathbb{R})$ l'est ; en effet, on a $\overline{\widehat{f}} = \widehat{f^*}$, avec $f^*(x) = \overline{f(-x)}$.

Comme A contient les constantes, par définition, le Théorème de Stone-Weierstrass dit que A est dense dans $\mathscr{C}(\widetilde{\mathbb{R}})$. En particulier, pour toute $h \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R}) \subseteq \mathscr{C}(\widetilde{\mathbb{R}})$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $f_\varepsilon \in L^1(\mathbb{R})$ et $\lambda_\varepsilon \in \mathbb{C}$ tels que :

$$\|h - \widehat{f_\varepsilon} - \lambda_\varepsilon\|_{\mathscr{C}(\widetilde{\mathbb{R}})} \leqslant \varepsilon.$$

Mais alors $|\lambda_\varepsilon| = |h(\omega) - \widehat{f_\varepsilon}(\omega) - \lambda_\varepsilon| \leqslant \varepsilon$, et donc $\|h - \widehat{f_\varepsilon}\|_{\mathscr{C}_0(\mathbb{R})} = \|h - \widehat{f_\varepsilon}\|_{\mathscr{C}(\widetilde{\mathbb{R}})} \leqslant |\lambda_\varepsilon| + \varepsilon \leqslant 2\varepsilon$. □

III.2.3. Transformation de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$

Comme $L^2(\mathbb{R}) \not\subseteq L^1(\mathbb{R})$, la définition de la transformée de Fourier des fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ ne peut pas se faire simplement en reprenant celle des fonctions de $L^1(\mathbb{R})$. On utilisera pour cela un passage à la limite, en utilisant la *densité de* $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ *dans* $L^2(\mathbb{R})$ (on notera que $\mathscr{K}(\mathbb{R}) \subseteq L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$).

L'inconvénient d'une telle définition indirecte (et le fait que, dans un certain sens, considérer les fonctions de carré intégrable et non pas directement les fonctions intégrables est moins naturel) est compensé par le fait que, d'une part $L^2(\mathbb{R})$ est un espace de Hilbert, et, surtout, d'autre part, que l'on obtient ainsi une transformation de Fourier (appelée aussi *transformation de Fourier-Plancherel*) qui envoie $L^2(\mathbb{R})$ dans lui-même (alors que $L^1(\mathbb{R})$ est envoyé dans $\mathscr{C}_0(\mathbb{R})$), et qui, de plus, réalise un isomorphisme isométrique de $L^2(\mathbb{R})$ sur lui-même ; il conserve donc aussi le produit scalaire.

Théorème III.2.10 (Théorème de Plancherel, 1910). *La transformation de Fourier $\mathscr{F}$, définie sur $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, se prolonge, de façon unique, en un isomorphisme d'espaces de Hilbert de $L^2(\mathbb{R})$ sur lui-même.*

Rappelons qu'un *isomorphisme d'espaces de Hilbert* est une application linéaire bijective $T\colon H_1 \to H_2$ qui conserve le produit scalaire : $(Tx \mid Ty) = (x \mid y)$ pour tous $x, y \in H_1$. C'est donc une **isométrie**. Inversement, toute isométrie (linéaire) entre espaces de Hilbert conserve le produit scalaire, grâce à l'*identité de polarisation* :

$$(x \mid y) = \frac{1}{4}\big[\big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\big) + i\big(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\big)\big]$$

pour les espaces complexes, et :

$$(x \mid y) = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$

pour les espaces réels.

Notation. On notera aussi ce prolongement par $\mathscr{F}$:

$$\mathscr{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}).$$

Preuve. L'unicité vient de la densité de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$.

Pour prouver l'existence, il suffit de montrer que :

$$\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2\,, \quad \forall f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}),$$

car alors, grâce à la densité, $\mathscr{F}$ se prolongera en une isométrie de $L^2(\mathbb{R})$ dans lui-même (non surjective *a priori*).

Nous allons en fait utiliser un espace un peu plus petit que $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, sur lequel nous pourrons travailler plus facilement, mais qui reste dense dans $L^2(\mathbb{R})$.

Soit :

$$\boxed{A(\mathbb{R}) = \{f \in L^1(\mathbb{R})\,;\ \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})\}}.$$

C'est exactement l'ensemble des fonctions de $L^1(\mathbb{R})$ pour lesquelles le Théorème d'inversion s'applique :

$$f \in A(\mathbb{R}) \quad \Longrightarrow \quad f(x) = \widehat{\widehat{f}}\,(-x) \text{ pour presque tout } x \in \mathbb{R}.$$

Proposition III.2.11. *On a :*

a) $f \in A(\mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad \widehat{f} \in A(\mathbb{R})$;

b) $f \in A(\mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad f$ *et* $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$;

c) $A(\mathbb{R}) \subseteq L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$;

d) $f \in A(\mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad \|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2$;

e) $A(\mathbb{R})$ *est dense dans* $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, *pour la norme* $\|\ \|_2$.

Preuve. *a*) résulte du Théorème d'inversion.

b) On a, d'une part : $\widehat{f} \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R})$, donc $\widehat{f} \in L^\infty(\mathbb{R})$; d'autre part, le Théorème d'inversion donne :

$$\widehat{\widehat{f}} \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad f \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad f \in L^\infty(\mathbb{R}).$$

Il reste à remarquer que $L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}) \subseteq L^2(\mathbb{R})$ car si $h \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, on écrit $|h|^2 \leqslant \|h\|_\infty |h|$, ce qui donne $\|h\|_2^2 \leqslant \|h\|_\infty \|h\|_1$.

c) résulte du *b*).

d) résulte immédiatement du lemme suivant, que l'on montrera après.

Lemme III.2.12. *Si* $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, *alors :*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\widehat{g}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(y)\,g(y)\,dy\,.$$

e) Il reste à voir que $A(\mathbb{R})$ est dense dans $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, **pour la norme** $\|\,.\,\|_2$ (c'est-à-dire dans $L^2(\mathbb{R})$).

Soit $P(y) = \mathrm{e}^{-2\pi|y|}$ la densité de Poisson et $p = \overline{\mathscr{F}}P = \mathscr{F}P$.

Alors p vérifie les conditions du Théorème III.1.9 sur les unités approchées ; donc :

$$\lim_{a\to 0} \|f * p_a - f\|_2 = 0\,, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}).$$

Mais $f * p_a \in A(\mathbb{R})$ car si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, on a :

- $f, p_a \in L^1(\mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad f * p_a \in L^1(\mathbb{R})$;
- $\left\{ \begin{array}{l} \widehat{f} \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R}) \subseteq L^\infty(\mathbb{R}) \\ \widehat{p_a}(y) = P(ay) \quad \Rightarrow \quad \widehat{p_a} \in L^1(\mathbb{R}) \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad \widehat{f * p_a} = \widehat{f}\,\widehat{p_a} \in L^1(\mathbb{R}).$

et donc $f * p_a \in A(\mathbb{R})$. □

Preuve du lemme. Il suffit d'utiliser le Théorème de Fubini :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\widehat{g}(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}} f(x) \left(\int_{\mathbb{R}} g(y)\,\mathrm{e}^{-2\pi i x y}\,dy \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{e}^{-2\pi i x y}\,dx \right) g(y)\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(y)\,g(y)\,dy\,.\end{aligned}$$ □

Fin de la preuve du Théorème de Plancherel. L'isométrie $\mathscr{F} : A(\mathbb{R}) \to A(\mathbb{R})$, à valeurs dans $A(\mathbb{R}) \subseteq L^2(\mathbb{R})$, qui est complet, se prolonge, par densité, en une isométrie $\mathscr{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$.

Comme $\mathscr{F}[A(\mathbb{R})] = A(\mathbb{R})$, par le Théorème d'inversion, on a $\mathscr{F}[L^2(\mathbb{R})] \supseteq A(\mathbb{R})$, et donc $\mathscr{F}[L^2(\mathbb{R})] = L^2(\mathbb{R})$ car $A(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$ et parce que $\mathscr{F}[L^2(\mathbb{R})]$ est fermé (puisque $\mathscr{F}$ est une isométrie). □

Remarque. Notons que ce prolongement coïncide sur $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ avec la transformation de Fourier définie sur $L^1(\mathbb{R})$. En effet, pour toute $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, on a $\lim_{a\to 0} \|f * p_a - f\|_1 = 0$, par le Théorème III.1.9, et $f * p_a \in A(\mathbb{R})$, comme on l'a vu ; donc $A(\mathbb{R})$ est dense dans $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, pour la norme de $L^1(\mathbb{R})$.

Remarque. La co-transformation de Fourier $\overline{\mathscr{F}}$ se prolonge aussi en un isomorphisme de $L^2(\mathbb{R})$ sur lui-même, puisque $(\overline{\mathscr{F}}u)(y) = (\mathscr{F}u)(-y)$, c'est-à-dire que $\overline{\mathscr{F}} = \sigma \circ \mathscr{F}$, où σ est l'isomorphisme isométrique de $L^2(\mathbb{R})$ défini par $(\sigma f)(y) = f(-y)$. De plus, $\overline{\mathscr{F}} = \mathscr{F}^{-1}$, puisque c'est vrai sur $A(\mathbb{R})$.

Notons que le Lemme III.2.12 dit que l'on a, en particulier $(f \mid \overline{\mathscr{F}\bar{g}}) = (\mathscr{F}f \mid g)$ (en changeant g en $\bar{g}$) pour toutes $f, g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Cela s'écrit aussi $(f \mid \overline{\mathscr{F}}g) = (\mathscr{F}f \mid g)$. Comme $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$, cela reste vrai pour toutes $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Mais $(\mathscr{F}f \mid g) = (f \mid \mathscr{F}^*g)$, où $\mathscr{F}^*$ est l'opérateur adjoint de $\mathscr{F}$. Donc $\mathscr{F}^* = \overline{\mathscr{F}}$, soit aussi $\mathscr{F}^* = \mathscr{F}^{-1}$. Cela signifie que *la transformation de Fourier-Plancherel* $\mathscr{F}$ *est un opérateur unitaire sur* $L^2(\mathbb{R})$ (un opérateur U sur un espace de Hilbert H est dit *unitaire* si $U^*U = UU^* = \mathrm{Id}_H$, c'est-à-dire si U est inversible et $U^{-1} = U^*$).

Comment exprimer la transformée de Fourier d'une fonction de $L^2(\mathbb{R})$?

Comme $\mathscr{F}$ a été défini sur $L^2(\mathbb{R})$ par densité, le calcul de $\mathscr{F}f$ pour $f \in L^2(\mathbb{R})$ doit faire intervenir un passage à la limite. On peut, par exemple, utiliser le résultat suivant.

Proposition III.2.13. *Pour $f \in L^2(\mathbb{R})$, posons :*

$$\varphi_A(y) = \int_{-A}^{A} f(x)\, \mathrm{e}^{-2\pi i x y}\, dx\,.$$

On a :

$$\lim_{A \to +\infty} \|\varphi_A - \mathscr{F}f\|_2 = 0\,.$$

Preuve. Notons $f_A = f.\mathbb{1}_{[-A,A]}$; on a $f_A \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ et $\varphi_A = \mathscr{F}(f_A)$. Le Théorème de Plancherel donne :

$$\|\mathscr{F}f - \varphi_A\|_2 = \|\mathscr{F}(f - f_A)\|_2 = \|f - f_A\|_2\,;$$

or $\|f - f_A\|_2 \xrightarrow[A \to +\infty]{} 0$ par le Théorème de convergence dominée. □

De même, on a :

Proposition III.2.14. *Pour $f \in L^2(\mathbb{R})$, si l'on pose :*

$$\psi_A(x) = \int_{-A}^{A} (\mathscr{F}f)(y)\, \mathrm{e}^{2\pi i x y}\, dy\,,$$

on a :

$$\lim_{A \to +\infty} \|\psi_A - f\|_2 = 0.$$

Preuve. On a $\psi_A = \overline{\mathscr{F}}\big[(\mathscr{F}f).\mathbb{1}_{[-A,A]}\big]$; d'où, puisque $f = \overline{\mathscr{F}}\mathscr{F}f$:

$$\|f - \psi_A\|_2 = \|\overline{\mathscr{F}}\big[\mathscr{F}f - (\mathscr{F}f).\mathbb{1}_{[-A,A]}\big]\|_2 = \|\mathscr{F}f - (\mathscr{F}f).\mathbb{1}_{[-A,A]}\|_2 \xrightarrow[A \to +\infty]{} 0\,.$$ □

Une conséquence intéressante est :

Corollaire III.2.15. *Si $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $\mathscr{F}f \in L^1(\mathbb{R})$, alors :*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} (\mathscr{F}f)(y)\, \mathrm{e}^{2\pi i x y}\, dy$$

pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.

Preuve. Puisque $\mathscr{F}f \in L^1(\mathbb{R})$, le Théorème de convergence dominée donne, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{A \to +\infty} \psi_A(x) = \int_{\mathbb{R}} (\mathscr{F}f)(y)\, \mathrm{e}^{2\pi i x y}\, dy.$$

D'autre part, comme $\|\psi_A - f\|_2 \xrightarrow[A \to +\infty]{} 0$, il existe une suite $(A_n)_n$ tendant vers $+\infty$ et telle que $\psi_{A_n}(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} f(x)$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$. D'où le résultat. □

III.3. Exercices

III.3.1. Convolution

Exercice 1.

1) Calculer $\mathbb{1}_{[0,1]} * \mathbb{1}_{[0,1]}$.

2) On pose $I_n = \left[n, n+\frac{1}{n^3}\right[$ si $n \geqslant 1$ et $I_n = \left]n+\frac{1}{n^3}, n\right]$ si $n \leqslant -1$. Montrer que la fonction f valant $|n|$ sur I_n est intégrable sur $\mathbb{R}$, mais que le produit de convolution $(f * f)(x)$ n'existe pas pour *tout* $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 2.

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction intégrable. On pose $F(t) = \int_0^t f(s)\,ds$, et, pour $\varepsilon > 0$, on définit $\Delta_\varepsilon f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par $(\Delta_\varepsilon f)(t) = \dfrac{F(t+\varepsilon) - F(t)}{\varepsilon}$.

1) Montrer que l'on a $\Delta_\varepsilon f = p_\varepsilon * f$, avec $p_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}\,\mathbb{1}_{[-\varepsilon,0]}$.

2) En déduire que $\Delta_\varepsilon f$ converge vers f, pour la norme de $L^1(\mathbb{R})$, lorsque ε tend vers 0.

Exercice 3 (*Unité approchée*)**.**

Soit k_n, $n \geqslant 1$, des fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :

(*i*) $\int_{\mathbb{R}} k_n(t)\,dt = 1$ pour tout $n \geqslant 1$;

(*ii*) $M = \sup_{n\geqslant 1} \|k_n\|_1 < +\infty$;

(*iii*) $\lim_{n\to\infty} \int_{|t|>\delta} |k_n(t)|\,dt = 0$ pour tout $\delta > 0$.

Montrer que $(k_n)_{n\geqslant 1}$ est une unité approchée pour la convolution (*commencer par montrer que* $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |k_n(t)\,\varphi(t)|\,dt = 0$ *pour toute fonction bornée* $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *continue en* 0 *et telle que* $\varphi(0) = 0$).

Exercice 4.

On rappelle que, pour $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{R}$, on note $(f_a)(x) = f(x-a)$, $x \in \mathbb{R}$. Soit $f \in L^\infty(\mathbb{R})$.

1) On suppose que f admet un représentant uniformément continu. Montrer que l'application $\tau_f\colon a \in \mathbb{R} \longmapsto f_a \in L^\infty(\mathbb{R})$ est continue.

2) a) Montrer, en utilisant le Théorème de Fubini, que pour presque tout x de $\mathbb{R}$, on a $|f(x-t) - f(x)| \leqslant \|f_t - f\|_\infty$ pour presque tout $t \in \mathbb{R}$.

Soit $(p_n)_{n\geqslant 1}$ une approximation de l'unité positive.

b) Montrer que $\|f - f * p_n\|_\infty \leqslant \int_{\mathbb{R}} \|f_t - f\|_\infty\, p_n(t)\,dt$.

3) On suppose maintenant que τ_f est continue en 0.

a) Montrer que $\widetilde{f_n} = f * p_n$ est uniformément continue, pour tout $n \geqslant 1$.

b) En déduire que f admet un représentant uniformément continu.

Exercice 5.

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable et bornée. On suppose qu'il existe une partie dense $A \subseteq \mathbb{R}$ telle que, pour tout $a \in A$, on ait $f(t+a) = f(t)$ pour presque tout t de $\mathbb{R}$ (*c'est-à-dire pour tout* $t \in \mathbb{R} \setminus N_a$, *avec* $\lambda(N_a) = 0$).

1) Soit $g \in L^1(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $(g * f)(x+a) = (g * f)(x)$ pour tout $a \in A$ et tout $x \in \mathbb{R}$.

b) En déduire que $g * f$ est constante.

2) En déduire que f est presque partout constante (*utiliser une unité approchée* $(p_n)_{n\geqslant 1}$ *dans* $L^1(\mathbb{R})$ *à supports contenus dans un compact*). Montrer ensuite que l'on peut supprimer la condition que f soit bornée.

Exercice 6.

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que, pour tous réels $a < b$ on ait :

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_a^b |f(x+h) - f(x)|\, dx = 0$$

Soit $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ une unité approchée, telle que φ_n soit continue et à support dans $\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$.

1) Montrer que $f_n = f * \varphi_n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et préciser sa dérivée.

2) En déduire que f est constante (presque partout).

Exercice 7.

Pour toute fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, on note, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\tau_a f$ la translatée de f par a : $\tau_a f(x) = f(x-a)$, $x \in \mathbb{R}$. On dit qu'un opérateur $T\colon L^2(\mathbb{R}) \to \mathscr{C}_b(\mathbb{R})$ *commute avec les translations* si on a $T(\tau_a f) = \tau_a(Tf)$ pour toute $f \in L^2(\mathbb{R})$ et tout $a \in \mathbb{R}$.

1) Soit $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$. Montrer que l'opérateur $T_\varphi\colon L^2(\mathbb{R}) \to \mathscr{C}_b(\mathbb{R})$ défini par $T_\varphi f = \varphi * f$ commute avec les translations.

2) Soit $T\colon L^2(\mathbb{R}) \to \mathscr{C}_b(\mathbb{R})$ un opérateur commutant avec les translations.

a) Montrer qu'il existe une fonction $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ telle que

$$(Tf)(0) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\, \varphi(-y)\, dy$$

pour toute $f \in L^2(\mathbb{R})$.

b) Montrer que $T = T_\varphi$.

Exercice 8.

On note $L^1(\mathbb{T})$ l'espace des (classes de) fonctions $f\colon \mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ qui sont intégrables pour la mesure m, image de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ par la surjection canonique $s\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. On peut aussi voir $L^1(\mathbb{T})$ comme l'espace des (classes de) fonctions mesurables 1-périodiques $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ qui sont intégrables sur $[0,1]$ et donc l'identifier à $L^1(0,1)$.

1) Montrer que pour toutes $f, g \in L^1(\mathbb{T})$, le produit de convolution $(f * g)(x) = \int_0^1 f(x-t)\, g(t)\, dt$ existe pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, que $f * g \in L^1(\mathbb{T})$ et $\|f * g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \, \|g\|_1$.

2) Montrer que pour toutes $f, g \in L^1(\mathbb{T})$, on a $\widehat{(f * g)}(n) = \widehat{f}(n)\, \widehat{g}(n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

3) Montrer que si F_n est le noyau de Fejér d'ordre n, on a $\|F_n * f - f\|_p \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ pour toute $f \in L^p(\mathbb{T})$ avec $1 \leqslant p < \infty$.

4) Montrer que si $f \in L^1(\mathbb{T})$ et $g \in L^\infty(\mathbb{T})$, alors $f * g$ est continue sur $\mathbb{T}$.

5) Soit $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mesurable de période 1 telle que $\int_{\mathbb{T}} |f| \, \ln(1 + |f|)\, dm < +\infty$.

a) Montrer que $f \in L^1(\mathbb{T})$.

b) Soit $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mesurable de période 1. On suppose qu'il existe $A > 1$ tel que $\exp(|g|/A) \in L^1(\mathbb{T})$. Montrer que le produit de convolution $f * g$ est défini partout et que :

$$|f * g| \leqslant A \ln A \int_{\mathbb{T}} |f|\, dm + A \int_{\mathbb{T}} |f| \, \ln(1 + |f|)\, dm + \int_{\mathbb{T}} (\mathrm{e}^{|g|/A} - 1)\, dm$$

(*utiliser, après l'avoir montrée, l'inégalité* $ab \leqslant a \ln a - a + \mathrm{e}^b - 1$ *pour* $a, b \geqslant 0$).

c) On pose $G(x) = \ln \left| \frac{1}{\sin(\pi x)} \right|$. Montrer que $f * G$ existe partout et qu'il existe, pour tout $n \geqslant 1$, une fonction continue h_n telle que $f * G = h_n + f_n * G$, où $f_n = f\, \mathbb{1}_{\{|f| \geqslant n\}}$.

d) En déduire que $f * G$ est continue.

Exercice 9 (Inégalité de Young).

Soit $p, q, r \in [1, \infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$. Le but de l'exercice est de montrer que si $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $g \in L^q(\mathbb{R})$, alors $f * g$ est définie presque partout et appartient à $L^r(\mathbb{R})$, avec $\|f * g\|_r \leqslant \|f\|_p \, \|g\|_q$.

1) Traiter le cas $r = 1$.

2) On suppose que $q = 1$; on a donc $r = p > 1$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-t)| \, |g(t)| \, dt \right)^p \leqslant \|g\|_1^{p-1} \int_{\mathbb{R}} |f(x-t)|^p \, |g(t)| \, dt\,,$$

et en déduire le résultat souhaité.

3) On suppose $p, q > 1$ (et donc $r > 1$ et $r \neq p, q$).

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\left[\int_{\mathbb{R}} |f(x-t)| \, |g(t)| \, dt \right]^r \leqslant \left[\int_{\mathbb{R}} |f(x-t)|^p |g(t)|^q \, dt \right] \left[\int_{\mathbb{R}} |f(x-t)|^{\frac{r-p}{r-1}} |g(t)|^{\frac{r-q}{r-1}} \, dt \right]^{r-1}$$

b) Montrer que $s = p \, \frac{r-1}{r-p}$ est > 1, et calculer son exposant conjugué.

c) Démontrer le résultat souhaité.

4) D'où vient la condition $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$? (*remplacer* $f(x)$ *par* $f(x/\lambda)$ *et* $g(x)$ *par* $g(x/\lambda)$).

Exercice 10 (*Théorème de Titchmarsh*).

On considère dans cet exercice l'espace $L^1(\mathbb{R}_+)$ comme sous-espace de $L^1(\mathbb{R})$, en prolongeant ces fonctions par 0 sur $\mathbb{R}_-^*$.

1) Soit $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$.

a) On pose $h(x) = \mathrm{e}^x \exp(-\mathrm{e}^x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\int_{\mathbb{R}} h(x)\,dx = 1$ et que h est bornée sur $\mathbb{R}$.

b) Justifier pourquoi $(f * h)(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$, puis montrer que :

$$(f * h)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\int_{\mathbb{R}_+} f(u)\,\mathrm{e}^{-(k+1)u}\,du \right) \mathrm{e}^{(k+1)x}.$$

c) On suppose ici que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(u)\,\mathrm{e}^{-lu}\,du = 0$ pour tout $l \in \mathbb{N}^*$. Que peut-on dire de $f * h$? On pose $h_a(x) = \frac{1}{a}\,h\big(\frac{x}{a}\big)$, pour $a > 0$. Montrer que $f * h_{1/n} = 0$. En déduire que $f = 0$.

2) Pour $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$, on définit sa *transformée de Laplace* $\mathscr{L}f$ par $(\mathscr{L}f)(z) = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-zt}\,dt$, $\mathrm{Re}\,z \geqslant 0$.

a) Montrer que $\mathscr{L}f$ est holomorphe dans le demi-plan $\Pi_+ = \{z \in \mathbb{C}\,;\ \mathrm{Re}\,z > 0\}$.

b) Si $f, g \in L^1(\mathbb{R}_+)$, montrer que $f * g \in L^1(\mathbb{R}_+)$ et que $\mathscr{L}(f * g) = (\mathscr{L}f)(\mathscr{L}g)$.

3) Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R}_+)$ telles que $f * g = 0$. Montrer que $f = 0$ ou $g = 0$ (*Théorème de Titchmarsh*, 1926).

Remarque. Comparer avec l'Exercice 17.

III.3.2. Transformation de Fourier

Exercice 11.

1) Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continûment dérivable telle que f et $f' \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que $f(x) \xrightarrow[|x|\to+\infty]{} 0$ et en déduire que $\big(\mathscr{F}(f')\big)(y) = 2\pi i y(\mathscr{F}f)(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

2) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$; on pose $g(x) = xf(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et l'on suppose que $g \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathscr{F}f$ est dérivable et que $(\mathscr{F}f)' = -2\pi i \mathscr{F}g$.

Exercice 12.

1) Montrer que si $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est continue et $g(1) = 1$, alors il existe $a > 0$ tel que g ne s'annule pas sur $[1 - a, 1 + a]$. En déduire que g et $\mathbb{1}_{[-1,1]}$ ne sont pas égales presque partout.

2) Montrer, sans la calculer, que la transformée de Fourier de la fonction $\mathbb{1}_{[-1,1]}$ n'est pas dans $L^1(\mathbb{R})$.

Exercice 13.

1) Calculer, pour $a > 0$, la transformée de Fourier de la fonction indicatrice $\mathbb{1}_{[-a,a]}$.

2) En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt$ (on expliquera pourquoi la fonction $\mathbb{1}_{[-a,a]} * \mathbb{1}_{[-a,a]}$ est continue).

Exercice 14.

Soit $\lambda > 0$.

1) Calculer la transformée de Fourier de $\mathbb{1}_{[-\lambda,\lambda]} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

2) En déduire la transformée de Fourier-Plancherel de la fonction de $f \in L^2(\mathbb{R})$ définie par $f(x) = \dfrac{\sin(2\pi\lambda x)}{2\pi\lambda x}$.

Exercice 15.

On pose, pour $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \dfrac{\sin x}{|x|}$ et $f_\alpha(x) = \mathrm{e}^{-\alpha|x|}\dfrac{\sin x}{|x|}$, $\alpha > 0$.

1) Montrer que f et f_α sont dans $L^2(\mathbb{R})$ et que $\|f - f_\alpha\|_2 \xrightarrow[\alpha\to 0]{} 0$.

2) Montrer que $f_\alpha \in L^1(\mathbb{R})$, calculer $\dfrac{d}{d\alpha}\left[(\widehat{f_\alpha})(y)\right]$ et en déduire $\widehat{f_\alpha}(y)$.

3) En déduire $\mathscr{F}f$.

Exercice 16.

On pose $P(x) = \mathrm{e}^{-2\pi|x|}$, $x \in \mathbb{R}$, et on considère $p = \widehat{P}$. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

1) Montrer que :

$$\lim_{a\to 0}\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x)\, P(ax)\, dx = f(0)\,.$$

2) En déduire que si l'on suppose de plus $\widehat{f}$ *positive*, alors $\widehat{f}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Variante

1) Soit $g_n(u) = \mathrm{e}^{-|u|/n}$, calculer $\widehat{g_n}(v)$ pour tout $v \in \mathbb{R}$.

2) Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $\left|\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(y)\, g_n(y)\, dy\right| \leqslant \|f\|_\infty$.

b) En déduire que, si, de plus, $\widehat{f} \geqslant 0$, alors $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ (*on pourra utiliser le Lemme de Fatou*).

Exercice 17.

1) Montrer que $\varphi = \mathbb{1}_{[-1,0]} * \mathbb{1}_{[-1,0]}$ et $\psi = \mathbb{1}_{[1,2]} * \mathbb{1}_{[1,2]}$ sont les transformées de Fourier de deux fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$.

2) En déduire qu'il existe des fonctions intégrables f et g, non nulles, telles que $f * g = 0$.

Remarque. Comparer avec l'Exercice 10.

Exercice 18.

Si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{R}$, on pose $(\tau_a f)(x) = f(x - a)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1) Vérifier que pour $f \in L^1(\mathbb{R})$ on a $\widehat{\tau_a f}(y) = \mathrm{e}^{-2\pi i a y}\widehat{f}(y)$ pour presque tout $y \in \mathbb{R}$.

2) Montrer que cette formule reste valable si $f \in L^2(\mathbb{R})$, c'est-à-dire que l'on a $\mathscr{F}(\tau_a f)(y) = \mathrm{e}^{-2\pi i a y}(\mathscr{F}f)(y)$ pour presque tout $y \in \mathbb{R}$.

Exercice 19.

1) Montrer que la série de fonctions $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2}\, \frac{(-2\pi i x y)^n}{n!}$ converge dans $L^2(\mathbb{R})$ (pour la norme $\|\,.\,\|_2$), vers une fonction que l'on précisera.

2) Montrer que pour toute $f \in L^2(\mathbb{R})$, la fonction g définie par $g(x) = \overline{f(x)}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$ est dans $L^1(\mathbb{R})$.

3) Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ orthogonale à toutes les fonctions $x^n \mathrm{e}^{-x^2/2}$, $n \in \mathbb{N}$. Montrer que, si g est définie comme à la question précédente, on a $\widehat{g} = 0$. Qu'en déduit-on pour f ?

Remarque. Comparer avec l'Exercice 20 du Chapitre II.

Exercice 20.

Soit $(g_n)_{n\geqslant 1}$ une suite bornée d'éléments de $L^1(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $g \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\widehat{g_n}(y) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \widehat{g}(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

Montrer que $\int_{\mathbb{R}} h(x)\, g_n(x)\, dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}} h(x)\, g(x)\, dx$ pour toute $h \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R})$ (*commencer par montrer que c'est vrai pour toute h dans un sous-espace dense convenable de* $\mathscr{C}_0(\mathbb{R})$).

Remarque. Cela signifie que la suite de mesures $(g_n.\lambda)_{n\geqslant 1}$ converge préfaiblement vers la mesure $g.\lambda$ dans l'espace $\mathscr{M}(\mathbb{R})$ des mesures sur $\mathbb{R}$ (voir le Chapitre V et le Chapitre VIII). Comparer avec l'Exercice 2 du Chapitre VIII.

Exercice 21.

1) Montrer que l'application $(u, v) \in L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R}) \mapsto uv \in L^1(\mathbb{R})$ est continue.

2) Soit f et $g \in L^2(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $(\mathscr{F} f) * (\mathscr{F} g)$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ qui tend vers 0 à l'infini.

b) Montrer que la transformée de Fourier $\widehat{F}$ du produit $F = fg \in L^1(\mathbb{R})$ est égale à $(\mathscr{F} f) * (\mathscr{F} g)$ (*utiliser le 1) et le fait que* $A(\mathbb{R}) = \{h \in L^1(\mathbb{R})\,;\ \widehat{h} \in L^1(\mathbb{R})\}$ *est dense dans* $L^2(\mathbb{R})$).

Exercice 22.

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^2(\mathbb{R})$. On rappelle (voir l'Exercice 9) que l'on peut définir le produit de convolution de f et g, que $f * g \in L^2(\mathbb{R})$ et $\|f * g\|_2 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_2$.

1) Soit $u \in L^\infty(\mathbb{R})$. Montrer que l'application $M_u \colon v \in L^2(\mathbb{R}) \longmapsto u\,v \in L^2(\mathbb{R})$ est linéaire continue.

2) On désigne par $\mathscr{F}$ la transformation de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$, ainsi que la transformation de Fourier-Plancherel sur $L^2(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathscr{F}(f * g) = (\mathscr{F} f)\,(\mathscr{F} g)$ (*on utilisera, pour* $a > 0$, *la fonction* $g_a = g\, \mathbb{1}_{[-a,a]} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$).

Exercice 23 (*Ondelette*)**.**

Soit $\Phi \in L^2(\mathbb{R})$. On pose $\Gamma(\xi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{\Phi}(\xi + n)|^2$. On suppose qu'il existe deux constantes $0 < a < b < \infty$ telles que $a \leqslant \Gamma(\xi) \leqslant b$ pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$.

1) Montrer que la formule $\widehat{Jf}(\xi) = \frac{\widehat{f}(\xi)}{\sqrt{\Gamma(\xi)}}$ permet de définir un isomorphisme $J \colon L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$.

2) On pose $\Phi_n(t) = \Phi(t - n)$, pour $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que la famille $(J\Phi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est orthonormée dans $L^2(\mathbb{R})$ (*utiliser la périodicité de* Γ).

Exercice 24 (Formule sommatoire de Poisson).

1) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)| < +\infty$.

a) Montrer que l'on peut définir presque partout une fonction $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de période 1 en posant $F(t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} f(t+m)$, et que cette fonction est intégrable sur $[0,1]$.

b) Calculer les coefficients de Fourier de F et en déduire que l'on a $F(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)\,\mathrm{e}^{2\pi i n t}$ pour presque tout $t \in \mathbb{R}$.

2) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(s+n)| < +\infty$ pour presque tout $s \in \mathbb{R}$.

b) En utilisant le 1) avec $f_s(t) = f(t)\,\mathrm{e}^{-2\pi i s t}$, montrer que pour presque tout $(s,t) \in \mathbb{R}^2$, on a la *formule de Poisson* :

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} f(t+m)\,\mathrm{e}^{-2\pi i m s} = \mathrm{e}^{2\pi i s t} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(s+n)\,\mathrm{e}^{2\pi i n t}.$$

c) Montrer que si $f \in L^1(\mathbb{R})$ est continue, telle que la série $\sum_{m\in\mathbb{Z}} f(\,\cdot\,+m)$ converge uniformément sur $[0,1]$, et telle que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)| < +\infty$, alors la formule de Poisson s'écrit $\sum_{m\in\mathbb{Z}} f(m) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)$.

3) (*Fonction thêta de Jacobi*) Pour $s > 0$, on pose $\theta(s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\pi s n^2}$. Montrer que la fonction θ vérifie l'équation fonctionnelle $\theta(s) = \frac{1}{\sqrt{s}}\,\theta\big(\frac{1}{s}\big)$.

4) En considérant $f_t(u) = \mathrm{e}^{-t\,|u|}$, montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2t^2}{t^2+4\pi^2 n^2} = \frac{t}{2}\,\frac{\mathrm{e}^t+1}{\mathrm{e}^t-1} - 1$ pour tout $t > 0$.

5) On admettra ici que les résultats sur la transformation de Fourier et la formule sommatoire de Poisson restent valables lorsque les fonctions sont définies sur $\mathbb{R}^d$ au lieu de l'être sur $\mathbb{R}$ (les preuves sont exactement les mêmes). On considère un borélien convexe $K \subseteq \mathbb{R}^d$, symétrique par rapport à 0 et ne contenant aucun point à coordonnées demi-entières distinct de l'origine : si $n \in \mathbb{Z}^d$ et $\frac{n}{2} \in K$, alors $n = 0$. En supposant d'abord K borné et en appliquant alors la formule de Poisson à la fonction $f = \mathbb{1}_K * \mathbb{1}_K$, montrer que $\lambda_d(K) \leqslant 1$.

Exercice 25 (*Sous-espaces de $L^1(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R})$ invariants par translation*).

Pour $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit $\tau_\alpha f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par $(\tau_\alpha f)(x) = f(x-\alpha)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On dit qu'un sous-espace fermé E de $L^p(\mathbb{R})$ est *invariant par translation* si $\tau_\alpha f \in E$ pour toute $f \in E$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

I. 1) Soit E un sous-espace fermé de $L^1(\mathbb{R})$. Montrer que si E est un *idéal* de $L^1(\mathbb{R})$, c'est-à-dire que $\varphi * f \in E$ pour toute $f \in E$ et toute $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$, alors E est invariant par translation (*montrer que* $(\tau_\alpha \varphi) * f = \varphi * (\tau_\alpha f)$ *pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$).

2) Soit $u \in L^1(\mathbb{R})$, et soit (a,b) un intervalle borné de $\mathbb{R}$. Pour tout entier $N \geqslant 1$, on pose $U_N = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tau_{\alpha_{N,k}} u$, où $\alpha_{N,k} = a + k\,\frac{b-a}{N}$. Montrer que la suite $(U_N)_{N\geqslant 1}$ converge en norme L^1 vers la fonction $\mathbb{1}_{(a,b)} * u$.

3) Soit E un sous-espace fermé de $L^1(\mathbb{R})$ invariant par translation.

a) Montrer que si $f \in E$, alors $\varphi * f \in E$ pour toute fonction $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ en escalier.

b) Montrer que E est un idéal de $L^1(\mathbb{R})$.

II. Le but de cette partie est de montrer que si E est un sous-espace vectoriel fermé de $L^2(\mathbb{R})$ invariant par translation, alors il existe un borélien $B \subseteq \mathbb{R}$ tel que :

$$E = \{f \in L^2(\mathbb{R})\,;\ \mathscr{F}f = 0 \quad \text{p.p. sur } B\}\,.$$

On note, pour $\alpha \in \mathbb{R}$: $e_\alpha(x) = \mathrm{e}^{2\pi i\alpha x}$, $x \in \mathbb{R}$. On pose $F = \mathscr{F}E = \{\mathscr{F}f\,;\ f \in E\}$, et on note P la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{R})$ sur F.

1) Vérifier que si $f \in L^1(\mathbb{R})$, on a $\mathscr{F}(\tau_\alpha f) = (\mathscr{F}f)\,e_{-\alpha}$, et montrer que cela reste vrai pour $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Quelle propriété en déduit-on pour F ?

2) Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $(u - Pu) \perp (Pv)\,e_\alpha$ pour tous $u, v \in L^2(\mathbb{R})$.

3) Que signifie cette orthogonalité pour la transformée de Fourier de la fonction (qui est intégrable) $w = (u - Pu)\,\overline{Pv}$? En déduire que $w = 0$.

4) Montrer, en utilisant 3), que l'on a $u\,(\overline{Pv}) = (Pu)\,\overline{v}$ pour tous $u, v \in L^2(\mathbb{R})$.

5) On note $v_0(y) = \mathrm{e}^{-|y|}$, $y \in \mathbb{R}$, et on pose $\varphi(y) = \overline{\left[\dfrac{(Pv_0)(y)}{v_0(y)}\right]}$.

En utilisant 4), montrer que $\varphi(y) = 0$ ou 1 pour presque tout $y \in \mathbb{R}$ (*utiliser le fait que* $P^2 = P$).

6) Conclure.

Remarque. Ces résultats sont dus à N. Wiener (1921).

Exercice 26 (*Continuité des caractères de l'algèbre* $L^1(\mathbb{R})$).

Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, on note f^{*n} le produit de convolution $f * \cdots * f$ itéré, où f apparaît n fois.

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\|f\|_1 < 1$.

1) Montrer que $g = -\sum_{n=1}^{\infty} f^{*n}$ définit un élément de $L^1(\mathbb{R})$ et qu'il vérifie $f * g = f + g$.

2) Montrer que si $f * h = f + h$ avec $h \in L^1(\mathbb{R})$, alors $h = g$ (*utiliser les transformées de Fourier*).

Soit $\chi \colon L^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ une forme linéaire multiplicative : $\chi(u * v) = \chi(u)\,\chi(v)$.

3) a) En utilisant le 1), montrer que $\chi(f) \neq 1$.

b) Montrer que si $|\lambda| \geqslant 1$, alors $\chi(f) \neq \lambda$.

4) En déduire que χ est continue et de norme $\leqslant 1$.

Remarque. La détermination des caractères de $L^1(\mathbb{R})$ sera faite à l'Exercice 3 du Chapitre V.

Exercice 27.

1) Soit B une partie mesurable de $\mathbb{R}$ telle que $\lambda(B) > 0$. On pose $\varphi = \mathbb{1}_B$ et $\check{\varphi}(t) = \varphi(-t)$.

a) On suppose d'abord que $\lambda(B) < +\infty$. Justifier le fait que $\varphi * \check{\varphi}$ est continue sur $\mathbb{R}$. En déduire que

$$V = \{t - u\,;\ t, u \in B\} = \{x \in \mathbb{R}\,;\ B \cap (B + x) \neq \emptyset\}$$

est un voisinage de 0 (*considérer l'ensemble* $U = \{x \in \mathbb{R}\,;\ (\check{\varphi} * \varphi)(x) > 0\}$).

b) Montrer que V est aussi un voisinage de 0 lorsque $\lambda(B) = +\infty$.

2) Montrer que si G est un sous-groupe mesurable de $(\mathbb{R},+)$ de mesure $\lambda(G)>0$, alors $G=\mathbb{R}$.

Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de nombres réels telle qu'il existe une partie mesurable A de $\mathbb{R}$ avec $\lambda(A)>0$ pour laquelle $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{e}^{2\pi i a_n x}$ existe pour tout $x\in A$.

3) Montrer que

$$G=\{x\in\mathbb{R}\,;\ \lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{2\pi i a_n x}\text{ existe}\}$$

est un sous-groupe mesurable de $(\mathbb{R},+)$ (*on écrira G à l'aide des ensembles $C_{m,k,l}=\{x\in\mathbb{R}\,;\ |\mathrm{e}^{2\pi i a_k x}-\mathrm{e}^{2\pi i a_l x}|\leqslant 1/m\}$*). En déduire que $G=\mathbb{R}$.

4) On pose, pour $x\in\mathbb{R}$, $g(x)=\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{2\pi i a_n x}$ et on suppose qu'il existe une sous-suite telle que $|a_{n_k}|\xrightarrow[k\to\infty]{}+\infty$.

a) Pour $f\in L^1(\mathbb{R})$, justifier que $\lim\limits_{k\to\infty}\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{e}^{2\pi i a_{n_k}x}\,dx=0$.

b) En déduire que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\,g(x)\,dx=0$.

c) Montrer que ce n'est pas possible.

5) En déduire que la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ converge (*on montrera qu'elle n'a qu'une seule valeur d'adhérence*).

Exercice 28 (*Théorème de Paley-Wiener*).

On notera par $\mathscr{F}\colon L^2(\mathbb{R})\to L^2(\mathbb{R})$ la transformation de Fourier-Plancherel.

Pour $a>0$, on *identifie* $L^2([-a,a])$ au sous-espace (fermé) de $L^2(\mathbb{R})$ des fonctions s'annulant hors de $[-a,a]$.

1) Pour $f\in L^2([-a,a])$, on pose, pour $z\in C$:

$$F(z)=F_f(z)=\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{e}^{-2\pi i z x}\,dx\,.$$

a) Montrer que $F(z)$ existe pour tout $z\in\mathbb{C}$ et qu'il existe une constante $C>0$ (dépendant de f et de a) telle que, pour tout $z\in\mathbb{C}$, on ait $|F(z)|\leqslant C\,\mathrm{e}^{2\pi a\,|\mathrm{Im}\,z|}$.

b) Montrer que F est holomorphe dans $\mathbb{C}$.

c) Montrer que $F_{|\mathbb{R}}\in L^2(\mathbb{R})$.

2) Soit $G\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ une fonction entière telle que $G_{|\mathbb{R}}\in L^2(\mathbb{R})$, et soit $g=\mathscr{F}^{-1}(G_{|\mathbb{R}})$. On suppose qu'il existe $a>0$ et une constante $C>0$ tels que :

$$|G(z)|\leqslant C\,\frac{\mathrm{e}^{2\pi a\,|\mathrm{Im}\,z|}}{1+|z|^2}\,,\quad \forall z\in\mathbb{C}\,.$$

a) Montrer que $G_{|\mathbb{R}}\in L^1(\mathbb{R})$.

b) Montrer que pour tout $b>0$, $g(x)=\int_{\mathbb{R}} G(t+ib)\,\mathrm{e}^{2\pi i x(t+ib)}\,dt$, pour tout $x\in\mathbb{R}$.

c) Montrer que $g(x)=0$ pour $x>a$, puis qu'il en est de même pour $x<-a$.

d) En déduire que $g\in L^2([-a,a])$.

3) Soit $H\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction entière telle que $H_{|\mathbb{R}} \in L^2(\mathbb{R})$, et soit $f = \mathscr{F}^{-1}(H_{|\mathbb{R}})$. On suppose qu'il existe $a > 0$ et une constante $C > 0$ tels que :

$$|H(z)| \leqslant C\,\mathrm{e}^{2\pi a\,|\mathrm{Im}\,z|}\,, \quad \forall z \in \mathbb{C}\,.$$

a) Soit $\varepsilon > 0$ et $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ dont le support $\operatorname{supp}\varphi$ est contenu dans $[-\varepsilon, \varepsilon]$.

(i) Montrer que, avec les notations du 1), $|F_\varphi(z)| \leqslant C_\varphi\,\frac{\mathrm{e}^{2\pi\varepsilon\,|\mathrm{Im}\,z|}}{1+|z|^2}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ (*pour* $|z| \geqslant 1$, *intégrer deux fois par parties et utiliser le 1) b)*).

(ii) En déduire que $G = H\,F_\varphi$ vérifie les conditions du 2), avec $a + \varepsilon$ au lieu de a (*utiliser l'Exercice 22*).

(iii) En déduire que $f * \varphi \in L^2([-a-\varepsilon, a+\varepsilon])$.

b) En utilisant une unité approchée pour la convolution $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ telle que $\varphi_\varepsilon \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ et $\operatorname{supp}\varphi_\varepsilon \subseteq [-\varepsilon, \varepsilon]$, montrer que $f \in L^2([-a, a])$ (*Théorème de Paley-Wiener*).

Exercice 29 (*Fonctions d'Hermite*).

On note $w(t) = \mathrm{e}^{-t^2}$ et l'on considère la mesure μ sur $\mathbb{R}$ de densité w par rapport à la mesure de Lebesgue, *i.e.* $d\mu(t) = w(t)\,dt$. On notera par $L^2(w)$ l'espace $L^2(\mathbb{R}, \mu)$.

1) a) Montrer que $L^2(w)$ contient tous les polynômes.

b) Montrer que si $f \in L^2(w)$, la formule $F(z) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2\pi i t z} f(t)\,w(t)\,dt$ définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$, et exprimer $F^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) Déduire de b) que les polynômes sont denses dans $L^2(w)$.

2) a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w^{(n)}(t) = (-1)^n H_n(t)\,w(t)$, où H_n est un polynôme réel de degré n et de coefficient dominant 2^n. Les H_n sont appelés les *polynômes d'Hermite.*

b) Montrer que la suite $(H_n)_{n\geqslant 0}$ est orthogonale dans $L^2(w)$, et calculer la norme $\|H_n\|_{L^2(w)}$.

c) Montrer que la suite $\big((\sqrt{\pi}\,2^n n!)^{-1/2} H_n\big)_{n\geqslant 0}$ est une base orthonormée de $L^2(w)$.

3) En développant $w(t-z) = \mathrm{e}^{-(t-z)^2}$ en série entière, montrer que pour tous $t \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$, on a $G(t,z) := \sum_{n=0}^{\infty} H_n(t)\,\frac{z^n}{n!} = \mathrm{e}^{2tz-z^2}$. On dit que G est la *fonction génératrice* des polynômes H_n.

4) On définit les *fonctions d'Hermite* h_n par $h_n(t) = (2^n\sqrt{\pi}\,n!)^{-1/2} H_n(t)\,\mathrm{e}^{-t^2/2}$. Montrer que $(h_n)_{n\geqslant 0}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.

5) On pose $\Phi(x,z) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2\pi i t x} G(t,z)\,\mathrm{e}^{-t^2}\,dt$ pour $x, z \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que $\Phi(x,z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \widehat{\theta_n}(x)\,\frac{z^n}{n!}$, où $\theta_n(t) = H_n(t)\,\mathrm{e}^{-t^2/2}$.

b) Montrer que $\Phi(x,z) = \sqrt{2\pi}\,\mathrm{e}^{-2\pi^2 x^2} G(2\pi x, -iz)$.

6) En déduire qu'il existe une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres pour la transformation de Fourier-Plancherel $\mathscr{F}$. Préciser les valeurs propres de $\mathscr{F}$. Pourquoi pouvait-on les prévoir ?

Exercice 30 (*Problème de la chaleur périodique*).

Étant donnée une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, continue périodique, disons de période 2π, le *problème de la chaleur* associé à f, noté $(\mathcal{P})_f$, consiste à trouver une fonction $u\colon [0,+\infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ qui soit :

(i) continue sur $[0,+\infty[\times\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$;

(ii) pour tout $t \geqslant 0$, la fonction $x \mapsto u(t,x)$ est 2π-périodique, et $u(0,x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$;

(iii) u vérifie sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ l'*équation de la chaleur* $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot$

L'interprétation physique de la fonction u est la suivante. Étant donnée une barre métallique (idéalisée : son diamètre est supposé nul), de longueur disons 2π, dont la température à l'instant 0 est donnée en chaque point de la barre d'abscisse x par $f(x)$, et dont on maintient les extrémités à une température fixe, alors $u(t,x)$ est la température de la barre au point d'abscisse x à l'instant t.

Le but de l'exercice est de montrer que pour toute fonction continue 2π-périodique $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, le problème $(\mathcal{P})_f$ admet une unique solution.

1) Pour $\alpha > 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, calculer l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\alpha x^2} \mathrm{e}^{i\lambda x}\, dx$.

2) Soit $\alpha > 0$ et soit $\varphi_\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi_\alpha(x) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha(x-2\pi n)^2}$.

a) Justifier la définition, puis montrer que φ_α est de classe $\mathcal{C}^1$ et 2π-périodique.

b) Calculer les coefficients de Fourier de φ_α.

3) Pour $t > 0$, on définit $G_t\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par $G_t(x) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n^2 t} \mathrm{e}^{inx}$.

a) En utilisant le 2), montrer qu'on a également $G_t(x) = \sqrt{\dfrac{\pi}{t}} \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(x-2\pi n)^2}{4t}}$.

b) Montrer que la famille $(G_t)_{t>0}$ est une unité approchée pour la convolution dans $L^1(\mathbb{T})$ (voir l'Exercice 8).

4) On définit $u\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par $u(0,x) = f(x)$ et :

$$u(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n)\, \mathrm{e}^{-n^2 t} \mathrm{e}^{inx} \quad \text{pour } t > 0\,.$$

a) Justifier la définition, et montrer que pour $t > 0$, on a :

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G_t(x-y)\, f(y)\, dy = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G_t(y)\, f(x-y)\, dy\,.$$

b) Montrer que u est solution du problème de la chaleur associé à f.

5) Soit $v\colon [0,+\infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant les conditions (i) et (iii).

a) Montrer que si on pose $E(t) = \displaystyle\int_0^{2\pi} [v(t,x)]^2\, dx$ pour $t \geqslant 0$, alors E est décroissante sur $[0,+\infty[$.

b) En déduire que si $v(0,x) = 0$ pour tout $x \in [0,2\pi]$, alors $v = 0$.

c) Conclure.

Remarque. C'est pour résoudre le problème de la chaleur que Fourier introduisit à partir de 1807 ce que l'on appelle maintenant les *séries de Fourier*, avec les formules pour calculer ce que l'on appelle maintenant les *coefficients de Fourier* d'une fonction (bien que ses travaux manquassent cruellement de la moindre rigueur – toutefois, selon Riemann : "*C'est Fourier qui, le premier, a compris d'une manière exacte et complète la nature des séries trigonométriques*"). Le lecteur pourra lire l'intéressant texte de J.-P. Kahane consacré à Fourier sur le site `http://www.academie-sciences.fr/activite/archive/dossiers/Fourier/Fourier_pdf/Fourier_Kahane.pdf`

Chapitre IV

LE THÉORÈME DE BAIRE ET SES CONSÉQUENCES

Ce chapitre, bien que court, contient plusieurs résultats fondamentaux, basés sur le Théorème de Baire. Ce théorème permet, sous certaines conditions, d'avoir des majorations **uniformes** lorsque l'on a des majorations individuelles. Cela donne aussi des résultats de continuité automatique.

IV.1. Le Théorème de Baire

Théorème IV.1.1 (Théorème de Baire [1899]).
Dans un espace métrique **complet***, la réunion d'une famille dénombrable de fermés d'intérieur vide est encore d'intérieur vide.*

Autrement dit :

Soit X un espace métrique *complet* et Φ_n, $n \geqslant 1$, des fermés de X (en quantité **dénombrable**).

Alors si $A = \bigcup_{n\geqslant 1} \Phi_n$ a un point intérieur : $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$, il existe un $N \geqslant 1$ tel que $\overset{\circ}{\Phi}_N \neq \emptyset$.

Remarques. 1) Il est indispensable que l'ensemble des indices soit dénombrable.

2) On utilise **souvent** ce théorème lorsque $X = \bigcup_{n\geqslant 1} \Phi_n$.

3) Un énoncé équivalent, en passant au complémentaire $\Omega_n = X \setminus \Phi_n$, est :

Théorème IV.1.2 (Théorème de Baire, $2^{ème}$ *version*). *Si X est un espace métrique* **complet***, l'intersection d'une famille dénombrable d'ouverts denses est encore dense dans X.*

Preuve. On démontrera la deuxième version.

Soit $(\Omega_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'ouverts denses, et soit :

$$G = \bigcap_{n\geqslant 1} \Omega_n.$$

Soit Ω un ouvert non vide arbitraire de X. On va montrer que $\Omega \cap G \neq \emptyset$; cela prouvera que G est dense dans X.

On notera par respectivement $B_f(x,r)$ et $B_o(x,r)$ les boules fermée et ouverte de centre x et de rayon r de l'espace métrique X.

Soit $x_0 \in \Omega$ et $r_0 > 0$ tels que :

$$B_f(x_0, r_0) \subseteq \Omega.$$

Comme Ω_1 est dense, l'ouvert $\Omega_1 \cap B_o(x_0,r_0)$ n'est pas vide; il existe donc $x_1 \in \Omega_1 \cap B_o(x_0,r_0)$ et $r_1 > 0$ tels que :

$$B_f(x_1,r_1) \subseteq \Omega_1 \cap B_o(x_0,r_0) \subseteq \Omega_1 \cap \Omega,$$

et l'on peut prendre $r_1 \leqslant r_0/2$.

En continuant ainsi, on obtient des $x_n \in \Omega_n$ et des $r_n > 0$, pour tout $n \geqslant 1$, tels que :

$$B_f(x_{n+1},r_{n+1}) \subseteq \Omega_{n+1} \cap B_o(x_n,r_n) \subseteq \Omega_{n+1} \cap \Omega_n \cap \cdots \cap \Omega_1 \cap \Omega,$$

et :

$$0 < r_{n+1} \leqslant r_n/2.$$

Alors la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est de Cauchy. Comme X est <u>complet</u>, elle possède une limite l.

Comme :

$$x_{n+p} \in B_o(x_n,r_n)\,, \qquad \forall n,p \geqslant 1\,,$$

on obtient :

$$l \in B_f(x_n,r_n)\,, \qquad \forall n \geqslant 1\,;$$

comme $B_f(x_n,r_n) \subseteq \Omega_n \cap \cdots \cap \Omega_1 \cap \Omega$, on obtient $l \in G \cap \Omega$. □

IV.2. Le Théorème de Banach-Steinhaus

Théorème IV.2.1 (Théorème de Banach-Steinhaus [1927]). *Soit E et F deux espaces <u>de Banach</u>, et soit $T_i\colon E \to F$ des applications <u>linéaires</u> <u>continues</u> ($i \in I$, ensemble d'indices <u>quelconque</u>) telles que :*

$$C_x = \sup_{i\in I} \|T_i x\|_F < +\infty\,, \quad \forall x \in E\,.$$

Alors :

$$C = \sup_{i\in I} \|T_i\|_{\mathscr{L}(E,F)} < +\infty\,.$$

En d'autres termes, s'il existe, pour chaque $x \in E$ un nombre positif $C_x < +\infty$ tel que :

$$\|T_i x\|_F \leqslant C_x \|x\|_E , \quad \forall i \in I ,$$

alors il existe un nombre positif $C < +\infty$ tel que :

$$\|T_i x\|_F \leqslant C \|x\|_E , \quad \underline{\forall x \in E}, \ \forall i \in I .$$

En anglais, il est appelé du nom de "*uniform boundedness principle*", qui a le mérite d'en indiquer le contenu.

Notons qu'en fait on n'utilise pas la complétude de F ; mais l'énoncé est plus simple comme ça.

Preuve.[1] Soit :

$$\begin{aligned}\Phi_n &= \{x \in E \,;\ \forall i \in I \ :\ \|T_i x\| \leqslant n\} \\ &= \bigcap_{i\in I} \{x \in E \,;\ \|T_i x\| \leqslant n\} \,;\end{aligned}$$

c'est un fermé (car les T_i sont continues), et l'hypothèse signifie que :

$$\bigcup_{n\geqslant 1} \Phi_n = E.$$

Puisque E est un espace métrique complet, le Théorème de Baire dit qu'il existe un $N \geqslant 1$ tel que $\overset{\circ}{\Phi}_N \neq \emptyset$.

Soit $x_0 \in E$ et $r_0 > 0$ tels que :

$$B(x_0, r_0) \subseteq \Phi_N .$$

On a :

$$\|T_i(x_0 + r_0 y)\|_F \leqslant N , \ \forall i \in I , \ \forall y \in B_E = B_E(0,1) \,;$$

donc :

$$\|T_i y\|_F \leqslant \frac{1}{r_0}\Big(N + \sup_{i\in I} \|T_i x_0\|_F\Big) , \quad \forall y \in B_E . \qquad \square$$

Corollaire IV.2.2. *Soit E et F des espaces <u>de Banach</u> et $T_n \colon E \to F$, $n \geqslant 1$, une **<u>suite</u>** d'applications linéaires continues telle que :*

$$\lim_{n\to\infty} T_n x = Tx \ \textit{existe pour tout } x \in E.$$

Alors :

1) $\sup_{n\geqslant 1} \|T_n\|_{\mathscr{L}(E,F)} < +\infty$;
2) *$T \colon E \to F$ est linéaire et <u>continue</u>.*

De plus : $\|T\|_{\mathscr{L}(E,F)} \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|_{\mathscr{L}(E,F)}$.

1. Banach et Steinhaus indiquent dans leur article de 1927 que cette preuve, utilisant le Théorème de Baire, n'est pas leur preuve originelle, qui utilisait un argument de séries, et qu'elle leur a été indiquée par S. Saks.

Preuve. La convergence de la suite entraîne que :

$$C_x = \sup_{n \geqslant 1} \|T_n x\| < +\infty$$

pour tout $x \in E$; d'où le 1) par le Théorème de Banach-Steinhaus. On voit ensuite facilement que T est linéaire. Maintenant, si $C = \sup_{n \geqslant 1} \|T_n\|_{\mathscr{L}(E,F)}$, on a :

$$\|T_n x\| \leqslant C \, \|x\| \, , \quad \forall x \in E \, ;$$

donc T est continue et $\|T\|_{\mathscr{L}(E,F)} \leqslant C$.

Ensuite, comme $\|T_n x\| \leqslant \|T_n\| \, \|x\|$, on obtient :

$$\|Tx\| = \lim_{n \to \infty} \|T_n x\| \leqslant \big(\liminf_{n \to \infty} \|T_n\| \big) \, \|x\| \, ,$$

d'où la dernière inégalité. □

Exemple d'application (voir l'Exercice 15) : *il existe des fonctions* $f \colon [0,1] \to \mathbb{C}$ *qui sont intégrables, mais dont la série de Fourier ne converge pas pour la norme* $\| \, . \, \|_1$ (c'est d'ailleurs à partir de ce résultat, montré par Banach, encore étudiant, suite à une question de Steinhaus, et pour en donner une preuve plus simple, que Banach et Steinhaus ont montré leur théorème). De même, il existe des fonctions continues $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de période 1 dont la série de Fourier ne converge pas uniformément sur $[0,1]$. Ce dernier résultat avait été montré par Du Bois-Reymond en 1876, par une construction explicite.

IV.3. Le Théorème de l'application ouverte

Théorème IV.3.1 (Théorème de l'application ouverte). *Soit E et F deux espaces* **de Banach** *et $T \colon E \to F$ une application linéaire continue* **surjective**. *Alors, il existe $c > 0$ tel que :*

$$T\big[B_E(0,1)\big] \supseteq B_F(0,c) \, . \tag{$*$}$$

En conséquence T est une application ouverte.

Ce théorème est dû à Schauder (1930).

Remarques. a) Il est nécessaire que les *deux* espaces E et F soient complets.

b) L'application T est ouverte : soit U un ouvert de E (non vide) et soit $y_0 \in T(U)$; il existe $x_0 \in U$ tel que $y_0 = Tx_0$; soit $r > 0$ tel que $B_E(x_0, r) \subseteq U$; alors :

$$y_0 + T\big[B_E(0,r)\big] = T\big[B_E(x_0,r)\big] \subseteq T(U) \, ;$$

d'où, par $(*)$:

$$B_F(y_0, rc) = y_0 + r \, B_F(0,c) \subseteq y_0 + r \, T\big[B_E(0,1)\big] = T\big[B_E(x_0,r)\big] \subseteq T(U).$$

c) Le théorème s'utilise de la façon suivante :

$$\boxed{\forall y \in F \qquad \exists x \in E \ : \qquad y = Tx \quad \underline{\textbf{et}} \quad \|x\| \leqslant (1/c)\,\|y\|}\,.$$

Donnons tout de suite deux conséquences très importantes.

Théorème IV.3.2 (Théorème des isomorphismes de Banach).
Soit E et F deux espaces **de Banach** *et $T\colon E \to F$ une application linéaire continue bijective. Alors T^{-1} est automatiquement continue ; T est donc un isomorphisme.*

Preuve. La propriété $(*)$ s'écrit :

$$T^{-1}\big[B_F(0,c)\big] \subseteq B_E(0,1)\,,$$

soit :

$$\|y\| \leqslant c \qquad \Longrightarrow \qquad \|T^{-1}y\| \leqslant 1\,.$$

Par conséquent, par homogénéité :

$$\|y\| \leqslant 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \|T^{-1}y\| \leqslant 1/c\,;$$

donc :

$$\|T^{-1}y\| \leqslant (1/c)\,\|y\|\,, \quad \forall y \in F. \qquad \square$$

Il aurait aussi suffit de dire que T^{-1} est continue parce que T est ouverte.

Corollaire IV.3.3. *Soit E un espace vectoriel muni de deux normes telles que E soit complet pour chacune d'elles. Supposons de plus que ces deux normes sont comparables. Alors elles sont équivalentes.*

Preuve. Dire qu'elles sont comparables signifie que l'une d'elles est plus fine que l'autre : $|||x||| \leqslant C\,\|x\|$ pour tout $x \in E$. Mais cela signifie que l'application identité Id: $\big(E, \|\,.\,\|\big) \to \big(E, |||\,.\,|||\big)$, qui est linéaire et bijective, est continue ; c'est donc un isomorphisme, ce qui signifie que les deux normes sont équivalentes. $\square$

Théorème IV.3.4 (Théorème du graphe fermé [Banach (1929)]).
Soit E et F deux espaces **de Banach** *et $T\colon E \to F$ une application linéaire. Si le graphe de T :*

$$G_T = \{(x, Tx) \in E \times F\,;\ x \in E\}$$

est fermé dans $E \times F$, alors T est continue.

Remarque. Le fait que G_T soit fermé se traduit par :

Pour toute suite $(x_n)_n$ dans E convergeant vers x, <u>et telle que</u> la suite $(Tx_n)_n$ converge, vers $y \in F$, on a $y = Tx$.

La continuité étant :

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \qquad \Longrightarrow \qquad Tx_n \xrightarrow[n\to\infty]{} Tx\,,$$

on voit que ce théorème rend la vérification de la continuité plus facile, puisque l'on fait une hypothèse supplémentaire sur $(x_n)_n$, à savoir que l'on suppose en plus que $(Tx_n)_n$ converge aussi.

Preuve Munissons E d'une seconde norme $\|\,.\,\|_T$ définie par :

$$\|x\|_T = \|x\|_E + \|Tx\|_F\,, \quad \forall x \in E.$$

Elle est plus fine que $\|\,.\,\|_E$ et la condition disant que le graphe G_T est fermé entraîne que $\big(E, \|\,.\,\|_T\big)$ est un espace complet (car G_T est fermé dans l'espace complet $E \times F$, donc est lui-même complet). Ces deux normes sont donc équivalentes, et il existe donc $C > 0$ tel que, pour tout $x \in E$:

$$\|x\|_T \leqslant C\,\|x\|_E\,,$$

soit :

$$\|Tx\|_F \leqslant (1 + C)\,\|x\|_E\,, \quad \forall x \in E. \qquad \square$$

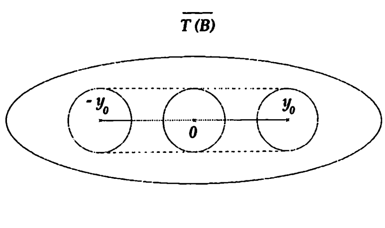
Preuve du Théorème de l'application ouverte. Notons $B = B_E(0,1)$ la boule unité fermée de E.

Comme T est surjective, on a :

$$F = T(E) = T\Big(\bigcup_{n\geqslant 1} nB\Big) = \bigcup_{n\geqslant 1} nT(B) \subseteq \bigcup_{n\geqslant 1} n\overline{T(B)} \subseteq F\,,$$

de sorte que $F = \bigcup_{n\geqslant 1} n\overline{T(B)}$. Comme F est *complet*, le **Théorème de Baire** dit que l'un des $n\overline{T(B)}$, et donc $\overline{T(B)}$ aussi, est d'*intérieur non vide*. Comme $\overline{T(B)}$ est un convexe symétrique (par rapport à 0), il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\boxed{\overline{T(B)} \supseteq B_F(0,\alpha)}\,.$$



En effet, si $\overline{T(B)} \supseteq B_F(y_0,\alpha)$, on a aussi $\overline{T(B)} \supseteq B_F(-y_0,\alpha)$, et alors, pour $\|y\|_F \leqslant \alpha$, on a $y = \frac{1}{2}[(y - y_0) + (y + y_0)] \in \overline{T(B)}$.

Nous allons montrer qu'alors :

$$\boxed{T(B) \supseteq B_F(0,\beta)\,, \quad \forall \beta < \alpha}\,.$$

En remplaçant T par $(1/\alpha)T$, il suffit de montrer que :

$$\boxed{\overline{T(B)} \supseteq B_F = B_F(0,1) \quad \Longrightarrow \quad T(B) \supseteq B_F(0,\lambda)\,,\ \forall \lambda < 1}\,.$$

• Soit $\varepsilon_n > 0$ tels que $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n = 1 - \lambda$.
Soit $y \in B_F(0,\lambda)$.
Comme :

$$B_F(0,\lambda) = \lambda\, B_F(0,1) \subseteq \lambda\, \overline{T(B)} = \overline{T\big[B_E(0,\lambda)\big]}\,,$$

il existe $x_1 \in E$ tel que :

$$\|x_1\| \leqslant \lambda \quad \text{et} \quad \|y - Tx_1\| \leqslant \varepsilon_1.$$

alors :

$$y - Tx_1 \in B_F(0,\varepsilon_1) = \varepsilon_1\, B_F(0,1) \subseteq \varepsilon_1\, \overline{T(B)} = \overline{T\big[B_E(0,\varepsilon_1)\big]}\,;$$

donc il existe $x_2 \in E$ tel que :

$$\|x_2\| \leqslant \varepsilon_1 \quad \text{et} \quad \|y - Tx_1 - Tx_2\| \leqslant \varepsilon_2.$$

• En continuant, on obtient des éléments $x_n \in E$, $n \geqslant 1$, tels que, pour $n \geqslant 2$, on ait :

$$\begin{cases} \|x_n\| \leqslant \varepsilon_{n-1}\,, & \|x_1\| \leqslant \lambda\,, \\ \|y - Tx_1 - Tx_2 - \cdots - Tx_n\| \leqslant \varepsilon_n\,. \end{cases}$$

Alors :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \leqslant \lambda + \sum_{n=2}^{\infty} \varepsilon_{n-1} = 1\,.$$

Comme E est *complet*, la série $\sum_n x_n$ converge dans E.

Si $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$, on a $\|x\| \leqslant 1$, et, puisque T est continue :

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} Tx_n = y.$$

Donc $y \in T(B)$, ce que l'on voulait montrer. □

Donnons deux applications.

Corollaire IV.3.5. *La transformation de Fourier*

$$\mathscr{F} : L^1(\mathbb{R}) \to \mathscr{C}_0(\mathbb{R})$$

n'est pas surjective.

Preuve. a) Si $\mathscr{F}$ était surjective, elle serait bijective, grâce à son injectivité. Le Théorème des isomorphismes de Banach donnerait un $c > 0$ tel que :

$$\|\widehat{f}\|_\infty \geqslant c\,\|f\|_1 \quad \forall f \in L^1(\mathbb{R}).$$

b) Considérons alors $g_n = \mathbb{1}_{[-1,1]} * \mathbb{1}_{[-n,n]}$, qui est dans $L^1(\mathbb{R})$. Si $f_n = \widehat{g_n}$, on a (voir l'Exercice 13 du Chapitre III) :

$$f_n(x) = \frac{\sin(2\pi x)\,\sin(2\pi n x)}{\pi^2 x^2},$$

de sorte que $f_n \in L^1(\mathbb{R})$ et $\|f_n\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, car, en utilisant l'inégalité $\sin u \geqslant \frac{2}{\pi} u$ pour $0 \leqslant u \leqslant \pi/2$, on a :

$$\|f_n\|_1 \geqslant \int_0^{1/4} \frac{2}{\pi}(2\pi x)\left|\frac{\sin(2\pi n x)}{\pi^2 x^2}\right| dx = \frac{4}{\pi^2}\int_0^{n/4} \frac{|\sin t|}{t}\,dt \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty.$$

Le Théorème d'inversion nous dit, puisque g_n est paire, que $g_n = \widehat{f_n}$, de sorte que $\|\widehat{f_n}\|_\infty = \|g_n\|_\infty = 2$. Mais ce n'est pas possible, d'après le a). □

Corollaire IV.3.6. *Si E est un espace de Banach et si E_1 et E_2 sont deux sous-espaces vectoriels* **fermés** *de E tels que :*

$$E_1 \cap E_2 = \{0\} \qquad \text{et} \qquad E = E_1 + E_2$$

(supplémentaires algébriques), alors E_1 et E_2 sont supplémentaires topologiques, c'est-à-dire que les projections associées sont continues.

Preuve. Munissons le produit $E_1 \times E_2$ de la norme :

$$\|(x_1, x_2)\| = \|x_1\|_E + \|x_2\|_E.$$

Comme E_1 et E_2 sont fermés, donc complets, $E_1 \times E_2$ est complet, et donc est un espace de Banach pour cette norme. Or l'application linéaire

$$\begin{array}{rccc} T: & E_1 \times E_2 & \longrightarrow & E \\ & (x_1, x_2) & \longmapsto & x_1 + x_2 \end{array}$$

est bijective (car E_1 et E_2 sont en somme directe algébrique) et continue, par l'inégalité triangulaire et la définition de la norme sur $E_1 \times E_2$. Par le Théorème des isomorphismes de Banach, il existe $c > 0$ tel que :

$$\|x_1 + x_2\| \geqslant c\left(\|x_1\| + \|x_2\|\right);$$

donc $\|x_1 + x_2\| \geqslant c\,\|x_1\|$ et $\|x_1 + x_2\| \geqslant c\,\|x_2\|$, ce qui est bien la continuité des projections. □

IV.4. Exercices

Exercice 1.

On dit qu'un espace topologique X est un *espace de Baire* si l'intersection de toute suite d'ouverts denses dans X est encore dense dans X.

Montrer que tout ouvert (non vide) Ω d'un espace de Baire X est encore un espace de Baire (*si* $(\Omega_n)_{n\geqslant 1}$ *est une suite d'ouverts denses dans* Ω, *considérer le complémentaire* Ω' *de l'adhérence de* Ω, *i.e. son extérieur, et* $\Omega'_n = \Omega' \cup \Omega_n$; *remarquer que c'est une suite d'ouverts denses de* X).

Exercice 2.

Soit $\mathscr{C}^1([0,1])$ l'espace vectoriel des fonctions continûment dérivables sur $[0,1]$, muni de la norme uniforme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

Soit $D\colon \mathscr{C}^1([0,1]) \to \mathscr{C}([0,1])$ l'application linéaire définie par $D(f) = f'$.

1) Montrer que D n'est pas continue.

2) Montrer que le graphe de D est fermé.

3) Pourquoi cela ne contredit-il pas le Théorème du graphe fermé ?

Exercice 3 (*Théorème de Hellinger-Toeplitz*).

Soit H un espace de Hilbert et $T\colon H \to H$ une application linéaire telle que $(Tx \mid y) = (x \mid Ty)$ pour tous $x, y \in H$. Montrer que T est continue.

Exercice 4.

Montrer qu'un espace de Banach de dimension infinie n'admet pas de base algébrique dénombrable (*raisonner par l'absurde : si* $(e_n)_{n\geqslant 1}$ *est une base algébrique, utiliser le Théorème de Baire avec* $F_n = \mathrm{vect}\,\{e_1, \cdots, e_n\}$).

Exercice 5.

Soit $\mathbf{a} = (a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de nombres complexes. On suppose que $\mathbf{a}$ vérifie la propriété suivante : pour toute suite $\mathbf{x} = (x_n)_{n\geqslant 1} \in c_0$, la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n x_n$ est convergente.

1) Pour tout $N \geqslant 1$, on définit une forme linéaire $\Phi_N\colon c_0 \to \mathbb{C}$ par $\Phi_N(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^N a_n x_n$. Montrer que Φ_N est continue et calculer $\|\Phi_N\|$.

2) Montrer que $\mathbf{a} \in \ell_1$.

Exercice 6.

Soit K un espace topologique compact, X un espace de Banach et $L\colon X \to \mathscr{C}(K)$ une application linéaire. On suppose que pour tout $t \in K$, l'application $x \in X \mapsto (Lx)(t) \in \mathbb{K}$ est continue. Montrer que L est continue.

Exercice 7.

Soit H un espace de Hilbert, et soit $T\colon H \to H$ une application linéaire. On suppose que $(Tx \mid x) \geqslant 0$ pour tout $x \in H$.

1) Soit $(z_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de points de H convergeant vers 0. On suppose que la suite $(Tz_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un point $l \in H$.

a) Montrer que l'on a $(l \mid h) + (Th \mid h) \geqslant 0$ pour tout $h \in H$.

b) En déduire que $l = 0$ (*remplacer h par εh, avec $\varepsilon > 0$*).

2) Montrer que l'application linéaire T est continue.

Exercice 8.

Soit $(S, \mathcal{T}, m)$ un espace mesuré et soit $\varphi\colon S \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable. On suppose que $\varphi f \in L^2(m)$ pour toute $f \in L^2(m)$.

Montrer que l'application linéaire $M_\varphi\colon L^2(m) \to L^2(m)$ définie par $M_\varphi(f) = \varphi f$ est continue.

Exercice 9.

Soit $(S, \mathscr{T}, m)$ un espace mesuré σ-fini. On suppose que l'on a $L^2(m) \subseteq L^1(m)$.

1) Montrer qu'il existe une constante $C < +\infty$ telle que $\|f\|_{L^1} \leqslant C\,\|f\|_{L^2}$ pour toute $f \in L^2(m)$.

2) En déduire que la mesure m est finie.

Exercice 10.

Soit X un sous-espace fermé de $L^2(0,1)$ dont chaque élément est aussi dans $L^\infty(0,1)$.

1) Montrer qu'il existe $C < +\infty$ tel que $\|f\|_\infty \leqslant C\,\|f\|_2$ pour toute $f \in X$.

2) On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et une famille orthonormée $(f_1, \ldots, f_n)$ dans X.

Pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, on note $F_x = \sum_{j=1}^n x_j f_j$.

a) On choisit une partie dénombrable dense D de $\mathbb{C}^n$. Montrer qu'il existe $N \subseteq [0,1]$ de mesure nulle telle que $|F_x(t)| \leqslant C\,\|x\|_2$ pour tout $x \in D$ et tout $t \in [0,1] \setminus N$.

b) En déduire que $|F_x(t)| \leqslant C\,\|x\|_2$ pour tout $x \in \mathbb{C}^n$ et tout $t \in [0,1] \setminus N$.

3) En choisissant x convenablement, montrer que $\sum_{j=1}^n |f_j(t)|^2 \leqslant C^2$ pour tout $t \in [0,1] \setminus N$.

4) Qu'en déduit-on quant à la dimension de X ? (*Grothendieck, 1954*).

Exercice 11.

Soit $\mathscr{C}([0,1])$ l'espace des fonctions réelles continues sur $[0,1]$, muni de la norme uniforme, et soit X un sous-espace vectoriel fermé de $\mathscr{C}([0,1])$ dont tous les éléments sont continûment dérivables.

On définit $T\colon X \to \mathscr{C}([0,1])$ par $T(f) = f'$.

1) Montrer que le graphe de T est fermé.

2) En déduire qu'il existe un entier $N \geqslant 1$ tel que $\|f'\|_\infty \leqslant N$ pour toute $f \in X$ telle que $\|f\|_\infty \leqslant 1$.

3) On pose $x_n = n/N$ pour $0 \leqslant n \leqslant N$, et on définit $S\colon X \to \mathbb{R}^{N+1}$ par $S(f) = \big(f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_N)\big)$.

a) On suppose que $\|f\|_\infty = 1$ et $S(f) = 0$. Montrer, en utilisant le Théorème des accroissements finis, que l'on aboutit à une contradiction.

b) En déduire que X est de dimension finie et $\dim X \leqslant N + 1$.

Exercice 12.

Soit $T\colon E \to F$ une application linéaire continue *surjective* entre les espaces de Banach E et F. On rappelle qu'il existe une application linéaire continue, $T^* F^* \to E^*$, appelée *adjoint* de T, telle que $(T^*\psi)(x) = \psi(Tx)$ pour tous $\psi \in F^*$ et tout $x \in E$ (voir Proposition VII.2.6).

Montrer que $T^*\colon F^* \to E^*$ réalise un isomorphisme entre F^* et $T^*(F^*)$.

Exercice 13.

Soit H un espace de Hilbert.

1) Montrer que l'espace ℓ_∞ de toutes les suites bornées de scalaires n'est pas isomorphe à un sous-espace (fermé) de H (*utiliser les éléments* $e_k = (0,\ldots,0,1,0,\ldots) \in \ell_\infty$*, où le* 1 *est au* $k^{\text{ème}}$ *rang, et l'identité du parallélogramme généralisée de l'Exercice 5 du Chapitre II*).

2) Montrer qu'il n'existe aucune application linéaire continue surjective $T\colon H \to \ell_1$ (*raisonner de la même façon*).

Exercice 14 (*Applications bilinéaires*).

Soit X, Y, Z trois espaces de Banach et $\mathcal{B}\colon X \times Y \to Z$ une application bilinéaire.

1) Montrer que $\mathcal{B}$ est continue si et seulement si il existe un nombre $M > 0$ tel que $\|\mathcal{B}(x,y)\| \leqslant M\,\|x\|\,\|y\|$ quels que soient $x \in X$ et $y \in Y$.

2) On suppose que $\mathcal{B}$ est *séparément continue*, c'est-à-dire que pour chaque $x \in X$, l'application linéaire $\mathcal{B}_x\colon y \in Y \mapsto \mathcal{B}_x(y) = \mathcal{B}(x,y) \in Z$ est continue et que pour chaque $y \in Y$, l'application $\mathcal{B}^y\colon x \in X \mapsto \mathcal{B}^y(x) = \mathcal{B}(x,y) \in Z$ est continue. Montrer que $\mathcal{B}$ est continue (*Voir l'Exercice 7 du Chapitre VI pour une preuve légèrement différente*).

3) Montrer que la limite simple $\mathcal{B}$ d'une suite d'applications bilinéaires continues $(\mathcal{B}_n)_{n\geqslant 1}$ est continue (dire que $\mathcal{B}$ limite simple de $(\mathcal{B}_n)_{n\geqslant 1}$ signifie que l'on a $\mathcal{B}_n(x,y) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathcal{B}(x,y)$ pour tous $x \in X$, $y \in Y$).

Exercice 15 (*Non convergence des séries de Fourier*).

Soit $\mathscr{C}_\sim$ le sous-espace de $\mathscr{C}([0,1])$ des fonctions telles que $f(0) = f(1)$. Pour toute $f \in \mathscr{C}_\sim$ et tout entier $n \geqslant 0$, on note $S_n f = \sum_{|k|\leqslant n} \widehat{f}(k)\, e_k$ la $n^{\text{ème}}$ somme partielle de Fourier de f, où $e_k(t) = \exp(2\pi i k t)$.

1) Montrer (voir l'Exercice 8 du Chapitre III pour la définition du produit de convolution) que $(S_n f)(x) = (D_n * f)(x)$ où $D_n = \sum_{|k|\leqslant n} e_k$ est le *noyau de Dirichlet* d'ordre n.

On fixe $x \in [0,1]$ et on considère la famille de formes linéaires $\sigma_n^x\colon \mathscr{C}_\sim \to \mathbb{C}$, définies par $\sigma_n^x(f) = (S_n f)(x)$.

2) Montrer que $\|\sigma_n^x\| = \|D_n\|_1$ pour tout $n \geqslant 1$ (*approcher le signe de* D_n *par des fonctions continues*).

3) En déduire que $\|\sigma_n^x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

4) En déduire qu'il existe une fonction de $\mathscr{C}_\sim$ dont la série de Fourier diverge au point x.

5) a) Soit E un espace de Banach et F un espace normé. Montrer la version suivante du Théorème de Banach-Steinhaus : pour toute famille d'opérateurs $T_i \in \mathscr{L}(E, F)$, $i \in I$, on a l'alternative suivante :

(*i*) soit il existe $M < +\infty$ tel que $\|T_i\| \leqslant M$ pour tout $i \in I$;

(*ii*) soit il existe une partie dense G de E (qui est une intersection dénombrable d'ouverts denses) dont tout élément u vérifie $\sup_{i\in I} \|T_i(u)\| = +\infty$.

b) En déduire qu'il existe un ensemble dense G_x de $\mathscr{C}_\sim$, intersection dénombrable d'ouverts denses, pour lequel toute fonction $f \in G_x$ admet une série de Fourier divergente en x.

c) En déduire qu'il existe un ensemble dense de fonctions de $\mathscr{C}_\sim$ dont la série de Fourier diverge sur un ensemble dense de $[0, 1]$.

6) En utilisant un raisonnement analogue, montrer qu'il existe un ensemble dense de fonctions de $L^1(0, 1)$ dont la série de Fourier ne converge pas pour la norme de $L^1(0, 1)$.

Exercice 16 (*Théorème de Corominas (version faible)*).

Soit $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction entière telle que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad \exists n = n(z) \in \mathbb{N}, \qquad f^{(n)}(z) = 0.$$

On pose $F_n = \{z \in \mathbb{C}\,;\ f^{(n)}(z) = 0\}$.

1) Montrer que F_n est fermé et en déduire qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que F_p soit d'intérieur non vide.

2) En conclure que f est un polynôme.

Exercice 17 (*Théorème de la limite simple de Baire*).

Soit X et Y deux espaces métriques, X étant complet. On notera d la métrique de Y. On suppose qu'une suite $(f_n)_n$ de fonctions continues de X dans Y converge simplement vers f. On veut montrer que l'ensemble $C(f)$ des points de continuité de f est dense dans X.

On note :

$$\omega_f(x) = \inf_{r>0} \sup\{d\big(f(u), f(v)\big)\,;\ u, v \in B_{ouv}(x, r)\}$$

l'*oscillation* de f en x, et on pose $O_\varepsilon = \{x \in X\,;\ \omega_f(x) < \varepsilon\}$.

1) a) Montrer que $x \in C(f)$ si et seulement si $\omega_f(x) = 0$ et que O_ε est un ouvert de X, pour tout $\varepsilon > 0$.

b) En déduire que $C(f) = \bigcap_{p\in\mathbb{N}^*} O_{1/p}$.

2) On fixe $\varepsilon > 0$, $R > 0$ et un $x_0 \in X$. On note B_R la boule ouverte de centre x_0 de rayon R.

a) Montrer que $F_n = \{x \in B_R\,;\ d\big(f_n(x), f_m(x)\big) \leqslant \varepsilon\,, \forall m \geqslant n\}$ est fermé dans B_R, pour tout $n \geqslant 1$.

b) Montrer que $B_R = \bigcup_{n\geqslant 1} F_n$ et en déduire qu'il existe $n_0 \geqslant 1$ tel que F_{n_0} soit d'intérieur non vide.

c) En déduire qu'il existe $x_1 \in B_R$ et $r > 0$ tel que la boule fermée $B(x_1, r)$ soit contenue dans B_R et tel que $d\big(f(x), f_{n_0}(x)\big) \leqslant \varepsilon$ pour tout $x \in B(x_1, r)$.

d) En utilisant la continuité de f_{n_0} en x_1, montrer qu'il existe $s > 0$ tel que $d\big(f(x), f(x_1)\big) < 3\,\varepsilon$ pour tout $x \in B(x_1, s)$, puis que $\omega_f(x_1) < 7\varepsilon$. En déduire que $O_{7\varepsilon} \cap B_R \neq \emptyset$.

3) Montrer que O_δ est dense dans X pour tout $\delta > 0$.

4) Conclure.

5) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Montrer que pour toute fonction dérivable $f\colon I \to \mathbb{R}$, la dérivée f' est continue en un ensemble dense de points de I.

Exercice 18 (*Fonctions continues nulle part dérivables*).

Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe "vraiment beaucoup" de fonctions $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ qui sont continues sur $[0,1]$, mais ne sont dérivables en aucun point.

Pour tout réel $\lambda > 0$, on pose :

$$\mathcal{U}_\lambda = \{f \in \mathscr{C}([0,1])\,;\; (\forall x \in [0,1])\; (\exists y \in [0,1]) \quad |f(y) - f(x)| > \lambda\,|y - x|\}\,.$$

1) Montrer que pour tout $\lambda > 0$, l'ensemble $\mathcal{U}_\lambda$ est un ouvert de $\mathscr{C}([0,1])$.

2) Soit $\mu > 0$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver une fonction $\phi \in \mathcal{U}_\mu$ telle que $\|\phi\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

3) Soit $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne. On note K sa constante de Lipschitz. Montrer que pour tout $\mu > K$, on a $f + \varphi \in \mathcal{U}_{\mu - K}$ si $\varphi \in \mathcal{U}_\mu$.

4) En déduire que pour tout $\lambda > 0$, l'ouvert $\mathcal{U}_\lambda$ est dense dans $\mathscr{C}([0,1])$.

5) Montrer que l'ensemble des fonctions $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ continues et nulle part dérivables est dense dans $\mathscr{C}([0,1])$.

Exercice 19 (*Opérateurs hypercycliques*).

A. Dans cette partie, X est un espace de Banach séparable et $T\colon X \to X$ est une application linéaire continue. Pour tout $x \in X$, on définit l'*orbite* de x par T par :

$$O(x, T) = \{T^n x\,;\; n \in \mathbb{N}\}\,,$$

où $T^n = T \circ \cdots \circ T$, n fois, avec la convention $T^0 = Id_X$. On dit qu'un vecteur $x \in X$ est *hypercyclique* pour T si $O(x, T)$ est dense dans X. On note $HC(T)$ l'ensemble des vecteurs hypercycliques pour T, et on dit que l'*opérateur* T est *hypercyclique* s'il possède au moins un vecteur hypercyclique (*i.e.* si $HC(T) \neq \emptyset$).

1) Montrer que si $\|T\| \leqslant 1$, alors T n'est pas hypercyclique.

2) Montrer que si X est de dimension infinie et $x \in HC(T)$, alors les vecteurs $x, Tx, T^2x, \ldots$ sont linéairement indépendants.

3) On suppose dans cette question que X est de dimension finie d. Soit $x \in HC(T)$.

a) Montrer que $\{x, Tx, \ldots, T^{d-1}x\}$ est une base de X.

b) Soit $\alpha \geqslant 0$. Montrer qu'il existe une suite d'entiers $(n_k)_{k \geqslant 1}$ telle que, pour tout $z \in X$, on ait $T^{n_k} z \xrightarrow[k \to \infty]{} \alpha z$ (*commencer par* $z = x$).

c) En déduire qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+$ tel que $\{a^n\,;\; n \in \mathbb{N}\}$ soit dense dans $\mathbb{R}_+$ (*utiliser la continuité du déterminant*).

d) En déduire qu'il n'existe aucun opérateur hypercyclique sur X.

4) a) Montrer qu'il existe une famille dénombrable de boules ouvertes $(B_i)_{i\in I}$ (non vides) vérifiant la propriété suivante : pour tout ouvert non vide $V \subseteq X$, on peut trouver $i \in I$ tel que $B_i \subseteq V$.

b) Pour tout $i \in I$, on pose $G_i = \{x \in X\,;\ \exists n \in \mathbb{N}\,,\ T^n x \in B_i\}$. Montrer que les G_i sont des ouverts de X, et que l'on a $HC(T) = \bigcap_{i\in I} G_i$.

5) On suppose qu'il existe une partie dense $Z \subseteq X$ et une application $S\colon X \to X$ (non supposée continue, ni linéaire) telle que :

(P_1) $T[S(x)] = x$ pour tout $x \in X$;

(P_2) $\lim_{n\to\infty} T^n z = 0$ et $\lim_{n\to\infty} S^n(z) = 0$ pour tout $z \in Z$.

a) Soit $u, v \in Z$. On pose $x_n = u + S^n(v)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Quelles sont les limites des suites $(x_n)_{n\geqslant 0}$ et $(T^n x_n)_{n\geqslant 0}$?

b) En déduire que l'on a la propriété suivante : pour tout couple (U, V) d'ouverts non vides de X, on peut trouver un point $x \in U$ et un entier $n \in \mathbb{N}$ tels que $T^n x \in V$ (autrement dit, $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$).

c) En utilisant les questions 4) et 5) b), montrer que T est hypercyclique (*critère de Kitai, 1982*).

B. Dans cette partie, on prend $X = c_0(\mathbb{N})$ ou $X = \ell_p(\mathbb{N})$, $1 \leqslant p < \infty$. Soit $B\colon X \to X$ l'application linéaire définie par $B(\mathbf{x}) = (x_2, x_3, \ldots)$, si $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots) \in X$ (*backward shift*).

1) Montrer que B est continue et calculer $\|B\|$.

2) Montrer qu'il existe une application linéaire $\widetilde{B}\colon X \to X$ telle que $B\widetilde{B} = Id_X$ et $\|\widetilde{B}(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$ pour tout $\mathbf{x} \in X$.

3) Montrer que pour $|\lambda| > 1$, l'opérateur $T = \lambda B$ est hypercyclique (Rolewicz, 1969) (*utiliser le critère de Kitai du* **A.** *3) en prenant pour Z l'ensemble c_{00} des suites nulles à partir d'un certain rang*).

Exercice 20 (*Base de Schauder*).

Soit $(X, \|\,.\,\|)$ un espace de Banach réel ou complexe, et soit $(e_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'éléments de X. On suppose que pour tout $x \in X$, il existe une *unique* suite de scalaires $(a_n)_{n\geqslant 1}$ telle que $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, e_n$. On dit alors que $(e_n)_{n\geqslant 1}$ est une *base de Schauder* de X.

On définit des projections $P_n\colon X \to X$ en posant $P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k\, e_k$, pour $x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, e_k$, et on pose $|||x||| = \sup_{n\geqslant 1} \|P_n(x)\|$.

1) Montrer que $|||\,.\,|||$ est une norme sur X plus fine que la norme originelle $\|\,.\,\|$.

2) Soit $(x^{(r)})_{r\geqslant 1}$ une suite de Cauchy dans $(X, |||\,.\,|||)$. On écrit $x^{(r)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(r)} e_k$.

a) Montrer que pour tout $k \geqslant 1$, la suite de scalaires $(a_k^{(r)})_{r\geqslant 1}$ est convergente.

b) Si $a_k = \lim_{r\to\infty} a_k^{(r)}$, montrer que la série $\sum_{k\geqslant 1} a_k\, e_k$ converge dans X pour la norme d'origine $\|\,.\,\|$.

c) En déduire que la suite $(x^{(r)})_{r\geqslant 1}$ converge dans $(X, |||\,.\,|||)$.

3) Montrer que toutes les projections P_n sont continues et que, de plus :

$$\sup_{n\geqslant 1} \|P_n\| < +\infty\,.$$

4) a) Soit D_n le noyau de Dirichlet d'ordre n. Montrer que $\|D_n\|_1 \geqslant \frac{4}{\pi^2} \log n$.

b) Montrer qu'il existe des fonctions $f \in L^1(0,1)$ dont la série de Fourier ne converge pas vers f, pour la norme de $L^1(0,1)$.

Chapitre V

THÉORÈME DE RADON-NIKODÝM ET APPLICATIONS

V.1. Mesures réelles et mesures complexes

V.1.1. Variation d'une mesure

Définition V.1.1. *Soit $(S, \mathscr{T})$ un espace mesurable. On appelle* *mesure complexe* *(resp.* *réelle*) *toute application $\mu\colon \mathscr{T} \longrightarrow \mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{R}$) telle que :*

$$\boxed{\mu\Big(\bigcup_{n\geqslant 1} A_n\Big) = \sum_{n\geqslant 1} \mu(A_n)}$$

pour toute *suite* *d'éléments $A_n \in \mathscr{T}$* *deux-à-deux disjoints*.

Remarques. 1) Pour une mesure positive m, on peut avoir $\sum_{n\geqslant 1} m(A_n) = +\infty$; ici, on exige que la **série soit convergente**. De plus, comme la somme ne change pas lorsque l'on change l'ordre des termes (car la réunion ne change pas), cette série est en fait *absolument* convergente, d'après un théorème de Riemann (on peut obtenir une somme arbitraire en modifiant l'ordre des termes de toute série semi-convergente de nombres complexes, voire la rendre divergente).

2) La définition entraîne que $\boxed{\mu(\emptyset) = 0}$.

3) Si μ est une mesure complexe, $\operatorname{Re}\mu$ et $\operatorname{Im}\mu$ sont des mesures réelles. Toute mesure réelle est en particulier une mesure complexe.

4) Si m est une *mesure positive*, c'est une *mesure réelle* (positive) si et seulement si $\boxed{m(S) < +\infty}$.

Toute mesure réelle à valeurs positives (dans $\mathbb{R}_+$) est une mesure positive (qui sera donc finie, c'est-à-dire bornée).

5) Si m est une mesure positive sur $(S, \mathscr{T})$ et si $f \in L^1_{\mathbb{R}}(m)$ (resp. $f \in L^1_{\mathbb{C}}(m)$), alors en posant, pour tout $A \in \mathscr{T}$:

$$\boxed{m_f(A) = (f.m)(A) = \int_A f\, dm},$$

on obtient, grâce au Théorème de convergence dominée, une mesure réelle (resp. complexe), dont on dit qu'elle a la <u>*densité*</u> *f par rapport à m.*

On cherche à résoudre le problème suivant :

Problème : Étant donnée une mesure complexe μ sur $(S, \mathscr{T})$, existe-t-il une <u>plus petite</u> mesure positive m sur $(S, \mathscr{T})$ <u>majorant</u> μ, c'est-à-dire telle que :

$$\boxed{|\mu(A)| \leqslant m(A)} \qquad \forall A \in \mathscr{T}\,?$$

Si une telle mesure m existe, on doit avoir, pour toute partie mesurable A s'écrivant comme réunion de parties $A_n \in \mathscr{T}$ deux-à-deux disjointes :

$$m(A) = \sum_{n\geqslant 1} m(A_n) \geqslant \sum_{n\geqslant 1} |\mu(A_n)|\,.$$

On doit donc avoir :

$$m(A) \geqslant \sup\Big\{\sum_{n\geqslant 1} |\mu(A_n)|\,;\ A = \bigcup_{n\geqslant 1} A_n \text{ et } A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{T} \text{ deux-à-deux disjoints}\Big\}.$$

On dira que $(A_n)_{n\geqslant 1}$ est une *partition mesurable* (dénombrable) de A si $A = \bigcup_{n\geqslant 1} A_n$ et les $A_n \in \mathscr{T}$ sont deux-à-deux disjoints.

Définition V.1.2. *Si μ est une mesure complexe sur $(S, \mathscr{T})$, on appelle <u>variation</u> de μ l'application*

$$|\mu|\colon \mathscr{T} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$$

définie, pour $A \in \mathscr{T}$ par :

$$\boxed{|\mu|(A) = \sup\Big\{\sum_{n\geqslant 1} |\mu(A_n)|\,;\ (A_n)_{n\geqslant 1} \textit{ partition mesurable de } A\Big\}}\,.$$

Notons que si μ est une mesure positive, alors $|\mu|(A) = \mu(A)$. On a :

Théorème V.1.3. *$|\mu|$ est une <u>mesure positive</u> sur $(S, \mathscr{T})$, et c'est la <u>plus petite</u> qui <u>majore</u> μ.*

Preuve. Il est d'abord clair que pour toute partition mesurable $(A_n)_{n\geqslant 1}$ de A, on a :

$$|\mu(A)| = \Big|\sum_{n\geqslant 1} \mu(A_n)\Big| \leqslant \sum_{n\geqslant 1} |\mu(A_n|\,;$$

donc :

$$\boxed{|\mu(A)| \leqslant |\mu|(A)}\,.$$

Si l'on montre que $|\mu|$ est une mesure positive, elle majorera donc μ, et la discussion précédente montre que ce sera la plus petite.

Il est clair que $|\mu|(\emptyset) = 0$; il s'agit donc de montrer la σ-additivité.

Soit $B_n \in \mathscr{T}$, $n \geqslant 1$, des parties mesurables deux-à-deux disjointes, et soit $B = \bigcup_{n\geqslant 1} B_n$. On veut montrer que $|\mu|(B) = \sum_{n\geqslant 1} |\mu|(B_n)$.

1) Montrons d'abord que $\sum_{n\geqslant 1} |\mu|(B_n) \leqslant |\mu|(B)$.

Pour tout $n \geqslant 1$ tel que $|\mu|(B_n) > 0$, et pour $0 < t_n < |\mu|(B_n)$, il existe une partition mesurable $(A_{n,k})_{k\geqslant 1}$ de B_n telle que :

$$\sum_{k\geqslant 1} |\mu(A_{n,k})| > t_n.$$

Si $|\mu|(B_n) = 0$, on pose $t_n = 0$ et $A_{n,1} = B_n$, $A_{n,k} = \emptyset$ pour $k \geqslant 2$ (aussi bien, on peut supprimer les B_n pour lesquels $|\mu|(B_n) = 0$: cela ne fera que diminuer $|\mu|(B)$, comme on pourra le vérifier).

Comme

$$B = \bigcup_{n,k\geqslant 1} A_{n,k}$$

et comme les $A_{n,k}$ sont deux-à-deux disjoints, $(A_{n,k})_{n,k\geqslant 1}$ est une partition mesurable de B ; donc :

$$\sum_{n,k\geqslant 1} |\mu(A_{n,k})| \leqslant |\mu|(B).$$

Alors :

$$\sum_{n\geqslant 1} t_n \leqslant |\mu|(B).$$

Comme c'est vrai pour tous les $t_n < |\mu|(B_n)$, on obtient :

$$\sum_{n\geqslant 1} |\mu|(B_n) \leqslant |\mu|(B).$$

2) Réciproquement, soit $(A_k)_{k\geqslant 1}$ une partition mesurable arbitraire de B ; alors $(A_k \cap B_n)_{k,n\geqslant 1}$ est une autre partition mesurable de B. On a, puisque μ est une mesure :

$$\begin{aligned}
\sum_{k\geqslant 1} |\mu(A_k)| &= \sum_{k\geqslant 1} \Big| \sum_{n\geqslant 1} \mu(A_k \cap B_n) \Big| \quad \text{car } \bigcup_{n\geqslant 1} (A_k \cap B_n) = A_k \\
&\leqslant \sum_{k\geqslant 1} \sum_{n\geqslant 1} |\mu(A_k \cap B_n)| = \sum_{n\geqslant 1} \Big(\sum_{k\geqslant 1} |\mu(A_k \cap B_n)| \Big) \\
&\leqslant \sum_{n\geqslant 1} |\mu|(B_n) \quad \text{car } \bigcup_{k\geqslant 1} (A_k \cap B_n) = B_n \,;
\end{aligned}$$

d'où :

$$|\mu|(B) \leqslant \sum_{n\geqslant 1} |\mu|(B_n)\,. \qquad \square$$

Théorème V.1.4. *Pour toute mesure complexe μ sur $(S, \mathscr{T})$, la mesure positive $|\mu|$ est* **bornée** *:*

$$\boxed{|\mu|(S) < +\infty}.$$

On notera que l'on a donc :

$$|\mu(A)| \leqslant |\mu|(A) \leqslant |\mu|(S) \qquad \forall A \in \mathscr{T}.$$

$|\mu|(S)$ s'appelle la <u>variation totale</u> de μ.

Preuve. Puisque

$$|\mu(A)| \leqslant |\mathrm{Re}\,\mu(A)| + |\mathrm{Im}\,\mu(A)|,$$

on a :

$$|\mu| \leqslant |\mathrm{Re}\,\mu| + |\mathrm{Im}\,\mu|\,;$$

on peut donc supposer μ réelle.

Supposons que $|\mu|(S) = +\infty$.

a) Nous allons montrer :

Pour tout $A \in \mathscr{T}$ tel que $|\mu|(A) = +\infty$, il existe $B \in \mathscr{T}$ tel que $B \subseteq A$ et :

$$|\mu|(B) = +\infty \qquad \textit{et} \qquad |\mu(A \setminus B)| \geqslant 1.$$

En effet, soit $(A_n)_{n\geqslant 1}$ une partition mesurable de A telle que :

$$\sum_{n\geqslant 1} |\mu(A_n)| \geqslant 2 + |\mu(A)|.$$

Posons :

$$A_+ = \bigcup_{\mu(A_n)>0} A_n \quad \text{et} \quad A_- = \bigcup_{\mu(A_n)\leqslant 0} A_n.$$

On a :

$$A_+, A_- \in \mathscr{T}, \quad A_+ \cap A_- = \emptyset, \quad A = A_+ \cup A_-,$$

et :

$$\begin{cases} \mu(A_+) + \mu(A_-) = \mu(A) \\ \mu(A_+) - \mu(A_-) = \sum_{n\geqslant 1} |\mu(A_n)| \geqslant 2 + |\mu(A)|. \end{cases}$$

Cela implique :

$$\mu(A_+) \geqslant 1 \quad \text{et} \quad \mu(A_-) \leqslant -1.$$

D'autre part, comme :

$$|\mu|(A_+) + |\mu|(A_-) = |\mu|(A) = +\infty,$$

on a :

$$|\mu|(A_+) = +\infty \quad \text{ou} \quad |\mu|(A_-) = +\infty.$$

Il suffit donc de prendre :

$$B = \begin{cases} A_+ & \text{si} \quad |\mu|(A_+) = +\infty; \\ A_- & \text{sinon.} \end{cases}$$

b) On construit alors par récurrence :

$$S \supseteq B_1 \supseteq B_2 \supseteq \cdots$$

tels que, pour tout $n \geqslant 1$:

$$|\mu|(B_n) = +\infty \quad \text{et} \quad |\mu(B_n \setminus B_{n+1})| \geqslant 1.$$

Mais alors la série $\sum_{n\geqslant 1} \mu(B_n \setminus B_{n+1})$ diverge, ce qui contredit la σ-additivité de μ. □

Proposition V.1.5. *L'ensemble $\mathscr{M}(S, \mathscr{T})$ des mesures à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, et la variation totale*

$$\|\mu\| = |\mu|(S)$$

définit une norme sur cet espace.

Preuve. Que ce soit un sous-espace vectoriel de l'espace de toutes les applications de $\mathscr{T}$ dans $\mathbb{K}$ est clair.

Il est aussi clair que $\|\alpha\mu\| = |\alpha| \, \|\mu\|$ pour toute mesure μ et tout $\alpha \in \mathbb{K}$. De plus, si $\|\mu\| = 0$, alors $|\mu|(S) = 0$; donc la mesure positive $|\mu|$ est nulle, et $\mu = 0$, puisque $|\mu(A)| \leqslant |\mu|(A)$ pour tout $A \in \mathscr{T}$.

Reste à voir l'inégalité triangulaire. Si μ_1 et μ_2 sont des mesures, on a, pour toute partie mesurable $A \in \mathscr{T}$, $|\mu_1(A) + \mu_2(A)| \leqslant |\mu_1(A)| + |\mu_2(A)| \leqslant |\mu_1|(A) + |\mu_2|(A)$; donc :

$$\boxed{|\mu_1 + \mu_2| \leqslant |\mu_1| + |\mu_2|}.$$

En particulier, $\|\mu_1 + \mu_2\| = |\mu_1 + \mu_2|(S) \leqslant |\mu_1|(S) + |\mu_2|(S) = \|\mu_1\| + \|\mu_2\|$. □

Nous verrons plus loin que $\mathscr{M}(S, \mathscr{T})$ est un espace de Banach.

Définition V.1.6. *Si μ est une mesure réelle sur $(S, \mathscr{T})$, on pose :*

$$\mu^+ = \frac{1}{2}(|\mu| + \mu) \quad \textit{et} \quad \mu^- = \frac{1}{2}(|\mu| - \mu).$$

On dit que μ^+ est la variation positive *de μ et que μ^- est sa* variation négative.

Ce sont des mesures positives bornées, et l'on a :

$$|\mu| = \mu^+ + \mu^- \quad \text{et} \quad \mu = \mu^+ - \mu^-.$$

V.1.2. Absolue continuité

Soit m une mesure positive sur $(S, \mathscr{T})$ et $f \colon S \to \overline{\mathbb{R}}_+$ ou $\mathbb{C}$ une application mesurable positive ou m-intégrable. La mesure de densité f par rapport à m :

$$m_f(A) = \int_A f\,dm\,, \qquad A \in \mathscr{T}$$

vérifie :

$$m(A) = 0 \quad \Longrightarrow \quad m_f(A) = 0.$$

Définition V.1.7. *Soit m une mesure* <u>*positive*</u> *sur $(S, \mathscr{T})$ et μ une autre mesure sur $(S, \mathscr{T})$, positive ou complexe. On dit que μ est* <u>absolument continue</u> par rapport à m, *et l'on écrit* $\boxed{\mu \ll m}$ *si :*

$$m(A) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mu(A) = 0.$$

Ainsi, la mesure m_f de densité f par rapport à m est absolument continue par rapport à m.

On verra le fait remarquable que toute mesure absolument continue par rapport à m est de cette forme : c'est le <u>Théorème de Radon-Nikodým</u>.

On a $\mu \ll |\mu|$ pour toute mesure complexe μ, puisque $|\mu(A)| \leqslant |\mu|(A)$.

On peut voir l'absolue continuité de la façon suivante, qui justifie le nom.

Proposition V.1.8. *Si μ est une mesure* <u>*complexe*</u>, *alors $\mu \ll m$ si et seulement si :*

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists \delta > 0) \qquad m(A) \leqslant \delta \Longrightarrow |\mu(A)| \leqslant \varepsilon.$$

Remarque. Si μ est une mesure positive non bornée, ce n'est plus vrai : il suffit par exemple de prendre $m = \lambda$ la mesure de Lebesgue sur $]0,1[$ et $\mu(A) = \int_A \frac{dt}{t}$.

Preuve. ($\Leftarrow$) est évident : si $m(A) = 0$, alors $m(A) \leqslant \delta$ donc $|\mu(A)| \leqslant \varepsilon$; comme c'est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient $\mu(A) = 0$.

($\Rightarrow$) Supposons la propriété fausse ; alors :

$$(\exists \varepsilon_0 > 0) \quad (\forall n \geqslant 1) \quad (\exists A_n \in \mathscr{T}) \qquad m(A_n) \leqslant 1/2^n \text{ et } |\mu(A_n)| \geqslant \varepsilon_0.$$

Posons $A = \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\geqslant 1} \bigcup_{k\geqslant n} A_k$, et utilisons le résultat suivant.

Proposition V.1.9 (Lemme de Borel-Cantelli).

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) < +\infty \qquad \Longrightarrow \qquad m\big(\limsup_{n\to\infty} A_n\big) = 0.$$

Alors, comme $|\mu|$ est bornée :

$$\begin{aligned} |\mu|(A) &= \lim_{n\to\infty}\!\downarrow \Big[|\mu|\Big(\bigcup_{k\geqslant n} A_k\Big)\Big] \geqslant \liminf_{n\to\infty}\, \big[|\mu|(A_n)\big] \\ &\geqslant \liminf_{n\to\infty} |\mu(A_n)| \geqslant \varepsilon_0\,, \end{aligned}$$

bien que $m(A) = 0$. Cela montre que $|\mu| \not\ll m$, et donc que $\mu \not\ll m$, en vertu de la proposition suivante. $\square$

Proposition V.1.10. *Si $\mu \ll m$, alors $|\mu| \ll m$.*

Preuve. Supposons que $m(A) = 0$. Pour toute partition dénombrable $(A_n)_{n\geqslant 1}$ de A, on a $m(A_n) = 0$, parce que $A_n \subseteq A$; donc $\mu(A_n) = 0$, puisque $\mu \ll m$. Il en résulte que $\sum_{n=1}^{\infty} |\mu(A_n)| = 0$. Par conséquent $|\mu|(A) = 0$, en passant à la borne supérieure. On a donc bien $|\mu| \ll m$. □

V.1.3. Mesures singulières

Définition V.1.11. *On dit qu'une mesure μ est portée par $A \in \mathscr{T}$ si :*

$$\mu(B) = \mu(A \cap B), \qquad \forall B \in \mathscr{T}.$$

Cela équivaut à :

$$B \cap A = \emptyset \quad \Longrightarrow \quad \mu(B) = 0.$$

Définition V.1.12. *On dit que les mesures μ_1 et μ_2 sont étrangères, ou disjointes, ou singulières l'une par rapport à l'autre, et l'on écrit $\boxed{\mu_1 \perp \mu_2}$, s'il existe des parties mesurables disjointes $A_1, A_2 \in \mathscr{T}$ telles que μ_1 soit portée par A_1 et μ_2 portée par A_2.*

On vérifie alors facilement les propriétés suivantes.

Proposition V.1.13. *Soit m une mesure positive sur $(S, \mathscr{T})$ et μ, μ_1, μ_2 d'autres mesures, positives, réelles, ou complexes, sur $(S, \mathscr{T})$. On a :*

1) *si μ est portée par A, alors $|\mu|$ aussi ;*

2) *a) $\mu_1 \perp \mu_2 \quad \Longrightarrow \quad |\mu_1| \perp |\mu_2|$;*
   b) $\mu_1 \perp \mu$ et $\mu_2 \perp \mu \quad \Longrightarrow \quad (\mu_1 + \mu_2) \perp \mu$;

3) *a) $\mu \ll m \quad \Longrightarrow \quad |\mu| \ll m$;*
   b) $\mu_1 \ll m$ et $\mu_2 \ll m \quad \Longrightarrow \quad (\mu_1 + \mu_2) \ll m$;

4) *a) $\mu_1 \ll m$ et $\mu_2 \perp m \quad \Longrightarrow \quad \mu_1 \perp \mu_2$;*
   b) $\mu \ll m$ et $\mu \perp m \quad \Longrightarrow \quad \mu = 0$.

Preuve. 1) Si μ est portée par A, alors, pour toute partition dénombrable $(A_n)_{n\geqslant 1}$ de A^c, on a $\mu(A_n) = 0$; donc $\sum_{n=1}^{\infty} |\mu(A_n)| = 0$ et, en prenant la borne supérieure sur toutes ces partitions, $|\mu|(A^c) = 0$.

2) a) et b) résultent immédiatement du 1).

3) a) Cela a déjà été vu (Proposition V.1.10).

b) est évident.

4) a) Si $\mu_2 \perp m$, il existe deux parties mesurables disjointes A et A_2 telles que m soit portée par A et μ_2 par A_2. On a $m(A_2) = 0$. Comme $\mu_1 \ll m$, on obtient $\mu_1(A_2) = 0$. Donc μ_1 est portée par A_2^c, de sorte que $\mu_1 \perp \mu_2$.

b) Il résulte du a) que $\mu \perp \mu$; donc $\mu = 0$. □

V.2. Le Théorème de Radon-Nikodým

Nous allons en fait énoncer deux théorèmes d'un coup.

Théorème V.2.1. *Soit m une mesure positive σ-**finie** sur $(S, \mathscr{T})$ et μ une mesure sur $(S, \mathscr{T})$ positive et σ-finie (resp. réelle, resp. complexe). Alors :*

1) **Décomposition de Lebesgue** *: il existe un unique couple de mesures μ_a et μ_s sur $(S, \mathscr{T})$ telles que :*

$$\boxed{\mu = \mu_a + \mu_s} \quad \text{et} \quad \boxed{\begin{cases} \mu_a \ll m \\ \mu_s \perp m \end{cases}}.$$

Ces mesures sont positives et σ-finies (resp. réelles, resp. complexes), et l'on a $\boxed{\mu_a \perp \mu_s}$.

2) **Théorème de (Lebesgue)-Radon-Nikodým** *: il existe une unique (modulo une équivalence m-p.p.) fonction h mesurable positive (resp. m-intégrable réelle, resp. m- intégrable complexe) telle que :*

$$\boxed{\mu_a = m_h = h.m}.$$

En particulier : $\boxed{\text{si } \mu \ll m, \text{ alors } \mu = \mu_a = h.m}$.

On dit que h est la *dérivée de Radon-Nikodým* de μ par rapport à m.

Le théorème 2) est essentiellement dû à Lebesgue (1910) qui l'a montré pour $S = \mathbb{R}^d$ et $m = \lambda_d$ la mesure de Lebesgue. Radon (1913) l'a généralisé pour $S = \mathbb{R}^d$ et $m = \lambda_\varphi$ avec φ positive intégrable sur les compacts. O. Nikodým a montré le cas général en 1930. La preuve que l'on va donner ici est due à John von Neumann (1940), et donne 1) et 2) à la fois.

Notons que l'on a besoin d'une l'hypothèse de σ-finitude. En effet, si $m = \mathfrak{c}$ est la mesure de comptage sur $\mathbb{R}$, la mesure de Lebesgue λ est absolument continue par rapport à $\mathfrak{c}$ (car $\mathfrak{c}(A) = 0$ si et seulement si $A = \emptyset$), mais il n'existe aucune fonction mesurable h telle que $\lambda = h.\mathfrak{c}$, car pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\lambda(\{x\}) = 0$ et $\mathfrak{c}(\{x\}) = 1$; on devrait donc avoir $h(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. D'autre part, si $m = \lambda$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, et $\mu = \mathfrak{c}$, et si l'on avait $\mu = \mu_a + \mu_s$, on devrait avoir $\mu_a(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (car $\mu_a \ll \lambda$) ; on aurait donc $\mu_s(\{x\}) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$; mais alors, puisque $\mu_s \perp \mu_a$, aucune partie non vide ne peut porter μ_a ; il faudrait donc que $\mu_a = 0$; ainsi, on aurait $\mathfrak{c} = \mu_s \perp \lambda$, ce qui n'est pas vrai, de nouveau parce que $\mu_s(\{x\}) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et donc la seule mesure singulière par rapport à μ_s est la mesure nulle.

Passons à la démonstration.

Démonstration du Théorème V.2.1.

a) Unicité.

1) Si $\mu = \mu'_a + \mu'_s$ avec $\mu'_a \ll m$ et $\mu'_s \perp m$, alors :

$$\begin{cases} \mu'_a - \mu_a = \mu_s - \mu'_s \\ (\mu'_a - \mu_a) \ll m \\ (\mu_s - \mu'_s) \perp m \end{cases}$$

donc $\mu'_a - \mu_a = \mu_s - \mu'_s = 0$, par la Proposition V.1.13, 4) b).

2) Si $\mu_a = m_h = m_{h'}$, alors :

$$\int_A h\,dm = \int_A h'\,dm\,, \qquad \forall A \in \mathscr{T}\,;$$

donc $h = h'$ *m-p.p.* (on peut supposer h et h' réelles ; alors, en prenant $A = \{h > h'\}$, on a $m(A) = 0$; donc $h \leqslant h'$ *m-p.p.* ; symétriquement, on a aussi $h' \leqslant h$ *m-p.p.*).

b) Existence.

Séparons deux cas, le premier étant le cas essentiel.

1^{er} cas. m et μ sont positives et bornées.

(i) Posons :

$$\boxed{\nu = m + \mu}.$$

C'est une mesure positive sur $(S, \mathscr{T})$.

On va travailler avec $\boxed{\text{l'espace de Hilbert } L^2(\nu)}$.

Pour $f \in L^2(\nu)$, on a :

$$\begin{aligned} \int_S |f|\,d\mu &\leqslant \int_S |f|\,d\mu + \int_S |f|\,dm = \int_S |f|\,d\nu \\ &\leqslant \Big(\int_S |f|^2\,d\nu\Big)^{1/2} \big[\nu(S)\big]^{1/2}, \end{aligned}$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Comme $\nu(S) < +\infty$, f est μ-intégrable, et

$$\Big|\int_S f\,d\mu\Big| \leqslant \int_S |f|\,d\mu \leqslant \sqrt{\nu(S)}\,\|f\|_{L^2(\nu)}.$$

L'application

$$\begin{aligned} \Phi :\quad L^2(\nu) &\longrightarrow \quad \mathbb{K} \\ f \quad &\longmapsto \int_S f\,d\mu \end{aligned}$$

est donc une forme linéaire continue sur $L^2(\nu)$. Comme $L^2(\nu)$ est un espace de Hilbert, le Théorème de représentation de Fréchet-Riesz dit qu'il existe une fonction $g \in L^2(\nu)$ telle que :

$$\boxed{\int_S f\,d\mu = \int_S fg\,d\nu\,, \qquad \forall f \in L^2(\nu)}. \qquad (\star)$$

(*ii*) En particulier, pour $A \in \mathscr{T}$, comme $\mathbb{I}_A \in L^2(\nu)$ (parce que ν est bornée), on obtient :

$$\mu(A) = \int_A g\, d\nu\,.$$

Comme $0 \leqslant \mu(A) \leqslant \nu(A)$, on obtient, lorsque $\nu(A) > 0$:

$$0 \leqslant \frac{1}{\nu(A)} \int_A g\, d\nu \leqslant 1\,.$$

Nous utiliserons alors le lemme suivant :

Lemme V.2.2 (Lemme des moyennes). *Soit ν une mesure positive bornée sur $(S, \mathscr{T})$ et $g \in L^1(\nu)$. Soit F une partie fermée de $\mathbb{C}$. Si les moyennes :*

$$M_A(g) = \frac{1}{\nu(A)} \int_A g\, d\nu$$

sont dans F pour tout $A \in \mathscr{T}$ tel que $\nu(A) > 0$, alors $g(x) \in F$ pour ν-presque tout $x \in S$.

Preuve. Soit $\Delta = \overline{D}(a,r) \subseteq F^c$, avec $r > 0$, et soit $A = g^{-1}(\Delta)$. Si l'on avait $\nu(A) > 0$, on aurait :

$$|M_A(g) - a| = \left|\frac{1}{\nu(A)} \int_A (g-a)\, d\nu\right| \leqslant \frac{1}{\nu(A)} \int_A |g-a|\, d\nu \leqslant r\,,$$

ce qui est impossible car $M_A(g) \in F$.

On a donc $\nu(A) = 0$. Comme F^c est réunion dénombrable de tels disques, on a $\nu[g^{-1}(F^c)] = 0$. □

Suite de la démonstration. On a donc $g(x) \in [0,1]$ pour ν-presque tout $x \in S$. En modifiant g, on peut supposer que :

$$0 \leqslant g(x) \leqslant 1\,, \quad \underline{\forall x \in S}.$$

(*iii*) Définissons :

$$\boxed{A_a = \{0 \leqslant g < 1\}} \quad \text{et} \quad \boxed{A_s = \{g = 1\}}$$

et :

$$\boxed{\mu_a(A) = \mu(A \cap A_a)} \quad \text{et} \quad \boxed{\mu_s(A) = \mu(A \cap A_s)}\,, \quad A \in \mathscr{T}.$$

La relation ($\star$) donne :

$$\int_S f\, d\mu - \int_S fg\, d\mu = \int_S fg\, d\nu - \int_S fg\, d\mu\,,$$

soit :

$$\boxed{\int_S (1-g) f\, d\mu = \int_S fg\, dm}. \tag{$\star\star$}$$

En particulier, pour $f = \mathbb{I}_{A_s}$, on a $m(A_s) = 0$, donc $\boxed{\mu_s \perp m}$.

Maintenant, si $f = (\mathbb{1} + g + g^2 + \cdots + g^n)\mathbb{1}_A$, $(\star\star)$ donne :

$$\int_S (\mathbb{1} - g^{n+1})\, d\mu = \int_A g(\mathbb{1} + g + \cdots + g^n)\, dm\,. \qquad (\star\star\star)$$

Mais :

$$\begin{cases} x \in A_s & \Longrightarrow \quad 1 - g^{n+1}(x) = 0\,; \\ x \in A_a & \Longrightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty}\uparrow(1 - g^{n+1}(x)) = 1\,; \end{cases}$$

donc :

$$\lim_{n\to\infty}\uparrow \int_A (1 - g^{n+1}(x))\, d\mu(x) = \int_A \lim_{n\to\infty}\uparrow(1 - g^{n+1}(x))\, d\mu(x)$$
$$= \int_A \mathbb{1}_{A_a}\, d\mu = \mu(A \cap A_a) = \mu_a(A)\,.$$

Il résulte alors de $(\star\star\star)$ que :

$$\mu_a(A) = \lim_{n\to\infty}\uparrow \int_A g(\mathbb{1} + g + \cdots + g^n)\, dm\,.$$

(*iv*) Posons :

$$\boxed{h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g^n(x)}\,.$$

La fonction h est mesurable positive et :

$$\int_A h\, dm = \lim_{n\to\infty}\uparrow \int_A g(\mathbb{1} + g + \cdots + g^n)\, dm = \mu_a(A)\,;$$

donc $\boxed{\mu_a = m_h}$.

De plus, $h \in L^1(m)$, puisque $\mu_a(S) < +\infty$.

<u>2ème cas</u> : m est <u>positive</u> et <u>σ-finie</u>.

On pose :

$$\begin{cases} S_1' & = S_1 \\ S_n' & = S_n \setminus (S_1 \cup \cdots \cup S_{n-1})\,, \; n \geqslant 2\,. \end{cases}$$

Les S_n' sont mesurables, deux-à-deux disjoints, de m-mesure finie, et $S = \bigcup_{n\geqslant 1} S_n'$.

a) Si μ est positive bornée : on applique ce qui précède sur chaque S_n'. Les décompositions de Lebesgue de μ sur chaque S_n' s'ajoutent pour donner celle de μ sur tout S. On obtient des fonctions h_n et l'on pose $h = \sum_{n\geqslant 1} h_n \mathbb{1}_{S_n'}$. On a $\mu_a = m_h$ et $h \in L^1(m)$ car $\mu_a(S) < +\infty$.

b) Si μ est une mesure complexe, on applique ce qui précède à $(\mathrm{Re}\,\mu)^+$, $(\mathrm{Re}\,\mu)^-$, $(\mathrm{Im}\,\mu)^+$ et $(\mathrm{Im}\,\mu)^-$ qui sont positives et bornées.

c) Si μ est positive et σ-finie, il existe des parties mesurables S_k'', $k \geqslant 1$, deux-à-deux disjointes telles que $S = \bigcup_{k\geqslant 1} S_k''$ et $\mu(S_k'') < +\infty$. On applique le 1er cas sur chaque $S_n' \cap S_k''$.

Cela achève la démonstration. □

Remarque. Dans ce dernier cas, h ne sera pas m-intégrable, mais seulement m-intégrable sur chaque S_k''. Par exemple, $\mu(A) = \int_A \frac{dt}{t}$ pour $m = \lambda$ sur $]0,1[$.

V.3. Applications

V.3.1. Décomposition polaire d'une mesure et intégration par rapport à une mesure complexe

Pour les mesures complexes, on a un analogue de l'écriture d'un nombre complexe avec son module et son argument.

Proposition V.3.1. *Soit μ une mesure complexe sur $(S, \mathscr{T})$. Il existe une fonction mesurable h sur S telle que* $\boxed{|h(x)| = 1}$ *$|\mu|$- p.p. et telle que :*

$$\boxed{\mu = h.|\mu|}$$

(décomposition polaire de μ).

Preuve. 1) Comme $|\mu(A)| \leqslant |\mu|(A)$, on a $\mu \ll |\mu|$. Par le Théorème de Radon-Nikodým, il existe $h \in L^1(|\mu|)$ telle que $\mu = h.|\mu|$.

2) Reste à voir que $|h| = 1$ $|\mu|$-*p.p.* .

a) Montrons d'abord que $|h| \geqslant 1$ $|\mu|$-*p.p.*.

Soit, pour $r > 0$, $A_r = \{|h| \leqslant r\}$.

Pour toute partition mesurable $(B_n)_{n\geqslant 1}$ de A_r, on a :

$$\sum_{n\geqslant 1} |\mu(B_n)| = \sum_{n\geqslant 1} \left| \int_{B_n} h\, d|\mu| \right| \leqslant \sum_{n\geqslant 1} r\, |\mu|(B_n) = r\, |\mu|(A_r);$$

donc :

$$|\mu|(A_r) \leqslant r\, |\mu|(A_r)\,,$$

ce qui, pour $r < 1$, implique $|\mu|(A_r) = 0$.

b) D'autre part, puisque $\mu = h.|\mu|$, on a, lorsque $|\mu|(A) > 0$:

$$\left| \frac{1}{|\mu|(A)} \int_A h\, d|\mu| \right| = \frac{|\mu(A)|}{|\mu|(A)} \leqslant 1\,,$$

et le Lemme de moyennes dit qu'alors $|h| \leqslant 1$ $|\mu|$-*p.p.*. □

Définition V.3.2. *Soit μ une mesure complexe et $\mu = h.|\mu|$ sa décomposition polaire.*

On dit que $f\colon S \to \mathbb{K}$ est μ-intégrable si elle est $|\mu|$-intégrable, et l'on définit alors son intégrale par :

$$\int_S f\, d\mu = \int_S f h\, d|\mu|\,.$$

Bien sûr, les résulats concernant l'intégration des fonctions *positives* (Théorème de convergence monotone, Lemme de Fatou, ...) n'ont plus de sens, mais on garde le **Théorème de convergence dominée.** Tout d'abord, si μ est une mesure complexe, on dira qu'une propriété est vraie μ-presque partout lorsqu'en fait elle est vraie $|\mu|$-presque partout. Alors si $(f_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de fonctions mesurables convergeant

μ-presque partout vers f et qu'il existe g μ-intégrable telle que $|f_n| \leqslant g$ μ-$p.p.$ pour tout $n \geqslant 1$, alors $\int_S f_n \, d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_S f \, d\mu$. En effet, si h est la partie polaire de μ, on a $|h| = 1$ μ-$p.p.$; donc $|f_n h| \leqslant g$ μ-$p.p.$ pour tout $n \geqslant 1$ et, comme $(f_n h)_{n\geqslant 1}$ converge μ-$p.p.$ vers fh, le Théorème de convergence dominée pour la mesure positive $|\mu|$ donne le résultat.

Si μ et ν sont deux mesures complexes, sur des espaces mesurables $(S_1, \mathscr{T}_1)$ et $(S_2, \mathscr{T}_2)$ respectivement, on peut définir leur produit $\mu \otimes \nu$ de la façon suivante. Si $\mu = h.|\mu|$ et $\nu = k.|\nu|$ sont les décompositions polaires de μ et ν, on définit $(h \otimes k)(x, y) = h(x)\, k(y)$ pour tous $x \in S_1$ et $y \in S_2$. On pose alors $(\mu \otimes \nu) = (h \otimes k).(|\mu| \otimes |\nu|)$. C'est une mesure complexe sur $(S_1 \times S_2, \mathscr{T}_1 \otimes \mathscr{T}_2)$, et l'on a, pour tous $A \in \mathscr{T}_1$ et $B \in \mathscr{T}_2$: $(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A)\, \nu(B)$, grâce au Théorème de Fubini, utilisé pour la mesure $|\mu| \otimes |\nu|$. De plus, ce même théorème, avec le fait que les parties polaires sont de module 1 $p.p.$, donne la version du **Théorème de Fubini** pour les mesures complexes : si $f \colon S_1 \times S_2 \to \mathbb{C}$ est mesurable, alors f est $\mu \otimes \nu$-intégrable si et seulement si $\int_{S_1} \left[\int_{S_2} |f(x,y)| \, d|\nu|(y) \right] d|\mu|(x) < +\infty$, ou, de façon équivalente, si et seulement si $\int_{S_2} \left[\int_{S_1} |f(x,y)| \, d|\mu|(x) \right] d|\nu|(y) < +\infty$, et dans ce cas, on a :

$$\begin{aligned} \int_{S_1 \times S_2} f(x,y) \, d(\mu \otimes \nu)(x,y) &= \int_{S_1} \left[\int_{S_2} f(x,y) \, d\nu(y) \right] d\mu(x) \\ &= \int_{S_2} \left[\int_{S_1} f(x,y) \, d\mu(x) \right] d\nu(y) \, . \end{aligned}$$

Voyons maintenant quelques conséquences de l'existence de la décomposition polaire. La première pourrait se voir directement à partir de la définition.

Corollaire V.3.3. *Si m est une mesure positive sur $(S, \mathscr{T})$ et $\varphi \in L^1(m)$, alors :*

$$\boxed{|\varphi.m| = |\varphi|.m} \, .$$

Preuve. Soit $\mu = \varphi.m$ et $\mu = h.|\mu|$ sa décomposition polaire. On a :

$$h.|\mu| = \varphi.m \, ,$$

d'où :

$$|\mu| = (\bar{h}\, \varphi).m \, ,$$

puisque $\bar{h} = 1/h$, vu que $|h| = 1$.

Comme $|\mu|$ et m sont des mesures positives, cela entraîne que $\bar{h}\, \varphi \geqslant 0$ m-$p.p.$, c'est-à-dire que $\bar{h}\, \varphi = |\varphi|$ m-$p.p.$. □

Corollaire V.3.4. *Soit μ une mesure complexe et $\mu = h.|\mu|$ sa décomposition polaire. On a :*

1) $\operatorname{Re} \mu = (\operatorname{Re} h).|\mu|$ *et* $\operatorname{Im} \mu = (\operatorname{Im} h).|\mu|$;

2) *si μ est réelle :*

$$\mu^+ = h^+.|\mu| \qquad \text{et} \qquad \mu^- = h^-.|\mu| \, .$$

Preuve. 1) est évident. Pour le 2), on peut supposer $|h(x)| = 1$ pour <u>tout</u> $x \in S$. Alors :

$$h(x) = 1 \text{ ou } -1, \quad \forall x \in S.$$

On a donc :

$$h^+ = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + h) \quad \text{et} \quad h^- = \frac{1}{2}(\mathbb{1} - h);$$

d'où :

$$\begin{cases} \mu^+ &= \frac{1}{2}(|\mu| + \mu) = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + h).|\mu| = h^+.|\mu| \\ \mu^- &= \frac{1}{2}(|\mu| - \mu) = \frac{1}{2}(\mathbb{1} - h).|\mu| = h^-.|\mu|. \end{cases}$$ □

V.3.2. Caractère complet de $\mathscr{M}(S)$

Tout d'abord, on a le résulat simple suivant.

Proposition V.3.5. *Si $\mathbb{P}$ est une probabilité sur $(S, \mathscr{T})$, l'application*

$$\begin{array}{ccc} L^1(S, \mathscr{T}, \mathbb{P}) & \longrightarrow & \mathscr{M}(S) \\ f & \longmapsto & f.\mathbb{P} \end{array}$$

est une <u>isométrie</u>.

Preuve.

$$\|f.\mathbb{P}\| = |f.\mathbb{P}|(S) = (|f|.\mathbb{P})(S) = \int_S |f| \, d\mathbb{P} = \|f\|_{L^1(\mathbb{P})}.$$ □

On peut maintenant montrer :

Théorème V.3.6. $\big(\mathscr{M}(S), \| \ \|\big)$ *est un espace de Banach.*

Preuve. Soit $(\mu_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de Cauchy dans $\mathscr{M}(S)$. S'il y a une infinité d'indices n pour lesquels $\mu_n = 0$, la suite converge vers 0 (car une suite de Cauchy ne peut avoir qu'une seule valeur d'adhérence). Sinon, on peut supposer $\mu_n \neq 0$ pour tout $n \geqslant 1$. Posons :

$$\mathbb{P} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \|\mu_n\|} |\mu_n|.$$

$\mathbb{P}$ est une probabilité et $\mu_n \ll \mathbb{P}$ pour tout n. Le Théorème de Radon-Nikodým dit que :

$$\mu_n = f_n.\mathbb{P}, \qquad \forall n \geqslant 1,$$

avec $f_n \in L^1(\mathbb{P})$.

Le Corollaire V.3.5 assure que $(f_n)_{n \geqslant 1}$ est de Cauchy dans $L^1(\mathbb{P})$, et donc converge vers $f \in L^1(\mathbb{P})$. Alors $\mu_n \xrightarrow[n \to \infty]{} f.\mathbb{P}$, de nouveau par le Corollaire V.3.5. □

V.3.3. Dual de $L^p(m)$

Soit m une mesure positive sur $(S, \mathscr{T})$.

Soit p et q deux exposants conjugués : $\boxed{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1}$, avec $\boxed{1 \leqslant p, q \leqslant \infty}$ (on pose $\frac{1}{\infty} = 0$).

Pour $f \in L^p(m)$ et $g \in L^q(m)$, on a :

$$\begin{cases} fg \in L^1(m) \\ \|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q\,; \end{cases}$$

l'application :

$$\begin{array}{rccc} \Phi_g : & L^p(m) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & f & \longmapsto & \int_S fg\,dm \end{array}$$

est donc une <u>forme linéaire continue</u> : $\boxed{\Phi_g \in \left[L^p(m)\right]^*}$, et $\|\Phi_g\| \leqslant \|g\|_q$. L'application <u>linéaire</u>

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & L^q(m) & \longrightarrow & \left[L^p(m)\right]^* \\ & g & \longmapsto & \Phi_g \end{array}$$

est donc <u>continue</u>.

Remarque. Lorsque $p = q = 2$, $\Phi_g(f) = (f \mid \bar{g})$, $(\,.\mid .\,)$ étant le produit scalaire sur $L^2(m)$.

On a :

Proposition V.3.7. *Pour* $\boxed{1 < p \leqslant \infty}$ *et pour* $\boxed{p = 1 \text{ et } m\ \sigma\text{-finie}}$ *l'application linéaire Φ est une <u>isométrie</u>.*

Pour $p = 1$, Φ peut ne même pas être injective.

Exemple. Prenons $S = \{0, 1\}$, muni de sa tribu discrète et définissons la mesure m par

$$m(\{0\}) = 1\,, \qquad m(\{1\}) = +\infty\,.$$

Alors $L^1(m) = \{f\,;\ f(1) = 0\}$ est de dimension 1, alors que $L^\infty(m) = \mathbb{K}^{\{0,1\}}$ est de dimension 2.

Preuve. Il suffit de montrer que $\|\Phi_g\| \geqslant \|g\|_q$.

a) Cas <u>$1 < p \leqslant \infty$</u>. On a alors $1 \leqslant q < \infty$.

Soit $g \in L^q(m)$, non identiquement nulle.

(i) pour $p = \infty$, posons :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|g(x)|}{g(x)} & \text{si} \quad g(x) \neq 0\,; \\ 0 & \text{si} \quad g(x) = 0\,. \end{cases}$$

On a $fg = |g|$ et $|f| \leqslant 1$; donc $f \in L^\infty(m)$ et $\|f\|_\infty = 1$. Comme $\Phi_g(f) = \|g\|_1$, on obtient $\|\Phi_g\| \geqslant \|g\|_1$.

(*ii*) pour $1 < p < \infty$, on pose :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|g(x)|^q}{g(x)} & \text{si} \quad g(x) \neq 0\,; \\ 0 & \text{si} \quad g(x) = 0. \end{cases}$$

Alors $|f|^p = |g|^{(q-1)p} = |g|^q$ et donc $f \in L^p(m)$ et $\|f\|_p = \|g\|_q^{q/p}$. Alors :

$$\frac{\Phi_g(f)}{\|f\|_p} = \frac{\|g\|_q^q}{\|g\|_q^{q/p}} = \|g\|_q^{q(1-\frac{1}{p})} = \|g\|_q\,;$$

donc $\|\Phi_g\| \geqslant \|g\|_q$.

b) Cas $\underline{p = 1 \text{ et } m\ \sigma\text{-finie}}$.

Soit $S_n \in \mathscr{T}$ avec $0 < m(S_n) < +\infty$ et $S = \bigcup_{n \geqslant 1} S_n$. Pour tout $A \in \mathscr{T}$, tel que $A \subseteq S_n$, on a :

$$\left| \int_A g\, dm \right| = |\Phi_g(\mathbb{1}_A)| \leqslant \|\Phi_g\|\, \|\mathbb{1}_A\|_1 = \|\Phi_g\|\, m(A)\,.$$

Le Lemme des moyennes dit qu'alors :

$$|g(x)| \leqslant \|\Phi_g\|$$

pour m-presque tout $x \in S_n$. Il en résulte que $|g(x)| \leqslant \|\Phi_g\|$ pour m-presque tout $\underline{x \in S}$. Donc $\|g\|_\infty \leqslant \|\Phi_g\|$. □

Le résultat essentiel est alors :

Théorème V.3.8. *Pour* $\boxed{1 < p < \infty}$ *et pour* $\boxed{p = 1 \textit{ lorsque } m \textit{ est } \sigma\textit{-finie}}$, *l'application :*

$$\Phi \colon g \in L^q(m) \longmapsto \Phi_g \in \left[L^p(m)\right]^*,$$

où :

$$\Phi_g(f) = \int_S f\, g\, dm$$

est **surjective**. *C'est donc un* $\boxed{\textit{isomorphisme isométrique}}$.

En d'autres termes, si l'on identifie g et Φ_g :

- $L^q(m)$ est le **dual** de $L^p(m)$ pour $1 < p < \infty$.
- $L^\infty(m)$ est le **dual** de $L^1(m)$ lorsque $\underline{m \text{ est } \sigma\text{-finie}}$.

Pour $p = q = 2$, on le sait déjà, et c'est ce qui nous a permis de montrer le Théorème de Radon-Nikodým, qui va donner à son tour le théorème général.

Pour $S = [0,1]$ et $p = q = 2$, nous avons déjà vu que c'était dû à Fréchet et Riesz (indépendemmment) en 1907. Toujours pour $S = [0,1]$, le cas $1 < p < \infty$ est dû à Riesz (1910) et le cas $p = 1$ à Steinhaus (1919) (mais cela semblait déjà être connu).

Il y a des conditions plus générales que la σ-finitude de m pour avoir l'égalité $L^\infty(m) = \left[L^1(m)\right]^*$, mais on a vu qu'elle n'a pas toujours lieu.

Notons que l'on peut montrer que l'application $\Phi\colon L^1(m) \to \left[L^\infty(m)\right]^*$ n'est <u>surjective</u> <u>que</u> lorsque $\dim\left(L^1(m)\right) < +\infty$ (mais ce n'est pas suffisant, comme le montre l'exemple précédent). Pour $L^1(0,1)$, voir l'Exercice 13; pour $L^\infty(\mathbb{R})$, voir l'Exercice 11.

Preuve. Soit $\varphi \in \left[L^p(m)\right]^*$.

1) Supposons d'abord $\boxed{m(S) < +\infty}$.

Posons alors :

$$\boxed{\mu(A) = \varphi(\mathbb{1}_A)}, \quad \text{pour } A \in \mathscr{T}.$$

On a :

a) μ est une <u>mesure</u> sur $(S, \mathscr{T})$. En effet, si $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{T}$ sont deux-à-deux disjoints, on a, en posant $A = \bigcup_{n\geqslant 1} A_n$:

$$\left\|\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_{\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right)}\right\|_p = \left[m\left(A \setminus \bigcup_{k=1}^n A_k\right)\right]^{1/p} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

car la suite $\left(A \setminus \bigcup_{k=1}^n A_k\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et :

$$\bigcap_{n\geqslant 1}\left(A \setminus \bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \emptyset$$

et parce que <u>m est bornée</u>.

Comme $\varphi\colon L^p(m) \to \mathbb{K}$ est continue, on obtient :

$$\varphi\left(\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_{\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right)}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

soit :

$$\begin{aligned}
\mu(A) = \varphi(\mathbb{1}_A) &= \lim_{n\to\infty} \varphi\left(\mathbb{1}_{\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right)}\right) = \lim_{n\to\infty} \varphi\left(\sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{A_k}\right) \\
&\qquad \text{car les } A_k \text{ sont deux-à-deux disjoints} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \varphi(\mathbb{1}_{A_k}) \quad \text{car } \varphi \text{ est linéaire} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \mu(A_k) = \sum_{k=1}^\infty \mu(A_k).
\end{aligned}$$

b) Comme :

$$m(A) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \|\mathbb{1}_A\|_p = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mu(A) = \varphi(\mathbb{1}_A) = 0,$$

μ est <u>absolument continue</u> par rapport à m. Le <u>Théorème de Radon-Nikodým</u> donne donc l'existence d'une fonction $\underline{g \in L^1(m)}$ telle que :

$$\varphi(\mathbb{1}_A) = \mu(A) = \int_A g\, dm = \int_S g\, \mathbb{1}_A\, dm.$$

Par linéarité, on a :

$$\boxed{\varphi(f) = \int_S f\, g\, dm} = \Phi_g(f)$$

pour toute f <u>étagée</u>.

Notons que, puisque $g \in L^1(m)$, Φ_g est continue sur $L^\infty(m)$ (qui est contenu dans $L^p(m)$ puisque m est finie) :

$$|\Phi_g(f)| \leqslant \|g\|_1\, \|f\|_\infty.$$

Mais, comme $m(S) < +\infty$, l'injection canonique $L^\infty(m) \hookrightarrow L^p(m)$ est continue ; l'application $\varphi\colon L^p(m) \to \mathbb{K}$, continue par hypothèse sur $L^p(m)$, est donc continue sur $L^\infty(m)$, pour la norme $\|\,.\,\|_\infty$. Plus précisément, on a :

$$|\varphi(f)| \leqslant \|\varphi\|\, \|f\|_p \leqslant \|\varphi\|\, m(S)^{1/p}\, \|f\|_\infty.$$

Comme l'espace des fonctions étagées Et (m) est <u>dense</u> dans $L^\infty(m)$, on a donc :

$$\varphi(f) = \Phi_g(f)$$

pour <u>toute $f \in L^\infty(m)$</u>.

c) Il reste à montrer que $\underline{g \in L^q(m)}$.

- Si $\underline{p = 1}$: on a, pour $A \in \mathscr{T}$:

$$\left| \int_A g\, dm \right| = |\Phi_g(\mathbb{1}_A)| = |\varphi(\mathbb{1}_A)| \leqslant \|\varphi\|\, \|\mathbb{1}_A\|_1 = \|\varphi\|\, m(A) ;$$

le Lemme des moyennes, appliqué avec $F = \{z \in \mathbb{C} ;\ |z| \leqslant \|\varphi\|\}$, entraîne que $|g| \leqslant \|\varphi\|$ m-presque partout, et par conséquent $g \in L^\infty(m)$.

- Si $\underline{1 < p < \infty}$, on pose :

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{|g(x)|^q}{g(x)} & \text{si} \quad 0 < |g(x)| \leqslant n ; \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et $A_n = \{0 < |g| \leqslant n\}$.

On a :

$$\begin{cases} f_n \in L^\infty(m), \text{ et } \|f_n\|_\infty \leqslant n ; \\ |f_n|^p = |g|^q \ \text{ sur } A_n \qquad (\text{car } \frac{q}{p} = q - 1) \\ f_n g = |g|^q \ \text{ sur } A_n \\ f_n\, g = 0 \ \text{ sur } A_n^c ; \end{cases}$$

donc :

$$\int_{A_n} |g|^q \, dm = \int_S f_n \, g \, dm = \varphi(f_n) \leqslant \|\varphi\| \, \|f_n\|_p = \|\varphi\| \left(\int_{A_n} |g|^q \, dm \right)^{1/p},$$

ce qui donne, puisque $1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$:

$$\int_{A_n} |g|^q \, dm \leqslant \|\varphi\|^q,$$

d'où, puisque $g \in L^1(m)$ (et donc $|g| < +\infty$ m-$p.p.$, de sorte que $\bigcup_{n \geqslant 1} A_n = \{g \neq 0\}$) :

$$\int_S |g|^q \, dm = \lim_{n \to \infty} \int_{A_n} |g|^q \, dm \leqslant \|\varphi\|^q$$

et donc $g \in L^q(m)$.

d) Il en résulte que Φ_g est continue sur $L^p(m)$. Mais φ est elle-même, par hypothèse, continue sur $L^p(m)$, et l'on a vu que Φ_g et φ étaient égales sur $L^\infty(m)$, qui est dense dans $L^p(m)$. Donc Φ_g et φ coïncident sur tout $L^p(m)$: $\varphi(f) = \Phi_g(f)$, $\forall f \in L^p(m)$.

2) Lorsque m est <u>σ-finie</u>. On peut alors trouver une fonction $u \in L^1(m)$ telle que $u(x) > 0, \forall x \in S$; par exemple, si $S = \bigcup_{n \geqslant 1} S_n$, avec $S_1, S_2, \ldots$ deux-à-deux disjoints, et $0 < m(S_n) < +\infty$, on peut prendre $u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \, m(S_n)} \, \mathbb{I}_{S_n}$. Alors l'application linéaire :

$$\begin{array}{rccc} j: & L^p(u.m) & \longrightarrow & L^p(m) \\ & h & \longmapsto & u^{1/p} \, h = f \end{array}$$

est une <u>isométrie</u> :

$$\|u^{1/p} \, h\|_{L^p(m)} = \int_S |u^{1/p} \, h|^p \, dm = \int_S |h|^p u \, dm = \|h\|_{L^p(u.m)}$$

et <u>bijective</u> (car $u(x) \neq 0$ pour tout $x \in S$).

Par conséquent, si $\varphi \in \left[L^p(m)\right]^*$, $\varphi \circ j \in \left[L^p(u.m)\right]^*$, il existe, la mesure $u.m$ étant bornée (car $u \in L^1(m)$), $g \in L^q(u.m)$ telle que :

$$(\varphi \circ j)(h) = \int_S h \, g \, d(u.m) \,, \quad \forall h \in L^p(u.m).$$

Cela s'écrit (noter que $u^{1/q} = \mathbb{I}$ lorsque $p = 1$) :

$$\varphi(u^{1/p} \, h) = \int_S h \, g \, u \, dm = \int_S (u^{1/p} \, h) \, (u^{1/q} \, g) \, dm,$$

soit :

$$\varphi(f) = \int_S f \, (u^{1/q} \, g) \, dm = \Phi_G(f)$$

pour toute $f \in L^p(m)$, avec $G = u^{1/q} \, g \in L^q(m)$. □

Le cas d'une mesure arbitraire, lorsque $1 < p < \infty$, est plus délicat, et on ne le traitera qu'en annexe.

Annexe. Cas $1 < p < \infty$ et m mesure arbitraire.

Soit $\varphi \in \left[L^p(S, \mathscr{T}, m)\right]^*$.

1) Pour $A \in \mathscr{T}$, posons :

$$\begin{cases} \mathscr{T}_A &= \{B \in \mathscr{T}\,;\ B \subseteq A\} \\ m_A(B) &= m(B) \quad \text{si } B \in \mathscr{T}_A. \end{cases}$$

Pour $h \in L^p(A, \mathscr{T}_A, m_A)$, on pose :

$$\widetilde{h}(x) = \begin{cases} h(x) & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors $\widetilde{h} \in L^p(S, \mathscr{T}, m)$ et

$$\begin{array}{rccc} \varphi_A\colon & L^p(A, \mathscr{T}_A, m_A) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & h & \longmapsto & \varphi_A(h) = \varphi(\widetilde{h}) \end{array}$$

est une forme linéaire continue telle que :

$$|\varphi_A(h)| \leqslant \|\varphi\|\,\|\widetilde{h}\|_p \leqslant \|\varphi\|\,\|h\|_p\,;$$

donc $\|\varphi_A\| \leqslant \|\varphi\|$.

2) D'après le résultat prouvé dans le cas des mesures bornées, pour tout $A \in \mathscr{T}$ tel que $m(A) < +\infty$, il existe $k_A \in L^q(A, m_A)$ telle que :

$$\varphi_A(h) = \int_A h\,k_A\,dm_a\,, \quad \forall h \in L^p(A, m_A).$$

Alors :

$$g_A = \widetilde{k}_A \in L^q(m)$$

et, pour $f \in L^p(m)$, on a :

$$\varphi(f.\mathbb{1}_A) = \varphi_A\big(f_{|A}\big) = \int_A f_{|A}\,k_A\,dm_A = \int_S f\,g_A\,dm = \Phi_{g_A}(f).$$

3) De plus, si $A_1, A_2 \in \mathscr{T}$ sont tels que $A_1 \subseteq A_2$ et $m(A_2) < +\infty$, on a, pour $A \in \mathscr{T}_{A_1}$:

$$\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_A\,\mathbb{1}_{A_1} = \mathbb{1}_A\,\mathbb{1}_{A_2} \in L^p(m)\,;$$

donc :

$$\begin{aligned} \int_A g_{A_1}\,dm &= \int_S \mathbb{1}_A\,g_{A_1}\,dm = \varphi(\mathbb{1}_A\,\mathbb{1}_{A_1}) = \varphi(\mathbb{1}_A\,\mathbb{1}_{A_2}) \\ &= \int_S \mathbb{1}_A\,g_{A_2}\,dm = \int_A g_{A_2}\,dm\,. \end{aligned}$$

Cela entraîne que g_{A_1} et g_{A_2} sont <u>égales sur A_1</u> (presque partout).

4) Alors :

a) Comme :

$$\|g_A\|_q = \|\varphi_A\| \leqslant \|\varphi\|\,,$$

on a :

$$\sup\{\|g_A\|_q\,;\ A \in \mathscr{T} \text{ et } m(A) < +\infty\} \leqslant \|\varphi\| < +\infty.$$

Appelons M cette borne supérieure.

Il existe donc des $A_n \in \mathscr{T}$ avec $m(A_n) < +\infty$ tels que :

$$\lim_{n\to\infty} \|g_{A_n}\|_q = M.$$

On peut choisir le suite $(A_n)_{n\geqslant 1}$ croissante, car $\|g_{A\cup B}\|_q \geqslant \|g_A\|_q$.

b) Définissons alors $g\colon S \to \mathbb{K}$ par :

$$g(x) = \begin{cases} g_{A_n}(x) & \text{si} \quad x \in A_n, \\ 0 & \text{si} \quad x \notin A = \bigcup_{n\geqslant 1} A_n. \end{cases}$$

On a :

$$\int_S |g|^q\,dm = \lim_{n\to\infty}\uparrow \int_S |g|^q \mathbb{1}_{A_n}\,dm = \lim_{n\to\infty}\uparrow \|g_{A_n}\|_q^q = M^q < +\infty\,;$$

donc $g \in L^q(m)$.

c) De plus, pour $f \in L^p(m)$, on a :

$$\begin{aligned} \varphi(f\,\mathbb{1}_A) &= \lim_{n\to\infty} \varphi(f\,\mathbb{1}_{A_n}) \quad \text{car } \varphi \text{ est continue} \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_S f\,g_{A_n}\,dm \\ &= \int_S f\,g\,dm, \end{aligned}$$

par convergence dominée: $|f\,g_{A_n}| \leqslant |f|\,|g| \in L^1(m)$.

d) Soit maintenant $B \in \mathscr{T}$ tel que $m(B) < +\infty$ et $B \cap A = \emptyset$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \geqslant 1$ tel que :

$$\|g_{A_n}\|_q^q \geqslant M^q - \varepsilon^q\,;$$

donc, puisque $B \cap A_n = \emptyset$:

$$M^q \geqslant \|g_{B\cup A_n}\|_q^q = \|g_B\|_q^q + \|g_{A_n}\|_q^q \geqslant \|g_B\|_q^q + M^q - \varepsilon^q$$

(*c'est ce qui ne marche pas pour* $q = \infty$), ce qui donne :

$$\|g_B\|_q \leqslant \varepsilon.$$

Par conséquent :

$$g_B = 0.$$

e) Maintenant, puisque $f \in L^p(m)$, l'ensemble $\{f \neq 0\}$ est de mesure σ-finie :

$$\{f \neq 0\} = \bigcup_{n \geqslant 1} \left\{|f| \geqslant \frac{1}{n}\right\} = \bigcup_{n \geqslant 1} F_n,$$

et, par l'inégalité de Markov :

$$m(F_n) \leqslant n^p \int_S |f|^p \, dm < +\infty.$$

Comme φ est continue et comme :

$$\begin{aligned}\left\|f\, \mathbb{1}_{S\setminus A} - f\, \mathbb{1}_{(S\setminus A)\cap F_n}\right\|_p^p &= \int_S \left|f\, \mathbb{1}_{S\setminus A} - f\, \mathbb{1}_{(S\setminus A)\cap F_n}\right|^p dm \\ &\leqslant \frac{1}{n^p} \int_S |f|^p \, dm \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,\end{aligned}$$

on a :

$$\begin{aligned}\varphi\big(f\, \mathbb{1}_{S\setminus A}\big) &= \lim_{n\to\infty} \varphi\big(f.\mathbb{1}_{(S\setminus A)\cap F_n}\big) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_S f\, g_{(S\setminus A)\cap F_n} \, dm \quad (\text{car } m\big((S \setminus A) \cap F_n\big) < +\infty) \\ &= 0 \quad (\text{car } [(S \setminus A) \cap F_n] \cap A = \emptyset).\end{aligned}$$

f) On a donc bien finalement :

$$\varphi(f) = \varphi(f\, \mathbb{1}_A) = \int_S f\, g \, dm,$$

ce qui termine la démonstration. □

V.4. Exercices

Exercice 1.

Soit μ une mesure complexe sur un espace mesurable $(S, \mathscr{T})$. Montrer que μ est positive si et seulement si $\|\mu\| = \mu(S)$.

Exercice 2.

Soit m une mesure (positive) σ-finie sur $(S, \mathscr{T})$, et $\Phi \in \left[L^\infty(S, \mathscr{T}, m)\right]^*$. On suppose, pour fixer les idées, que le corps des scalaires est $\mathbb{C}$.

Pour $A \in \mathscr{T}$, on pose :

$$\mu(A) = \Phi(\mathbb{1}_A)\,.$$

Montrer que si $\mu \colon \mathscr{T} \to \mathbb{C}$ est une mesure complexe (en particulier est σ-additive), alors il existe $g \in L^1(S, \mathscr{T}, m)$ telle que :

$$\Phi(f) = \int_S fg\, dm \qquad \forall f \in L^\infty(S, \mathscr{T}, m).$$

Remarque. On renvoie à l'Exercice 13 du Chapitre VIII pour un complément à cet exercice.

Exercice 3 (*Caractères de l'algèbre* $L^1(\mathbb{R})$).

Soit $\chi \colon L^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ un *caractère de l'algèbre* $L^1(\mathbb{R})$, c'est-à-dire une forme linéaire continue, non nulle, telle que $\chi(f * g) = \chi(f)\,\chi(g)$ pour toutes $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. On sait que pour tout $y \in \mathbb{R}$, la forme linéaire définie par $\chi_y(f) = \widehat{f}(y)$ est un caractère de $L^1(\mathbb{R})$. Le but de l'exercice est de montrer que tous les caractères de $L^1(\mathbb{R})$ sont de cette forme.

1) Montrer qu'il existe $\beta \in L^\infty(\mathbb{R})$ telle que :

$$\chi(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\beta(x)\,dx \qquad \forall f \in L^1(\mathbb{R}).$$

2) En utilisant la relation $\chi(f * g) = \chi(f)\,\chi(g)$, montrer que pour presque tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} f(x-t)\,\beta(x)\,dx = \beta(t) \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\beta(x)\,dx\,.$$

3) En déduire que pour presque tout $u \in \mathbb{R}$, on a $\beta(u+t) = \beta(u)\,\beta(t)$ pour presque tout $t \in \mathbb{R}$.

4) En utilisant de nouveau le 2), avec $f_0 \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\chi(f_0) \neq 0$, montrer que β est presque partout égale à une fonction continue.

On supposera donc maintenant que β est continue.

5) En déduire qu'il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $\chi(f) = \widehat{f}(y)$ pour toute $f \in L^1(\mathbb{R})$ (*on considèrera comme connu que le résultat de la question 3) et le fait que* β *soit continue entraînent que* $\beta(t) = \mathrm{e}^{At}$ *pour un certain* $A \in \mathbb{C}$).

Exercice 4 (*L^1 est faiblement séquentiellement complet, début*).

Les fonctions considérées sont à *valeurs réelles* pour fixer les idées. La mesure de Lebesgue est désignée par λ et $A\Delta B = (A\cup B)\setminus(A\cap B)$ est la différence symétrique de A et B.

1) a) Montrer que si A_n, $n \geqslant 1$, sont des boréliens de $[0,1]$ tels que l'on ait $\|\mathbb{1}_{A_n} - f\|_1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, alors f ne prend, presque partout, que les valeurs 0 et 1.

b) En déduire que si l'on identifie la tribu borélienne $\mathscr{B}\mathrm{or} = \mathscr{B}\mathrm{or}\,([0,1])$ de $[0,1]$ à son image dans $L^1([0,1])$ par l'application $A \mapsto \mathbb{1}_A$, alors $\mathscr{B}\mathrm{or}$ muni de la distance définie par :

$$d(A,B) = \|\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B\|_{L^1([0,1])}$$

est un espace métrique *complet.*

2) Soit $f \in L^1([0,1])$. En utilisant l'inégalité :

$$\left|\int_A f(x)\,dx - \int_B f(x)\,dx\right| \leqslant \int_{A\Delta B} |f(x)|\,dx\,,$$

montrer que l'application $T_f\colon A \in \mathscr{B}\mathrm{or} \longmapsto \int_A f(x)\,dx$ est uniformément continue.

On donne maintenant une suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ de fonctions intégrables sur $[0,1]$ telle que :

$$\nu(A) = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)\,dx$$

existe (dans $\mathbb{R}$) pour tout $A \in \mathscr{B}\mathrm{or}$.

3) On pose, pour $\varepsilon > 0$:

$$F_N = \bigcap_{n,p\geqslant N} \left\{A \in \mathscr{B}\mathrm{or}\,;\ \left|\int_A (f_n(x) - f_p(x))\,dx\right| \leqslant \varepsilon\right\}.$$

a) Montrer que F_N est fermé dans $\mathscr{B}\mathrm{or}$.

b) Montrer qu'il existe un $N_0 \geqslant 1$, un $A_0 \in \mathscr{B}\mathrm{or}$, et un $r > 0$ tels que :

$$\lambda(A\Delta A_0) \leqslant r \quad \Longrightarrow \quad \left|\int_A (f_n(x) - f_p(x))\,dx\right| \leqslant \varepsilon\,, \quad \forall n,p \geqslant N_0\,.$$

(*utiliser le Théorème de Baire*).

c) En utilisant les inclusions $(A_0\cup B)\Delta A_0 \subseteq B$ et $(A_0\cap B^c)\Delta A_0 \subseteq B$, en déduire que :

$$\lambda(B) \leqslant r \quad \Longrightarrow \quad \left|\int_B (f_n(x) - f_p(x))\,dx\right| \leqslant 2\varepsilon\,, \quad \forall n,p \geqslant N_0\,,$$

puis que :

$$\lambda(B) \leqslant r \quad \Longrightarrow \quad \int_B |f_n(x) - f_p(x)|\,dx \leqslant 4\varepsilon\,, \quad \forall n,p \geqslant N_0$$

(*considérer $B\cap\{f_n \leqslant f_p\}$ et $B\cap\{f_n > f_p\}$*).

4) En déduire qu'il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\lambda(B) \leqslant \delta \quad \Longrightarrow \quad \int_B |f_n(x)|\, dx \leqslant 5\,\varepsilon\,, \quad \forall n \geqslant N_0$$

(*on rappelle qu'il existe* $r_0 > 0$ *tel que* $\int_B |f_{N_0}(x)|\, dx \leqslant \varepsilon$ *lorsque* $\lambda(B) \leqslant r_0$).

5) a) Montrer que ν est une mesure réelle sur $[0,1]$, et qu'elle est absolument continue par rapport à λ (*utiliser la question précédente*).

b) Montrer qu'il existe $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\int_A f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)\, dx$, pour tout borélien A de $[0,1]$.

Remarque. Pour la conclusion de cet exercice, on renvoie à l'Exercice 15 du Chapitre VIII.

Exercice 5.

Si μ et ν sont deux mesures complexes sur $\mathbb{R}$, on définit leur convolution $\mu * \nu$ par :

$$(\mu * \nu)(A) = \iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(x+y)\, d\mu(x)\, d\nu(y)\,,$$

pour tout borélien A de $\mathbb{R}$. On *admettra* que $\mu * \nu$ est une mesure complexe (en fait, $\mu * \nu$ est la mesure-image, par l'application continue $(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mapsto x+y \in \mathbb{C}$, de la mesure-produit $\mu \otimes \nu$) et que l'on a $\mu * \nu = \nu * \mu$.

1) Soit λ la mesure de Lebesgue.

a) Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R})$; montrer que si $\mu = f.\lambda$ et $\nu = g.\lambda$, alors $\mu * \nu = (f * g).\lambda$.

b) Si $\mu \ll \lambda$, montrer que $\mu * \nu \ll \lambda$, et déterminer la densité de $\mu * \nu$ par rapport à celle de μ.

2) a) Montrer que pour toute partie mesurable A, on a $|(\mu * \nu)(A)| \leqslant (|\mu| * |\nu|)(A)$, et en déduire que $|\mu * \nu| \leqslant |\mu| * |\nu|$.

b) En déduire que $\|\mu * \nu\| \leqslant \|\mu\|\, \|\nu\|$.

c) En déduire que l'application $(\mu, \nu) \in \mathscr{M}(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}(\mathbb{R}) \mapsto \mu * \nu \in \mathscr{M}(\mathbb{R})$ est continue.

3) Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $\mu^{*n} = \mu * \cdots * \mu$ (n fois). Montrer que :

$$F_n = \{\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{R})\,;\ \mu^{*n} \ll \lambda\}$$

est une partie fermée de $\mathscr{M}(\mathbb{R})$.

4) Montrer que si $\mu, \nu \in F_n$, alors $\mu^{*k} * \nu^{*(2n-k)} \ll \lambda$, pour tout entier $k \in \{0, 1, \ldots, 2n\}$, et en déduire que $\mu - \nu \in F_{2n}$.

5) Soit X un sous-espace vectoriel fermé de $\mathscr{M}(\mathbb{R})$ stable par convolution. On suppose que pour toute $\mu \in X$, il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $\mu^{*n} \ll \lambda$. Montrer qu'il existe un entier $N_0 \geqslant 1$ tel que $\mu^{*N_0} \ll \lambda$ pour toute $\mu \in X$ (*on montrera que si* F_N *est d'intérieur non vide, alors* F_{2N} *contient une boule de rayon non nul* centrée en 0).

Exercice 6.

1) Soit $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction *impaire* de période 1 définie par $h(t) = t$ pour $0 \leqslant t \leqslant 1/4$ et $h(t) = 1/2 - t$ pour $1/4 \leqslant t \leqslant 1/2$.

a) Calculer les coefficients de Fourier $c_n = \widehat{h}(n)$ de h.

b) Montrer que la mesure $\nu = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\delta_n$ (où δ_n est la mesure de Dirac en n) est bornée et que $h(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{2\pi itx}\, d\nu(x)$.

2) Soit μ une mesure complexe sur $[-1/4, 1/4]$, et pour $t \in \mathbb{R}$:

$$f(t) = \int_{-1/4}^{1/4} \mathrm{e}^{-2\pi it\theta}\, d\mu(\theta).$$

a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(t) = -2\pi i \int_{\mathbb{R}} f(t-x)\, d\nu(x)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

b) En appliquant le a) au cas particulier de $\mu_0 = \frac{1}{2i}(\delta_{1/4} - \delta_{-1/4})$, en déduire que $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{4}$.

c) En déduire que $|f'(t)| \leqslant \frac{\pi}{2}\, \|f\|_\infty$ pour tout $t \in [-1/4, 1/4]$.

Exercice 7 (*Théorème de Rajchman*).

Soit μ une mesure complexe sur $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$\widehat{\mu}(n) = \int_{\mathbb{T}} \mathrm{e}^{-2\pi int}\, d\mu(t)\,.$$

On suppose que $\lim_{n\to+\infty} \widehat{\mu}(n) = 0$, et l'on veut montrer que $\lim_{n\to-\infty} \widehat{\mu}(n) = 0$ (*Théorème de Rajchman*).

1) On suppose que l'ensemble $\mathscr{P}$ des polynômes trigonométriques n'est pas dense dans $L^1(|\mu|)$.

a) Montrer qu'il existe $\varphi \in L^\infty(|\mu|)$ non nul tel que pour tout $P \in \mathscr{P}$, on ait $\int_{\mathbb{T}} P\varphi\, d|\mu| = 0$ (*on aura besoin d'utiliser le Théorème VI.2.7 du Chapitre VI*).

b) En déduire que $\int_{\mathbb{T}} f\varphi\, d|\mu| = 0$ pour toute $f \in \mathscr{C}(\mathbb{T})$.

c) Qu'en conclut-on ? (*approcher $\overline{\varphi}$ dans $L^1(|\mu|)$ par des fonctions continues*).

2) Montrer que pour toute $f \in L^1(|\mu|)$, on a $\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{T}} f(t)\, \mathrm{e}^{-2\pi int}\, d\mu(t) = 0$ (*on raisonnera d'abord avec des polynômes trigonométriques*).

3) En déduire que $\lim_{n\to+\infty} \widehat{|\mu|}(n) = 0$ (*utiliser la décomposition polaire d'une mesure*).

4) Conclure.

Exercice 8 (*Théorème de Wiener*).

Pour toute mesure complexe μ sur $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, on pose $\widehat{\mu}(n) = \int_{\mathbb{T}} \mathrm{e}^{-2\pi int}\, d\mu(t)$, $n \in \mathbb{Z}$.

1) Montrer que $\lim_{p\to\infty} \frac{1}{2p+1} \sum_{|n|\leqslant p} \widehat{\mu}(n)\, \mathrm{e}^{2\pi int} = \mu(\{t\})$ pour tout $t \in \mathbb{T}$.

2) Si μ et ν sont deux mesures complexes sur $\mathbb{T}$, on définit $\mu * \nu$ comme la mesure-image de $\mu\otimes\nu$ par l'application $(t,x) \mapsto t+x$. Montrer que $\widehat{\mu * \nu}(n) = \widehat{\mu}(n)\, \widehat{\nu}(n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

3) a) Montrer que $A = \{a \in \mathbb{T}\,;\ \mu(\{a\}) \neq 0\}$ est dénombrable.

b) Montrer que $\lim_{p\to\infty} \frac{1}{2p+1} \sum_{|n|\leqslant p} |\widehat{\mu}(n)|^2 = \sum_{t\in\mathbb{T}} |\mu(\{t\})|^2$ (*utiliser la mesure $\mu * \widetilde{\mu}$, où $\widetilde{\mu}(B) = \overline{\mu(-B)}$ pour tout borélien B*).

Exercice 9 (*Points extrémaux de la boule unité de l'espace des mesures*).

Soit K un espace métrique compact. On considère l'espace $\mathscr{M}(K)$ des mesures réelles (pour simplifier) sur K.

1) Montrer que pour tout $x \in K$, la mesure de Dirac δ_x en x et $-\delta_x$ sont des points extrémaux (voir l'Exercice 24 du Chapitre I) de la boule unité de $\mathscr{M}(K)$ (*si $\mu \neq \delta_x$, montrer qu'il existe un compact $K_0 \subseteq K$ ne contenant pas x et tel que $|\mu|(K_0) > 0$; considérer alors $f \in \mathscr{C}(K)$ telle que $f(x) = 1$ et s'annulant sur K_0*).

2) Inversement, soit $\mu \in \mathscr{M}(K)$ extrémale dans la boule unité de $\mathscr{M}(K)$. Montrer que pour tout borélien A de K, on a $|\mu|(A) = 0$ ou 1. En déduire qu'il existe une suite de boules fermées B_n de rayon $1/n$ telle que $|\mu|(B_1 \cap \ldots \cap B_n) = 1$ pour tout $n \geqslant 1$. Conclure.

Exercice 10 (*Espérance conditionnelle*).

Soit $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $\mathfrak{B}$ une sous-tribu de $\mathfrak{A}$. On rappelle qu'une *variable aléatoire réelle* (*v.a.r.*) est une application $\mathfrak{A}$-mesurable $X \colon \Omega \to \mathbb{R}$.

1) Pour toute *v.a.r.* $X \in L^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$, on définit $\nu_X \colon \mathfrak{B} \to \mathbb{R}$ en posant :

$$\nu_X(B) = \int_B X(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega)\,, \quad \forall B \in \mathfrak{B}\,.$$

a) Montrer que ν est une mesure réelle sur $(\Omega, \mathfrak{B})$.

b) Montrer que pour toute $X \in L^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$, il existe une unique $Y \in L^1(\Omega, \mathfrak{B}, \mathbb{P})$ telle que :

$$\int_B X(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega) = \int_B Y(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega)\,, \quad \forall B \in \mathfrak{B}\,.$$

On notera $Y = \mathbb{E}^{\mathfrak{B}}(X)$.

c) Montrer que l'application $\mathbb{E}^{\mathfrak{B}} \colon L^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}) \to L^1(\Omega, \mathfrak{B}, \mathbb{P})$ est linéaire positive (*considérer l'ensemble $B = \{\omega \in \Omega\,;\ [\mathbb{E}^{\mathfrak{B}}(X)](\omega) < 0\}$*).

d) En déduire que pour toute $X \in L^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$, on a $|\mathbb{E}^{\mathfrak{B}}(X)| \leqslant \mathbb{E}^{\mathfrak{B}}(|X|)$ presque sûrement (*i.e.* $\mathbb{P}$-presque partout).

e) Montrer que pour toute $Z \in L^\infty(\Omega, \mathfrak{B}, \mathbb{P})$, on a $\mathbb{E}^{\mathfrak{B}}(ZX) = Z\,\mathbb{E}^{\mathfrak{B}}(X)$.

2) a) Montrer que si $X \in L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, alors $\mathbb{E}^{\mathfrak{B}}(X) \in L^p(\Omega, \mathfrak{B}, \mathbb{P})$.

b) Expliquer pourquoi on peut identifier $L^p(\Omega, \mathfrak{B}, \mathbb{P})$ à un sous-espace fermé de $L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ (*il y a une difficulté cachée*).

c) En faisant cette identification, montrer que $\mathbb{E}^{\mathfrak{B}}$ définit une projection de $L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ sur $L^p(\Omega, \mathfrak{B}, \mathbb{P})$ et que $\|\mathbb{E}^{\mathfrak{B}}\| = 1$.

d) Montrer que $\mathbb{E}^{\mathfrak{B}}$ est la projection orthogonale de $L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ sur $L^2(\Omega, \mathfrak{B}, \mathbb{P})$.

3) Dans le cas où la tribu $\mathfrak{B}$ est engendrée par une partition dénombrable de parties $B_n \in \mathfrak{A}$, avec $\mathbb{P}(B_n) > 0$, $n \geqslant 1$, donner l'expression de $\mathbb{E}^{\mathfrak{B}}(X)$ pour $X \in L^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$. En déduire que, pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$, ℓ_p est isométrique à un sous-espace de $L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ complémenté par une projection de norme 1.

4) Soit $(\mathfrak{B}_n)_{n\geqslant 1}$ une suite croissante de sous-tribus de $\mathfrak{A}$ telle que $\mathfrak{B}_\infty = \bigcup_{n\geqslant 1} \mathfrak{B}_n$ engendre $\mathfrak{A}$.

a) Montrer que si ν est une mesure réelle sur $(\Omega, \mathfrak{A})$ telle que $\nu(B) = 0$ pour tout $B \in \mathfrak{B}_\infty$, alors $\nu = 0$. En déduire que l'espace $V = \bigcup_{n\geqslant 1} L^1(\Omega, \mathfrak{B}_n, \mathbb{P})$ est dense dans $L^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ (*on utilisera le Corollaire VI.2.9 du Chapitre VI*).

b) Montrer que si $X \in L^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$, alors $\mathbb{E}^{\mathfrak{B}_n}(X) \xrightarrow[n\to\infty]{} X$, en norme L^1.

Chapitre VI

LE THÉORÈME DE HAHN-BANACH ET SES CONSÉQUENCES

VI.1. Forme analytique du Théorème de Hahn-Banach

La forme analytique du Théorème de Hahn-Banach est un théorème permettant de prolonger des formes linéaires définies sur un sous-espace vectoriel, *en gardant un contrôle* sur le prolongement quand il y en avait un sur la forme de départ ; en particulier si l'espace est normé et la forme linéaire est continue, on peut la prolonger en une forme linéaire continue sur tout l'espace, et en gardant la même norme.

Théorème VI.1.1 (Théorème de Hahn-Banach, *forme analytique*).
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et soit p une semi-norme sur E.

Soit G un sous-espace vectoriel de E et $\varphi_0 \colon G \to \mathbb{K}$ une forme linéaire telle que :

$$\boxed{|\varphi_0(x)| \leqslant p(x)\,, \quad \forall x \in G}\,.$$

Alors il existe une forme linéaire $\varphi = \widetilde{\varphi}_0 \colon E \to \mathbb{K}$ **prolongeant** *φ_0 et telle que :*

$$\boxed{|\varphi(x)| \leqslant p(x)\,, \quad \forall x \in E}\,.$$

On aura en fait besoin d'une version un peu plus forte. Pour cela, on dira :

Définition VI.1.2. *On dit que $p \colon E \to \mathbb{R}_+$ est une* sous-norme *si, pour tous $x, y \in E$:*

1) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$*, pour tout λ* **positif** *ou nul ;*
2) $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$.

On a alors :

Théorème VI.1.3 (Théorème de Hahn-Banach, *forme analytique forte*)**.** *Soit E un espace vectoriel* **réel** *et p une sous-norme sur E. Soit G un sous-espace vectoriel de E et $\varphi_0 \colon G \to \mathbb{R}$ une forme linéaire vérifiant :*

$$\boxed{\varphi_0(x) \leqslant p(x)\,, \quad \forall x \in G}\,.$$

Alors il existe une forme linéaire $\varphi = \widetilde{\varphi}_0 \colon E \to \mathbb{R}$ **prolongeant** *φ_0 et vérifiant encore :*

$$\boxed{\varphi(x) \leqslant p(x)\,, \quad \forall x \in E}\,.$$

Il faut noter que dans cette version, l'inégalité concerne $\varphi_0(x)$ et $\varphi(x)$, et pas leur valeur absolue.

Toutefois, lorsque p n'est pas seulement une sous-norme, mais une semi-norme, on a $p(-x) = p(x)$; donc, lorsque l'espace E est réel, si l'on a :

$$\varphi(x) \leqslant p(x)\,, \quad \forall x \in E,$$

on a en fait :

$$|\varphi(x)| \leqslant p(x)\,, \quad \forall x \in E.$$

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, le Théorème VI.1.1 découle donc immédiatement du Théorème VI.1.3.

La preuve utilise le :

Lemme de Zorn. *Tout ensemble ordonné inductif, non vide, possède un élément maximal.*

Rappelons que l'ordre est *inductif* si toute partie totalement ordonnée possède un majorant.

Preuve du Théorème VI.1.3. Soit :

$$\mathfrak{P} = \left\{\psi \colon H = D_\psi \to \mathbb{R}\,;\ \begin{array}{c} H \text{ sous-espace vectoriel de } E \text{ et } G \subseteq H \\ \psi \text{ linéaire, } \psi_{|G} = \varphi_0 \text{ et } \psi(x) \leqslant p(x), \forall x \in H \end{array}\right\}.$$

On munit $\mathfrak{P}$ de la relation d'ordre définie par :

$$\psi_1 \prec \psi_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \big(D_{\psi_1} \subseteq D_{\psi_2} \text{ et } \psi_2 \text{ prolonge } \psi_1\big).$$

Alors :
a) $\mathfrak{P} \neq \emptyset$ car $\varphi_0 \in \mathfrak{P}$;
b) $\mathfrak{P}$ est inductif car si $\mathcal{Q}$ est une partie totalement ordonnée de $\mathfrak{P}$, on pose :

$$H_m = \bigcup_{\psi \in \mathcal{Q}} D_\psi$$

et :

$$\psi_m(x) = \psi(x) \text{ si } \psi \in \mathcal{Q} \text{ et } x \in D_\psi.$$

Comme $\mathcal{Q}$ est totalement ordonné, H_m est un sous-espace vectoriel de E ; de plus, $\psi_m : H \to \mathbb{R}$ est bien définie et est une forme linéaire sur H_m. Visiblement, ψ_m est un majorant de $\mathcal{Q}$.

Soit alors φ un élément maximal de $\mathfrak{P}$.

Il reste à voir que $D = D_\varphi$ est égal à E tout entier.

Supposons que non : $D \neq E$. On peut alors choisir un $x_0 \notin D$.
On va chercher $\alpha \in \mathbb{R}$ de sorte que, si l'on pose :

$$\begin{cases} H = D + \mathbb{R}x_0 \\ \psi(x + tx_0) = \varphi(x) + t\alpha\,, \quad x \in D\,,\ t \in \mathbb{R}\,, \end{cases}$$

alors $\psi \in \mathfrak{P}$. Cet élément ψ serait un majorant de φ, avec $\psi \neq \varphi$ (puisque $D_\psi = H$ contient x_0 qui n'est pas dans $D = D_\varphi$) : cela contredirait la maximalité de φ.
Cette contradiction montre que $D = E$ et donc le Théorème VI.1.3.

Pour obtenir cet α, remarquons que $\psi \in \mathfrak{P}$ si et seulement si :

$$\varphi(x) + t\alpha \leqslant p(x + tx_0)\,, \quad \forall x \in D\,,\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Mais, pour avoir cela, il suffit de l'avoir pour $t = 1$ et $t = -1$:

$$\begin{cases} \varphi(x) - \alpha \leqslant p(x - x_0) \\ \varphi(x) + \alpha \leqslant p(x + x_0) \end{cases} \quad \forall x \in D.$$

En effet, on aura alors :

$$\varphi(x) + t\alpha = \begin{cases} t\Big[\varphi\Big(\dfrac{x}{t}\Big) + \alpha\Big] \leqslant tp\Big(\dfrac{x}{t} + x_0\Big) = p(x + tx_0)\,, \quad \text{si } t > 0 \\[2ex] (-t)\Big[\varphi\Big(-\dfrac{x}{t}\Big) - \alpha\Big] \leqslant (-t)p\Big(-\dfrac{x}{t} - x_0\Big) = p(x + tx_0)\,, \quad \text{si } t < 0 \end{cases}$$

(et si $t = 0$: $\varphi(x) \leqslant p(x)$ car $\varphi \in \mathfrak{P}$).

Il suffit donc de pouvoir choisir α tel que :

$$\sup_{x \in D}\{\varphi(x) - p(x - x_0)\} \leqslant \alpha \leqslant \inf_{y \in D}\{p(y + x_0) - \varphi(y)\}\,,$$

ce qui est possible car :

$$\varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(x + y) \leqslant p(x + y) \leqslant p(x - x_0) + p(y + x_0)$$

pour tous $x, y \in D$.

Le Théorème VI.1.3 est donc prouvé. $\square$

Preuve du Théorème VI.1.1 dans le cas complexe. On utilise le lemme suivant, dont la preuve est laissée en exercice.

Lemme VI.1.4. *Soit E un espace vectoriel complexe, et $E_{\mathbb{R}}$ l'espace vectoriel réel sous-jacent.*

a) Si $v\colon E \to \mathbb{C}$ est une forme linéaire complexe, alors $u = \operatorname{Re} v\colon E_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire réelle et :

$$v(x) = u(x) - iu(ix)\,,\ \forall x \in E. \tag{$*$}$$

b) Inversement, si $u\colon E_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire réelle, alors la formule $(*)$ définit une forme linéaire complexe $v\colon E \to \mathbb{C}$.

Appliquons alors le Théorème VI.1.1 à $E_{\mathbb{R}}$ pour obtenir $u\colon E_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ prolongeant $\operatorname{Re}\varphi_0$ et telle que $|u(x)| \leqslant p(x)$ pour tout $x \in E$. La forme linéaire complexe v associée prolonge alors φ_0, grâce à la formule $(*)$. De plus, si $\theta = \theta_x \in \mathbb{R}$ est tel que $|v(x)| = \mathrm{e}^{-i\theta}v(x)$, on a :

$$|v(x)| = \mathrm{e}^{-i\theta}v(x) = v\big(\mathrm{e}^{-i\theta}x\big) = u\big(\mathrm{e}^{-i\theta}x\big),$$

car $v\big(\mathrm{e}^{-i\theta}x\big) \in \mathbb{R}$, et donc :

$$|v(x)| = u\big(\mathrm{e}^{-i\theta}x\big) \leqslant p\big(\mathrm{e}^{-i\theta}x\big) = p(x). \qquad \square$$

VI.2. Quelques conséquences de la forme analytique du Théorème de Hahn-Banach

Nous allons donner une série de conséquences du Théorème de Hahn-Banach, toutes **très** importantes.

Dans tout ce qui suit, E sera désormais un *espace normé*.

Théorème VI.2.1. *Toute forme linéaire continue sur un sous-espace G de E se prolonge en une forme linéaire continue sur E tout entier, avec la même norme.*

Preuve. Soit $\varphi_0 \in G^*$ et $C = \|\varphi_0\|_{G^*}$. Il suffit d'appliquer le Théorème de Hahn-Banach avec la semi-norme $p(x) = C\,\|x\|_E$. $\square$

Théorème VI.2.2. *Pour tout $x \in E$, non nul, il existe $\varphi \in E^*$ telle que $\|\varphi\| = 1$ et $\varphi(x) = \|x\|$.*

Preuve. Il suffit de prendre la norme pour p, $G = \mathbb{K}x$ et $\varphi_0(\lambda x) = \|x\|\,\lambda$. $\square$

Corollaire VI.2.3. *Pour $A \subseteq E$, on pose $A^\perp = \{\varphi \in E^* \,;\ \langle \varphi, x\rangle = 0, \forall x \in A\}$. Alors $A^\perp = E^*$ si et seulement si $A = \{0\}$.*

Corollaire VI.2.4. *Pour tout espace vectoriel normé E, le dual E^* sépare les points de E.*

Preuve. Si $x_1 \neq x_2$, alors $x = x_1 - x_2 \neq 0$; il existe alors $\varphi \in E^*$ telle que $\varphi(x) = \|x\| \neq 0$; donc $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$. □

Remarque. Ce n'est pas le cas pour des espaces plus généraux : par exemple, l'espace $L^{1/2}(0,1)$, muni de la distance :

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)|^{1/2}\, dt$$

est un espace vectoriel topologique n'admettant aucune forme linéaire continue non nulle (*Exercice 15*).

Corollaire VI.2.5. *On a :*

$$\boxed{\|x\| = \sup_{\|\varphi\|_{E^*} \leqslant 1} |\varphi(x)|}\,.$$

C'est une conséquence immédiate du Théorème VI.2.2. Notons que la borne supérieure est atteinte. C'est à comparer avec l'égalité :

$$\|\varphi\|_{E^*} = \sup_{\|x\|_E \leqslant 1} |\varphi(x)|\,,$$

qui est une *définition*, et dans laquelle la borne supérieure n'est pas atteinte en général.

Corollaire VI.2.6. *L'application canonique :*

$$\begin{array}{rccc} i\colon & E & \longrightarrow & E^{**} \\ & x & \longmapsto & \widetilde{x} \end{array}$$

où $\widetilde{x}(\varphi) = \varphi(x)$, $\forall \varphi \in E^*$, est une isométrie.

Cette application i est donc en particulier *injective.* Par contre, elle n'est pas surjective en général ; nous verrons un peu plus tard (Chapitre VIII) quand elle l'est.

Preuve. On a :

$$\|\widetilde{x}\|_{E^{**}} \overset{\text{déf}}{=} \sup_{\|\varphi\|_{E^*} \leqslant 1} |\varphi(x)| \overset{\text{Corol. VI.2.5}}{=} \|x\|. \qquad \square$$

Théorème VI.2.7. *Si F est un sous-espace vectoriel fermé de E et $x_0 \notin F$, il existe $\varphi \in E^*$ telle que $\varphi(x_0) = 1$ et $\varphi(x) = 0$, $\forall x \in F$ (c'est-à-dire que $F \subseteq \ker \varphi$).*

Preuve. Prenons $G = F + \mathbb{K}\, x_0$ et définissons une forme linéaire $\varphi_0 \colon G \to \mathbb{K}$ par $\varphi_0(x + \lambda x_0) = \lambda$, pour $x \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a $\varphi_0(x) = 0$ pour tout $x \in F$. Comme F est fermé, on a $\delta = \operatorname{dist}(x_0, F) > 0$; donc :

$$|\varphi_0(x + \lambda x_0)| = |\lambda| = \frac{1}{\delta} \operatorname{dist}(\lambda x_0, F) \leqslant \frac{1}{\delta} \|\lambda x_0 + x\| ,$$

de sorte que l'on peut prolonger φ_0 en $\varphi \in E^*$. □

Corollaire VI.2.8. *Tout sous-espace vectoriel fermé d'un e.v.n. est l'intersection des hyperplans fermés le contenant.*

Remarques. 1) Nous verrons un peu plus loin une généralisation de ce résultat (Théorème de Minkowski).

2) Un hyperplan H est fermé si et seulement si $H = \ker \varphi$, avec φ continue (c'est-à-dire $\varphi \in E^*$), non nulle (*Exercice 1*).

3) Si E est complexe, toute $\varphi \in E^*$ s'écrit :

$$\varphi(x) = u(x) - iu(ix) ,$$

où $u = \operatorname{Re} \varphi$. Il en résulte que l'hyperplan (si φ n'est pas nulle) complexe :

$$\ker \varphi = (\ker u) \cap \big[i(\ker u) \big]$$

est l'intersection de deux hyperplans réels. Remarquons aussi qu'il est de codimension 1 dans E, et donc de codimension 2 dans $E_{\mathbb{R}}$.

Le corollaire immédiat suivant du Théorème VI.2.7 sert très souvent.

Corollaire VI.2.9. *Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors $x_0 \in \overline{F}$ si et seulement si, pour toute $\varphi \in E^*$, on a :*

$$\varphi(x) = 0 , \ \forall x \in F \quad \Longrightarrow \quad \varphi(x_0) = 0 .$$

En particulier, F est dense dans E si et seulement si, pour toute $\varphi \in E^*$:

$$\varphi(x) = 0 , \ \forall x \in F \quad \Longrightarrow \quad \varphi = 0 .$$

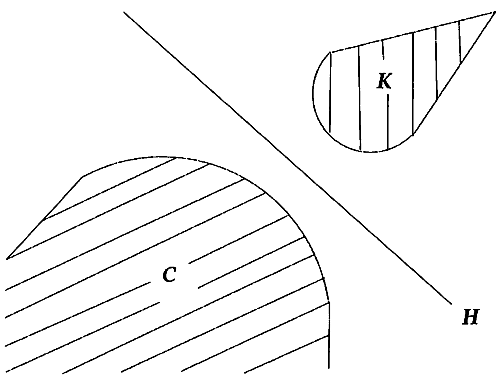
La condition "$\varphi(x) = 0$, $\forall x \in F$" signifie que $\varphi \in F^{\perp}$ (voir Corollaire VI.2.3) ; la seconde assertion est donc que F est dense dans E si et seulement si $F^{\perp} = \{0\}$.

VI.3. La forme géométrique du Théorème de Hahn-Banach

Il y a plusieurs énoncés géométriques, avec différentes hypothèses. Bien que certains aient des versions "*complexes*" (pour les espaces vectoriels complexes), c'est essentiellement un théorème "*réel*". Il permet de *séparer* des convexes (compacts, fermés, ouverts, ...) disjoints par des hyperplans affines fermés.

Théorème VI.3.1 (Théorème de Hahn-Banach, *forme géométrique*).
Soit E un espace vectoriel normé. Soit C et K deux parties non vides de E disjointes et telles que C soit **convexe** *et* **fermée**, *et K soit* **convexe** *et* **compacte**.
Alors, il existe une forme linéaire continue $\varphi \in E^*$ telle que :

$$\boxed{\sup_{x \in C} \operatorname{Re} \varphi(x) < \inf_{y \in K} \operatorname{Re} \varphi(y)}\,.$$



Remarque. On utilise très souvent ce théorème lorsque $K = \{x_0\}$ est réduit à un point.

Remarque. Si $\alpha \in \mathbb{R}$ est tel que :

$$\sup_{x \in C} \operatorname{Re} \varphi(x) < \alpha < \inf_{y \in K} \operatorname{Re} \varphi(y)\,,$$

on dit que l'*hyperplan* (affine, réel) fermé :

$$H_\alpha = \{x \in E\,;\ \operatorname{Re} \varphi(x) = \alpha\}$$

sépare, *strictement*, C et K.

Lorsque E est un espace réel, on dit qu'une partie de E est un *demi-espace fermé* s'il existe $\varphi \in E^*$, non nulle, et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que cette partie s'écrive :

$$H_\alpha^+ = \{x \in E\,;\ \varphi(x) \geqslant \alpha\}.$$

On notera que le signe $\geqslant$ peut être remplacé par $\leqslant$:

$$H_\alpha^+ = \{x \in E\,;\ \big(-\varphi(x)\big) \leqslant (-\alpha)\}.$$

Lorsque l'espace est complexe, on considère sa structure réelle sous-jacente, et l'on remplace donc $\varphi(x)$ par $\operatorname{Re}\varphi(x)$, ou par $\operatorname{Im}\varphi(x)$.

Un corollaire immédiat du théorème est l'important résultat suivant :

Théorème VI.3.2 (Théorème de Minkowski).
Toute partie **convexe** *et* **fermée** *d'un espace vectoriel normé réel est égale à l'***intersection** *des* **demi-espaces fermés** *qui le contiennent.*

Pour prouver le Théorème VI.3.1, on peut d'abord remarquer que l'énoncé ne fait intervenir que $\operatorname{Re}\varphi$; on peut supposer que l'espace E est réel.

On aura en fait besoin d'une autre forme géométrique.

Théorème VI.3.3. *Soit E un espace vectoriel topologique* **réel**. *Soit C et Ω deux parties non vides disjointes de E telles que C soit convexe et fermée et Ω soit convexe et ouverte.*

Alors, il existe une forme linéaire continue non nulle $\varphi \in E^*$ telle que :

$$\forall x \in C\,,\ \forall y \in \Omega\ : \qquad \varphi(x) < \varphi(y).$$

En particulier :

$$S = \sup_{x\in C} \varphi(x) \leqslant \inf_{y\in\Omega} \varphi(y) = I.$$

Remarque. En particulier, ce théorème montre que l'existence de parties convexes ouvertes non vides et différentes de l'espace tout entier "force" l'existence de formes linéaires continues non nulles. C'est pourquoi dans les espaces vectoriels topologiques *localement convexes* (possédant une base de voisinages de 0 formée de convexes), il y a *beaucoup* de formes linéaires continues : elles séparent les points de l'espace (s'il est séparé).

Le fait que $L^{1/2}(0,1)$ ne possède aucune forme linéaire continue non nulle entraîne que cet espace ne possède aucun convexe ouvert non vide, à l'exclusion de lui-même.

Preuve de la forme géométrique du Théorème de Hahn-Banach. L'ensemble K étant compact et C étant fermé et disjoint de K, on a :

$$d = \operatorname{dist}(K, C) = \inf_{y\in K} \operatorname{dist}(y, C) > 0.$$

Si l'on pose :

$$\Omega = \{x \in E\,;\ \operatorname{dist}(x, K) < d/2\}\,,$$

alors Ω est convexe (car K l'est : $\Omega = K + \overset{\circ}{B}(0, d/2)$), ouvert, non vide (il contient K), et disjoint de C. Soit φ la forme linéaire continue non nulle donnée par le Théorème VI.3.3. On a :

$$\begin{aligned} y \in K \text{ et } \|z\| < 1 \Longrightarrow \quad & y + \varepsilon(d/2)z \in \Omega \quad (\varepsilon = \pm 1) \\ \Longrightarrow \quad & \varphi(y) = \varphi\big[y + \varepsilon(d/2)z\big] - \varepsilon(d/2)\,\varphi(z) \geqslant I - \varepsilon(d/2)\,\varphi(z) \\ \Longrightarrow \quad & \varphi(y) \geqslant I + (d/2)\,|\varphi(z)|\,; \end{aligned}$$

donc, pour tout $y \in K$, on a, en prenant la borne supérieure pour tous les z de norme < 1 :

$$\varphi(y) \geqslant I + (d/2)\,\|\varphi\|.$$

Alors :

$$\inf_{y \in K} \varphi(y) \geqslant I + (d/2)\,\|\varphi\| > I\,,$$

puisque φ n'est pas nulle. Cela donne le résultat puisque $I \geqslant S$. □

Preuve du Théorème VI.3.3. Fixons $x_0 \in C$ et $y_0 \in \Omega$, et posons :

$$\Gamma = (C - x_0) - (\Omega - y_0)\,,$$

c'est-à-dire que $\Gamma = \{(x - x_0) - (y - y_0)\,;\; x \in C \text{ et } y \in \Omega\}$). C'est un convexe, et il est ouvert :

$$\Gamma = \bigcup_{x \in C} (-\Omega + y_0 - x_0 + x).$$

De plus $0 \in \Gamma$.

Utilisons alors le lemme suivant, dont la preuve est laissée en exercice (voir Chapitre I, Exercice 17).

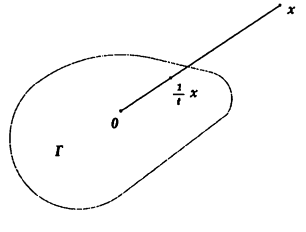
Lemme VI.3.4. *Soit E un espace vectoriel topologique, et soit Γ une partie de E convexe ouverte et contenant 0. Si l'on pose :*

$$p_\Gamma(x) = \inf\{t > 0\,;\; x \in t\Gamma\}\,,$$

alors p_Γ est une sous-norme sur E, appelée la jauge, *ou* fonctionnelle de Minkowski, *de Γ. De plus :*

a) $\Gamma = \{x \in E\,;\; p_\Gamma(x) < 1\}$ *;*

b) p_Γ *est continue.*



On notera que $p_\Gamma(x) < +\infty$ car, Γ étant un voisinage de 0, on a $(1/\lambda)x \in \Gamma$ pour λ assez grand ; d'autre part, la propriété *b*) vient de ce que, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\varepsilon\Gamma = p_\Gamma^{-1}([0,\varepsilon[)$, qui donne la continuité de p_Γ en 0, d'où la continuité partout puisque $|p_\Gamma(x) - p_\Gamma(y)| \leqslant p_\Gamma(x-y)$.

Ecrivons maintenant $z_0 = y_0 - x_0$, et considérons le sous-espace vectoriel :

$$G = \mathbb{R}\, z_0$$

et la forme linéaire $\psi = \varphi_0$ sur G définie par :

$$\psi(tz_0) = t\,, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Alors $z_0 \notin \Gamma$: comme $z_0 = y_0 - x_0$, si l'on avait $z_0 = (x - x_0) - (y - y_0)$ avec $x \in C$ et $y \in \Omega$, on aurait $x = y$, et C et Ω ne seraient pas disjoints. Par conséquent :

$$p_\Gamma(z_0) \geqslant 1.$$

Il en résulte que l'on a :

$$\begin{cases} \text{pour } t > 0 \ : & \psi(tz_0) = t \leqslant t\, p_\Gamma(z_0) = p_\Gamma(tz_0)\,, \\ \text{pour } t \leqslant 0 \ : & \psi(tz_0) = t \leqslant 0 \leqslant p_\Gamma(tz_0)\,. \end{cases}$$

On peut alors appliquer le Théorème VI.1.3 : il existe une forme linéaire $\varphi\colon E \to \mathbb{R}$ prolongeant ψ et vérifiant :

$$\varphi(z) \leqslant p_\Gamma(z)\,, \quad \forall z \in E. \tag{1}$$

En particulier :

$$z \in \Gamma \quad \Longrightarrow \quad p_\Gamma(z) < 1 \quad \Longrightarrow \quad \varphi(z) < 1.$$

Alors, pour tout $x \in C$ et tout $y \in \Omega$, on a, puisque $z = x - y + z_0 \in \Gamma$ et puisque $\varphi(z_0) = \psi(z_0) = 1$:

$$\varphi(x) - \varphi(y) + \varphi(z_0) = \varphi(x - y + z_0) < 1,$$

et donc :

$$\varphi(x) < \varphi(y).$$

Il ne reste plus qu'à remarquer que φ est continue car, grâce à (1) :

$$|\varphi(z)| = \max\{\varphi(z), -\varphi(z)\} \leqslant \max\{p_\Gamma(z), p_\Gamma(-z)\}\,,$$

et la continuité de p_Γ, puis finalement que φ n'est pas nulle, puisque $\varphi(z_0) = \psi(z_0) = 1$. □

Pour terminer, voici une autre forme géométrique du Théorème de Hahn-Banach, qui sera utile au Chapitre VIII.

Rappelons d'abord qu'un espace vectoriel topologique E est localement convexe si 0 (et donc tout $x \in E$) possède une base de voisinages convexes.

Lemme VI.3.5. *Si E est localement convexe, tout voisinage de 0 contient un voisinage de 0 convexe et ouvert.*

Preuve. Il suffit de montrer que si $A \subseteq E$ est convexe, alors $\mathring{A}$ est convexe, et pour cela, de montrer que $a \in \mathring{A}$ et $b \in \overline{A}$ impliquent $[a, b[\subseteq \mathring{A}$, ce qui est facile à vérifier et laissé en exercice. □

On a alors :

Théorème VI.3.6. *Soit E un e.v.t. localement convexe réel, A une partie convexe fermée non vide et $x_0 \notin A$. Alors, il existe une forme linéaire continue φ sur E telle que :*

$$\inf_{x \in A} \varphi(x) > \varphi(x_0).$$

Preuve. Le complémentaire A^c de A est un ouvert contenant x_0 ; il existe donc un voisinage convexe et ouvert V de 0 tel que $(x_0 + V) \cap A = \emptyset$. On peut de plus prendre V symétrique ($V = -V$), en le remplaçant au besoin par $V \cap (-V)$.

Soit $\Omega = A - V$; Ω est convexe, et il est ouvert car :

$$\Omega = \bigcup_{a \in A} (a - V).$$

Mais $x_0 \notin \Omega$ (car $(x_0 + V) \cap A = \emptyset$) ; donc $\overline{\{x_0\}} \cap \Omega = \emptyset$. Comme $\overline{\{x_0\}}$ est fermé, et est de plus convexe, on peut appliquer le Théorème VI.3.3 : il existe $\varphi \in E^*$, non nulle, telle que :

$$\varphi(x_0) \leqslant \inf_{z \in \Omega} \varphi(z) = \inf_{\substack{x \in A \\ y \in V}} \varphi(x - y) = \inf_{x \in A} \varphi(x) - \sup_{y \in V} \varphi(y) < \inf_{x \in A} \varphi(x),$$

car si l'on avait $\sup_{y \in V} \varphi(y) \leqslant 0$, on aurait aussi $\sup_{y \in V} \varphi(y) \geqslant 0$, puisque V est symétrique, et donc $\sup_{y \in V} |\varphi(y)| = 0$; mais cela entraînerait $\varphi = 0$, parce que V est un voisinage de 0. □

Corollaire VI.3.7. *Soit E un e.v.t. localement convexe réel, F un sous-espace vectoriel fermé et $x_0 \notin F$. Alors, il existe une forme linéaire continue φ sur E s'annulant sur F et telle que $\varphi(x_0) = 1$.*

Preuve. Le sous-espace F est en particulier un convexe fermé non vide de E ; donc le théorème précédent dit qu'il existe une forme linéaire continue ψ sur E telle que $\inf_{x \in F} \psi(x) > \psi(x_0)$. Mais pour $x \in F$, on a $tx \in F$ pour tout $t \in \mathbb{R}$; donc $\psi(x) = 0$ (car s'il n'était pas nul, on obtiendrait toutes les valeurs réelles en le multipliant par $t \in \mathbb{R}$; on aurait par conséquent $\inf_{x \in F} \psi(x) = -\infty$). Il suffit donc de prendre $\varphi = \psi / \psi(x_0)$. □

On a aussi l'amélioration suivante, qui généralise le Théorème VI.3.1.

Théorème VI.3.8. *Soit E un e.v.t. localement convexe réel, A une partie convexe fermée non vide et K une partie convexe compacte non vide disjointe de A. Alors, il existe une forme linéaire continue φ sur E telle que :*

$$\inf_{y \in A} \varphi(y) > \sup_{x \in K} \varphi(x).$$

Preuve. Comme A et K sont disjoints, l'ouvert A^c est, pour tout $x \in K$, un voisinage de x. Il existe donc un voisinage V_x de 0, que l'on peut prendre convexe et ouvert, tel que $x + V_x \subseteq A^c$; autrement dit, $(x + V_x) \cap A = \emptyset$.

La continuité de l'application $(u, v) \in E \times E \mapsto u + v \in E$ permet de trouver un voisinage W_x de 0, que l'on peut prendre convexe et ouvert, tel que $W_x + W_x \subseteq V_x$. Comme $K \subseteq \bigcup_{x \in K}(x + W_x)$, la compacité de K permet de trouver $x_1, \ldots, x_n \in K$ tels que $K \subseteq (x_1 + W_{x_1}) \cup \cdots \cup (x_n + W_{x_n})$.

Soit $W = W_{x_1} \cap \cdots \cap W_{x_n}$. C'est un voisinage ouvert convexe de 0.

Posons $\Omega = K + W$. C'est un ouvert : $\Omega = \bigcup_{x \in K}(x + W)$ et il est convexe (somme de deux convexes). De plus $\Omega \cap A = \emptyset$. En effet, si $x \in K$, il existe $k \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $x \in x_k + W_{x_k}$; alors $x + W \subseteq (x_k + W_{x_k}) + W_{x_k} \subseteq x_k + V_{x_k}$ ne rencontre pas A. On peut donc utiliser le Théorème VI.3.3 : il existe une forme linéaire continue $\varphi \in E^*$ telle que :

$$\varphi(x) < \varphi(y) \quad \text{pour tout } x \in \Omega \text{ et tout } y \in A.$$

Notons que cela entraîne en particulier que φ n'est pas nulle. Comme φ est continue et K est compact, il existe $x_0 \in K$ tel que $\varphi(x_0) = \sup_{x \in K} \varphi(x)$.

Par continuité de l'application $x \mapsto -x$, il existe un voisinage W_0 de 0 tel que $w \in W_0$ entraîne $-w \in W$. Posons $\widetilde{W} = W \cap W_0$. Comme $\widetilde{W}$ est un voisinage de 0, φ n'est pas identiquement nulle sur $\widetilde{W}$ (sinon, pour tout $x \in E$, il existerait $t > 0$ tel que $tx \in \widetilde{W}$, parce que $tx \xrightarrow[t \to 0^+]{} 0$; on aurait donc $t\varphi(x) = \varphi(tx) = 0$, d'où $\varphi(x) = 0$, ce qui est contraire au fait que φ n'est pas nulle). Il existe donc $w \in \widetilde{W}$ tel que $\varphi(w) \neq 0$. On a alors :

$$\max[\varphi(x_0 \pm w)] = \max[\varphi(x_0) \pm \varphi(w)] > \varphi(x_0).$$

Comme w et $-w \in \widetilde{W}$, il existe ainsi $w_0 \in \widetilde{W} \subseteq W$ tel que $\varphi(x_0 + w_0) > \varphi(x_0)$. Alors, puisque $x_0 + w_0 \in \Omega$, on obtient :

$$\sup_{x \in K} \varphi(x) = \varphi(x_0) < \varphi(x_0 + w_0) \leqslant \inf_{y \in A} \varphi(y)\,. \qquad \square$$

VI.4. Exercices

Exercice 1.

1) Montrer qu'une forme linéaire sur un espace vectoriel normé est continue si et seulement si son noyau est fermé.

Soit E un espace localement convexe (réel), et soit $\varphi\colon E \to \mathbb{R}$ une forme linéaire non nulle.

2) On suppose que $H = \ker\varphi$ est fermé dans E.

a) Montrer qu'il existe une forme linéaire continue non nulle $\psi \in E^*$ s'annulant sur H (*séparer H d'un point $a \in E \setminus H$*).

b) Montrer que φ est continue.

3) Montrer que si φ n'est pas continue, son noyau est dense dans E.

Exercice 2 (*Fonctions affines continues*).

Soit X un espace vectoriel normé réel et K un compact convexe de X. On considère deux fonctions continues $f, g\colon K \to \mathbb{R}$ telles que f soit convexe, g concave et telles que $g(x) < f(x)$ pour tout $x \in K$. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe une fonction affine continue $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ telle que $g(x) < \varphi(x) < f(x)$ pour tout $x \in K$ (*faire un dessin*).

1) On pose :

$$C_f = \{(x,\lambda) \in K \times \mathbb{R}\,;\ f(x) \leqslant \lambda \leqslant \|f\|_\infty\}$$
$$\Gamma_g = \{(y,\mu) \in K \times \mathbb{R}\,;\ -\|g\|_\infty \leqslant \mu \leqslant g(y)\}.$$

Montrer que C_f et Γ_g sont des convexes compacts de $X \times \mathbb{R}$.

2) Montrer qu'il existe une forme linéaire continue $z^* \in X^*$ et des nombres $a, c \in \mathbb{R}$ tels que l'on ait $z^*(x) + a\,g(x) < c < z^*(x) + af(x)$ pour tout $x \in K$.

3) Montrer que $a > 0$, puis démontrer le résultat souhaité.

Exercice 3 (*Fonctions convexes continues*).

Soit X un espace vectoriel normé réel, et soit $C \subseteq X$ un convexe fermé.

1) Soit $(\varphi_i)_{i\in I}$ une famille de fonctions affines sur C, à valeurs réelles, telles que $\sup_{i\in I}\varphi_i(x) < +\infty$ pour tout $x \in C$. Montrer que la fonction $u = \sup_{i\in I}\varphi_i$ est convexe.

2) Soit $u\colon C \to \mathbb{R}$ une fonction convexe continue.

a) Montrer que $K = \{(x,a) \in C \times \mathbb{R}\,;\ u(x) \leqslant a\}$ est un convexe fermé de $C \times \mathbb{R}$.

b) Soit $x_0 \in C$. Montrer que pour tout $r < u(x_0)$, on peut trouver $x^* \in X^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $x^*(x) + \lambda\,u(x) < x^*(x_0) + \lambda\,r$ pour tout $x \in C$.
En déduire qu'il existe une fonction affine continue $\varphi_{x_0,r}\colon C \to \mathbb{R}$ telle que $\varphi_{x_0,r} \leqslant u$ et $\varphi_{x_0,r}(x_0) = r$.

c) Montrer qu'il existe une famille de fonctions affines continues $(\varphi_i)_{i\in I}$ telle que $u = \sup_{i\in I}\varphi_i$.

Exercice 4 (*Théorème du point fixe de Markov-Kakutani, 1936-1938*).

Soit X est un espace localement convexe réel, et K un convexe compact non vide de X. Le but de l'exercice est de montrer que toute famille commutante d'applications affines continues $f_i\colon K \to K$, $i \in I$, possède un point fixe (cette preuve est due à D. Werner, 1992).

Soit $f\colon K \to K$ une application affine continue.

On pose $\Delta = \{(x,x) \in X \times X \,;\; x \in K\}$ et on note G le graphe de f.

1) a) Montrer que Δ et G sont des compacts convexes de $X \times X$.

b) Montrer que si Φ est une forme linéaire continue sur $X \times X$, alors on peut trouver $(\varphi_1, \varphi_2) \in X^* \times X^*$ tel que $\Phi(u,v) = \varphi_1(u) + \varphi_2(v)$ pour tous $u, v \in X$.

2) On veut montrer que f possède un point fixe. On suppose que ce n'est pas le cas.

a) Montrer qu'il existe deux formes linéaires continues $\varphi_1, \varphi_2 \in X^*$ et deux réels $\alpha < \beta$ tels que $\varphi_1(u) + \varphi_2(u) \leqslant \alpha < \beta \leqslant \varphi_1(v) + \varphi_2[f(v)]$ pour tous $u, v \in K$.

b) Montrer que $\varphi_2[f^n(x)] - \varphi_2(x) \geqslant n\,(\beta - \alpha)$ pour tout $x \in K$ et tout $n \geqslant 1$.

c) Conclure.

3) Montrer le résultat annoncé.

Exercice 5 (*Lemme de Helly*).

Soit E un espace de Banach et soit $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in E^*$ et $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(*i*) $(\forall \beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{K}) \quad \big| \sum_{k=1}^n \beta_k \alpha_k \big| \leqslant \big\| \sum_{k=1}^n \beta_k \varphi_k \big\|$;

(*ii*) $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists x_\varepsilon \in B_E), \quad |\varphi_k(x_\varepsilon) - \alpha_k| < \varepsilon, \forall k = 1, \ldots, n$

(*pour* (*i*) $\Rightarrow$ (*ii*), *utiliser l'application définie par* $u(x) = \big(\varphi_k(x)\big)_{1 \leq k \leqslant n}$ *pour* $x \in E$, *et montrer que* α *appartient au convexe fermé* $\overline{u(B_E)}$; *pour la réciproque, majorer* $\big| \sum_{k=1}^n \beta_k \varphi_k(x_\varepsilon) - \sum_{k=1}^n \beta_k \alpha_k \big|$).

On verra une application de ce résultat à l'Exercice 9 du Chapitre VIII.

Exercice 6 (*Séries faiblement inconditionellement Cauchy*).

Soit X un espace de Banach réel et $(x_n)_{n \geqslant 1}$ une suite d'éléments de X telle que $\sum_{n=1}^\infty |\varphi(x_n)| < +\infty$ pour toute $\varphi \in X^*$.

1) En utilisant le Théorème du graphe fermé, montrer que l'application linéaire $T\colon \varphi \in X^* \mapsto \big(\varphi(x_n)\big)_{n \geqslant 1} \in \ell_1$ est continue.

2) En déduire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\sum_{n=1}^\infty |\varphi(x_n)| \leqslant C\, \|\varphi\|_{X^*}$ pour toute $\varphi \in X^*$.

3) Soit $\mathbf{t} = (t_n)_{n \geqslant 1}$ une suite bornée de nombres réels. On note $\|\mathbf{t}\|_\infty = \sup_{n \geqslant 1} |t_n|$. Montrer que pour tout $N \geqslant 1$ et toute $\varphi \in X^*$, on a :

$$\left| \varphi\Big(\sum_{n=1}^N t_n x_n \Big) \right| \leqslant C\, \|\mathbf{t}\|_\infty \|\varphi\|_{X^*}$$

et en déduire que $\big\| \sum_{n=1}^N t_n x_n \big\| \leqslant C\, \|\mathbf{t}\|_\infty$.

Exercice 7.

Soit X, Y, Z trois espaces de Banach et $B\colon X \times Y \to Z$ une application bilinéaire. On suppose que B est *séparément continue* (voir l'Exercice 14 du Chapitre IV). On veut donner une autre preuve de la continuité de B.

1) Montrer que la famille d'applications linéaires continues $(\psi \circ B_x)_{\psi,x}$, pour $\psi \in Z^*$, $\|\psi\| \leqslant 1$, $x \in X$, $\|x\| \leqslant 1$ est uniformément bornée dans Y^*.

2) En déduire que B est continue (*utiliser le Corollaire VI.2.5*).

Exercice 8 (*Opérateur d'adjoint injectif*).

Soit X et Y deux espaces de Banach et $T\colon X \to Y$ une application linéaire continue. On rappelle qu'il existe une application linéaire continue $T^*\colon Y^* \to X^*$, appelée *adjoint* de T, telle que $(T^*\psi)(x) = \psi(Tx)$ pour tous $\psi \in Y^*$ et tout $x \in X$ (voir Proposition VII.2.6).

1) a) Montrer que si $T(X)$ est dense dans Y, alors l'adjoint $T^*\colon Y^* \to X^*$ de T est injectif.

b) Réciproquement, montrer que si T^* est injectif, alors $T(X)$ est dense dans Y (*utiliser une conséquence du Théorème de Hahn-Banach, ou bien supposer que $T(X)$ n'est pas dense et utiliser directement le Théorème de Hahn-Banach*).

2) Donner un exemple dans lequel T^* est injectif, mais T n'est pas surjectif (*prendre, par exemple, $X = L^2([0,1])$ et $Y = L^1([0,1])$ ou $X = \ell_1$ et $Y = \ell_2$*).

3) Montrer que si T est surjectif, alors il existe une constante $c > 0$ telle que $\|T^*(\psi)\| \geqslant c\,\|\psi\|$ pour toute $\psi \in Y^*$.

Exercice 9.

Soit $(X, \|\,.\,\|)$ un espace normé (réel) et Y un sous-espace vectoriel de X. On suppose qu'il existe une autre norme $\|\,.\,\|_1$ sur X, équivalente *sur* Y à $\|\,.\,\|$: il existe $m, M > 0$ telles que $m\,\|y\| \leqslant \|y\|_1 \leqslant M\,\|y\|$ pour tout $y \in Y$.

On notera $Y_0 = (Y, \|\,.\,\|)$ et $Y_1 = (Y, \|\,.\,\|_1)$.

1) Pour tout $x \in X$, on pose $N(x) = \sup |\widetilde{f}(x)|$, la borne supérieure étant prise sur toutes les formes linéaires continues $f\colon Y_0 \to \mathbb{R}$ telles que $\|f\|_{Y_1^*} \leqslant 1$ et sur tous les prolongements $\widetilde{f}\colon (X, \|\,.\,\|) \to \mathbb{R}$ de f, de même norme $\|f\|_{Y_0^*}$ (donnés par le Théorème de Hahn-Banach). Montrer que N est une semi-norme sur X et que $N(x) \leqslant M\,\|x\|$.

2) On pose, pour tout $x \in X$, $\|x\|_2 = \max\{m\,\|x\|, N(x)\}$. Montrer que $\|\,.\,\|_2$ est une norme sur X, équivalente à $\|\,.\,\|$, et qu'elle est égale à $\|\,.\,\|_1$ sur Y.

Exercice 10 (*Limites de Banach*).

Si $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots) \in \ell_\infty$, on pose $B(\mathbf{x}) = \widetilde{\mathbf{x}} = (x_2, x_3, \dots)$.

1) Soit M le sous-espace vectoriel de l'espace *réel* ℓ_∞ formé par les vecteurs $\mathbf{x} - \widetilde{\mathbf{x}}$ pour $\mathbf{x} \in \ell_\infty$. On note $\mathbb{1} = (1, 1, \dots)$. Montrer que $\operatorname{dist}(\mathbb{1}, M) = 1$ (*séparer les cas selon que $(\mathbf{x} - \widetilde{\mathbf{x}})(n) \geqslant 0$ pour tout $n \geqslant 1$ ou non*).

2) Montrer qu'il existe une forme linéaire continue L sur ℓ_∞ telle que $\|L\| = 1$ et $L(\mathbf{x}) = L(\widetilde{\mathbf{x}})$ pour tout $\mathbf{x} \in \ell_\infty$.

3) Montrer que si la suite $\mathbf{x} = (x_n)_{n \geqslant 1}$ converge, alors $L(\mathbf{x}) = \lim_{n\to\infty} x_n$ (*montrer que $c_0 \subseteq \ker L$*).

4) Soit $\mathbf{x} = (x_n)_{n \geqslant 1}$ telle que $0 \leqslant x_n \leqslant 1$ pour tout $n \geqslant 1$. En considérant $\mathbb{1} - \mathbf{x}$, montrer que $L(\mathbf{x}) \geqslant 0$. En déduire que la forme linéaire L est positive.

On dit que L est une *limite de Banach*.

Exercice 11 (*Existence d'une forme linéaire continue sur $L^\infty(\mathbb{R})$*).

Soit $\mathcal{J}$ l'ensemble des $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ pour lesquelles il existe un ouvert dense Ω_f de $\mathbb{R}$ sur lequel f s'annule (presque partout).

1) Montrer que $\mathcal{J}$ est un sous-espace vectoriel de $L^\infty(\mathbb{R})$.

2) Montrer que $\|\mathbb{1} - f\|_\infty \geqslant 1$ pour toute $f \in \mathcal{J}$.

3) En déduire qu'il existe $\Phi \in [L^\infty(\mathbb{R})]^*$ s'annulant sur $\mathcal{J}$ et telle que $\Phi(\mathbb{1}) = 1$ (*on commencera par construire une forme linéaire continue de norme* 1 *sur le sous-espace vectoriel engendré par* $\mathcal{J}$ *et* $\mathbb{1}$).

4) On écrit $\mathbb{Q} = \{r_n\,;\ n \geqslant 1\}$, et on pose $\Omega_k = \bigcup_{n\geqslant 1}]r_n - 2^{-nk}, r_n + 2^{-nk}[$.

a) Montrer que Ω_k est un ouvert dense de $\mathbb{R}$, que la suite $(\Omega_k)_{k\geqslant 1}$ est décroissante, et que son intersection est de mesure nulle.

b) En déduire que Φ n'est *pas* donnée par une fonction $g \in L^1(\mathbb{R})$.

Remarque. Voir aussi l'Exercice 13 du Chapitre VIII.

Exercice 12.

1) Soit X un espace de Banach *réel*, et X^* son dual. Soit $\Phi, \Psi \in X^*$ telles que $\|\Phi\| = \|\Psi\| = 1$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que :

$$|\Phi(x)| \leqslant \varepsilon \qquad \forall x \in (\ker \Psi) \cap B_X$$

(on rappelle que $B_X = \{x \in X\,;\ \|x\| \leqslant 1\}$).

a) En utilisant la restriction Φ_1 de Φ à $\ker \Psi$, montrer qu'il existe $\widetilde{\Phi} \in X^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $\|\widetilde{\Phi}\| \leqslant \varepsilon$ et $\widetilde{\Phi} - \Phi = \alpha\Psi$.

b) Montrer que $\big|1 - |\alpha|\big| \leqslant \varepsilon$ (on rappelle que $\|\Phi\| = \|\Psi\| = 1$).

c) En déduire que $\|\Phi + \Psi\| \leqslant 2\varepsilon$ ou $\|\Phi - \Psi\| \leqslant 2\varepsilon$ (*séparer les cas* $\alpha \geqslant 0$ *et* $\alpha < 0$).

Soit E un espace de Banach. On dit qu'un sous-espace vectoriel fermé N de E^* est *normant* s'il existe un nombre $a > 0$ tel que :

$$\sup\{|f(x)|\,;\ f \in N \cap B_{E^*}\} \geqslant a\,\|x\|\,, \quad \forall x \in E.$$

2) On suppose que E est un espace de Banach *réel*. Soit $\Psi \in E^{**} \setminus E$, et soit $\delta = \operatorname{dist}(\Psi, E) > 0$. Montrer qu'il n'est pas possible qu'il existe $x_0 \in E$ avec $\|x_0\| = 1$ tel que

$$\sup\{|f(x_0)|\,;\ f \in (\ker \Psi) \cap B_{E^*}\} \leqslant \delta/(4\,\|\Psi\|)\,.$$

(*utiliser le 1) c)*). Conclusion ?

Exercice 13.

Soit $\mathscr{C}([0,1])$ l'espace des fonctions continues $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, muni de la norme uniforme.

1) Montrer que $\mathfrak{P} = \{f \in \mathscr{C}([0,1])\,;\ f(x) > 0,\ \forall x \in [0,1]\}$ est un ouvert convexe de $\mathscr{C}([0,1])$.

2) Soit $\mathfrak{C} = \{g \in \mathscr{C}([0,1])\,;\ g(1/n) = -1/n,\ \forall n \in \mathbb{N}^*\}$. Montrer qu'il existe une forme linéaire continue Φ sur $\mathscr{C}([0,1])$ et un nombre réel $a \in \mathbb{R}$ tels que $\Phi(f) \geqslant a \geqslant \Phi(g)$ pour toute $f \in \mathfrak{P}$ et toute $g \in \mathfrak{C}$.

3) Montrer que $\Phi(f) \geqslant 0$ pour tout $f \in \mathfrak{P}$ (*raisonner par l'absurde, et remarquer que $\mathfrak{P}$ est un* cône : *si $f \in \mathfrak{P}$, alors $\lambda f \in \mathfrak{P}$ pour tout $\lambda > 0$*).

Remarque. Il résulte du 3) et du Théorème de représentation de Riesz (voir Chapitre VIII, Théorème VIII.3.2) qu'il existe une mesure positive μ sur $[0,1]$ telle que $\Phi(f) = \int_0^1 f\,d\mu$ pour toute $f \in \mathscr{C}([0,1])$.

Exercice 14.

1) Soit $N \geqslant 2$ un entier fixé. Montrer que pour tout polynôme trigonométrique $u(t) = \sum_{n=-N}^{N} a_n\,\mathrm{e}^{2\pi int}$ de degré N, on a :

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |u'(t)| \leqslant 2\pi N(N+1) \sup_{t\in\mathbb{R}} |u(t)|\,.$$

(en fait, on peut montrer que $\|u'\|_\infty \leqslant 2\pi N\,\|u\|_\infty$: inégalité de Bernstein).

On considère l'espace de Banach $E = \mathscr{C}([-1,1])$ des fonctions continues sur $[-1,1]$ muni de la norme uniforme.

2) Soit $\mathscr{P}_N$ le sous-espace de E formé des polynômes (ordinaires) de degré $\leqslant N$. Montrer que $|P'(0)| \leqslant N(N+1)\,\|P\|_\infty$ pour tout $P \in \mathscr{P}_N$.

3) Montrer qu'il existe une mesure complexe ν sur $[-1,1]$ de norme $\leqslant N(N+1)$ et telle que :

$$\int_{-1}^{1} s\,d\nu(s) = 1 \qquad \text{et} \qquad \int_{-1}^{1} s^n\,d\nu(s) = 0 \quad \text{pour } 2 \leqslant n \leqslant N$$

(*on commencera par prolonger une forme linéaire à E, puis on utilisera le Théorème VIII.3.1*).

Exercice 15 (Espace vectoriel topologique non localement convexe).

On note $L^{1/2}$ l'espace des classes d'équivalence presque partout des fonctions $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ mesurables et telles que $\int_0^1 |f(t)|^{1/2}\,dt < +\infty$.

1) Montrer que $L^{1/2}$ est un espace vectoriel pour les opérations usuelles.

2) On pose $d(f,g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)|^{1/2}\,dt$ pour $f, g \in L^{1/2}$. Montrer que d est une distance sur $L^{1/2}$, et que la topologie associée fait de $L^{1/2}$ un espace vectoriel topologique.

3) Montrer que, pour tout $r > 0$, l'enveloppe convexe de la boule de centre 0 et de rayon r contient la boule de centre 0 et de rayon $r\sqrt{2}$ (*utiliser $F(x) = \int_0^x |f(t)|^{1/2}\,dt$ et le Théorème des valeurs intermédiaires*). En déduire que le seul ouvert convexe non vide de $L^{1/2}$ est $L^{1/2}$ lui-même.

4) Montrer que la seule forme linéaire continue sur $L^{1/2}$ est la forme linéaire nulle.

Chapitre VII

NOTIONS DE THÉORIE SPECTRALE

VII.1. Spectre d'un opérateur

Soit E un espace de Banach et :

$$\boxed{\mathscr{L}(E) = \{T \colon E \to E \text{ linéaire continue}\}}$$

muni de la norme :

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_E \leqslant 1} \|Tx\|_E \,,$$

qui en fait un espace de Banach, comme on peut le vérifier facilement en exercice.

Si $T \in \mathscr{L}(E)$, on dit que T est un opérateur de (ou sur) E. Pour $T, U \in \mathscr{L}(E)$, on note :

$$TU = T \circ U\,;$$

avec cette opération, $\mathscr{L}(E)$ est une algèbre et l'on a :

$$\boxed{\|TU\| \leqslant \|T\|\,\|U\|}\,.$$

On notera I l'application identité de E, et on pose $T^0 = I$; $T^2 = T \circ T$, $T^{n+1} = T^n \circ T$, $n \geqslant 1$. On a $\boxed{\|T^n\| \leqslant \|T\|^n}$ pour tout $n \geqslant 0$.

VII.1.1. Opérateurs inversibles

Comme E est complet, le Théorème des isomorphismes de Banach dit que si $T \in \mathscr{L}(E)$ est bijectif, alors T^{-1} est automatiquement continu ; T est donc inversible, en tant qu'élément de l'algèbre $\mathscr{L}(E)$.

On a une condition simple d'inversibilité : cela arrive si T est proche de l'identité.

Théorème VII.1.1. *Si $\|I - T\| < 1$, alors T est inversible.*

Preuve. Posons $U = I - T$. On a $T = I - U$. Comme $\|U\| < 1$, la série $\sum_{n\geqslant 0} \|U\|^n$ converge. Comme

$$\|U^n\| \leqslant \|U\|^n,$$

la série $\sum_{n\geqslant 0} U^n$ est absolument convergente. L'espace $\mathscr{L}(E)$ étant complet, la série :

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} U^n$$

converge dans $\mathscr{L}(E)$. On vérifie facilement que :

$$(I - U) \circ V = V \circ (I - U) = I\,;$$

donc $T = I - U$ est inversible et $V = T^{-1}$. □

Corollaire VII.1.2. *Le groupe $GL(E)$ des éléments inversibles de $\mathscr{L}(E)$ est* **ouvert** *dans $\mathscr{L}(E)$.*

Preuve. Soit $T_0 \in GL(E)$ et $T \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\|T - T_0\| < \dfrac{1}{\|T_0^{-1}\|}$; alors :

$$\|I - TT_0^{-1}\| = \|(T_0 - T)T_0^{-1}\| \leqslant \|T - T_0\|\,\|T_0^{-1}\| < 1;$$

donc $TT_0^{-1} = I - (I - TT_0^{-1})$ est inversible, et par conséquent T aussi. □

VII.1.2. Spectre

Définition VII.1.3.

1) *On dit qu'un nombre réel ou complexe λ est une* **valeur propre** *de T s'il existe $x \in E$,* **non nul**, *tel que $Tx = \lambda x$; autrement dit si $T - \lambda I$ n'est* **pas injectif**.

2) *On dit que le scalaire λ est une* **valeur spectrale** *de T si $T - \lambda I$ n'est* **pas inversible** *(ou, de façon équivalente, pas bijectif).*

L'ensemble des valeurs spectrales de T est noté $\sigma(T)$ et est appelé le **spectre** de T ; l'ensemble des valeurs propres est noté $\sigma_p(T)$ et est appelé le spectre ponctuel de T. On a évidemment $\boxed{\sigma_p(T) \subseteq \sigma(T)}$, et il y a égalité si E est de dimension finie. En dimension infinie, ce n'est plus vrai car T peut être injectif sans être surjectif.

Exemples. Si $E = \ell_2$ et $Sx = (0, x_1, x_2, \ldots)$ pour $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2$ est le *décalage à droite* (ou, en utilisant la terminologie anglaise, le *shift*), alors S n'est pas surjectif, donc $0 \in \sigma(S)$; mais S est injectif, donc $0 \notin \sigma_p(S)$ (voir l'Exercice 3).

On pourra montrer en exercice (Exercice 8) que, si $E = \mathscr{C}([0,1])$ et $(Tf)(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ pour $f \in E$ (*opérateur de Volterra*), alors $\sigma_p(T) = \emptyset$ et $\sigma(T) = \{0\}$.

Comme $T - \lambda I$ est inversible lorsque $\lambda \notin \sigma(T)$, on est conduit à la définition suivante.

Définition VII.1.4.

1) *L'ensemble* $\boxed{\rho(T) = \mathbb{K} \setminus \sigma(T)}$ *est appelé l'*ensemble résolvant *de* T.

2) *La fonction* $R_T\colon \rho(T) \to \mathscr{L}(E)$ *définie par :*

$$\boxed{R_T(\lambda) = (T - \lambda I)^{-1}}$$

est appelée la <u>*résolvante*</u> *de* T.

Remarque. On trouve aussi souvent la résolvante définie par $R_T(\lambda) = (\lambda I - T)^{-1}$.

Théorème VII.1.5. $\sigma(T)$ *est une partie* **compacte** *de* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$, *et* $|\lambda| \leqslant \|T\|$ *pour tout* $\lambda \in \sigma(T)$.

Preuve. L'application $\mathcal{T}\colon \lambda \in \mathbb{K} \mapsto (T - \lambda I) \in \mathscr{L}(E)$ étant continue, l'ensemble résolvant $\rho(T) = \mathcal{T}^{-1}[GL(E)]$ est ouvert, grâce au Corollaire VII.1.2. Plus précisément, si $\lambda_0 \in \rho(T)$ et $|\lambda - \lambda_0| < \dfrac{1}{\|R_T(\lambda_0)\|}$, on a :

$$\|(T - \lambda I) - (T - \lambda_0 I)\| = |\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|R_T(\lambda_0)\|} = \frac{1}{\|(T - \lambda_0 I)^{-1}\|},$$

et alors $T - \lambda I$ est inversible (voir la preuve du Corollaire VII.1.2), c'est-à-dire que $\lambda \in \rho(T)$. Le spectre $\sigma(T)$ est donc fermé.

D'autre part, si $|\lambda| > \|T\|$, alors :

$$\left\| I + \frac{1}{\lambda}(T - \lambda I) \right\| = \frac{1}{|\lambda|}\|T\| < 1\,;$$

donc $-\frac{1}{\lambda}(T - \lambda I)$ est inversible, par le Théorème VII.1.1 ; il en donc est de même pour $T - \lambda I$. Cela signifie que $\boxed{\sigma(T) \subseteq [-\|T\|, \|T\|]}$, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, et $\boxed{\sigma(T) \subseteq \overline{D(0, \|T\|)}}$, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$; en particulier $\sigma(T)$ est une partie bornée de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. □

Théorème VII.1.6 (Stone). *Si l'espace* E *est* **complexe** *:* $\boxed{\mathbb{K} = \mathbb{C}}$, *alors le spectre* $\sigma(T)$ *n'est* **jamais vide**.

C'est bien sûr faux si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: prendre $E = \mathbb{R}^2$ et pour T une rotation d'angle $\not\equiv 0$ modulo π.

La preuve du Théorème VII.1.6 résulte du lemme suivant.

Lemme VII.1.7. *Pour toute* $\Phi \in \left[\mathscr{L}(E)\right]^*$, *la fonction* $\Phi \circ R_T\colon \rho(T) \to \mathbb{C}$ *est analytique et tend vers* 0 *à l'infini.*

Preuve du Théorème VII.1.6. En effet, si l'on avait $\sigma(T) = \emptyset$, on aurait $\rho(T) = \mathbb{C}$ et la fonction $\Phi \circ R_T\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ serait *entière.* Comme elle tend vers 0 à l'infini, elle serait bornée, et donc constante, par le **Théorème de Liouville**, et donc forcément nulle.

Comme ce serait vrai pour toute $\Phi \in \left[\mathscr{L}(E)\right]^*$, on devrait avoir, par le Théorème de Hahn-Banach, $R_T = 0$, ce qui est, à l'évidence, faux. □

Preuve du Lemme VII.1.7.

1) Soit $\lambda_0 \in \rho(T)$ et λ tel que $|\lambda - \lambda_0| < \dfrac{1}{\|R_T(\lambda_0)\|}$, de sorte qu'alors $\lambda \in \rho(T)$ (voir la preuve du Théorème VII.1.5). Comme :

$$\begin{aligned}\|I - (T - \lambda I)R_T(\lambda_0)\| &= \|\left[(T - \lambda_0 I) - (T - \lambda I)\right] R_T(\lambda_0)\| \\ &\leqslant \|(T - \lambda_0 I) - (T - \lambda I)\| \, \|R_T(\lambda_0)\| \\ &= |\lambda - \lambda_0| \, \|R_T(\lambda_0)\| < 1\,;\end{aligned}$$

on a (voir preuve du Théorème VII.1.1) :

$$\begin{aligned}\left[(T - \lambda I)R_T(\lambda_0)\right]^{-1} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[I - (T - \lambda I)R_T(\lambda_0)\right]^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\left[(T - \lambda_0 I) - (T - \lambda I)\right] R_T(\lambda_0)\Big)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n \left[R_T(\lambda_0)\right]^n,\end{aligned}$$

et par conséquent :

$$R_T(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n \left[R_T(\lambda_0)\right]^{n+1}.$$

Alors :

$$(\Phi \circ R_T)(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \, (\lambda - \lambda_0)^n,$$

avec $c_n = \Phi\big([R_T(\lambda_0)]^{n+1}\big)$.

2) Il reste à remarquer que, pour $|\lambda| > \|T\|$:

$$\lambda \, R_T(\lambda) = -\left(I - \frac{1}{\lambda} T\right)^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^n} T^n \xrightarrow[|\lambda| \to +\infty]{} -I\,,$$

par continuité de la série entière en 0 ; et cela entraîne que $R_T(\lambda) \xrightarrow[|\lambda| \to +\infty]{} 0$. □

VII.1.3. Rayon spectral

Définition VII.1.8. *Lorsque $\sigma(T) \neq \emptyset$, on appelle* **rayon spectral** *de T le nombre*

$$r(T) = \sup\{|\lambda|\,;\ \lambda \in \sigma(T)\}.$$

Comme $\sigma(T)$ est compact, cette borne supérieure est atteinte.

Exemple. Lorsque $E = \mathscr{C}([0,1])$ et $(Tf)(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, on a $\sigma(T) = \{0\}$ (voir l'Exercice 8) et donc $r(T) = 0$.

On a déjà vu, dans le Théorème VII.1.5, que $r(T) \leqslant \|T\|$. En fait, on a mieux (noter que $\|T^n\| \leqslant \|T\|^n$, et donc $\|T^n\|^{1/n} \leqslant \|T\|$) :

Théorème VII.1.9 (Formule du rayon spectral).
1) *La limite* $\lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}$ *existe, et elle est égale à* $\inf_{n\geqslant 1} \|T^n\|^{1/n}$.
2) *a) On a* $r(T) \leqslant \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}$.
b) Si l'espace E est **complexe**, *alors* $\boxed{r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}}$.

Preuve. 1) Posons $l = \inf_{n\geqslant 1} \|T^n\|^{1/n}$, et soit $\varepsilon > 0$.
Il existe $N \geqslant 1$ tel que :

$$\|T^N\|^{1/N} \leqslant l + \varepsilon.$$

Pour $n \geqslant N$, faisons la *division euclidienne* de n par N :

$$n = p_n N + q_n\,, \qquad 0 \leqslant q_n \leqslant N - 1.$$

On a, en utilisant la *sous-multiplicativité de la norme des puissances de* T :

$$\|T^n\| \leqslant \|T^N\|^{p_n} \, \|T\|^{q_n}\,;$$

d'où :

$$\|T^n\|^{1/n} \leqslant \|T^N\|^{p_n/n} \, \|T\|^{q_n/n}\,.$$

Comme $0 \leqslant q_n \leqslant N - 1$, on a :

$$\frac{q_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,; \qquad \text{d'où} \qquad \frac{p_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} N.$$

Il en résulte que :

$$\limsup_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} \leqslant \|T^N\|^{1/N} \leqslant l + \varepsilon,$$

et donc, puisque $\varepsilon > 0$ était arbitraire :

$$\limsup_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} \leqslant l.$$

Comme on a évidemment $l \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}$, cela prouve l'existence de la limite. De plus elle est égale à $l = \inf_{n\geqslant 1} \|T^n\|^{1/n}$ (bien que la suite $\big(\|T^n\|^{1/n}\big)_n$ ne soit pas décroissante, en général).

2) *a)* Si $\lambda \in \sigma(T)$, l'égalité :

$$T^n - \lambda^n I = (T - \lambda I)(T^{n-1} + \lambda T^{n-2} + \cdots + \lambda^{n-2} T + \lambda^{n-1} I)$$

montre que $T^n - \lambda^n I$ n'est pas inversible (car sinon, $T - \lambda I$ le serait). Cela signifie que $\lambda^n \in \sigma(T^n)$. Donc $|\lambda^n| \leqslant r(T^n) \leqslant \|T^n\|$ (voir Théorème VII.1.5). On a par conséquent $|\lambda| \leqslant \|T^n\|^{1/n}$, d'où $r(T) \leqslant \inf_{n\geqslant 1} \|T^n\|^{1/n} = l$.

b) Pour terminer, dans le cas complexe, remarquons, comme nous l'avons déjà fait, que pour $|\lambda| > \|T\|$, on a :

$$R_T(\lambda) = -\frac{1}{\lambda}\Big(I - \frac{1}{\lambda}T\Big)^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} T^n\,,$$

et donc, pour toute $\Phi \in \big[\mathscr{L}(E)\big]^*$:

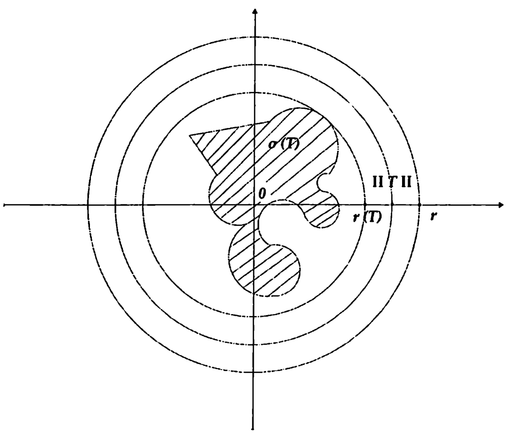
$$(\Phi \circ R_T)(\lambda) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} \Phi(T^n).$$

Soit $r > \|T\|$ et $\mathcal{C}_r$ le cercle de centre 0 et de rayon r, orienté positivement. On peut intégrer terme à terme sur $\mathcal{C}_r$:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_r} \lambda^k \big(\Phi \circ R_T\big)(\lambda)\, d\lambda = -\Phi(T^k) \tag{1}$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Mais $\Phi \circ R_T$ est holomorphe pour $|\lambda| > r(T)$ (par définition de $r(T)$). Le **Théorème de Cauchy** permet donc de dire que la formule (1) reste en fait vraie **pour tout** $\underline{r > r(T)}$.



Alors :

$$|\Phi(T^k)| \leqslant r^{k+1} \sup_{|\lambda|=r} |(\Phi \circ R_T)(\lambda)| \leqslant r^{k+1} \|\Phi\| \sup_{|\lambda|=r} \|R_T(\lambda)\|\,;$$

et donc, en prenant la borne supérieure sur toutes les $\Phi \in \big[\mathscr{L}(E)\big]^*$:

$$\|T^k\| \leqslant r^{k+1} \sup_{|\lambda|=r} \|R_T(\lambda)\|\,.$$

Il en résulte :

$$\|T^k\|^{1/k} \leqslant r^{\frac{k+1}{k}} \left[\sup_{|\lambda|=r} \|R_T(\lambda)\| \right]^{1/k},$$

et donc :

$$l = \lim_{k\to\infty} \|T^k\|^{1/k} \leqslant r.$$

Comme c'est vrai pour tout $r > r(T)$, on obtient $l \leqslant r(T)$, ce qu'il fallait démontrer. □

VII.2. Opérateurs compacts

VII.2.1. Propriétés générales

Définition VII.2.1. *Soit E, F deux espaces de Banach et $T\colon E \to F$ un opérateur (c'est-à-dire une application linéaire continue). On dit que T est compact si l'image par T de la boule-unité B_E de E est relativement compacte dans F : $\overline{T(B_E)}$ est compact dans F.*

Remarque. Comme tout compact est borné, la condition " $\overline{T(B_E)}$ compact dans F" assure en fait la continuité de T ; il n'y aurait donc pas besoin de la supposer au départ.

Exemples.

1) Si $\dim T(E) < +\infty$ (on dit alors que T est *de rang fini*), alors T est compact.

2) Si $K \in L^2([0,1]^2)$, l'opérateur $T_K\colon L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ défini par

$$(T_K f)(x) = \int_0^1 K(x,y) f(y)\, dy$$

est compact (exercice ; voir aussi l'Exercice 12 et l'Exercice 23 du Chapitre II).

Proposition VII.2.2. *L'ensemble $\mathscr{K}(E,F)$ des opérateurs compacts $T\colon E \to F$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathscr{L}(E,F)$.*

Preuve. C'est un sous-espace vectoriel car

$$\overline{(S+T)(B_E)} \subseteq \overline{S(B_E)} + \overline{T(B_E)}$$

et que cette somme est compacte (image du produit de deux compacts par l'application continue $(x,y) \mapsto x+y$).

Soit $T_n \in \mathscr{K}(E,F)$ tels que $\|T_n - T\|_{\mathscr{L}(E,F)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Nous allons voir que $T(B_E)$ est relativement compact.

Rappel. *Soit X un espace métrique complet. Une partie A de X est relativement compacte si et seulement si : pour tout $\varepsilon > 0$, A peut être recouverte par un nombre fini de boules de rayon $\leqslant \varepsilon$.*

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \geqslant 1$ tel que $\|T_N - T\| \leqslant \varepsilon/2$. Pour tout $x \in B_E$, on a donc $\|T_N x - Tx\| \leqslant \varepsilon/2$. On peut écrire : $T_N(B_E) \subseteq \bigcup_{j=1}^{J} B(x_j, \varepsilon/2)$.

Alors : $T(B_E) \subseteq \bigcup_{j=1}^{J} B(x_j, \varepsilon)$. □

Corollaire VII.2.3. *Si $T \in \mathscr{L}(E,F)$ est limite, en norme, d'une suite d'opérateurs de rang fini, alors T est compact.*

Question. (Mazur, 1936, dans le *Cahier Ecossais* ; mais déjà énoncée par Banach dans son livre en 1932). Tout opérateur compact est-il la limite d'une suite d'opérateurs de rang fini ?

La réponse est *oui* dans les espaces de Hilbert (pour les espaces de Hilbert séparables, utilisez une base orthonormée et la projection sur l'espace engendré par les n premiers vecteurs de la base : voir l'Exercice 11). C'est vrai aussi dans tous les espaces $L^p([0,1])$ pour $1 \leqslant p < \infty$ (c'est plus difficile à voir). Mais P. Enflo a montré en 1972 que ce n'est pas le cas pour tous les espaces de Banach. Mazur avait promis une oie vivante pour la résolution de ce problème, et il en a offert une à Enflo lorsque celui-ci est venu exposer sa solution à Varsovie.

Remarque. Si E est réflexif (voir Chapitre VIII), alors B_E est faiblement compacte. Si $T\colon E \to F$ est continu pour les normes, il est aussi continu pour les topologies faibles ; donc $T(B_E)$ est faiblement compact dans F, et par conséquent faiblement fermé ; il est *a fortiori* fermé en norme. Dans ce cas, si T est compact, alors $T(B_E)$ est compact dans F.

Toutefois, si l'image de la boule B_E par T peut être fermée, il n'en va pas de même pour l'image de E tout entier, sauf cas très particulier :

Théorème VII.2.4. *Soit E, F des espaces de Banach et $T\colon E \to F$ un opérateur compact. Alors l'image $R(T) = T(E)$ de E par T est fermée si et seulement si T est de rang fini.*

Preuve. Si $T(E)$ est fermé dans F, c'est un espace de Banach. Le Théorème de l'application ouverte pour $T\colon E \to R(T)$ s'applique : il existe un ouvert U, de $R(T)$, non vide, tel que $T(B_E) \supseteq U$.

Soit B une boule fermée, de rayon > 0, de $R(T)$, contenue dans U. On a :

$$B \subseteq U \subseteq T(B_E) \subseteq \overline{T(B_E)}$$

qui est compact. Donc $R(T)$ est de dimension finie, par le Théorème de Riesz. □

Une propriété importante, mais facile à vérifier, des opérateurs compacts est la suivante.

Proposition VII.2.5. (propriété d'idéal) *Soit E, F, G trois espaces de Banach et $T \in \mathscr{L}(E,F)$, $S \in \mathscr{L}(F,G)$. Alors :*

- $T \in \mathscr{K}(E,F) \;\Rightarrow\; S \circ T \in \mathscr{K}(E,G)$
- $S \in \mathscr{K}(F,G) \;\Rightarrow\; S \circ T \in \mathscr{K}(E,G)$.

VII.2.2. Opérateur adjoint

Proposition VII.2.6. *Si $T \in \mathscr{L}(E,F)$, il existe $T^* \in \mathscr{L}(F^*,E^*)$ tel que :*

$$\langle \varphi, Tx\rangle_{F^*,F} = \langle T^*\varphi, x\rangle_{E^*,E}\,, \quad \forall x \in E \ \forall \varphi \in F^*.$$

T^* est appelé l'*opérateur adjoint* de T.

Notons que cela correspond à la notion d'opérateur adjoint sur les espaces de Hilbert H, lorsque l'on a identifié le dual H^* à H, *via* l'isométrie bijective $J\colon x \mapsto \Phi_x$ (voir le commentaire suivant le Théorème de représentation de Fréchet-Riesz, *i.e.* le Théorème II.2.10).

Preuve. Pour toute $\varphi \in F^*$, l'application $x \mapsto \langle \varphi, Tx\rangle$ est une forme linéaire continue sur E, donc un élément $T^*\varphi \in E^*$. La linéarité de $T^*\colon F^* \to E^*$ est facile à vérifier, et sa continuité vient de :

$$\|T^*\varphi\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |\langle T^*\varphi, x\rangle = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |\langle \varphi, Tx\rangle \leqslant \|\varphi\| \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|Tx\| = \|\varphi\|\,\|T\|.$$

Remarque. On a donc $\|T^*\| \leqslant \|T\|$. En fait $\|T^*\| = \|T\|$. En effet,

$$\|Tx\| = \sup_{\|\varphi\|\leqslant 1} |\langle \varphi, Tx\rangle = \sup_{\|\varphi\|\leqslant 1} |\langle T^*\varphi, x\rangle \leqslant \sup_{\|\varphi\|\leqslant 1} \|T^*\varphi\|\,\|x\| = \|T^*\|\,\|x\|.$$

Théorème VII.2.7 (Théorème de Schauder). *L'opérateur $T\colon E \to F$ est compact si et seulement si son adjoint $T^*\colon F^* \to E^*$ est compact.*

On utilisera le :

> **Théorème VII.2.8** (Théorème d'Ascoli). *Soit X un espace <u>métrique</u> et <u>compact</u>, et $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{C}(X)$. Alors $\mathscr{F}$ est relativement compacte dans $\mathscr{C}(X)$ si et seulement si $\mathscr{F}$ est bornée et est équicontinue.*

Rappelons que $\mathscr{F}$ <u>*équicontinue*</u> signifie que :

$$(\forall x \in X) \ \ (\forall \varepsilon > 0) \ \ (\exists \delta > 0) : d(x,y) \leqslant \delta \Rightarrow \big[|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon\,,\ \underline{\forall f \in \mathscr{F}}\big]\,.$$

Notons que comme X est compact, il y a en fait *équicontinuité uniforme* :

$$(\forall \varepsilon > 0) \ \ (\exists \delta > 0) \ \ (\underline{\forall x, y \in X}) : d(x,y) \leqslant \delta \Rightarrow \big[|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon\,,\ \underline{\forall f \in \mathscr{F}}\big]\,.$$

Preuve. Voir l'Annexe. □

Preuve du Théorème de Schauder. <u>*Condition nécessaire*</u>. Supposons T compact. On veut montrer que $T^*(B_{F^*})$ est relativement compacte, c'est-à-dire que si $\|\varphi_n\|_{F^*} \leqslant 1$, on peut extraire de $(T^*\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ une sous-suite convergente.

Prenons $X = \overline{T(B_E)}$; c'est un espace métrique compact. Posons :

$$\begin{aligned} f_n\colon X &\longrightarrow \mathbb{K} \\ y &\longmapsto f_n(y) = \langle \varphi_n, y\rangle_{F^*,F}. \end{aligned}$$

Alors $\mathscr{F} = \{f_n\,;\ n \geqslant 1\}$ est borné :

$$\|f\|_\infty = \sup_{y\in X} |\langle \varphi_n, y\rangle = \sup_{x\in B_E} |\langle \varphi_n, Tx\rangle| \leqslant \|T\|\,,$$

et est équicontinu : $|f_n(y) - f_n(y')| \leqslant \|y - y'\|$ pour tout $n \geqslant 1$.

Grâce au Théorème d'Ascoli, on peut extraire de $\mathscr{F}$ une suite $(f_{n_k})_{k\geqslant 1}$ convergente : $\|f_{n_k} - f\|_{\mathscr{C}(X)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Alors, pour tout $x \in B_E$:

$$\langle T^*\varphi_{n_k}, x\rangle = \langle \varphi_{n_k}, Tx\rangle = f_{n_k}(Tx) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f(Tx).$$

Pour tout $x \in E$, $\psi(x) = \lim_{k\to\infty}\langle T^*\varphi_{n_k}, x\rangle$ existe donc; $\psi\colon E \to \mathbb{K}$ est linéaire et $\psi_{|B_E} = f\circ T$. Comme

$$\|\psi(x)\| = \lim_{k\to\infty} \|T^*\varphi_{n_k}(x)\| \leqslant \|T^*\|\,\|\varphi_{n_k}\|\,\|x\| \leqslant \|T\|\,\|x\|\,,$$

ψ est continue. Donc $\psi \in E^*$. De plus :

$$\|T^*\varphi_{n_k} - \psi\|_E = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |\langle T^*\varphi_{n_k} - \psi, x\rangle| = \|f_{n_k} - f\|_\infty \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

<u>Condition suffisante</u>. Si T^* est compact, alors, d'après ce que l'on vient de montrer, $T^{**}\colon E^{**} \to F^{**}$ est compact, c'est-à-dire que $\overline{T^{**}(B_{E^{**}})}$ est compact. Mais, puisque $(T^{**})_{|E} = T$:

$$\overline{T(B_E)} \subseteq \overline{T^{**}(B_E)} \subseteq \overline{T^{**}(B_{E^{**}})}$$

est donc aussi compact. Donc T est compact. □

Exercice. Utiliser le Théorème d'Ascoli pour montrer que si $K \in \mathscr{C}([0,1]^2)$, alors l'opérateur $T_K\colon \mathscr{C}([0,1]) \to \mathscr{C}([0,1])$ défini, pour toute $f \in \mathscr{C}([0,1]^2)$, par $T_K f(x) = \int_0^1 K(x,y)\,f(y)\,dy$ est compact (Exercice 2).

VII.2.3. Propriétés spectrales des opérateurs compacts

E sera un espace de Banach, et on notera $\mathscr{K}(E,E)$ par $\mathscr{K}(E)$. Rappelons que l'identité Id_E de E est notée par I. Rappelons aussi que l'image $T(E)$ d'un opérateur T est notée $R(T)$.

Le théorème suivant est en fait une préparation au théorème principal. Il exprime qu'une "petite" perturbation (par un opérateur compact) de l'identité garde en mémoire certaines de ses propriétés.

Théorème VII.2.9. *Si $U \in \mathscr{K}(E)$, alors :*
1) $\ker(I-U)$ *est de dimension finie ;*
2) $R(I-U)$ *est fermée ;*
3) *Si $(I-U)$ est injectif, alors $(I-U)$ est inversible.*

Preuve.

1) Notons que $x \in N = \ker(I-U)$ si et seulement si $x = Ux$; donc si B_N est la boule unité de N, on a $B_N = U(B_N)$. Mais $N = \ker(I-U)$ est un sous-espace vectoriel fermé, et donc B_N, qui est fermée dans N, est fermée dans E ; par conséquent $B_N = U(B_N) \subseteq \overline{U(B_E)}$ est compacte, et N est de dimension finie, par le Théorème de Riesz (Chapitre I, Théorème I.2.5).

2) Soit $x_0 \in \overline{R(I-U)}$.

Il existe des $x_n \in E$ tels que $x_n - Ux_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$.

Séparons deux cas :

<u>1^{er} cas : $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée.</u>

Comme U est compact, il existe une sous-suite telle que $Ux_{n_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} y \in E$. Alors :

$$x_{n_k} = (x_{n_k} - Ux_{n_k}) + Ux_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x_0 + y.$$

Par continuité : $Ux_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} U(x_0+y)$. Donc $U(x_0+y) = y$, et par conséquent :

$$x_0 = x_0 + y - y = x_0 + y - U(x_0+y) = (I-U)(x_0+y) \in R(I-U).$$

<u>$2^{ème}$ cas : $(x_n)_{n\geqslant 1}$ n'est pas</u> (nécessairement) <u>bornée</u>.

Posons :

$$d_n = \mathrm{dist}\big(x_n, \ker(I-U)\big).$$

Il existe $y_n \in N$ tel que $\|y_n - x_n\| \leqslant 2d_n$ (lorsque $d_n = 0$, alors $x_n \in \ker(I-U)$ puisque ce dernier est fermé, et $y_n = x_n$ convient).

• On va montrer que la suite $(d_n)_{n\geqslant 1}$ est <u>bornée</u>.

Si ce n'était pas le cas, en la remplaçant au besoin par une sous-suite, on aurait $0 < d_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

Si l'on pose $z_n = \dfrac{x_n - y_n}{2d_n}$, on a $\|z_n\| \leqslant 1$. Donc, puisque U est compact, on a, en remplaçant au besoin $(z_n)_{n\geqslant 1}$ par une sous-suite : $Uz_n \xrightarrow[n\to\infty]{} z \in E$. Mais alors, puisque $x_n - Ux_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$, on aurait :

$$\begin{aligned} z_n &= (I-U)(z_n) + Uz_n \\ &= \frac{1}{2d_n}(I-U)(x_n) + Uz_n \quad \text{car } y_n \in \ker(I-U) \\ &\xrightarrow[n\to\infty]{} 0 + z \quad \text{car } (I-U)x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0 \text{ et } 1/d_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \end{aligned}$$

La continuité de U entraînerait $Uz_n \xrightarrow[n\to\infty]{} Uz$.

On aurait donc $Uz = z$, c'est-à-dire $z \in N = \ker(I-U)$.

Mais, comme

$$\left\| \frac{x_n - y_n}{2d_n} - z \right\| = \|z_n - z\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

on aurait, pour n assez grand, $\|z_n - z\| < 1/2$, soit :

$$\|x_n - y_n - 2d_n z\| < d_n,$$

ce qui contredirait la définition de d_n, puisque $y_n - 2d_n z \in N$.

• Maintenant, puisque $(d_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée, $(x_n - y_n)_{n\geqslant 1}$ aussi. Alors, comme $y_n \in \ker(I-U)$, on a $(I-U)(x_n - y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$. On est donc ramené au 1[er] cas et on en déduit donc $x_0 \in R(I-U)$. □

Preuve du 3). Par le Théorème des isomorphismes de Banach, cela revient à montrer que $(I-U)$ est surjectif.

Supposons que non, c'est-à-dire que $R(I-U) = E_1 \neq E$.

Posons, pour $n \geqslant 1$:

$$E_n = R\big[(I-U)^n\big] = \big[(I-U)^n\big](E).$$

Comme $E_{n+1} = (I-U)(E_n)$, on obtient, par récurrence, puisque $E_1 \subseteq E_0 = E$:

$$E \supseteq E_1 \supseteq E_2 \supseteq \cdots$$

D'autre part, comme $(I-U)$ est injectif et $E_1 \neq E$, on a, par récurrence : $E_{n+1} \neq E_n$.

Tous les E_n sont fermés par le 2), car

$$(I-U)^n = I + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^k\, U^k = I - V$$

avec $V \in \mathscr{K}(E)$.

On peut alors utiliser le Lemme de Riesz du Chapitre I (Lemme I.2.7) : il existe $x_n \in E_n$ de norme 1 tel que $\operatorname{dist}(x_n, E_{n+1}) \geqslant 1/2$. Alors, pour $n > m$, on écrit :

$$Ux_n - Ux_m = x_n - (I-U)x_n + (I-U)x_m - x_m.$$

On a :

$$\begin{cases} x_n \in E_n \subseteq E_{m+1} \\ (I-U)x_n \in E_{n+1} \subseteq E_{m+1} \\ (I-U)x_m \in E_{m+1}\,; \end{cases}$$

donc

$$x_n - (I-U)x_n + (I-U)x_m \in E_{m+1},$$

et par conséquent :

$$\|Ux_n - Ux_m\| \geqslant \operatorname{dist}(x_m, E_{m+1}) \geqslant 1/2.$$

On ne peut donc extraire de $(Ux_n)_{n\geqslant 1}$ de sous-suite convergente. Il en résulte que $U(B_E)$ n'est pas relativement compacte. □

Remarque. C'est pour montrer ce théorème, ainsi que le suivant que Riesz a démontré son lemme et le théorème disant que si un espace normé a une boule compacte, alors il est de dimension finie.

On peut reformuler le 3) du théorème ainsi :

Corollaire VII.2.10 (alternative de Fredholm). *Si $U \in \mathscr{K}(E)$, alors :*
- *soit l'équation $x - Ux = 0$ a une infinité de solutions ;*
- *soit pour tout $y \in E$, l'équation $x - Ux = y$ a une solution unique.*

Le théorème principal est le suivant :

Théorème VII.2.11 (F. Riesz, 1918).
Soit E un espace de Banach de dimension infinie, et $T \in \mathscr{K}(E)$. Alors :

1) $\boxed{0 \in \sigma(T)}$.

2) *Toute valeur spectrale λ non nulle de T est une* **valeur propre** *de T : $\sigma(T) = \{0\} \cup \sigma_p(T)$, et le sous-espace propre $E_\lambda = \ker(T - \lambda I)$ associé à une valeur propre non nulle λ est de dimension finie.*

3) *$\sigma(T)$ est* **dénombrable**, *et, s'il est infini, on peut indexer les éléments de $\sigma(T) \setminus \{0\}$ en une suite $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$* **tendant vers** 0.

Remarque. Dans le 2), rien n'empêche que 0 soit aussi une valeur propre. Bien sûr, le sous-espace propre associé $E_0 = \ker T$ peut alors être de dimension infinie.

Preuve. 1) On a $0 \in \sigma(T)$ car T n'est pas inversible : s'il l'était, $I = T^{-1} \circ T$ serait compact, et $B_E = \overline{I(B_E)}$ serait compacte, ce qui impliquerait $\dim E < +\infty$.

2) Cela résulte du Théorème VII.2.9 appliqué à $U = (1/\lambda)T$, puisque $T - \lambda I = -\lambda(I - U)$ est injectif si λ n'est pas valeur propre, et est donc inversible.

3) On peut supposer le spectre infini. Il s'agit alors de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il n'y a qu'un nombre fini de valeurs spectrales λ telles que $|\lambda| \geqslant \varepsilon$. En effet, si on note $\lambda_{p_k+1}, \ldots, \lambda_{p_{k+1}}$ celles pour lesquelles $2^{-(k+1)}\|T\| < |\lambda_n| \leqslant 2^{-k}\|T\|$, on a $\sigma(T) \setminus \{0\} = \{\lambda_n\,;\ n \geqslant 1\}$ (car $|\lambda| \leqslant \|T\|$ si $\lambda \in \sigma(T)$) et la suite $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.

Supposons le contraire. Il existe donc un $\varepsilon > 0$ et une infinité de $\lambda_n \in \sigma(T)$, $n \geqslant 1$, distincts, tels que $|\lambda_n| \geqslant \varepsilon$.

Par le 2), les λ_n sont en fait des valeurs propres de T. Soit e_n, $n \geqslant 1$, des vecteurs propres associés, de norme 1. Comme les valeurs propres λ_n, $n \geqslant 1$, sont distinctes, la famille $\{e_n\,;\ n \geqslant 1\}$ est libre (linéairement indépendante).

Soit E_n le sous-espace vectoriel engendré par $\{e_1, \ldots, e_n\}$. On a $E_{n-1} \subsetneqq E_n$, par l'indépendance linéaire de $e_1, \ldots, e_{n-1}, e_n$. Comme E_{n-1} est de dimension finie, il est fermé, et donc le Lemme de Riesz (voir Chapitre I, Lemme I.2.7) dit qu'il existe des u_n, $n \geqslant 1$, tels que :

$$\|u_n\| = 1\,, \quad u_n \in E_n\,, \quad \operatorname{dist}(u_n, E_{n-1}) \geqslant 1/2.$$

Mais

$$(T - \lambda_n I)(E_n) \subseteq E_{n-1} \qquad (\text{car } Te_n = \lambda_n e_n)\,;$$

donc, pour $n > m$:

$$T\Big(\frac{u_n}{\lambda_n}\Big) - T\Big(\frac{u_m}{\lambda_m}\Big) = \frac{1}{\lambda_n}(Tu_n - \lambda_n u_n) - \frac{1}{\lambda_m}(Tu_m - \lambda_m u_m) + (u_n - u_m) = u_n - v\,,$$

avec :

$$\begin{aligned} v &= u_m - \frac{1}{\lambda_n}(Tu_n - \lambda_n u_n) + \frac{1}{\lambda_m}(Tu_m - \lambda_m u_m) \\ &\in E_m + E_{n-1} + E_{m-1} \subseteq E_{n-1}, \end{aligned}$$

de sorte que :

$$\left\| T\Big(\frac{u_n}{\lambda_n}\Big) - T\Big(\frac{u_m}{\lambda_m}\Big) \right\| \geqslant \operatorname{dist}(u_n, E_{n-1}) \geqslant 1/2.$$

Comme $|\lambda_n| \geqslant \varepsilon$, la suite $(u_n/\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée; pourtant on ne peut extraire, par ce qui précède, de sous-suite convergente de $\big(T(u_n/\lambda_n)\big)_{n\geqslant 1}$. Cela contredit la compacité de T et prouve le théorème. □

VII.3. Théorie spectrale des opérateurs auto-adjoints dans un espace de Hilbert

VII.3.1. Opérateurs auto-adjoints

Rappelons qu'un opérateur T sur un espace de Hilbert H est dit *auto-adjoint* si $T^* = T$, c'est-à-dire si $(Tx \mid y) = (x \mid Ty)$ pour tous $x, y \in H$. Dans le cas où l'espace est *complexe*, on dit aussi qu'il est *hermitien.* Lorsque T est auto-adjoint, on a $(Tx \mid x) \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in H$ (car $(Tx \mid x) = (x \mid Tx) = \overline{(Tx \mid x)}$).

Proposition VII.3.1. *Pour tout opérateur auto-adjoint T sur un espace de Hilbert H, on a* $\boxed{\|T\| = \sup_{\|x\|=1} |(Tx \mid x)|}$.

Preuve. Posons $C = \sup_{\|x\|=1} |(Tx \mid x)|$.

Pour tout $x \in H$, on a $|(Tx \mid x)| \leqslant \|Tx\|\,\|x\| \leqslant \|T\|\,\|x\|^2$; donc $C \leqslant \|T\|$.

Inversement, soit $x, y \in H$. On a $\big|\big(T(x+y) \mid x+y\big)\big| \leqslant C\,\|x+y\|^2$, ainsi que $\big|\big(T(x-y) \mid x-y\big)\big| \leqslant C\,\|x-y\|^2$. Or :

$$\big(T(x+y) \mid x+y\big) - \big(T(x-y) \mid x-y\big) = 2\left[(Tx \mid y) + (Ty \mid x)\right],$$

et $(Ty \mid x) = \overline{(x \mid Ty)} = \overline{(T^*x \mid y)} = \overline{(Tx \mid y)}$, car T est auto-adjoint. Il en résulte que :

$$\begin{aligned} 4\operatorname{Re}(Tx \mid y) &= \big(T(x+y) \mid x+y\big) - \big(T(x-y) \mid x-y\big) \\ &\leqslant \big|\big(T(x+y) \mid x+y\big)\big| + \big|\big(T(x-y) \mid x-y\big)\big| \\ &\leqslant C\left[\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\right] \\ &= 2C\,(\|x\|^2 + \|y\|^2), \end{aligned}$$

par l'identité du parallélogramme.

Soit alors $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $|(Tx \mid y)| = \mathrm{e}^{i\theta}(Tx \mid y)$. On obtient :

$$\begin{aligned} |(Tx \mid y)| = \mathrm{e}^{i\theta}(Tx \mid y) &= (Tx \mid \mathrm{e}^{-i\theta}y) = \operatorname{Re}(Tx \mid \mathrm{e}^{-i\theta}y) \\ &\leqslant (C/2)\,(\|x\|^2 + \|\mathrm{e}^{-i\theta}y\|^2) = (C/2)\,(\|x\|^2 + \|y\|^2). \end{aligned}$$

Prenons maintenant $t > 0$, et remplaçons x par tx et y par y/t ; on obtient :

$$|(Tx \mid y)| \leqslant (C/2)\,[t^2\|x\|^2 + (1/t^2)\,\|y\|^2].$$

Si $x, y \neq 0$, la plus petite valeur du second membre est obtenue pour $t = \sqrt{\|y\|/\|x\|}$; on obtient, pour tous $x, y \in H$:

$$|(Tx \mid y)| \leqslant C\,\|x\|\,\|y\|\,.$$

Cela termine la preuve, puisqu'alors $\|Tx\|^2 \leqslant C\,\|x\|\,\|Tx\|$, et par conséquent $\|Tx\| \leqslant C\,\|x\|$. □

VII.3.2. Spectre des opérateurs auto-adjoints dans un espace de Hilbert

Soit $U \colon H \to H$ un opérateur sur un espace de Hilbert H, et U^* son adjoint. Il est clair que U^* est inversible si et seulement si U l'est, et qu'alors on a $(U^*)^{-1} = (U^{-1})^*$. Il en résulte que pour tout opérateur $T \colon H \to H$, on a[1] :

$$\sigma(T^*) = \{\bar{\lambda}\,;\ \lambda \in \sigma(T)\}$$

car $T^* - \bar{\lambda}I$ est l'adjoint de $T - \lambda I$.

Il en résulte que le spectre d'un opérateur auto-adjoint est symétrique par rapport à l'axe réel. En fait, on a mieux.

Théorème VII.3.2. *Si T est un opérateur auto-adjoint, son spectre $\sigma(T)$ est contenu dans $\mathbb{R}$. Plus précisément, si l'on pose :*

$$\boxed{m = \inf_{\|x\|=1} (Tx \mid x) \qquad \textit{et} \qquad M = \sup_{\|x\|=1} (Tx \mid x)}\,,$$

alors $\boxed{\sigma(T) \subseteq [m, M]}$.

Remarque. Il est facile de voir que, lorsque T est auto-adjoint, ses valeurs propres sont réelles. En effet, si λ est une valeur propre de T et x un vecteur propre associé, on a d'une part, $(Tx \mid x) = \lambda\,\|x\|^2$, et d'autre part $(Tx \mid x) = (x \mid Tx) = \bar{\lambda}\,\|x\|^2$, d'où $\lambda = \bar{\lambda}$ puisque $x \neq 0$.

Pour la preuve, on utilisera deux résultats auxiliaires.

Lemme VII.3.3. *Soit H un espace de Hilbert.*

1) *Pour tout opérateur V sur H, on a* $\ker V = [\operatorname{im}(V^*)]^{\perp}$.

2) *Pour tout opérateur U sur H, on a* $\overline{\operatorname{im} U} = [\ker(U^*)]^{\perp}$.

1. On notera que l'égalité correspondante pour les valeurs propres n'est plus vraie (voir l'Exercice 3).

Preuve. 1) On a $Vy = 0$ si et seulement si $(Vy \mid x) = 0$ pour tout $x \in H$. Comme $(Vy \mid x) = (y \mid V^*x)$, cela donne le résultat.

2) On applique le 1) à $V = U^*$; puisque $U^{**} = U$, on obtient $[\ker(U^*)]^\perp = [\operatorname{im} U]^{\perp\perp} = \overline{\operatorname{im} U}$. □

Proposition VII.3.4. *Un opérateur* <u>*auto-adjoint*</u> *U sur un espace de Hilbert H est inversible si et seulement s'il existe une constante $c > 0$ telle que :*

$$\|Ux\| \geqslant c\,\|x\| \qquad \forall x \in H. \tag{1}$$

Preuve. Il est clair que l'inversibilité entraîne (1), avec $c = 1/\|U^{-1}\|$. Inversement, notons d'abord que la condition (1) entraîne l'injectivité de U. Si l'on montre que U est surjective, cela terminera la preuve, grâce au Théorème des isomorphismes de Banach.

Tout d'abord, U est à *image dense*, puisque, par le 2) du lemme, cela revient à dire que U^* est injectif, et que $U = U^*$. Il ne reste donc plus qu'à montrer que l'image de U est fermée. Soit $y \in \overline{\operatorname{im} U}$. Il existe une suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ d'éléments de H telle que $y = \lim_{n\to\infty} Ux_n$. La suite $(Ux_n)_{n\geqslant 1}$ est en particulier une suite de Cauchy. Comme, par (1)

$$\|x_n - x_k\| \leqslant (1/c)\,\|Ux_n - Ux_k\|\,,$$

la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est aussi de Cauchy. Comme H est complet, cette suite converge. Si $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, la continuité de U nous donne $y = \lim_{n\to\infty} Ux_n = Ux$. Donc $\operatorname{im} U$ est fermée. □

Preuve du Théorème VII.3.2. 1) Soit $\lambda = \alpha + i\beta$ un nombre complexe $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$, et supposons que $\beta \neq 0$. On va montrer que $\|(T - \lambda I)(x)\| \geqslant |\beta|\,\|x\|$ pour tout $x \in H$, ce qui impliquera, grâce à la Proposition VII.3.4, que λ n'est pas une valeur spectrale de T. Pour $x \in H$, on a :

$$(Tx - \lambda x \mid x) - (x \mid Tx - \lambda x) = 2i\mathrm{Im}\,[(Tx \mid x) - \lambda\,\|x\|^2] = -2i\beta\,\|x\|^2,$$

car $(Tx \mid x) \in \mathbb{R}$, puisque T est auto-adjoint. D'autre part,

$$\begin{aligned}|(Tx - \lambda x \mid x) - (x \mid Tx - \lambda x)| &\leqslant |(Tx - \lambda x \mid x)| + |(x \mid Tx - \lambda x)| \\ &= 2\,|(Tx - \lambda x \mid x)| \\ &\leqslant 2\,\|Tx - \lambda x\|\,\|x\|\,;\end{aligned}$$

ce qui donne bien $\|Tx - \lambda x\| \geqslant |\beta|\,\|x\|$.

2) Comme on vient de voir que le spectre est réel, il s'agit maintenant de montrer que pour tout $d > 0$, $\lambda = m - d$ n'est pas une valeur spectrale (on montre de même, ou en remplaçant T par $-T$, que $M + d$ n'en est pas une). Or, pour $\|x\| = 1$:

$$(Tx - \lambda x \mid x) = (Tx \mid x) - \lambda\,\|x\|^2 \geqslant m - \lambda = d\,;$$

comme $|(Tx - \lambda x \mid x)| \leqslant \|Tx - \lambda x\|\,\|x\| = \|Tx - \lambda x\|$, on obtient $\|Tx - \lambda x\| \geqslant d$. Par homogénéité, on a $\|Tx - \lambda x\| \geqslant d\,\|x\|$ pour tout $x \in H$, ce qui donne le résultat, au vu de la Proposition VII.3.4. □

Théorème VII.3.5. *Soit T un opérateur auto-adjoint sur un espace de Hilbert H. Alors les valeurs $m = \inf_{\|x\|=1}(Tx \mid x)$ et $M = \sup_{\|x\|=1}(Tx \mid x)$ sont dans le spectre de T.*

Preuve. Il suffit de montrer que $M \in \sigma(T)$ (la preuve de $m \in \sigma(T)$ étant analogue ; de façon alternative, on peut aussi remplacer T par $-T$). Par la Proposition VII.3.4, il suffit de montrer que $\inf_{\|x\|=1} \|T - MI\| = 0$.

Comme $\sigma(T - aI) = \sigma(T) - a$, on peut, en remplaçant T par $T + aI$, supposer que $0 \leqslant m \leqslant M$. Alors $\|T\| = M$, par la Proposition VII.3.1.

Soit $x_n \in H$, avec $\|x_n\| = 1$ tels que $(Tx_n \mid x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} M$. On a :

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \|(T - MI)(x_n)\|^2 = (Tx_n - Mx_n \mid Tx_n - Mx_n) \\ &= \|Tx_n\|^2 + M^2\|x_n\|^2 - 2M(Tx_n \mid x_n) \quad \text{(car } T \text{ est auto-adjoint)} \\ &\leqslant \|T\|^2 + M^2 - 2M(Tx_n \mid x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \|T\|^2 + M^2 - 2M.M = 0\,, \end{aligned}$$

puisque $\|T\| = M$. Donc $\|(T - MI)(x_n)\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et cela termine la preuve. □

Corollaire VII.3.6. *Le spectre d'un opérateur auto-adjoint sur un espace de Hilbert n'est jamais vide.*

Corollaire VII.3.7. *Pour tout opérateur T auto-adjoint sur un espace de Hilbert, son rayon spectral est égal à sa norme : $r(T) = \|T\|$.*

Preuve. Le Théorème VII.3.2 et le Théorème VII.3.5 impliquent que l'on a $r(T) = \max\{|M|, |m|\} = \sup_{\|x\|=1} |(Tx \mid x)|$. Il suffit alors ensuite d'utiliser la Proposition VII.3.1. □

Remarque. Lorsque l'espace de Hilbert est *complexe*, on peut en fait donner une preuve simple directe de ce corollaire. En effet, pour tout opérateur T, on a $\|T^*T\| = \|T\|^2$, puisque, d'une part $\|T^*T\| \leqslant \|T^*\|\,\|T\| = \|T\|^2$, et que, d'autre part, pour tout $x \in H$, on a $\|Tx\|^2 = (Tx \mid Tx) = (T^*Tx \mid x) \leqslant \|T^*T\|\,\|x\|^2$. Donc si T est auto-adjoint, on a $\|T^2\| = \|T\|^2$, et, par récurrence, $\|T^{2^k}\| = \|T\|^{2^k}$ pour tout $k \geqslant 0$. Il en résulte puisque, l'espace étant complexe, $r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}$, que $r(T) = \lim_{k\to\infty} \|T^{2^k}\|^{1/2^k} = \|T\|$. □

VII.3.3. Décomposition spectrale des opérateurs auto-adjoints compacts

Proposition VII.3.8. *Tout opérateur auto-adjoint compact sur un espace de Hilbert non réduit à $\{0\}$ possède au moins une valeur propre.*

Preuve. On peut supposer cet opérateur T non nul (car s'il est nul, le résultat est clair). Alors l'une des valeurs spectrale m ou M de T définies dans le Théorème VII.3.5 est non nulle, par la Proposition VII.3.1. T étant compact, toute valeur spectrale non nulle de T est une valeur propre. □

Remarque. Si T est auto-adjoint, son spectre n'est pas vide, mais sans l'hypothèse de compacité on ne peut affirmer l'existence de valeur propre. En effet, l'opérateur $T\colon L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ défini par $Tf(x) = xf(x)$ est auto-adjoint mais n'a pas de valeur propre (si $Tf = \lambda f$ avec $f \neq 0$, on doit avoir $xf(x) = \lambda f(x)$, d'où $x = \lambda$ sur l'ensemble $\{f \neq 0\}$, de mesure > 0, ce qui n'est bien sûr pas possible).

Lemme VII.3.9. *Soit T un opérateur auto-adjoint sur un espace de Hilbert H.*

1) *Les sous-espaces propres de T correspondant à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.*

2) *Si F est un sous-espace invariant par T, alors $F^\perp$ est aussi invariant par T et $\sigma(T) = \sigma(T_{|F}) \cup \sigma(T_{|F^\perp})$.*

Preuve. 1) Si λ et λ' sont deux valeurs propres distinctes de T, et x et x' deux vecteurs propres associés, on a :

$$\lambda(x \mid x') = (\lambda x \mid x') = (Tx \mid x') = (x \mid Tx') = (x \mid \lambda' x') = \lambda'(x \mid x')$$

(rappelons que $\lambda' \in \mathbb{R}$) ; donc $(x \mid x') = 0$.

2) Soit $y \in F^\perp$. Pour tout $x \in F$, on a $(Ty \mid x) = (y \mid Tx) = 0$ puisque $Tx \in F$; donc $Ty \in F^\perp$.

Il est clair que $T_{|F}$ et $T_{|F^\perp}$ sont aussi auto-adjoints (sur F et $F^\perp$ respectivement). Si $\lambda \in \sigma(T_{|F})$, on a, par la Proposition VII.3.4 : $\inf_{x\in H, \|x\|=1} \|T - \lambda I_H\| \leqslant \inf_{x\in F, \|x\|=1} \|T - \lambda I_E\| = 0$; donc $\inf_{x\in H, \|x\|=1} \|T - \lambda I_H\| = 0$ et $\lambda \in \sigma(T)$. De même $\sigma(T_{|F^\perp}) \subseteq \sigma(T)$.

Soit maintenant $\lambda \notin \sigma(T_{|F}) \cup \sigma(T_{|F^\perp})$. Il existe alors, toujours par la Proposition VII.3.4, une constante $c > 0$ telle que $\|Ty - \lambda y\| \geqslant c\,\|y\|$ pour tout $y \in F$ et $\|Tz - \lambda z\| \geqslant c\,\|z\|$ pour tout $z \in F^\perp$. Or tout $x \in H$ s'écrit $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in F^\perp$. Comme $Ty - \lambda y \in F$ et $Tz - \lambda z \in F^\perp$ sont orthogonaux, on obtient :

$$\begin{aligned}\|Tx - \lambda x\|^2 &= \|(Ty - \lambda y) + (Tz - \lambda z)\|^2 = \|Ty - \lambda y\|^2 + \|Tz - \lambda z\|^2 \\ &\geqslant c^2\,\|y\|^2 + c^2\,\|z\|^2 = c^2\,\|x\|^2,\end{aligned}$$

ce qui prouve que $\lambda \notin \sigma(T)$. □

Nous pouvons donc maintenant énoncer le résultat principal.

Théorème VII.3.10. *Soit T un opérateur* <u>*auto-adjoint*</u> *et* <u>*compact*</u> *sur un espace de Hilbert* séparable *H non réduit à $\{0\}$. Alors il existe une base orthonormée $(e_n)_{n\geqslant 1}$ de H formée de vecteurs propres de T et l'on a, pour tout $x \in H$:*

$$\boxed{Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x \mid e_n)\, e_n},$$

où λ_n est la valeur propre associée à e_n.

Preuve. 1) Nous avons vu que l'ensemble des valeurs propres de T n'est pas vide. D'autre part, nous savons, grâce à la compacité de T, que cet ensemble est dénombrable. Pour chaque $\lambda \in \sigma_p(T)$, prenons une base orthonormée B_λ du sous-espace propre $\ker(T - \lambda I)$ (rappelons qu'il est de dimension finie si $\lambda \neq 0$). Comme les sous-espaces propres sont deux-à-deux orthogonaux, $B = \bigcup_{\lambda \in \sigma_p(T)} B_\lambda$ est un système orthonormé. Pour montrer que c'est une base orthonormée, il ne reste plus qu'à voir que le sous-espace fermé F engendré par B, c'est-à-dire par $\bigcup_{\lambda \in \sigma_p(T)} \ker(T - \lambda I)$, est égal à H. Or s'il n'était pas égal à H, son orthogonal $F^\perp$ serait non réduit à $\{0\}$. Mais, F étant invariant par T, $F^\perp$ l'est aussi et, par la Proposition VII.3.8, $T_{|F^\perp}$ possèderait au moins une valeur propre. Une telle valeur propre est valeur propre de T. Les vecteurs propres associés seraient à la fois dans F et dans $F^\perp$, ce qui n'est pas possible.

Pour finir, notons e_n, $n \geqslant 1$ les éléments de la base B, et λ_n la valeur propre associée à e_n. Comme $|\lambda_n| \leqslant r(T) = \|T\|$ pour tout $n \geqslant 1$, l'opérateur $U\colon H \to H$ défini par $U(x) = \sum_{n=1}^\infty \lambda_n (x \mid e_n)\, e_n$ est bien défini (car $\sum_{n=1}^\infty |(x \mid e_n)|^2 < +\infty$ entraîne $\sum_{n=1}^\infty |\lambda_n|^2 |(x \mid e_n)|^2 < +\infty$) et est continu :

$$\|Ux\|^2 = \sum_{n=1}^\infty |\lambda_n|^2 |(x \mid e_n)|^2 \leqslant \|T\|^2 \sum_{n=1}^\infty |(x \mid e_n)|^2 = \|T\|^2 \|x\|^2.$$

Comme $U(e_n) = \lambda_n e_n = T(e_n)$ pour tout $n \geqslant 1$, on a $U = T$. □

VII.4. Annexe : Théorème d'Ascoli

Théorème VII.4.1 (Théorème d'Ascoli). *Soit X un espace métrique compact, et $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{C}(X)$. Alors $\mathscr{F}$ est relativement compacte dans $\mathscr{C}(X)$ si et seulement si $\mathscr{F}$ est bornée et est équicontinue.*

Preuve. 1) *Condition nécessaire.* Supposons $\mathscr{F}$ relativement compacte dans $\mathscr{C}(X)$. Alors $\mathscr{F}$ est bornée, comme toute partie compacte d'un espace métrique. Prouvons qu'elle est équicontinue. Soit $x_0 \in X$ et soit $\varepsilon > 0$. $\mathscr{F}$ étant relativement compacte, elle est précompacte ; il existe donc un nombre fini de fonctions $f_1, \ldots, f_p \in \mathscr{F}$ telles que :

$$\mathscr{F} \subseteq \bigcup_{j=1}^p B(f_j, \varepsilon/3).$$

Chacune de ces fonctions f_j étant continue en x_0, il existe $\delta_j > 0$ tel que :

$$d(x, x_0) \leqslant \delta_j \quad \Longrightarrow \quad |f_j(x) - f_j(x_0)| \leqslant \varepsilon/3.$$

Soit $\delta = \min\{\delta_1, \ldots, \delta_p\}$, et soit $x \in X$ tel que $d(x, x_0) \leqslant \delta$. Pour toute $f \in \mathscr{F}$, il existe $j \leqslant p$ tel que $f \in B(f_j, \varepsilon/3)$. On a :

$$\sup_{t \in X} |f(t) - f_j(t)| = \|f - f_j\|_\infty \leqslant \varepsilon/3\,;$$

donc :

$$\begin{aligned}|f(x)-f(x_0)| &\leqslant |f(x)-f_j(x)|+|f_j(x)-f_j(x_0)|+|f_j(x_0)-f(x_0)| \\ &\leqslant \|f-f_j\|_\infty+\frac{\varepsilon}{3}+\|f-f_j\|_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.\end{aligned}$$

2) *Condition suffisante.* Supposons $\mathscr{F}$ bornée et équicontinue. Nous allons montrer que de toute suite $(f_n)_n$ d'éléments de $\mathscr{F}$, on peut extraire une sous-suite convergente (pour la norme de $\mathscr{C}(X)$, c'est-à-dire uniformément).

Tout d'abord, notons que la compacité de X entraîne que $\mathscr{F}$ est *uniformément* équicontinue :

$$(\forall\varepsilon>0)\ \ (\exists\delta(\varepsilon)>0)\ \ (\underline{\forall x,y\in X}) : d(x,y)\leqslant\delta \Rightarrow \big[|f(x)-f(y)|\leqslant\varepsilon\,,\ \underline{\forall f\in\mathscr{F}}\big]\,.$$

La preuve est la même que celle du Théorème de Heine usuel.

a) $\mathscr{F}$ étant bornée, il existe $M<+\infty$ tel que :

$$\sup_{x\in X}|f_n(x)|=\|f_n\|_\infty\leqslant M\,,\quad \forall n\geqslant 1.$$

Soit :

$$\Delta=\{x_1,x_2,\ldots\}$$

une partie dénombrable dense de X.

On a :

$$|f_n(x_k)|\leqslant M\,,\quad \forall n\geqslant 1,\ \forall k\geqslant 1.$$

Plaçons-nous en x_1 : de la suite numérique bornée $\big(f_n(x_1)\big)_n$, on peut extraire une sous-suite convergente :

$$f_{1,1}(x_1), f_{1,2}(x_1),\ldots,f_{1,n}(x_1),\ldots \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l_1.$$

Ensuite, en se plaçant en x_2, de la *sous-suite* numérique bornée $\big(f_{1,n}(x_2)\big)_n$, on peut extraire une sous-suite convergente :

$$f_{2,1}(x_2), f_{2,2}(x_2),\ldots,f_{2,n}(x_2),\ldots \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l_2.$$

Notons que, comme on a pris une sous-suite de la première sous-suite, on a encore $\lim_{n\to\infty} f_{2,n}(x_1)=l_1$.

Continuons à extraire de cette façon des sous-suites de la sous-suite précédente : pour tout $q\geqslant 1$, on aura :

$$\lim_{n\to\infty} f_{q,n}(x_k)=l_k\,,\quad \text{pour } 1\leqslant k\leqslant q.$$

Utilisons alors le procédé diagonal de Cantor : la suite diagonale $(f_{n,n})_n$ vérifie :

$$g_n(x_k)=f_{n,n}(x_k)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l_k\,,\quad \forall k\geqslant 1.$$

b) Nous allons maintenant utiliser l'équicontinuité uniforme de $\mathscr{F}$ pour montrer que la suite $(g_n)_n$ est uniformément de Cauchy, ce qui prouvera que $(f_n)_n$ possède une sous-suite convergente, puisque $(g_n)_n$ est elle-même une sous-suite de $(f_n)_n$.

Soit $\varepsilon > 0$.

Pour chaque $k \geqslant 1$, soit $\delta = \delta(\varepsilon/3) > 0$ le nombre associé à $\varepsilon/3$ dans la définition de l'équicontinuité uniforme. Comme $\Delta = \{x_k\,;\ k \geqslant 1\}$ est dense dans X, on a :

$$X = \bigcup_{k \geqslant 1} B_d(x_k, \delta),$$

où $B_d(x_k, \delta)$ désigne la boule ouverte de l'espace métrique X de centre x_k et de rayon δ. La compacité de X permet de trouver un $K \geqslant 1$ tel que :

$$X = \bigcup_{k=1}^{K} B_d(x_k, \delta).$$

Mais, d'après le partie a) de la preuve, pour chaque $k \geqslant 1$, il existe un entier $N_k \geqslant 1$ tel que :

$$m, n \geqslant N_k \quad \Longrightarrow \quad |g_m(x_k) - g_n(x_k)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Soit $N = \max\{N_1, \ldots, N_K\}$, et soit $x \in X$. Il existe $k \leqslant K$ tel que $d(x, x_k) < \delta$; alors, pour $m, n \geqslant N$:

$$\begin{aligned} |g_m(x) - g_n(x)| &\leqslant |g_m(x) - g_m(x_k)| + |g_m(x_k) - g_n(x_k)| + |g_n(x_k) - g_n(x)| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\,. \end{aligned}$$

□

VII.5. Exercices

Exercice 1.

Dans cet exercice, les espaces seront complexes.

Soit $\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

1) Montrer que la formule

$$(Af)(x) = \varphi(x) \int_0^1 \varphi(t)\, f(t)\, dt$$

définit une application linéaire continue de l'espace $L^2([0,1])$ dans lui-même.

2) Montrer que A est auto-adjoint : $A^* = A$.

3) Montrer qu'il existe $\lambda \geqslant 0$, que l'on précisera, tel que $A^2 = \lambda A$.

4) Déterminer le rayon spectral de A en fonction de λ ; le calculer pour $\varphi(x) = \frac{x}{1+x}$ ·

Exercice 2.

Soit $K\colon [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour $f \in \mathscr{C}([0,1])$, on définit :

$$(Tf)(x) = \int_0^x K(x,t)\, f(t)\, dt\,.$$

1) Montrer que, pour tous $x, x' \in [0,1]$, on a :

$$|(Tf)(x) - (Tf)(x')| \leqslant \Big(\|K\|_\infty |x - x'| + \sup_{t \in [0,1]} |K(x,t) - K(x',t)| \Big) \, \|f\|_\infty\,;$$

en déduire que $Tf \in \mathscr{C}([0,1])$, puis que $T\colon \mathscr{C}([0,1]) \to \mathscr{C}([0,1])$ est un opérateur compact (*utiliser le Théorème d'Ascoli*).

3) Montrer que $|(T^n f)(x)| \leqslant \|f\|_\infty \|K\|_\infty^n\, x^n/n!$ pour tout $x \in [0,1]$ et en déduire le rayon spectral de T (*on pourra utiliser que* $n! \geqslant k^{n-k}$ *pour tout* $n \geqslant k$ *pour montrer que* $(n!)^{1/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$).

4) En déduire le spectre de T.

Exercice 3 (*Shift et Backward shift*).

On considère l'espace ℓ_2 des suites de nombres complexes de (module de) carré sommable.

1) On considère l'opérateur $B\colon \ell_2 \to \ell_2$ (appelé le *backward shift* ou *décalage à gauche*) défini par $B(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots)$.

a) Montrer que tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| < 1$ est valeur propre de B.

b) Déterminer le spectre de B (*on pourra remarquer que* $\|B\| = 1$).

2) Soit $S\colon \ell_2 \to \ell_2$ l'opérateur (appelé *shift* ou *décalage à droite*) défini par $S(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$. Montrer que S ne possède aucune valeur propre (*on pourra distinguer les cas* $\lambda = 0$ *et* $\lambda \neq 0$).

3) Soit H un espace de Hilbert. Montrer que pout tout opérateur $T\colon H \to H$, on a $\sigma(T^*) = \sigma(T)^\sim$, T^* étant l'adjoint de T, et $A^\sim = \{\bar{z}\,;\ z \in A\}$ pour $A \subseteq \mathbb{C}$.

4) Montrer que le spectre de S est le disque unité fermé $\overline{\mathbb{D}} = \{\lambda \in \mathbb{C}\,;\ |\lambda| \leqslant 1\}$.

Exercice 4 (*Compact non vide arbitraire comme spectre*).

1) Soit $(c_n)_{n\geqslant 1}$ une suite bornée de nombres complexes, et $T\colon \ell_2 \to \ell_2$ l'opérateur défini par $T(x) = (c_n x_n)_{n\geqslant 1}$, pour tout $x = (x_n)_{n\geqslant 1} \in \ell_2$.

a) Montrer que chaque c_n, $n \geqslant 1$, est une valeur propre de T.

b) Montrer que si $\lambda \notin \overline{\{c_n\,;\ n \geqslant 1\}}$, alors $\lambda \notin \sigma(T)$.

c) En déduire le spectre $\sigma(T)$ de T.

2) Soit K une partie compacte non vide arbitraire de $\mathbb{C}$. Montrer qu'il existe un opérateur $T \in \mathscr{L}(\ell_2)$ tel que $\sigma(T) = K$.

Exercice 5 (*Spectre approché et isométries*).

On note $\mathbb{D} = \{\lambda \in \mathbb{C}\,;\ |\lambda| < 1\}$ et $\partial\mathbb{D} = \{\lambda \in \mathbb{C}\,;\ |\lambda| = 1\}$.

Soit E un espace de Banach (complexe pour fixer les idées), et $T \in \mathscr{L}(E)$, où $\mathscr{L}(E)$ désigne l'espace des opérateurs (c'est-à-dire des applications linéaires continues) sur E.

On note R la résolvante de T : $R(\lambda) = (T - \lambda\,\mathrm{I})^{-1}$ pour $\lambda \in \rho(T) = \mathbb{C} \setminus \sigma(T)$.

A. 1) Montrer que $\|R(\lambda_1) - R(\lambda_2)\| \leqslant |\lambda_1 - \lambda_2|\, \|R(\lambda_1)\|\, \|R(\lambda_2)\|$.

2) Soit $\lambda_n \in \rho(T)$ tels que $\lambda_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda \in \mathbb{C}$, et tels qu'il existe une constante $M > 0$ telle que $\|R(\lambda_n)\| \leqslant M$, pour tout $n \geqslant 1$.

a) Montrer qu'il existe $U \in \mathscr{L}(E)$ tel que $R(\lambda_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} U$.

b) Vérifier que $U\,(T - \lambda\,\mathrm{I}) = (T - \lambda\,\mathrm{I})\,U = \mathrm{I}$, et donc $\lambda \in \rho(T)$ et $U = R(\lambda)$.

B. On suppose à partir de maintenant que T est une isométrie.

1) Montrer que $\sigma(T) \subseteq \overline{\mathbb{D}}$.

2) Montrer que si $\sigma(T) \subseteq \partial\mathbb{D}$, alors l'isométrie T est surjective.

On suppose désormais que $\sigma(T) \not\subseteq \partial\mathbb{D}$, et on pose $A = \sigma(T) \cap \mathbb{D}$.

3) Soit $\lambda_n \in \mathbb{D} \setminus A$ tels que $\lambda_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda \in \mathbb{D}$.

a) Montrer que pour tout $x \in E$, on a $\|(T - \lambda_n\,\mathrm{I})x\| \geqslant (1 - |\lambda_n|)\, \|x\|$.

b) En déduire qu'il existe $\delta > 0$ et $N \geqslant 1$ tels que pour tout $x \in E$ et pour $n \geqslant N$, on ait :

$$\|(T - \lambda_n\,\mathrm{I})\,x\| \geqslant \delta\, \|x\|\,.$$

c) En déduire que la suite $\big(\|R(\lambda_n)\|\big)_{n\geqslant 1}$ est bornée. Que peut-on dire pour λ ?

d) En déduire que $A = \mathbb{D}$, puis, que $\sigma(T) = \overline{\mathbb{D}}$.

Exercice 6.

On considère l'espace *complexe* $L^2 = L^2([0,1],\mathbb{C})$, et on pose $(Sf)(t) = tf(t)$.

1) a) Vérifier que $Sf \in L^2$ pour toute $f \in L^2$ et que l'on définit ainsi un opérateur borné $S\colon L^2 \to L^2$.

b) Montrer que S n'a aucune valeur propre.

2) Soit $\lambda \in [0,1\,[$, et soit $\varepsilon > 0$ tel que $[\lambda, \lambda+\varepsilon] \subseteq [0,1]$. On considère la fonction $f_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \mathbb{I}_{[\lambda,\lambda+\varepsilon]}$.

a) Montrer que $\lim_{\varepsilon\to 0}(S - \lambda I)(f_\varepsilon) = 0$.

b) En déduire que λ est dans le spectre $\sigma(S)$ de S.

3) Montrer que si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [0,1]$, alors $\lambda \notin \sigma(S)$.

4) Déterminer $\sigma(S)$.

Exercice 7 (*Spectre des opérateurs de multiplication sur $L^2(m)$*).

Soit $(S, \mathcal{T}, m)$ un espace mesuré σ-fini.

1) Montrer que pour toute partie mesurable B non négligeable, il existe une partie mesurable $A \subseteq B$ non négligeable de mesure finie.

2) Pour $u \in L^\infty(m)$, on pose, pour toute $f \in L^2(m)$:

$$M_u(f) = u\,f\,.$$

a) Montrer que M_u définit une application linéaire continue de $L^2(m)$ dans lui-même, de norme $\leqslant \|u\|_\infty$.

b) Montrer que $\|M_u\| = \|u\|_\infty$ (*si $\beta < \|u\|_\infty$, utiliser la question 1) pour trouver $f \in L^2(m)$ de norme* 1 *telle que $\|M_u(f)\|_2 \geqslant \beta$*).

3) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$.

a) Montrer que si $u - \lambda \mathbb{1}$ ne s'annule pas m-presque partout et que $\frac{1}{u-\lambda \mathbb{1}} \in L^\infty(m)$, alors $M_u - \lambda\,\mathrm{Id}$ est inversible.

b) En déduire que s'il existe un voisinage V de λ tel que $u^{-1}(V)$ soit négligeable, alors λ n'est pas dans le spectre de M_u.

c) Inversement, on suppose que $u^{-1}(V)$ n'est pas négligeable, pour tout voisinage V de λ. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $f_\varepsilon \in L^2(m)$ de norme 1 telle que $\|(u - \lambda)f_\varepsilon\|_2 \leqslant \varepsilon$ (*en choisissant V convenablement, et en utilisant la question 1), trouver une partie mesurable A telle que* $0 < m(A) < +\infty$ *et* $|u(t) - \lambda| \leqslant \varepsilon$ *pour* $t \in A$).

Qu'en conclut-on pour λ ?

d) Montrer que $\sigma(M_u) \subseteq \overline{u(S)}$.

4) On suppose maintenant que S est un espace topologique et que $\mathcal{T}$ est sa tribu borélienne. On suppose de plus que tout ouvert non vide a une mesure > 0. Montrer que si u est continue (bornée), alors $\sigma(M_u) = \overline{u(S)}$.

Exercice 8 (*Opérateur de Volterra*).

Pour toute fonction continue $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, on pose, pour $x \in [0,1]$:

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(t)\,dt\,.$$

1) Montrer que l'on définit ainsi un opérateur $T\colon \mathscr{C}([0,1]) \to \mathscr{C}([0,1])$, appelé *opérateur de Volterra*, et que cet opérateur est compact.

2) a) Pour toute fonction continue $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, résoudre l'équation différentielle $F - \lambda\,F' = g$ avec $F(0) = 0$ (*on commencera par résoudre l'équation sans second membre $F - \lambda\,F' = 0$, puis on utilisera la méthode de variation de la constante ; on posera $G(x) = \int_0^x g(t)\,\mathrm{e}^{-t/\lambda}\,dt$*).

b) En déduire le spectre de T. Est-ce que 0 est une valeur propre de T ?

Exercice 9.

On considère l'espace de Banach $\mathscr{C}([0,1])$ des fonctions *complexes* continues sur $[0,1]$, muni de la norme uniforme.

On définit l'opérateur T de $\mathscr{C}([0,1])$ dans lui-même par

$$T(f)(x) = \int_0^{1-x} f(t)\,dt\,.$$

1) a) Montrer que $|Tf(x) - Tf(y)| \leqslant \|f\|_\infty\,|x-y|$.

b) En déduire que l'opérateur T est compact.

2) Montrer que 0 est une valeur spectrale de T, mais n'en est pas une valeur propre.

3) Soit λ une valeur propre de T, et g un vecteur propre associé.

a) Montrer que g est de classe C^1, que $g(1) = 0$, et que g vérifie une équation différentielle du premier degré, que l'on précisera.

b) En déduire que g est de classe C^2, que $g'(0) = 0$ et $\lambda g'(1) = -g(0)$, et que g vérifie :

$$\lambda^2 g''(x) = -g(x)\,, \qquad \forall x \in [0,1]\,.$$

c) Résoudre l'équation différentielle $\lambda^2 y'' + y = 0$, avec la condition initiale $y'(0) = 0$.

d) Montrer que l'on a forcément $\lambda = \dfrac{1}{(\pi/2) + 2k\pi}$ avec $k \in \mathbb{Z}$, et vérifier que toutes ces valeurs sont bien des valeurs propres de T.

4) a) Décrire le spectre de T.

b) En déduire $\lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}$.

Exercice 10.

Dans cet exercice, les espaces seront réels.

On dit qu'une application linéaire $U \colon \mathscr{C}(X) \to \mathscr{C}(Y)$ (X, Y espaces compacts) est *positive* si $U(f) \geqslant 0$ pour toute $f \geqslant 0$.

1) Montrer que si U est positive, alors $U(f) \leqslant U(g)$ si $f \leqslant g$, et en déduire que U est continue et que $\|U\| = \|U(\mathbb{1})\|_\infty$.

2) Soit $\varphi\colon [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}_+$ une fonction continûment différentiable et telle que la dérivée par rapport à la première variable $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ soit positive. Montrer que la formule

$$(U_\varphi f)(x) = \int_0^1 \varphi(x,t)\,f(t)\,dt$$

définit un opérateur (linéaire continu) sur $\mathscr{C}([0,1])$ dans lui-même et que l'on a $\|U_\varphi\| = \int_0^1 \varphi(1,t)\,dt$ (*on montrera que la fonction $h = U_\varphi(\mathbb{1})$ est croissante*).

3) Montrer que l'opérateur U_φ est compact.

Exercice 11.

Montrer que tout opérateur compact $T\colon E \to F$, avec $F = \ell_p$, $1 \leqslant p < \infty$, ou $F = c_0$, est limite d'opérateurs de rang fini (*utiliser l'Exercice 13 du Chapitre I*).

Exercice 12.

1) Montrer que tout opérateur de Hilbert-Schmidt (voir Exercice 23 du Chapitre II) sur un espace de Hilbert séparable (réel) est compact.

2) Soit $\mathbf{w} = (w_n)_{n\geqslant 1}$ une suite bornée. Pour tout $\mathbf{x} = (x_n)_{n\geqslant 1} \in \ell_2$, on pose $T(\mathbf{x}) = (w_n x_n)_{n\geqslant 1}$.

a) Montrer que $T = T_{\mathbf{w}}$ est un opérateur continu et calculer sa norme.

b) Montrer que T est compact si et seulement si $w_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

c) Donner un exemple d'opérateur sur ℓ_2 qui est compact, mais pas de Hilbert-Schmidt.

Exercice 13.

Soit E un espace de Banach. On veut montrer que pour tout opérateur compact $T\colon E \to E$ qui n'est pas de rang fini, on a $0 \in \overline{T(S_E)}$, où $S_E = \{x \in E\,;\ \|x\| = 1\}$.

Soit $T\colon E \to E$ un opérateur tel que $0 \notin \overline{T(S_E)}$.

1) Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que $\|Tx\| \geqslant c\,\|x\|$ pour tout $x \in E$, et en déduire que $T(E)$ est fermé dans E.

2) En déduire qu'il existe $r > 0$ tel que $B_{T(E)}(0,r) \subseteq T(B_E)$ ($B_E = B(0,1)$ est la boule unité fermée de E).

3) En déduire que si T est de plus compact, alors il est de rang fini (c'est-à-dire que $\dim T(E) < +\infty$).

Exercice 14 (*Opérateurs compacts et hypercyclicité*).

On rappelle (Exercice 19 du Chapitre IV) qu'une application linéaire continue $T\colon X \to X$ sur un espace de Banach séparable X est dite *hypercyclique* s'il existe $x \in X$ dont l'orbite $O(x,T)$ est dense dans X. On suppose dans cet exercice que X est un espace de Banach *complexe* de dimension infinie.

1) Montrer que si le rayon spectral de T est < 1, alors T n'est pas hypercyclique.

2) a) Montrer que pour tout opérateur $U\colon X \to X$, on a $\operatorname{im} U^* \subseteq (\ker U)^\perp$, où $A^\perp = \{\varphi \in X^*\,;\ \langle \varphi, x\rangle = 0, \forall x \in A\}$, pour $A \subseteq X$.

b) Montrer que pour tout opérateur $T\colon X \to X$, toute valeur propre de T est une valeur spectrale de T^*.

3) Montrer que si T est hypercyclique, alors son adjoint T^* n'a pas de valeur propre.

4) Montrer que si T est un opérateur compact, alors T n'est pas hypercyclique.

Exercice 15 (*Théorème de Lomonosov*).

On dit qu'un opérateur $T\colon X \to X$ sur un espace de Banach X possède un *sous-espace invariant non trivial* (*s.e.i.n.t.*) s'il existe un sous-espace fermé X_0 de X, différent de $\{0\}$ et X, tel que $T(X_0) \subseteq X_0$. Le but de l'exercice est de montrer que si X est de dimension infinie, alors tout opérateur compact possède un sous-espace invariant non trivial. Soit donc $T\colon X \to X$ un opérateur compact, que l'on peut supposer non nul (expliquer pourquoi).

1) Montrer qu'il existe un vecteur $x_0 \in X$ tel que $\|x_0\| > 1$ et tel que, en posant $B_0 = \{x \in X\,;\ \|x - x_0\| < 1\}$, $K_1 = \overline{T(B_0)}$ soit compact et ne contienne pas 0.

On pose $\mathfrak{C}_T = \{U \in \mathscr{L}(X)\,;\ UT = TU\}$.

2) On suppose qu'il existe $x_1 \in K_1$ tel que l'espace $X_1 = \overline{\{Ux_1\,;\ U \in \mathfrak{C}_T\}}$ ne rencontre pas B_0. Montrer que X_1 est un *s.e.i.n.t.* pour T.

3) On suppose qu'il n'existe pas de tel x_1.

a) Montrer que pour tout $x \in K_1$ il existe $U_x \in \mathfrak{C}_T$ tel que $U_x(x) \in B_0$.

b) Montrer qu'il existe $U_1, \ldots U_n \in \mathfrak{C}_T$ tels que pour tout $x \in X$ il existe $k \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $U_k(x) \in B_0$.

c) On définit $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \colon K_1 \to \mathbb{R}$ par $\varphi_k(x) = \max\{0, 1 - \|U_k(x) - x_0\|\}$. Montrer que $\sum_{k=1}^n \varphi_k(x) \neq 0$ pour tout $x \in K_1$.

d) Pour $x \in K_1$, on pose $Q(x) = \dfrac{\sum_{k=1}^n \varphi_k(x)\, U_k(x)}{\sum_{k=1}^n \varphi_k(x)}$. Montrer que Q est une fonction continue de K_1 dans B_0.

e) Montrer que l'enveloppe convexe fermée $K = \overline{\operatorname{conv}}\, Q(K_1)$ de $Q(K_1)$ est compacte et convexe.

f) Pour cette question, on *utilisera le Théorème du point fixe de Schauder*, que l'on *admet* : Toute fonction continue $f \colon C \to C$ envoyant une partie convexe fermée C d'un espace de Banach dans elle-même et telle que $\overline{f(C)}$ soit compact possède un point fixe.

Montrer qu'il existe $y_0 \in K$ tel que $Q[T(y_0)] = y_0$.

g) On pose $L(x) = \dfrac{1}{\sum_{k=1}^n \varphi_k(Ty_0)} \displaystyle\sum_{k=1}^n \varphi_k(Ty_0)\, U_k(x)$. Montrer que $L \in \mathfrak{C}_T$ et que $y_0 \in \ker(\mathrm{Id}_X - LT)$.

h) Montrer que $\ker(\mathrm{Id}_X - LT)$ est de dimension finie, puis que c'est un *s.e.i.n.t.* pour T.

Chapitre VIII

DUALITÉ

VIII.1. Topologie faible

Dans tout ce qui suit E sera un *espace de Banach* (même si la complétude sera souvent inutile).

VIII.1.1. Définition

Définition VIII.1.1. *La topologie faible de E est la topologie la moins fine pour laquelle toutes les formes linéaires continues $\varphi \in E^*$ restent continues.*

On la note $\sigma(E, E^*)$, ou plus rapidement w.

On a :

Proposition VIII.1.2. *Une base de voisinages pour la topologie faible de $x_0 \in E$ est donnée par les parties :*

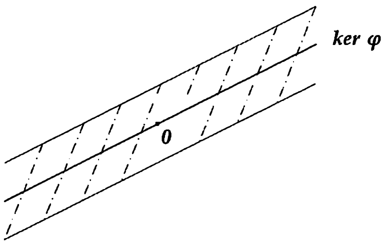
$$V_{\varepsilon,\varphi_1,\ldots,\varphi_n}(x_0) = \{x \in E\,;\ |\varphi_j(x - x_0)| \leqslant \varepsilon,\ \forall j = 1, \ldots, n\},$$

avec $\varepsilon > 0$, $n \geqslant 1$, et $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in E^*$ arbitraires.

Preuve. On vérifie facilement qu'on peut définir une topologie $\mathscr{T}$ à partir de ces ensembles $V_{\varepsilon,\varphi_1,\ldots,\varphi_n}(x_0)$, en disant qu'une partie $\Omega \subseteq E$ est ouverte si et seulement si pour tout $x_0 \in \Omega$, il existe $\varepsilon > 0$, $n \geqslant 1$, et $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in E^*$ tels que $V_{\varepsilon,\varphi_1,\ldots,\varphi_n}(x_0) \subseteq \Omega$. Alors les $V_{\varepsilon,\varphi_1,\ldots,\varphi_n}(x_0)$ forment une base de voisinages de x_0 pour cette topologie. Comme ce sont clairement des voisinages de x_0 pour la topologie faible, la topologie faible est plus fine que la topologie $\mathscr{T}$. D'autre part, cette topologie $\mathscr{T}$ est moins fine que la topologie de la norme, et toute $\varphi \in E^*$ est continue pour elle (car $V_{\varepsilon,\varphi}(0)$ est un voisinage de 0). Donc $\mathscr{T}$ est plus fine que la topologie faible. Elle lui est donc égale. □

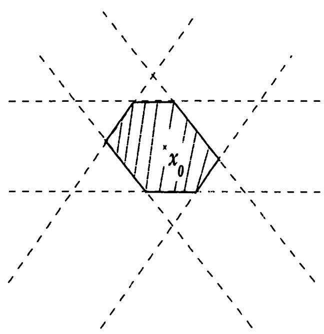
On notera que pour $\varphi \in E^*$:

$$V_{\varepsilon,\varphi}(0) = \{x \in E\,;\ |\varphi(x)| \leqslant \varepsilon\}$$



est une "*bande*" (intersection de deux demi-espaces de même direction), et que :

$$V_{\varepsilon,\varphi_1,\ldots,\varphi_n}(0) = \bigcap_{j=1}^{n} V_{\varepsilon,\varphi_j}(0)\,;$$



en particulier :

$$V_{\varepsilon,\varphi_1,\ldots,\varphi_n}(0) \supseteq \bigcap_{j=1}^{n} \ker\varphi_j,$$

qui est un sous-espace vectoriel (fermé) de codimension finie.

Par définition, la topologie faible $\sigma(E,E^*)$ est moins fine que la topologie de la norme, c'est-à-dire que l'application identité

$$\mathrm{Id}\colon (E,\|\,.\,\|) \to (E,w)$$

est continue. Si $\dim E < +\infty$, ces deux topologie coïncident ; en effet, si on se donne une base $\{e_1, \ldots, e_d\}$ de E, le voisinage $V_{1,\varphi_1,\ldots,\varphi_d}(0)$, associé aux formes linéaires (automatiquement continues) :

$$\begin{array}{rccc} \varphi_j : & E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x = x_1 e_1 + \cdots + x_d e_d & \longmapsto & x_j \end{array}$$

est égal à la boule unité de E pour la norme $\|x\|_\infty = \max_{1\leqslant j\leqslant d} |x_j|$. La topologie faible est donc égale à la topologie de $(E, \|\,.\,\|_\infty)$, qui est la même que celle de $(E, \|\,.\,\|)$.

Par contre, si $\dim E = \infty$, elles sont différentes puisque la boule unité ouverte $U_E = \{x \in E\,;\ \|x\| < 1\}$ ne sera jamais ouverte pour $\sigma(E, E^*)$: tout ouvert faible contenant 0 contient un sous-espace de codimension finie, ce qui n'est pas le cas de U_E, puisqu'elle est bornée. On a même mieux :

Exercice. Si $\dim E = \infty$, et $S_E = \{x \in E\,;\ \|x\| = 1\}$, alors $\overline{S_E}^{\,w} = B_E$ (Exercice 10).

VIII.1.2. Convergence

Nous nous contenterons de parler de la convergence des suites, même si celles-ci ne suffisent pas pour étudier la topologie faible (voir ci-dessous).

Il résulte immédiatement de la description des voisinages faibles que l'on a :

Proposition VIII.1.3. *La suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers x pour la topologie faible si et seulement si :*

$$\varphi(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi(x)\,, \quad \forall \varphi \in E^*.$$

On notera :

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} x \quad \text{ou} \quad x_n \xrightarrow[n\to\infty]{\sigma(E,E^*)} x \quad \text{ou encore} \quad w\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Exemples. Les théorèmes de représentation du dual pour les espaces de Hilbert et pour les espaces L^p donnent :

1) Si $E = H$ est un espace de Hilbert, alors $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} x$ si et seulement si :

$$(x_n \mid y) \xrightarrow[n\to\infty]{} (x \mid y)\,, \quad \forall y \in H.$$

2) Soit $(S, \mathscr{T}, m)$ un espace mesuré. Pour $1 < p < \infty$ et pour $p = 1$ lorsque m est σ-finie, $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} f$ dans $L^p(m)$ si et seulement si :

$$\int_S f_n g\, dm \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_S f g\, dm\,, \quad \forall g \in L^q(m),$$

où q est l'exposant conjugué de p $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$.

Comme on va le voir, toute suite faiblement convergente est bornée (mais il faut prendre garde que pour des familles plus générales que les suites, leur convergence faible n'entraîne pas leur bornitude).

Proposition VIII.1.4. *Toute suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ faiblement convergente dans un espace de Banach est bornée. De plus, si la limite est x, on a $\|x\| \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$.*

Preuve. Cela résulte du Théorème de Banach-Steinhaus (Corollaire IV.2.2), appliqué aux applications (formes) linéaires continues :

$$\begin{array}{rccl} \widetilde{x}_n : & E^* & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & \varphi & \longmapsto & \widetilde{x}_n(\varphi) = \varphi(x_n), \end{array}$$

puisque $\widetilde{x}_n(\varphi) = \varphi(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi(x) = \widetilde{x}(\varphi)$, et que $\|\widetilde{x}_n\| = \|x_n\|$ et $\|\widetilde{x}\| = \|x\|$ (Corollaire VI.2.5). □

Remarque. En général l'inégalité ci-dessus est stricte ; par exemple, si H est un espace de Hilbert séparable et si $(e_n)_{n\geqslant 1}$ est une base orthonormée de H, on a :

$$e_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} 0$$

(car $(e_n \mid x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 = (0 \mid x)$ pour tout $x \in H$, puisque $\sum_{n=1}^{\infty} |(e_n \mid x)|^2 = \|x\|^2 < +\infty$), bien que $\|e_n\| = 1$ pour tout $n \geqslant 1$.

En fait cet exemple n'est pas fortuit ; en effet, on a :

Proposition VIII.1.5. *Soit H un espace de Hilbert. Si l'on a les deux conditions suivantes :*

1) $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} x$;

2) $\|x_n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|x\|$;

alors $\|x_n - x\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (il y a convergence en norme).

Preuve. Il suffit de développer :

$$\|x_n - x\|^2 = \|x_n\|^2 + \|x\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,(x_n \mid x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|x\|^2 + \|x\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,(x \mid x) = 0. \qquad \square$$

Remarque. Cette propriété, très intéressante, n'est pas spécifique aux espaces de Hilbert. On peut montrer qu'elle est vraie dans tous les espaces $L^p(m)$, pour $1 < p < \infty$, mais c'est plus difficile. Par contre, elle n'est pas vraie dans les espaces $L^1(m)$, $L^\infty(m)$ et $\mathscr{C}(K)$ (lorsqu'ils sont de dimension infinie). On le voit facilement dans $\mathscr{C}([0,1])$, en prenant $f_n(x) = 1$ pour $x \in [0, 1/n] \cup [3/n, 1]$, $f_n(2/n) = 0$, et f_n affine sur $[1/n, 2/n]$ et sur $[2/n, 3/n]$; on a $\|f_n\|_\infty = 1$ pour tout $n \geqslant 1$, et $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ pour tout $x \in [0,1]$, de sorte que (voir la Proposition VIII.1.6 ci-dessous) $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} \mathbb{1}$, bien que $\|f_n - \mathbb{1}\|_\infty = 1$ pour tout $n \geqslant 1$.

VIII.1.3. Convergence faible dans l'espace des fonctions continues

Pour l'espace $\mathscr{C}(K)$ des fonctions continues sur un compact K, on a le résultat suivant.

Proposition VIII.1.6. *Soit K un espace compact. Alors la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge faiblement vers f dans $\mathscr{C}(K)$ si et seulement si :*

a) la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée dans $\mathscr{C}(K)$: $(\exists M>0)\ \|f_n\|_\infty \leqslant M,\ \forall n\geqslant 1$ (en tant que suite de fonctions, elle est uniformément bornée) ;

b) cette suite converge simplement : $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x),\ \forall x\in K$.

Que ces conditions soient nécessaires est immédiat : la condition a) provient de la Proposition VIII.1.4, et la condition b) résulte de la Proposition VIII.1.3 et du fait que pour tout $x\in K$, l'application $E_x\colon f\in\mathscr{C}(K)\mapsto f(x)\in\mathbb{K}$ est une forme linéaire continue $(|E_x(f)| = |f(x)|\leqslant \|f\|_\infty)$.

La preuve du fait que ces conditions soient suffisantes va nécessiter un théorème de représentation du dual de $\mathscr{C}(K)$ (voir Annexe 1).

Théorème. *Soit K un espace compact. Pour toute forme linéaire continue $\Phi\colon \mathscr{C}(K)\to\mathbb{R}$ (respectivement $\mathbb{C}$), il existe une unique mesure réelle (respectivement complexe) μ sur $\big(K, \mathscr{B}or\,(X)\big)$, régulière, telle que :*

$$\Phi(f) = \int_K f\,d\mu, \quad \forall f\in\mathscr{C}(K).$$

De plus, $\|\Phi\| = \|\mu\|$.

En d'autres termes, $\left[\mathscr{C}(K)\right]^*$ est isométrique à $\mathscr{M}_r(K)$, l'espace des mesures régulières sur K.

Rappelons qu'une mesure μ est *régulière* si pour tout borélien B, on a :

$$|\mu|(B) = \inf\{|\mu|\,(\Omega)\,;\ \Omega \text{ ouvert et } B\subseteq\Omega\} = \sup\{|\mu|\,(L)\,;\ L \text{ compact et } L\subseteq B\}.$$

Rappelons aussi que si K est métrique (compact), alors toute mesure de Borel est régulière.

Preuve de la Proposition VIII.1.6. La nécessité des conditions a déjà été expliquée.

Pour voir la suffisance, on doit montrer que pour toute mesure régulière $\mu\in\mathscr{M}(K)$:

$$\int_K f_n\,d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_K f\,du.$$

Mais cela résulte du Théorème de convergence dominée : si $\mu = h.|\mu|$ est la décomposition polaire de μ, $(f_nh)_n$ converge vers fh, partout, et $|f_nh| = |f_n|\leqslant M$, qui est $|\mu|$-intégrable puisque la mesure positive $|\mu|$ est bornée. □

VIII.1.4. Quelques propriétés de la topologie faible

Tout d'abord, on a :

Proposition VIII.1.7. *Soit E un espace de Banach. Muni de sa topologie faible, E est un espace vectoriel topologique, localement convexe et séparé.*

Preuve. Montrons que l'addition est w-continue. Soit $x_0, y_0 \in E$ et W un voisinage faible de $s_0 = x_0 + y_0$. Il existe $\varepsilon > 0$ et $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in E^*$ tels que $V_{\varepsilon,\varphi_1,\ldots,\varphi_n}(s_0) \subseteq W$. Posons :

$$U = V_{\varepsilon/2,\varphi_1,\ldots,\varphi_n}(x_0) \quad \text{et} \quad V = V_{\varepsilon/2,\varphi_1,\ldots,\varphi_n}(y_0).$$

On a :

$$(x,y) \in U \times V \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} |\varphi_j(x) - \varphi_j(x_0)| \leqslant \varepsilon/2 \\ |\varphi_j(y) - \varphi_j(y_0)| \leqslant \varepsilon/2 \end{cases}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n,$$

d'où, puisque les φ_j sont linéaires :

$$\begin{aligned} |\varphi_j(x+y) - &\varphi_j(x_0+y_0)| \\ &= |\varphi_j(x) + \varphi_j(y) - \varphi_j(x_0) - \varphi_j(y_0)| \\ &\leqslant |\varphi_j(x) - \varphi_j(x_0)| + |\varphi_j(y) - \varphi_j(y_0)| \leqslant \varepsilon\,, \ 1 \leqslant j \leqslant n\,; \end{aligned}$$

et donc $x + y \in W$.

La continuité de la multiplication par un scalaire se montre de la même façon.

On obtient une topologie localement convexe puisque les voisinages élémentaires $V_{\varepsilon,\varphi_1,\ldots,\varphi_n}(x)$ de x sont convexes.

Il reste à voir que la topologie est séparée. Or si $x_1 \neq x_2$, il existe (voir Chapitre 6, Corollaire 2.3) $\varphi \in E^*$ telle que $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$; alors, si $\varepsilon = (1/3)|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)|$, les voisinages $V_{\varepsilon,\varphi}(x_1)$ et $V_{\varepsilon,\varphi}(x_2)$ sont disjoints. □

Le fait suivant est une conséquence directe de la définition de la topologie faible, mais comme il est fondamental, nous l'énoncerons en tant que théorème.

Théorème VIII.1.8. *Pour tout espace de Banach E, les formes linéaires sur E qui sont continues pour la topologie faible sont exactement les mêmes que celles qui sont continues en norme (c'est-à-dire les éléments de E^*).*

Il en résulte une compatibilité des topologies pour les convexes.

Théorème VIII.1.9. *Toute partie convexe C d'un espace de Banach E qui est fermée (en norme) est aussi faiblement fermée.*

En particulier, les sous-espaces vectoriels fermés sont les mêmes pour les deux topologies.

Remarque. Comme la topologie de la norme est plus fine que la topologie faible, toute partie faiblement fermée est fermée pour la norme. Mais, si $\dim E = \infty$, $\sigma(E, E^*)$ est strictement moins fine que la topologie de la norme ; il y a donc des parties fermées pour la norme qui ne sont pas faiblement fermées. Toutefois, le théorème dit que les convexes fermés sont les mêmes pour les deux topologies.

Preuve. Toute $\varphi \in E^*$ est w-continue, donc $u = \operatorname{Re}\varphi$ aussi. Les demi-espaces $H_\alpha^+ = \{x \in E\,;\ u(x) \geqslant \alpha\}$ sont donc w-fermés, et par conséquent C aussi, puisque $C = \bigcap_{C\subseteq H_\alpha^+} H_\alpha^+$, par le Théorème de Minkowski. □

Corollaire VIII.1.10 (Théorème de Mazur). *Si $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} x$, il existe une suite de combinaisons convexes :*

$$c_n = \sum_{j\in I_n} \lambda_j x_j \quad \text{où } \lambda_j \geqslant 0\,,\ j \in I_n\,,\ \text{et } \sum_{j\in I_n} \lambda_j = 1,$$

qui convergent en norme vers x : $\|c_n - x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Preuve. Soit C_0 l'ensemble de toutes les combinaisons convexes des x_n, $n \geqslant 1$; c'est un convexe, et $C = \overline{C_0}^{\|\cdot\|}$ est convexe et fermé, en norme, donc aussi faiblement. Il ne reste plus qu'à remarquer que :

$$x \in \overline{\{x_n\,;\ n \geqslant 1\}}^{w} \subseteq \overline{C}^{w} = C = \overline{C_0}^{\|\cdot\|}. \qquad \square$$

Corollaire VIII.1.11 (Mazur [1933]). *Soit K un espace compact et $f_n\colon K \to \mathbb{K}$, $n \geqslant 1$, des fonctions continues. On suppose que la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ est uniformément bornée et converge simplement vers une fonction continue $f\colon K \to \mathbb{K}$. Alors, il existe des combinaisons convexes des f_n qui convergent uniformément vers f.*

Voyons maintenant se qui se passe pour les applications linéaires entre espaces de Banach.

Théorème VIII.1.12. *Soit E et F deux espaces de Banach et $T\colon E \to F$ une application linéaire. Alors l'application $T\colon (E, \|\,.\,\|_E) \to (F, \|\,.\,\|_F)$ est continue pour les normes si et seulement si $T\colon (E, w_E) \to (F, w_F)$ est continue pour les topologies faibles.*

Preuve.

1) Supposons T continue pour les normes. Pour toute $\psi \in F^*$, l'application :

$$\begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \psi[Tx] \end{array}$$

est une forme linéaire continue pour la norme, donc aussi pour $w_E = \sigma(E, E^*)$. Cela signifie que T est continue de $\big(E, \sigma(E, E^*)\big)$ dans $\big(F, \sigma(F, F^*)\big)$. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$ et toute $\psi \in F^*$, il existe un voisinage faible $V(\varepsilon, \psi)$ de x_0 tel que :

$$x \in V(\varepsilon, \psi) \quad \Longrightarrow \quad |\psi(Tx) - \psi(Tx_0)| \leqslant \varepsilon.$$

Soit alors W un voisinage faible de Tx_0 ; il existe $\varepsilon > 0$ et $\psi_1, \ldots, \psi_n \in F^*$ tels que $V_{\varepsilon,\psi_1,\ldots,\psi_n}(Tx_0) \subseteq W$. On a donc :

$$x \in \bigcap_{k=1}^{n} V(\varepsilon, \psi_k) \quad \Rightarrow \quad Tx \in \bigcap_{k=1}^{n} V_{\varepsilon,\psi_k}(Tx_0) = V_{\varepsilon,\psi_1,\ldots,\psi_n}(Tx_0) \subseteq W.$$

2) Réciproquement, supposons T continue pour les topologies faibles. Si T n'est pas continue pour les topologies normiques, il existe une suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ de la sphère unité de E telle que $\|Tx_n\|_F \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. Si l'on pose $u_n = (1/\|Tx_n\|^{1/2})\, x_n$, on a $\|u_n\|_E \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Alors, *a fortiori* $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} 0$. Comme T est continue pour les topologies faibles, on obtient $Tu_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} 0$. Mais alors la suite $(Tu_n)_{n\geqslant 1}$ doit être bornée, par la Proposition VIII.1.4. On obtient une contradiction car $\|Tu_n\|_F = \|Tx_n\|^{1/2} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

Signalons un autre argument : si T est continue pour les topologies faibles, son graphe G_T est fermé dans $E\times F$, muni de la topologie-produit de $\sigma(E, E^*)$ et $\sigma(F, F^*)$; *a fortiori*, G_T est fermé pour le produit des topologies des normes. Le Théorème du graphe fermé assure que T est continue pour les normes. □

VIII.1.5. Métrisabilité

Nous avons parlé de la convergence des suites au §2 ; pourtant, elles ne suffisent pas pour étudier la topologie faible. Par exemple, si $(e_n)_{n\geqslant 1}$ est la base naturelle de ℓ_2 et si $A = \{e_n + n e_m\,;\ n \leqslant m\}$, alors $0 \in \overline{A}^{w}$, bien qu'aucune suite d'éléments de A ne converge faiblement vers 0 (Exercice 4).

Ce fait est relié au suivant : si $\dim E = \infty$, alors 0 ne possède aucune base dénombrable de voisinages pour la topologie faible (Exercice 19) ; en particulier, $\sigma(E, E^*)$ n'est pas métrisable.

Notons toutefois que, dans l'exemple précédent, la partie A n'est pas bornée. Lorsque l'on se restreint à des parties bornées, on peut avoir de la métrisabilité, comme l'assure la proposition suivante.

Proposition VIII.1.13. *Soit E un espace de Banach dont le dual E^* est séparable. Alors la boule unité B_E de E est métrisable pour la topologie faible.*

Notons que toutes les boules fermées (de rayon > 0) étant homéomorphes entre elles (pour la topologie faible), elles seront toutes métrisables ; toute partie bornée de E sera donc aussi métrisable.

Notons aussi que l'on peut montrer la réciproque : si (B_E, w) est métrisable, alors E^* est séparable (Exercice 12).

Preuve. Soit $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ une suite dense dans E^*. Posons, pour $x, y \in E$:

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|\varphi_n(x-y)|}{1 + |\varphi_n(x-y)|}\,.$$

C'est une distance sur E (parce que l'application $t \mapsto \frac{t}{1+t}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$; on notera que si $d(x,y) = 0$, alors $\varphi_n(x-y) = 0$ pour tout $n \geqslant 1$; donc $\varphi(x-y) = 0$ pour toute $\varphi \in E^*$, par densité, et donc $x = y$, puisque E^* sépare les points de E). Alors :

a) Cette distance induit sur E une topologie moins fine que la topologie faible. En effet, soit :

$$\Delta_\varepsilon(x) = \{y \in E\,;\ d(x,y) \leqslant \varepsilon\}$$

une boule fermée pour la distance d de centre x. Si l'entier $N \geqslant 1$ est tel que $1/2^N \leqslant \varepsilon/2$, et si :

$$y \in V_{\varepsilon/2,\varphi_1,\ldots,\varphi_N}(x) = V(x),$$

on a :

$$d(x,y) \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n}\frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{2^N} \leqslant \varepsilon,$$

de sorte que $\Delta_\varepsilon(x) \supseteq V(x)$.

b) Sur B_E, les deux topologies coïncident. En effet, si l'on se donne un voisinage faible V de $x \in B_E$, il existe $\varepsilon > 0$ et $\psi_1, \ldots \psi_n \in E^*$ telles que :

$$V_{\varepsilon,\psi_1,\ldots,\psi_n}(x) \subseteq V.$$

Par densité de la suite $(\varphi_k)_{k\geqslant 1}$, il existe des entiers $k_1 < \cdots < k_n$ tels que $\|\psi_j - \varphi_{k_j}\| \leqslant \varepsilon/4$ pour $1 \leqslant j \leqslant n$. Alors :

$$W(x) = V_{\varepsilon/2,\varphi_{k_1},\ldots,\varphi_{k_n}}(x) \cap B_E \subseteq V$$

car si $y \in W(x)$, on a, pour $1 \leqslant j \leqslant n$:

$$|\psi_j(x-y)| \leqslant |\varphi_{k_j}(x-y)| + \|\varphi_{k_j} - \psi_j\|(\|x\| + \|y\|) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} \times 2 = \varepsilon.$$

Cela termine la preuve puisque $W(x)$ contient $\Delta_\alpha(x)$ avec $\alpha = \frac{1}{2^{k_n}}\frac{\varepsilon/2}{1+\varepsilon/2}$. En effet, si $d(x,y) \leqslant \alpha$, on a $\frac{1}{2^l}\frac{|\varphi_l(x-y)|}{1+|\varphi_l(x-y)|} \leqslant \frac{1}{2^{k_n}}\frac{\varepsilon/2}{1+\varepsilon/2}$ pour tout $l \geqslant 1$; donc $\frac{|\varphi_l(x-y)|}{1+|\varphi_l(x-y)|} \leqslant \frac{\varepsilon/2}{1+\varepsilon/2}$ pour $l \leqslant k_n$, et $|\varphi_{k_j}(x-y)| \leqslant \varepsilon/2$ pour $j = 1, \ldots, n$. □

Remarque. Pour la partie a) de la preuve, on a seulement besoin d'une suite $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ qui sépare les points de E :

$$(\varphi_n(x) = 0\,,\ \forall n \geqslant 1) \quad \Rightarrow \quad x = 0.$$

C'est en particulier le cas lorsque E est séparable. En effet, on a le résultat suivant.

Lemme VIII.1.14. *Si E un espace de Banach séparable, il existe une distance sur E définissant une topologie moins fine que la topologie faible.*

Preuve. En effet, si $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite dense dans E, le Théorème de Hahn-Banach permet d'obtenir, pour tout $n \geqslant 1$, une forme linéaire $\varphi_n \in E^*$ telle que $\|\varphi_n\| = 1$ et $\varphi_n(u_n) = \|u_n\|$; cette suite $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ sépare les points de E : soit $x \in E$ tel que $\varphi_n(x) = 0$ pour tout $n \geqslant 1$; il existe, par densité, une sous-suite $(u_{n_j})_{j\geqslant 1}$ telle que $\|u_{n_j} - x\| \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$. Mais alors :

$$\|u_{n_j}\| = \varphi_{n_j}(u_{n_j}) = \varphi_{n_j}(u_{n_j} - x) \leqslant \|u_{n_j} - x\| \xrightarrow[j\to\infty]{} 0,$$

ce qui entraîne $x = 0$.

La première partie de la preuve de la Proposition VIII.1.13 donne ensuite le résultat. □

Cela permet de montrer le théorème suivant.

Théorème VIII.1.15 (Théorème d'Eberlein-Šmulian). *Si K est une partie faiblement compacte dans un espace de Banach E, alors de toute suite d'éléments de K, on peut extraire une sous-suite faiblement convergente, vers un élément de K.*

Notons que la réciproque est vraie, mais elle est plus difficile à montrer. Elle est de toutre façon moins utile (du moins en ce qui concerne ce cours).

Il faut bien noter que le résultat est vrai même si (K, w) n'est pas métrisable.

Preuve. Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'éléments de K. Soit $G = \overline{\mathrm{vect}}^{\|\cdot\|}\{x_n\,;\ n \geqslant 1\}$ le sous-espace vectoriel fermé engendré par cette suite. Par construction, G est séparable. Soit d une distance sur G induisant une topologie moins fine que la topologie faible de G (il en existe d'après le Lemme VIII.1.14).

G étant faiblement fermé dans E, $K \cap G$ est faiblement compact dans E, c'est-à-dire pour la topologie $\sigma(E, E^*)$.

Mais le Théorème de Hahn-Banach permet d'étendre toute forme linéaire continue sur G (c'est-à-dire tout élément de G^*) en une forme linéaire continue sur E, c'est-à-dire un élément de E^* ; il en résulte que la trace sur G de la topologie faible $\sigma(E, E^*)$ de E est la topologie faible $\sigma(G, G^*)$ de G. Par conséquent $K \cap G$ est faiblement compact dans G, pour la topologie faible $\sigma(G, G^*)$ de G. La topologie définie sur G par la distance d étant moins fine que la topologie faible, ces deux topologies coïncident sur le compact faible $K \cap G$. Ainsi, la topologie faible est métrisable sur le compact $K \cap G$, et l'on peut donc extraire de la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$, qui est dans $K \cap G$, une sous-suite convergente, vers un élément de $K \cap G \subseteq K$. □

VIII.2. Topologie $*$-faible sur un dual

La topologie faible sur un espace de Banach, si elle est intéressante car naturelle et compatible avec la topologie de la norme, présente l'inconvénient lié à son avantage : étant "proche" de la topologie de la norme, elle n'a pas, en général, assez de "bonnes" propriétés de convergence ou de compacité. Lorsque $E = X^*$ est un espace *dual*, on peut introduire une autre topologie qui, elle, aura ces bonnes propriétés.

Cela ne s'applique pas à tous les espaces de Banach, puisque, par exemple, ni c_0 ni $L^1(0,1)$ n'est le dual d'un espace de Banach (voir l'Exercice 28) ; ils ne sont même pas *isomorphes* au dual d'un espace de Banach.

Dans toute cette partie, X sera un espace de Banach et $E = X^*$ sera son dual.

VIII.2.1. Définition

Définition VIII.2.1. *On appelle* topologie ∗-faible, *ou topologie* weak-star, *sur X^* la topologie la moins fine rendant continues toutes les formes linéaires issues de X :*

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{x}\colon & X^* & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & \varphi & \longmapsto & \widetilde{x}(\varphi) = \varphi(x) \end{array}$$

pour $x \in X$.

On la note $\sigma(X^*, X)$, ou plus simplement w^*. On dit aussi que c'est la *topologie préfaible* sur X^*.

On a donc maintenant *trois* topologies sur $E = X^*$:

- $w^* = \sigma(X^*, X)$
- $w = \sigma(X^*, X^{**}) = \sigma(E, E^*)$
- la topologie de la norme $\|\,.\,\|_{X^*} = \|\,.\,\|_E$.

D'après la définition, w^* est *moins fine* que la topologie faible w (qui elle-même est moins fine que la topologie de la norme).

Comme pour la topologie faible, on démontre :

- Une *base de voisinages* de $\varphi_0 \in X^*$ est donnée par :

$$W_{\varepsilon,x_1,\ldots,x_n}(\varphi_0) = \{\varphi \in X^*\,;\ |\varphi(x_j) - \varphi_0(x_j)| \leqslant \varepsilon \ \ 1 \leqslant j \leqslant n\}$$

  pour $\varepsilon > 0$, $n \geqslant 1$, et $x_1, \ldots, x_n \in X$.
- C'est une topologie d'*espace vectoriel topologique localement convexe.*
- Elle est *séparée* : si $\varphi_1 \neq \varphi_2$, il existe $x \in X$ tel que $\varphi_1(x) \neq \varphi_2(x)$; alors, pour $\varepsilon = |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|/3$, on a $W_{\varepsilon,x}(\varphi_1) \cap W_{\varepsilon,x}(\varphi_2) = \emptyset$.

Alors qu'il était immédiat, d'après la définition, que les formes linéaires continues pour la topologie faible étaient les mêmes que celles continues pour la norme, cette propriété n'est plus vraie, en général, pour la topologie préfaible. En effet, on a le résultat suivant.

Théorème VIII.2.2. *Les formes linéaires w^*-continues sur X^* sont exactement les $\widetilde{x}$, pour $x \in X$.*

Preuve. Les formes linéaires $\widetilde{x}$, pour $x \in X$, sont w^*-continues, par définition.

Inversement, soit $\Phi\colon X^* \to \mathbb{K}$ une forme linéaire w^*-continue. L'ensemble :

$$\{\varphi \in X^*\,;\ |\Phi(\varphi)| \leqslant 1\}$$

est un w^*-voisinage de 0 ; il contient donc un voisinage du type $W_{\varepsilon,x_1,\ldots,x_n}(0)$, et donc *a fortiori* $\bigcap_{j=1}^n \ker \widetilde{x}_j$. Cela signifie que :

$$\varphi \in \bigcap_{j=1}^n \ker \widetilde{x}_j \quad \Longrightarrow \quad |\Phi(\varphi)| \leqslant 1.$$

Comme $\bigcap_{j=1}^n \ker \widetilde{x}_j$ est un espace vectoriel, on doit en fait avoir $|\lambda|\,|\Phi(\varphi)| = |\Phi(\lambda\varphi)| \leqslant 1$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$. Cela n'est possible que si $\Phi(\varphi) = 0$.

Ainsi :

$$\bigcap_{j=1}^{n} \ker \widetilde{x}_j \subseteq \ker \Phi.$$

Il ne reste plus qu'à appliquer le lemme d'algèbre linéaire suivant :

Lemme VIII.2.3. *Soit E un espace vectoriel et $\Phi, \Phi_1, \ldots, \Phi_n \colon E \to \mathbb{K}$ des formes linéaires. On a :*

$$\bigcap_{j=1}^{n} \ker \Phi_j \subseteq \ker \Phi \quad \Longleftrightarrow \quad \big(\exists a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K} : \quad \Phi = a_1\Phi_1 + \cdots + a_n\Phi_n\big).$$

pour obtenir le résultat. □

C'est un inconvénient de cette topologie par rapport à la topologie faible. Il en résulte que les <u>convexes fermés</u> (en norme ou pour la topologie faible) dans X^* **ne sont pas** en général, w^*-fermés. Par exemple, si $\Phi \in X^{**}$ n'est pas de la forme $\widetilde{x}$ pour $x \in X$ alors $\ker \Phi$ est fermé en norme, mais pas w^*-fermé (à titre d'exercice, on pourra montrer qu'un hyperplan H de X^* est w^*-fermé si et seulement si il est de la forme $H = \ker \widetilde{x}$, avec $x \in X$, non nul).

Cet inconvénient est largement compensé par le théorème suivant.

Théorème VIII.2.4 (Théorème d'Alaoglu [1940]). *La boule-unité B_{X^*} de X^* est <u>w^*-compacte</u>. En particulier, elle est w^*-fermée.*

Lorsque l'espace X est séparable, cela avait été montré avant par Banach en 1929.

Notons que comme toutes les boules sont homéomorphes, pour la topologie préfaible (pour chacune des trois topologies, en fait) entre elles, car la topologie préfaible est une topologie d'e.v.t., toutes les boules fermées sont donc w^*-fermées.

Preuve. Posons, pour tout $x \in B_X$, $D_x = \{\lambda \in \mathbb{K};\ |\lambda| \leqslant \|x\|\}$. On a une injection :

$$\begin{array}{rccc} J\colon & B_{X^*} & \longrightarrow & \prod_{x \in B_X} D_x \\ & \varphi & \longmapsto & \big(\varphi(x)\big)_{x \in B_X}, \end{array}$$

qui réalise un homéomorphisme entre B_{X^*}, muni de la topologie préfaible, et $J[B_{X^*}]$, comme sous-espace de l'espace produit $\prod_{x \in B_X} D_x$, muni de la topologie-produit (il suffit de remarquer que les bases de voisinages pour les deux topologies ont exactement le même description). Comme $\prod_{x \in B_X} D_x$ est compact, par le Théorème de Tychonov (voir Annexe 2), il en est de même de $K = J[B_{X^*}]$, car K est fermé dans $\prod_{x \in B_X} D_x$. En effet, soit $\lambda = (\lambda_x)_{x \in B_X} \in \overline{K}$, alors si $x, y \in B_X$ sont tels que $x + y \in B_X$, il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, une $\varphi \in B_{X^*}$ telle que :

$$\begin{cases} |\varphi(x) - \lambda_x| \leqslant \varepsilon \\ |\varphi(y) - \lambda_y| \leqslant \varepsilon \\ |\varphi(x+y) - \lambda_{x+y}| \leqslant \varepsilon \end{cases}$$

(donnée par le voisinage $W_{\varepsilon,x,y,x+y}(\lambda)$) ; cela entraîne $|\lambda_{x+y} - (\lambda_x + \lambda_y)| \leqslant 3\varepsilon$, et donc $\lambda_{x+y} = \lambda_x + \lambda_y$, puisque $\varepsilon > 0$ était arbitraire. De même, $\lambda_{ax} = a\lambda_x$ pour tout $x \in B_X$ et tout $a \in K$ tels que $ax \in B_X$. On peut alors définir une forme linéaire $\psi\colon X \to \mathbb{K}$ telle que $\psi(x) = \lambda_x$ pour tout $x \in B_X$. Elle sera continue puisque $\psi(x) = \lambda_x \in D_x$ signifie que $|\psi(x)| \leqslant \|x\|$ pour tout $x \in B_X$. De plus $\lambda = J(\psi)$. □

VIII.2.2. Réflexivité

La topologie préfaible w^* coïncide avec la topologie faible w sur X^* si et seulement si les formes linéaires $\widetilde{x}$, pour $x \in X$, composent l'ensemble des formes linéaires continues (en norme, ou pour la topologie faible) sur X^* ; en d'autres termes, si et seulement si l'injection canonique :

$$\begin{array}{rccc} i\colon & X & \longrightarrow & X^{**} \\ & x & \longmapsto & \widetilde{x} = i(x) \end{array}$$

est surjective.

Définition VIII.2.5. *On dit que l'espace de Banach X est réflexif si l'injection canonique :*

$$\begin{array}{rccc} i\colon & X & \longrightarrow & X^{**} \\ & x & \longmapsto & \widetilde{x} = i(x) \end{array}$$

est surjective.

Exemples.

1) $\boxed{\text{Tout espace de Hilbert est réflexif}}$.

En effet, si H est un espace de Hilbert, rappelons que toute $\varphi \in H^*$ s'écrit de façon unique $\varphi = \varphi_y$, avec $\varphi_y(x) = (x \mid y)$, $\forall x \in H$; l'application $y \in H \mapsto \varphi_y \in H^*$ est un anti-isomorphisme (dans le cas complexe ; c'est un isomorphisme dans le cas réel) : $\varphi_{ay} = \bar{a}\varphi_y$ pour tout $a \in \mathbb{C}$ et tout $y \in H$. On peut donc munir H^* d'un produit scalaire, en posant $(\varphi_y \mid \varphi_{y'}) = (y' \mid y)$ pour $y, y' \in H$, qui fait de H^* un espace de Hilbert. Par conséquent, pour toute $\Phi \in H^{**}$, il existe $\varphi \in H^*$ telle que $\Phi(\varphi) = (\psi \mid \varphi)$, pour toute $\psi \in H^*$. Autrement dit, il existe $x \in H$ tel que, pour toute $\psi = \varphi_y \in H^*$, on ait :

$$\Phi(\psi) = (\psi \mid \varphi) = (\varphi_y \mid \varphi_x) = (x \mid y) = \varphi_y(x) = \widetilde{x}(\varphi_y) = \widetilde{x}(\psi)\,;$$

donc $\Phi = \widetilde{x}$. □

2) $\boxed{\text{Pour } 1 < p < \infty,\ L^p(m) \text{ est réflexif}}$.

Le raisonnement est le même. Si q est l'exposant conjugué de p, on a $1 < q < \infty$, et l'on sait que les applications :

$$\begin{array}{rccc} \Phi\colon & L^p(m) & \longrightarrow & [L^q(m)]^* \\ & f & \longmapsto & \Phi_f \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} \Psi\colon & L^q(m) & \longrightarrow & [L^p(m)]^* \\ & g & \longmapsto & \Psi_g \end{array}$$

sont bijectives, avec :

$$\Phi_f(g) = \int_S f\,g\,dm \quad \text{et} \quad \Psi_g(f) = \int_S f\,g\,dm.$$

Soit alors $\varphi \in \big[L^p(m)\big]^{**}$. On a $\varphi \circ \Psi \in \big[L^q(m)\big]^*$:

$$L^q(m) \xrightarrow{\ \Psi\ } \big[L^p(m)\big]^* \xrightarrow{\ \varphi\ } \mathbb{K}\,;$$

il existe donc $f \in L^p(m)$ telle que $\varphi \circ \Psi = \Phi_f$, c'est-à-dire $\varphi\,(\Psi_g) = \Phi_f(g)$, pour toute $g \in L^q(m)$. Mais si $i\colon L^p(m) \to \big[L^p(m)\big]^{**}$ est l'injection canonique, on a :

$$\big[i(f)\big](\Psi_g) = \Psi_g(f) = \int_S fg\,dm = \Phi_f(g) = \varphi\,(\Psi_g)\,;$$

donc $\varphi = i(f)$. □

Il résulte de la définition que si X est réflexif, les topologies faible et préfaible coïncident sur X^*, et donc que la boule-unité B_{X^*} de X^* est *faiblement compacte.* Mais celle B_X de X est alors aussi w-compacte ; en effet, pour tout espace de Banach X, **l'image par l'injection canonique** $i\colon x \in X \mapsto \widetilde{x} \in X^{**}$ de la **topologie faible** $\sigma(X, X^*)$ sur X **est la trace** sur $i(X)$ de la **topologie préfaible** $\sigma(X^{**}, X^*)$ de X^{**} : c'est évident, cela résulte de la définition. Donc, lorsque X est réflexif, (B_X, w) est homéomorphe à $(B_{X^{**}}, w^*)$, qui est compacte, par le Théorème d'Alaoglu. Ainsi :

Pour tout espace de Hilbert H, la boule-unité B_H est faiblement compacte.

Pour $1 < p < \infty$, et toute mesure m, la boule-unité de $L^p(m)$ est faiblement compacte.

En fait, on a mieux.

Théorème VIII.2.6 (Théorème de Kakutani [1940]). *Un espace de Banach X est réflexif si et seulement si sa boule unité est faiblement compacte.*

Ce théorème permet donc de tester la réflexivité, *sans faire appel au bidual.*

Nous avons déjà vu un sens. L'autre résulte du théorème suivant. En effet, si B_X est faiblement compacte, son image $B_X = i(B_X$ dans X^{**} par l'injection canonique est faiblement compacte, puisque i est continue pour les topologies faibles, par le Théorème VIII.1.12. Elle est *a fortiori* préfaiblement compacte, donc préfaiblement fermée dans X^{**}.

Théorème VIII.2.7 (Théorème de Goldstine [1938]). *Pour tout espace de Banach X, la boule unité B_X de cet espace est w^*-dense dans la boule unité $B_{X^{**}}$ de X^{**}.*

Preuve. Soit $\Phi \in B_{X^{**}}$ telle que $\Phi \notin \overline{B_X}^{w^*}$. Comme $\overline{B_X}^{w^*}$ est convexe, et w^*-fermé (et même w^*-compact), on peut séparer Φ et $\overline{B_X}^{w^*}$ par une forme linéaire sur X^{**} qui est w^*-continue (en appliquant le Théorème VI.3.6 à l'espace localement convexe X^{**} muni de la topologie préfaible $w^* = \sigma(X^{**}, X^*)$), c'est-à-dire par un élément $\varphi \in X^*$ (Théorème VIII.2.2) :

$$\begin{cases} |\varphi(\Phi)| = 1 \\ \sup\{\operatorname{Re}\varphi(\Psi)\,;\ \Psi \in \overline{B_X}^{w^*}\} < 1; \end{cases}$$

mais ce n'est pas possible car :

$$1 = |\varphi(\Phi)| \leqslant \|\varphi\|\,\|\Phi\| \leqslant \|\varphi\|,$$

et :

$$1 > \sup\{\operatorname{Re}\varphi(\Psi)\,;\ \Psi \in \overline{B_X}^{w^*}\} \geqslant \sup\{\operatorname{Re}\varphi(\Psi)\,;\ \Psi \in B_X\} = \|\varphi\|.$$

□

Corollaire VIII.2.8. *Pour tout espace de Banach X, on a :*

X est réflexif si et seulement si X^* est réflexif.

Preuve. Si X est réflexif, on a vu que B_{X^*} est faiblement compacte ; donc X est réflexif.

Inversement, si X^* est réflexif, alors X^{**} aussi, par ce qui précède. Mais X est un sous-espace vectoriel fermé (en norme) de X^{**}. Il suffit donc d'appliquer le résultat suivant. □

Proposition VIII.2.9. *Si Z est un espace de Banach réflexif, alors tout sous-espace fermé Y de Z est aussi réflexif.*

Preuve. Le Théorème de Hahn-Banach permettant de prolonger les formes linéaires continues sur Y, il en résulte que **la topologie faible $\sigma(Y, Y^*)$ de Y est la trace sur Y de la topologie faible $\sigma(Z, Z^*)$ de Z**. Comme B_Z est faiblement compacte et que $B_Y \subseteq B_Z$ est faiblement fermée (comme convexe fermé en norme), il en résulte que B_Y est aussi faiblement compacte, et donc que Y est réflexif. □

VIII.2.3. Métrisabilité

Comme pour la topologie faible, on a, dans X^*, en vertu Théorème VIII.2.2 :

$$\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{w^*} \varphi \iff \left[\varphi_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi(x)\,,\ \forall x \in X\right],$$

et alors $(\varphi_n)_n$ est bornée et $\|\varphi\| \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|\varphi_n\|$, grâce au Théorème de Banach-Steinhaus.

Mais on peut montrer, comme pour la topologie faible, que si X est de dimension infinie, il n'y a pas de base dénombrable de voisinages pour la topologie préfaible ; les suites ne suffisent donc pas pour décrire $\sigma(X^*, X)$, et en particulier, cette topologie n'est pas métrisable. Néanmoins, si l'on se restreint aux parties bornées de X^*, on peut avoir de la métrisabilité.

Théorème VIII.2.10. *(B_{X^*}, w^*) est métrisable si et seulement si X est séparable.*

Dans ce cas, toute partie bornée sera w^*-métrisable.

Preuve. Si X est séparable, on introduit, comme pour la topologie faible, une distance sur B_{X^*} en prenant une suite $(x_n)_n$ dense dans X et en posant :

$$d(\varphi, \psi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|\varphi(x_n) - \psi(x_n)|}{1 + |\varphi(x_n) - \psi(x_n)|}\,; \quad \varphi, \psi \in B_{X^*},$$

et elle définit $\sigma(X^*, X)$ sur B_{X^*}.

Inversement, si δ est une distance sur B_{X^*} définissant $\sigma(X^*, X)$, soit :

$$U_n = \{\varphi \in B_{X^*}\,;\ \delta(\varphi, 0) \leqslant 1/n\}.$$

Il existe $\varepsilon > 0$ et une partie finie $F_n \subseteq X$ tels que :

$$U_n \supseteq W_n = \{\varphi \in B_{X^*}\,;\ |\varphi(x)| \leqslant \varepsilon,\ \forall x \in F_n\}.$$

Alors :

$$\Delta = \bigcup_{n\geqslant 1} F_n$$

est dénombrable et dense dans X, car si $\varphi \in B_{X^*}$ et :

$$\varphi(x) = 0 \quad \forall x \in \Delta,$$

on a $\varphi \in W_n$, et donc $\varphi \in U_n$, pour tout $n \geqslant 1$; donc $\varphi = 0$. □

Remarque. On a en fait :

$$\begin{array}{lcl} (B_X, w) \text{ métrisable} & \Longleftrightarrow & X^* \text{ séparable}\,; \\ (B_{X^*}, w^*) \text{ métrisable} & \Longleftrightarrow & X \text{ séparable.} \end{array}$$

Ces deux équivalences sont liées : on peut montrer que si X^* est séparable, alors X est aussi séparable (Exercice 12). Par contre l'inverse est faux : par exemple, ℓ_1 est séparable, mais son dual ℓ_∞ ne l'est pas. De même, $L^1(0,1)$ est séparable, mais son dual $L^\infty(0,1)$ ne l'est pas.

Notons le corollaire suivant.

Corollaire VIII.2.11. *Si Y est un espace de Banach réflexif et séparable, alors sa boule unité B_Y, munie de la topologie faible, est métrisable.*

En effet, si l'on pose $X = Y^*$, alors $Y = X^*$, et $w_Y = w^*_{X^*}$. □

VIII.2.4. Applications

Résumons quelques résultats précédents.

> *a)* Si X est un espace de Banach **séparable**, alors de toute suite **bornée** $(\varphi_n)_n$ dans X^*, on peut extraire une sous-suite préfaiblement convergente.
>
> *b)* Si X est un espace de Banach **réflexif**, alors de toute suite **bornée** $(x_n)_n$ dans X, on peut extraire une sous-suite faiblement convergente.

Comme application du *b)*, on montrera en exercice que $L^1(0,1)$ n'est pas réflexif.

Voici deux exemples d'application.

Exemple 1.

Soit X un espace de Banach réflexif réel et $G\colon X \to \mathbb{R}$ une application convexe *:*

$$G\big(\lambda x + (1-\lambda)\big) \leqslant \lambda\, G(x) + (1-\lambda)\, G(y)\,, \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1,$$

qui est semi-continue inférieurement (pour la norme) et telle que $G(x) \xrightarrow[\|x\|\to+\infty]{} +\infty$.

Alors, il existe $x_0 \in X$ tel que :

$$G(x_0) = \inf_{x\in X} G(x).$$

Preuve. Soit $\lambda_0 = \inf_{x\in X} G(x) \in [-\infty, +\infty[$. Pour tout $\lambda > \lambda_0$, posons :

$$K_\lambda = \{x \in X\,;\ G(x) \leqslant \lambda\}.$$

Alors K_λ est convexe (car G est convexe), fermé, en norme (car G est semi-continue inférieurement), et borné, car sinon il existerait des $x_n \in K_\lambda$ tels que $\|x_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$; on aurait $G(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, ce qui contredit $G(x_n) \leqslant \lambda$. Les ensembles K_n sont donc *faiblement compacts.* Comme ils ne sont pas vides et que $K_\lambda \subseteq K_{\lambda'}$ pour $\lambda \leqslant \lambda'$, on a :

$$\bigcap_{\lambda>\lambda_0} K_\lambda \neq \emptyset.$$

Si x_0 est dans cette intersection, on a :

$$G(x_0) \leqslant \lambda\,, \quad \forall \lambda > \lambda_0;$$

donc $G(x_0) = \lambda_0$ (et par conséquent $\lambda_0 \neq -\infty$). □

Exemple 2.

Soit X un espace de Banach et C un convexe préfaiblement fermé de X^*. Alors, pour toute $\varphi \in X^*$, la distance :

$$\operatorname{dist}(\varphi, C) = \inf_{\psi\in C} \|\varphi - \psi\|_{X^*}$$

est atteinte.

C'est en particulier le cas lorsque $C = F$ est un sous-espace vectoriel w^*-fermé.

La preuve est laissée en exercice.

VIII.3. Annexe 1 : Représentation du dual de $\mathscr{C}_0(L)$

Théorème VIII.3.1. *Soit L un espace localement compact. Pour toute forme linéaire continue $\Phi\colon \mathscr{C}_0(L) \to \mathbb{R}$ (respectivement $\mathbb{C}$), il existe une unique mesure réelle (respectivement complexe) μ sur $\big(L, \mathscr{B}or\,(L)\big)$, régulière (c'est-à-dire une mesure de Radon), telle que :*

$$\Phi(f) = \int_L f\, d\mu\,, \quad \forall f \in \mathscr{C}_0(L)\,.$$

De plus, $\|\Phi\| = \|\mu\|$.

En d'autres termes, si $\mathscr{M}_R(L)$ est l'ensemble des mesures de Radon sur L :

$$\boxed{\big[\mathscr{C}_0(L)\big]^* \text{ est isométrique à } \mathscr{M}_R(L)}\,.$$

En effet, il est clair que toute $\mu \in \mathscr{M}(L)$ définit une forme linéaire continue Φ_μ sur $\mathscr{C}_0(L)$ en posant $\Phi_\mu(f) = \int_L f\, d\mu$, et que $\|\Phi_\mu\| \leqslant \|\mu\|$.

On notera que la régularité ne sert que pour assurer l'unicité. On peut d'ailleurs montrer que si L est métrisable et dénombrable à l'infini, alors toute mesure de Borel est régulière. Dans ce cas, $\big[\mathscr{C}_0(L)\big]^*$ est isométrique à $\mathscr{M}(L)$. C'est en particulier le cas si $L = K$ est un compact métrique, et si $L = \mathbb{R}^d$ (ou plus généralement si L est un ouvert de $\mathbb{R}^d$).

La preuve est basée sur le Théorème de représentation de Riesz (voir un cours d'Intégration pour une preuve).

Théorème VIII.3.2 (Théorème de représentation de Riesz). *Soit L un espace localement compact et $\Lambda\colon \mathscr{K}(L) \to \mathbb{R}$ une <u>forme linéaire</u> <u>positive</u> :*

$$f \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad \Lambda(f) \geqslant 0.$$

Alors, il <u>existe</u> une tribu $\mathscr{M}$ de parties de L, contenant la tribu borélienne $\mathscr{B}\mathrm{or}(L)$ et une <u>unique</u> <u>mesure positive</u> $m = m_\Lambda$ sur $(L, \mathscr{M})$ telle que :

1) $\Lambda(f) = \int_L f\, dm$, $\forall f \in \mathscr{K}(L)$;
2) $m(K) < +\infty$ *pour tout <u>compact</u>* K ;
3) a) $m(\Omega) = \sup\{m(K)\,;\ K$ *compact et* $K \subseteq \Omega\}$ *pour tout <u>ouvert</u>* Ω *de* L ;
   b) $m(B) = \sup\{m(K)\,;\ K$ *compact et* $K \subseteq B\}$ *pour toute partie* $B \in \mathscr{M}$ *<u>telle que</u>* <u>$m(B) < +\infty$</u> ;
4) $m(B) = \inf\{m(\Omega)\,;\ \Omega$ *ouvert et* $B \subseteq \Omega\}$ *pour tout* $B \in \mathscr{M}$.

Preuve du Théorème VIII.3.1. a) <u>Unicité</u>. Soit $\mu \in \mathscr{M}_R(L)$ telle que :

$$\int_L f\, d\mu = 0\,, \quad \forall f \in \mathscr{C}_0(L).$$

Soit $\mu = h.|\mu|$ la décomposition polaire de μ. Comme $|h| = 1$ $|\mu|$-*p.p.*, on a $h \in L^\infty(|\mu|) \subseteq L^1(|\mu|)$. Par densité de $\mathscr{K}(L)$ dans $L^1(|\mu|)$, il existe $f_n \in \mathscr{K}(L)$ telles que :

$$\int_L |\overline{h} - f_n|\, d|\mu| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Mais, comme $\int_L f_n\, d\mu = 0$, on a, puisque $|h| = 1$:

$$
\begin{aligned}
|\mu|(L) &= \int_L |h|^2\, d|\mu| = \int_L \overline{h}h\, d|\mu| = \int_L \overline{h}\, d\mu \\
&= \int_L (\overline{h} - f_n)\, d\mu = \int_L (\overline{h} - f_n)h\, d|\mu| \leqslant \int_L |\overline{h} - f_n|\, d|\mu|\,;
\end{aligned}
$$

on a donc $|\mu|(L) = 0$, donc $\mu = 0$.

b) <u>Existence</u>. Soit $\Phi \in \big[\mathscr{C}_0(L)\big]^*$. On peut supposer $\|\Phi\| = 1$. On a :

Lemme VIII.3.3. *Pour toute forme linéaire continue $\Phi \in \big[\mathscr{C}_0(L)\big]^*$, il existe une forme linéaire <u>positive</u> $\Lambda\colon \mathscr{K}(L) \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ telle que :*

$$|\Phi(f)| \leqslant \Lambda(|f|) \leqslant \|\Phi\|\, \|f\|_\infty\,, \quad \forall f \in \mathscr{K}(L).$$

Admettant cela pour l'instant, le Théorème de représentation de Riesz donne une mesure de Borel positive ν telle que :

$$\Lambda(f) = \int_L f\, d\nu\,, \quad \forall f \in \mathscr{K}(L).$$

Comme, d'après la définition de ν (voir la preuve du Théorème de représentation de Riesz), on a :

$$
\begin{aligned}
\nu(L) &= \sup\{\Lambda(f)\,;\ f \in \mathscr{K}(L) \text{ et } 0 \leqslant f \leqslant 1\} \\
&\leqslant \sup\{\|f\|_\infty\,;\ f \in \mathscr{K}(L) \text{ et } 0 \leqslant f \leqslant 1\} \leqslant 1,
\end{aligned}
$$

la mesure ν est bornée ; elle est donc régulière, d'après le Théorème de représentation de Riesz.

D'autre part, le lemme donne :

$$|\Phi(f)| \leqslant \Lambda(|f|) = \int_L |f|\, d\nu = \|f\|_{L^1(\nu)}\,, \quad \forall f \in \mathscr{K}(L)\,;$$

donc Φ est une forme linéaire sur $\mathscr{K}(L)$, continue <u>pour la norme de $L^1(\nu)$</u>. Par densité de $\mathscr{K}(L)$ dans $L^1(\nu)$, elle s'étend en une forme linéaire continue $\widetilde{\Phi}$ sur $L^1(\nu)$ tout entier, avec la même norme. On peut donc trouver $g \in L^\infty(\nu)$, avec $\|g\|_\infty = \|\Phi\| = 1$, telle que :

$$\widetilde{\Phi}(f) = \int_L f\, g\, d\nu\,, \quad \forall f \in L^1(\nu).$$

Par restriction à $\mathscr{C}_0(L)$ ($\subseteq L^1(\nu)$ car ν est bornée), on obtient :

$$\Phi(f) = \int_L f\, g\, d\nu\,, \quad \forall f \in \mathscr{C}_0(L). \tag{$*$}$$

Cela prouve la première partie du théorème avec $\mu = g.\nu$.

De plus, puisque $\|\Phi\| = 1$, $(*)$ donne :

$$1 = \|\Phi\| = \sup\{|\Phi(f)|\,;\ f \in \mathscr{C}_0(L), \|f\|_\infty \leqslant 1\} \leqslant \int_L |g|\, d\nu\,.$$

Comme $\nu(L) \leqslant 1$ et $|g| \leqslant 1$, on a $\int_L |g|\, d\nu \leqslant \nu(L) \leqslant 1$, et l'inégalité précédente entraîne $\int_L |g|\, d\nu = 1$. Alors :

$$\|\mu\| = |\mu|(L) = \int_L d|\mu| = \int_L d(|g|.\nu) = \int_L |g|\, d\nu = 1 = \|\Phi\|.$$

Cela achève la preuve du théorème. □

Notons qu'en fait, les égalités précédentes montrent que $\nu(L) = 1$ et $|g| = 1$; donc $|\mu| = |g|.\nu = \nu$.

Preuve du lemme. 1) Pour $f \in \mathscr{K}(L)$ et $f \geqslant 0$, posons :

$$\Lambda(f) = \sup\{|\Phi(h)| \,;\; h \in \mathscr{K}(L) \text{ et } |h| \leqslant f\}.$$

On a :

$$0 \leqslant \Lambda(f) \leqslant \|\Phi\|\, \|h\|_\infty \leqslant \|\Phi\|\, \|f\|_\infty.$$

On a clairement $\Lambda(af) = a\Lambda(f)$ pour tout $a \in \mathbb{R}_+$. Nous allons montrer que :

$$\Lambda(f+g) = \Lambda(f) + \Lambda(g)\,, \quad \forall f, g \in \mathscr{K}^+(L).$$

Fixons pour cela $f, g \in \mathscr{K}^+(L)$.

• Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $h_1, h_2 \in \mathscr{K}(L)$ telles que $|h_1| \leqslant f$, $|h_2| \leqslant g$ et :

$$\Lambda(f) \leqslant |\Phi(h_1)| + \varepsilon\,, \quad \Lambda(g) \leqslant |\Phi(h_2)| + \varepsilon.$$

Soit $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ tels que $|\alpha_1| = |\alpha_2| = 1$ et :

$$\alpha_j \Phi(h_j) = |\Phi(h_j)|\,, \; j = 1, 2.$$

Alors :

$$\begin{aligned}\Lambda(f) + \Lambda(g) &\leqslant |\Phi(h_1)| + |\Phi(h_2)| + 2\varepsilon = \Phi(\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2) + 2\varepsilon \\ &\leqslant \Lambda(|(\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2|) + 2\varepsilon \leqslant \Lambda(|h_1| + |h_2|) + 2\varepsilon \leqslant \Lambda(f+g) + 2\varepsilon\,;\end{aligned}$$

d'où $\Lambda(f) + \Lambda(g) \leqslant \Lambda(f+g)$.

• Soit $V = \{x \in L \,;\; f(x) + g(x) > 0\}$.

Pour toute $h \in \mathscr{K}(L)$ telle que $|h| \leqslant f + g$, posons :

$$\begin{aligned}&h_1(x) = \frac{f(x)\,h(x)}{f(x)+g(x)}\,, \quad h_2(x) = \frac{g(x)\,h(x)}{f(x)+g(x)}\,, \quad \text{si } x \in V\,; \\ &h_1(x) = h_2(x) = 0 \;\text{ si } x \notin V.\end{aligned}$$

Les fonctions h_1 et h_2 sont alors continues sur L. C'est clair en tout point de l'ouvert V. Pour $x_0 \notin V$, on a $h_j(x_0) = 0$. La continuité de h et l'inégalité $|h_j(x)| \leqslant |h(x)|$, $\forall x \in L$, entraînent la continuité de h_j en x_0. Cette inégalité entraîne aussi que $\operatorname{supp}(h_j) \subseteq \operatorname{supp}(h)$; donc $h_j \in \mathscr{K}(L)$.

Maintenant, puisque $h_1 + h_2 = h$ et $|h_1| \leqslant f$, $|h_2| \leqslant g$, on a :

$$|\Phi(h)| = |\Phi(h_1) + \Phi(h_2)| \leqslant |\Phi(h_1)| + |\Phi(h_2)| \leqslant \Lambda(f) + \Lambda(g).$$

Prenant la borne supérieure sur toutes les h possibles, on obtient :

$$\Lambda(f+g) \leqslant \Lambda(f) + \Lambda(g).$$

2) Pour $f \in \mathscr{K}(L)$ réelle, on a :

$$f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f) \in \mathcal{K}(L)$$
$$f^- = \frac{1}{2}(|f| - f) \in \mathcal{K}(L),$$

et on pose :

$$\Lambda(f) = \Lambda(f^+) - \Lambda(f^-).$$

Pour f complexe, on pose $\Lambda(f) = \Lambda(\operatorname{Re} f) + i\Lambda(\operatorname{Im} f)$.

On vérifie sans difficulté que Λ est bien une forme linéaire (réelle ou complexe, selon les cas) positive sur $\mathscr{K}(L)$, et cela achève la preuve du lemme. $\square$

VIII.4. Annexe 2 : Théorème de Tychonov

VIII.4.1. Filtres et ultrafiltres

Nous allons rappeler les propriétés élémentaires des filtres et ultrafiltres.

Définition VIII.4.1. *Soit E un ensemble, non vide ; on dit qu'une famille de parties $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(E)$ est un* filtre *sur E si :*

1) elle n'est pas vide, et $\emptyset \notin \mathscr{F}$;

2) si A et B sont dans $\mathscr{F}$, alors $A \cap B \in \mathscr{F}$;

3) si $A \in \mathscr{F}$ et $B \supseteq A$, alors $B \in \mathscr{F}$.

On dit qu'un filtre $\mathscr{F}_2$ est plus fin *qu'un filtre $\mathscr{F}_1$ (et que $\mathscr{F}_1$ est* moins fin *que $\mathscr{F}_2$) si $\mathscr{F}_2 \supseteq \mathscr{F}_1$.*

Un filtre $\mathscr{U}$ est un ultrafiltre *s'il est maximal, au sens de l'inclusion, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de filtre strictement plus fin que lui.*

Notons que l'ensemble total E est donc toujours contenu dans un filtre.

Il est souvent pratique de ne pas travailler avec tous les éléments du filtre ; si $\mathscr{F}$ est un filtre, on dit que $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{F}$ est une *base du filtre* $\mathscr{F}$ si pour tout $A \in \mathscr{F}$, il existe $B \in \mathscr{B}$ tel que $B \subseteq A$. Pour qu'une famille non vide de parties $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{P}(E)$ soit la base d'un filtre (on dit alors que $\mathscr{B}$ est une *base de filtre*), il faut et il suffit que $\emptyset \notin \mathscr{B}$ et que, pour tous $A, B \in \mathscr{B}$, il existe $C \in \mathscr{B}$ tel que $C \subseteq A \cap B$; $\mathscr{B}$ est alors la base du filtre $\mathscr{F}_{\mathscr{B}}$ formé de toutes les parties qui contiennent au moins un élément $B \in \mathscr{B}$; c'est le plus petit filtre (le moins fin) qui contienne $\mathscr{B}$.

Exemples. a) Sur $\mathbb{N}$, l'ensemble des parties dont le complémentaire est fini est un filtre, appelé *filtre de Fréchet*.

b) Plus généralement, soit I un ensemble muni d'un ordre filtrant : pour tous $i, j \in I$, il existe $k \in I$ tel que $k \geqslant i$ et $k \geqslant j$; alors, si l'on note $I_j = \{i \in I\,;\ i \geqslant j\}$, l'ensemble $\mathscr{B} = \{I_j\,;\ j \in I\}$ est la base d'un filtre $\mathscr{F}_I$ sur I, dit *filtre des sections de* I.

c) Si E est un espace topologique, alors, pour tout $x \in E$, l'ensemble $\mathscr{V}(x)$ des voisinages de x est un filtre.

d) Pour tout ensemble E, et tout $a \in E$ fixé, l'ensemble des parties de E contenant a est un ultrafiltre $\mathscr{U}_a$; ces ultrafiltres sont dits *ultrafiltres triviaux*.

A l'exception des ultrafiltres triviaux, l'existence des ultrafiltres n'est assurée que par le Lemme de Zorn.

Proposition VIII.4.2. *Pour tout filtre $\mathscr{F}$ sur un ensemble E, il existe un ultrafiltre plus fin que $\mathscr{F}$.*

Preuve. Il est clair que la réunion de toute famille totalement ordonnée de filtres est encore un filtre ; par conséquent, l'ordre donné par la finesse sur l'ensemble des filtres plus fins que $\mathscr{F}$ est inductif, et donc cet ensemble possède des éléments maximaux. □

Une propriété importante des ultrafiltres est la suivante.

Proposition VIII.4.3. *Un filtre $\mathscr{F}$ sur l'ensemble E est un ultrafiltre si et seulement si, pour tout $A \subseteq E$, $A \in \mathscr{F}$ ou $A^c = E \setminus A \in \mathscr{F}$.*

Preuve. Soit d'abord $\mathscr{U}$ un ultrafiltre, et soit $A \subseteq E$ tel que $A^c \notin \mathscr{U}$; nous allons montrer que $A \in \mathscr{U}$. Pour cela, considérons $\mathscr{B} = \{B \cap A;\ B \in \mathscr{U}\}$; comme $\emptyset \notin \mathscr{B}$ (car $\emptyset \in \mathscr{B}$ signifierait que $\mathscr{U}$ contient une partie $B \subseteq A^c$, et donc que $A^c \in \mathscr{U}$), on en déduit que $\mathscr{B}$ est une base de filtre; le filtre $\mathscr{F}_{\mathscr{B}}$ engendré contient tous les $A \cap B$ pour $B \in \mathscr{U}$, donc tous les $B \in \mathscr{U}$ car $B \supseteq B \cap A$. Ainsi $\mathscr{F}_{\mathscr{B}}$ est plus fin que $\mathscr{U}$, et donc, par maximalité, lui est égal. Comme, clairement, $A \in \mathscr{F}_{\mathscr{B}}$, on a bien $A \in \mathscr{U}$.

Réciproquement, soit $\mathscr{F}$ un filtre ayant la propriété énoncée. Si ce n'était pas un ultrafiltre, on pourrait trouver un filtre $\mathscr{F}'$ strictement plus fin, et donc un $A \in \mathscr{F}' \setminus \mathscr{F}$; comme $A \notin \mathscr{F}$, l'hypothèse entraînerait que $A^c \in \mathscr{F}$, et donc que $A^c \in \mathscr{F}'$; mais alors, on aurait $\emptyset = A \cap A^c \in \mathscr{F}'$, ce qui est exclu. $\mathscr{F}$ est donc bien un ultrafiltre. □

Corollaire VIII.4.4. *Si $\mathscr{U}$ est un ultrafiltre sur E et si $A_1 \cup \ldots \cup A_n \in \mathscr{U}$, alors l'un des $A_k \in \mathscr{U}$.*

Preuve. Sinon, on aurait, par la Proposition VIII.4.3, $A_k^c \in \mathscr{U}$ pour tout $k \leqslant n$; alors $\emptyset = A_1^c \cap \ldots \cap A_n^c \cap (A_1 \cup \ldots \cup A_n) \in \mathscr{U}$, ce qui n'est pas possible. □

VIII.4.2. Limite selon un filtre

Définition VIII.4.5. *Soit X un espace topologique; on dit qu'un* filtre $\mathscr{F}$ sur X converge vers $x_0 \in X$ *s'il est plus fin que le filtre des voisinages de x_0.*

En d'autres termes, si tout voisinage V de x_0 est un élément du filtre $\mathscr{F}$. Si $\mathscr{B}$ est une base du filtre $\mathscr{F}$, elle converge vers x_0 si et seulement si tout voisinage V de x_0 contient un élément B de $\mathscr{B}$. Si X est séparé, un filtre ne peut converger que vers un seul point x_0 ; on dit alors que x_0 est *la limite du filtre $\mathscr{F}$*.

Il est clair que, pour toute partie $A \subseteq X$, $x_0 \in \overline{A}$ si et seulement si il existe un filtre $\mathscr{F}$ convergeant vers x_0 et tel que $A \cap F \neq \emptyset$ pour tout $F \in \mathscr{F}$. Comme alors $\mathscr{F}_A = \{A \cap F;\ F \in \mathscr{F}\}$ est un filtre d'éléments de A, on en déduit que $x_0 \in \overline{A}$ si et seulement si il existe un filtre de parties de A convergeant vers x_0.

La notion de valeur d'adhérence d'une suite se généralise de la façon suivante : on dit qu'un point x_0 est *adhérent au filtre $\mathscr{F}$* si $x_0 \in \overline{F}$ pour tout $F \in \mathscr{F}$. Il revient au même de dire que tout voisinage V de x_0 rencontre tout élément F du filtre $\mathscr{F}$: $V \cap F \neq \emptyset$; il en résulte que x_0 est adhérent au filtre $\mathscr{F}$ si et seulement si il existe un filtre $\mathscr{F}'$ plus fin que $\mathscr{F}$ qui converge vers x_0. Par conséquent, tout point adhérent à un ultrafiltre est la limite de cet ultrafiltre.

VIII.4.3. Compacité et filtres.

Théorème VIII.4.6. *Si X est un espace topologique séparé, X est compact si et seulement si tout ultrafiltre sur X est convergent.*

Preuve. Supposons X compact, et soit $\mathscr{U}$ un ultrafiltre sur X. Pour tous $U_1, \ldots, U_n \in \mathscr{U}$, on a $\overline{U}_1, \ldots, \overline{U}_n \in \mathscr{U}$; donc $\overline{U}_1 \cap \ldots \cap \overline{U}_n \neq \emptyset$. La compacité entraîne alors

$\bigcap_{U \in \mathcal{U}} \overline{U} \neq \emptyset$, et par conséquent $\mathscr{U}$ possède un point adhérent, qui est donc la limite de $\mathscr{U}$ (et l'intersection précédente est réduite à cet unique point).

Réciproquement, soit $(F_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille arbitraire de fermés de X telle que $F_{\alpha_1} \cap \ldots \cap F_{\alpha_n} \neq \emptyset$ pour tous $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. L'ensemble des intersections finies des F_α est alors une base de filtre sur X ; si $\mathscr{U}$ est un ultrafiltre plus fin que ce filtre, il a, par hypothèse, un point adhérent, et donc, en particulier, $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha \neq \emptyset$, de sorte que X est compact. □

Comme application de ce théorème, on a :

Théorème VIII.4.7 (Théorème de Tychonov). *Tout produit d'espaces compacts est encore compact.*

Preuve. D'abord, le produit est séparé. Ensuite, si $\mathscr{U}$ est un ultrafiltre sur ce produit, les images de $\mathscr{U}$ par les projections canoniques sont des bases d'ultrafiltres sur chacun des facteurs ; ils sont convergents puisque les facteurs sont compacts. Par conséquent $\mathscr{U}$ est convergent, et le produit est compact. □

VIII.5. Exercices

Exercice 1.

Soit H un espace de Hilbert. On rappelle qu'une suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ converge faiblement vers x si $(x_n \mid y) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (x \mid y)$ pour tout $y \in H$.

On considère une suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ d'éléments de H *deux-à-deux orthogonaux.* Montrer l'équivalence des conditions suivantes :

a) la série $\sum_n u_n$ converge pour la norme ;

b) la série $\sum_n u_n$ converge faiblement ;

c) la série $\sum_n \|u_n\|^2$ converge

(*pour montrer que b)* $\Rightarrow$ *c), on considérera les sommes partielles* $x_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$).

Exercice 2.

Montrer que si la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge faiblement vers f dans $L^1(\mathbb{R})$, alors la suite des transformées de Fourier $(\widehat{f_n})_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers $\widehat{f}$.

Remarque. Comparer avec l'Exercice 20 du Chapitre III.

Exercice 3.

Soit $1 \leqslant p < \infty$ et $f \in L^p(\mathbb{R})$, non nulle. On pose $f_n(x) = f(x)\,\mathrm{e}^{2\pi i n x}$, pour $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge faiblement dans $L^p(\mathbb{R})$, mais pas en norme.

Exercice 4.

Soit $(e_n)_{n\geqslant 1}$ la base canonique de ℓ_2. Montrer que 0 est dans l'adhérence pour la topologie faible de $\{\sqrt{n}\, e_n\ ;\ n \geqslant 1\}$, mais qu'il n'existe aucune sous-suite de $(\sqrt{n}\, e_n)_{n\geqslant 1}$ convergeant faiblement vers 0 (*on notera que si* $z \in \ell_2$, *alors, pour tout* $a > 0$, $|z(n)|^2 \leqslant a/n$ *pour une infinité de* n).

Remarque. Cela montre que la topologie faible de ℓ_2 n'est pas métrisable.

Exercice 5.

Soit $(S, \mathcal{T}, m)$ un espace mesuré et $1 < p < \infty$. Montrer que pour toute suite décroissante de convexes fermés bornés non vides C_n de $L^p(m)$, l'intersection $\bigcap_{n\geqslant 1} C_n$ n'est pas vide.

Exercice 6.

1) Montrer que si B est une partie d'un espace de Banach (disons, complexe) E telle que $\sup_{x\in B} |\varphi(x)| < +\infty$ pour toute $\varphi \in E^*$, alors B est une partie bornée de E (*on pourra considérer les les formes linéaires continues* $\widetilde{x} \in E^{**}$ *associées aux éléments* $x \in B$).

2) Soit $u = (u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de nombres complexes. On suppose que pour toute suite $a = (a_n)_{n\geqslant 1}$ telle que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < +\infty$, la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n u_n$ converge. Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^2 < +\infty$ (*on montrera que les sommes partielles sont uniformément bornées*).

Exercice 7.

Soit E et F deux espaces de Banach et $T\colon E \to F$ une application linéaire continue. On suppose que E est réflexif. Montrer que $T(B_E)$ est une partie fermée de F.

Exercice 8.

Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de nombres complexes.

On pose :

$$S_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k\, \mathrm{e}^{2\pi ikt} \qquad \text{et} \qquad K_N(t) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} S_n(t)\,.$$

1) Montrer que pour tout $l \in \mathbb{Z}$, la suite $\big(\widehat{K_N}(l)\big)_{N\geqslant 1}$ converge, et préciser sa limite.

On se donne maintenant un exposant p avec $1 < p < \infty$, et on suppose que $(K_N)_{N\geqslant 1}$ est bornée dans $L^p(0,1)$.

2) Montrer que l'on peut extraire de $(K_N)_{N\geqslant 1}$ une sous-suite faiblement convergente.

3) Si f est la limite (faible) de cette sous-suite, montrer que $\widehat{f}(l) = c_l$ pour tout $l \in \mathbb{Z}$.

Exercice 9 (*Une autre preuve du Théorème de Goldstine*).

Utiliser le Lemme de Helly (Exercice 5 du Chapitre VI) pour montrer le Théorème de Goldstine.

Exercice 10.

1) Montrer que dans tout espace de Banach X de dimension infinie, l'adhérence pour la topologie faible de la sphère unité S_X est égale à la boule unité (fermée) B_X (*si* $\|x_0\| < 1$ *et* $x \neq 0$, *considérer* $f(t) = \|x_0 + tx\|$, *pour* $t \in \mathbb{R}$*; choisir* x *convenablement*).

2) Montrer que dans tout espace de Banach X, la norme est semi-continue inférieurement pour la topologie faible, mais que si X est de dimension infinie, elle n'est pas faiblement continue.

Exercice 11.

Soit X et Y deux espaces de Banach et $T\colon X \to Y$ une application linéaire, continue de X muni de la topologie faible dans Y muni de la norme.

1) Montrer qu'il existe $\varphi_1, \dots \varphi_n \in X^*$ telles que $\bigcap_{1\leqslant j\leqslant n} \ker\varphi_j \subseteq \ker T$.

2) En déduire que T est de rang fini.

Exercice 12 (*Séparabilité des espaces à dual séparable*).

Montrer que si le dual X^* de l'espace normé X est séparable, alors X est lui-même séparable.

Exercice 13 (*Non réflexivité de* L^1).

On veut montrer que $L^1([0,1])$ n'est pas réflexif.

1) Montrer qu'il existe une forme linéaire continue Φ sur $L^\infty([0,1])$ telle que $\Phi(f) = f(0)$ lorsque f est continue.

2) En utilisant le lemme de Riemann-Lebesgue, montrer qu'il n'y a aucune $g \in L^1([0,1])$ telle que $\Phi(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,g(t)\,dt$ pour toute $f \in L^\infty([0,1])$. Conclure.

Remarque. Voir aussi l'Exercice 11 du Chapitre VI.

Exercice 14 (*Propriété de Schur de ℓ_1, autre méthode*).

Soit $(\mathbf{x}_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'éléments $\mathbf{x}_n = (x_{n,k})_{k\geqslant 1}$ de ℓ^1 faiblement convergente vers 0. On veut montrer (avec une méthode différente de celle de l'Exercice 18 du Chapitre I) qu'elle converge fortement (c'est-à-dire pour la norme).

1) Montrer que pour tout entier $k \geqslant 1$, $\lim_{n\to\infty} x_{n,k} = 0$.

2) Soit $B = B_{\ell_\infty}(0,1)$ la boule unité (fermée) de ℓ_∞, que l'on munit de la topologie préfaible $\sigma(\ell_\infty, \ell_1)$.

a) Montrer que B est un espace compact métrisable.

Soit $\varepsilon > 0$ et $F_n = \{\mathbf{b} \in B\,;\ |\langle \mathbf{b}, \mathbf{x}_n\rangle| \leqslant \varepsilon,\ \forall k \geqslant n\}$, pour tout entier $n \geqslant 1$.

b) Montrer qu'il existe n_0 tel que F_{n_0} soit d'intérieur (dans B) non vide.

c) Montrer que la topologie préfaible $\sigma(\ell_\infty, \ell_1)$ coïncide sur B avec la topologie de la convergence simple (c'est-à-dire la trace sur B de la topologie produit de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}^*}$).

d) Montrer qu'il existe N_0 tel que pour tout $\mathbf{b} = (b_n)_{n\geqslant 1} \in B$ vérifiant $b_n = 0$ pour $n \leqslant N_0$, on a $\mathbf{b} \in F_{n_0}$ (*utiliser le fait que F_{n_0} est convexe et symétrique par rapport à* 0).

3) Conclure.

Exercice 15 (*L^1 faiblement séquentiellement complet, suite et fin*).

Il s'agit de la suite de l'Exercice 4 du Chapitre V.

Rappelons que l'on travaille sur l'espace (réel, par commodité) $L^1(0,1)$ et que l'on considère une suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ de fonctions intégrables sur $[0,1]$ telle que la limite $\lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)\,dx$ existe (dans $\mathbb{R}$) pour tout borélien $A \subseteq [0,1]$, et que l'on a montré dans l'Exercice 4 du Chapitre V qu'il existe $f \in L^1(0,1)$ tel que $\int_A f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)\,dx$, pour tout borélien A de $[0,1]$.

1) a) En utilisant le 4) de l'Exercice 4 du Chapitre V, montrer que la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée dans $L^1(0,1)$.

b) En déduire que la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge faiblement vers f.

2) Montrer que toute suite de Cauchy pour la topologie faible de $L^1([0,1])$ est faiblement convergente.

Exercice 16 (*Théorème du point fixe de Browder*).

Soit H un espace de Hilbert (complexe pour fixer les idées), et soit C une partie convexe fermée et bornée (non vide) de H et contenant 0. Soit $T\colon C \to C$ une application telle que :

$$\|T(x) - T(y)\| \leqslant \|x - y\| \qquad \forall x, y \in C\,.$$

1) On pose $T_n(x) = \frac{n-1}{n}\, T(x)$. Montrer que T_n a un unique point fixe $x_n \in C$.

2) Justifier pourquoi on peut extraire de $(x_n)_n$ une sous-suite $(x_{n_k})_k = (y_k)_k$ faiblement convergente vers un élément $y \in C$.

3) a) Pour $u, v \in C$ et $n, m \geqslant 1$, développer $\|T(u) - T(v)\|^2$ en fonction de $T_n(u)$ et $T_m(v)$.

b) En déduire que $\|y_k\|^2 \leqslant \frac{2n_k - 2}{2n_k - 1}\,\mathrm{Re}\,(y_k \mid y)$.

4) En déduire que $(y_k)_k$ converge en norme vers y et donc que $T(y) = y$.

Exercice 17 (*Théorème de Stampacchia*).

Cet exercice complète l'Exercice 14 du Chapitre II. On reprend les mêmes notations : H est un espace de Hilbert réel, et $B\colon H \times H \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue (c'est-à-dire qu'il existe une constante $M > 0$ telle que $|B(x,y)| \leqslant M\,\|x\|\,\|y\|$ pour tous $x, y \in H$: voir l'Exercice 7 du Chapitre VI) qui est *coercive*, c'est-à-dire qu'il existe une constante $a > 0$ telle que $B(x,x) \geqslant a\,\|x\|^2$ pour tout $x \in H$). On suppose de plus que B est *symétrique*.

1) Montrer que le produit scalaire défini par B sur H induit une norme $|||\,.\,|||$ équivalente sur H.

2) Soit $L\colon H \to \mathbb{R}$ une forme linéaire continue sur H. Pour tout $v \in H$, on pose $J(v) = B(v,v) - 2\,L(v)$. Soit C une partie convexe fermée de H. On pose $m = \inf_{v \in C} J(v)$.

a) Montrer qu'il existe une suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ d'éléments de C qui est faiblement convergente et telle que $\lim_{n\to\infty} J(v_n) = m$.

b) Soit $v_0 = w - \lim_{n\to\infty} v_n$. Montrer que $v_0 \in C$.

c) Montrer que $J(v_0) \leqslant m$ (*utiliser le fait que H est isomorphe à $(H, |||\,.\,|||)$, et donc qu'ils ont la même topologie faible*), et en déduire que $J(v_0) = m$ et que $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge en norme vers v_0.

3) On rappelle (voir l'Exercice 14 du Chapitre II) qu'il existe un unique $u \in H$ tel que $L(v) = B(u,v)$ pour tout $v \in H$.

a) Montrer que $|||u - v_0||| \leqslant |||u - v|||$ pour tout $v \in C$. Qu'en déduit-on pour v_0 par rapport à u ?

b) En déduire que $B(v_0, v - v_0) \geqslant L(v - v_0)$ pour tout $v \in C$.

Exercice 18 (*Non métrisabilité de la topologie faible des espaces de Hilbert*).

Soit H un espace de Hilbert séparable, et $(e_n)_{n\geqslant 1}$ une base orthonormée de H.

1) Montrer que la suite $(e_n)_{n\geqslant 1}$ converge faiblement vers 0.

2) On suppose qu'il existe une distance d sur H définissant la topologie faible.

a) Montrer que pour tout entier $k \geqslant 1$, il existe $x_k \in H$ tel que $\|x_k\| = k$ et $d(0, x_k) \leqslant 1/k$ (*utiliser la question précédente*).

b) Montrer que c'est impossible (*on remarquera que la suite $(x_k)_k$ converge faiblement vers* 0).

Exercice 19 (*Non métrisabilité de la topologie faible*).

On veut montrer que pour tout espace de Banach X de dimension infinie, la topologie faible $\sigma(X, X^*)$ n'est pas métrisable (la même méthode vaut pour la topologie préfaible des duaux d'espaces de dimension infinie).

On suppose, par contradiction, qu'elle l'est.

Première méthode

1) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, il existe $\varepsilon_n > 0$ et une partie finie $F_n \subseteq X^*$ telle que, si $V_n = \{x \in X\,;\ |\varphi(x)| \leqslant \varepsilon_n,\ \forall \varphi \in F_n\}$, alors tout voisinage de 0 pour la topologie faible contient l'un des V_n.

2) Montrer que, en notant Y_n le sous-espace engendré par F_n, il existe $\varphi_0 \in X^*$ tel que $\varphi_0 \notin \bigcup_{n\geqslant 1} Y_n$.

3) Montrer que $U = \{x \in X\,;\ |\varphi_0(x)| \leqslant 1\}$ ne contient aucun des V_n.

4) Conclure.

Deuxième méthode

Soit d une distance définissant la topologie faible. Utiliser l'Exercice 10 pour montrer qu'il existe des $x_n \in X$ tels que $\|x_n\| = n$ et $d(x_n, 0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et conclure.

Exercice 20 (*Séparabilité préfaible*).

1) Soit X un sous-espace de dimension infinie de ℓ_1. Montrer que X^* n'est pas séparable (*utiliser l'Exercice 10 et la propriété de Schur de* ℓ_1).

2) Montrer que pour tout espace de Banach séparable X, le dual X^* est w^*-séparable (*noter que* $X^* = \bigcup_{n\geqslant 1} nB_{X^*}$) .

3) Montrer que $(\ell_\infty)^*$ est w^*-séparable (*utiliser le Théorème de Goldstine*).

Exercice 21 (*Opérateurs dont l'adjoint est surjectif*).

Soit E et F deux espaces de Banach et $T\colon E \to F$ une application linéaire continue. On rappelle qu'il existe une application linéaire continue $T^*\colon F^* \to E^*$ telle que $\langle T^*\varphi, x\rangle = \langle \varphi, Tx\rangle$ pour tous $\varphi \in F^*$ et $x \in E$.

1) Montrer que si $\inf_{\|x\|=1} \|Tx\| = 0$, alors il existe des $x_n \in E$, $n \geqslant 1$, tels que $\|x_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ et tels que $\|Tx_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

2) On suppose maintenant T^* surjectif.

a) Montrer que si $\|Tx_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, alors la suite $(x_n)_n$ converge faiblement.

b) En déduire qu'il existe $a > 0$ tel que $\|Tx\| \geqslant a\,\|x\|$ pour tout $x \in E$.

Exercice 22 (*Opérateurs à image fermée*).

A. Soit E et F deux espaces de Banach (réels ou complexes), et soit $S\colon E \to F$ une application linéaire continue.

1) On suppose S surjective.

a) Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $S(B_E) \supseteq \delta\, B_F$, où B_E et B_F désignent les boules unité fermées de E et F.

b) En déduire que $\|S^*\varphi\|_{E^*} \geqslant \delta\,\|\varphi\|_{F^*}$ pour toute $\varphi \in F^*$, S^* étant l'adjointe de S.

c) En déduire que $S^*(F^*)$ est fermé dans E^*.

2) On suppose $S^*\colon F^* \to E^*$ surjective. Montrer que $S(E)$ est fermé dans F.

B. Soit X et Y deux espaces de Banach et $T\colon X \to Y$ une application linéaire continue.

1) On suppose que $T(X)$ est fermé dans Y.

a) Soit $j\colon T(X) \to Y$ l'injection canonique. Montrer que j^* est surjective.

b) En déduire que $T^*(Y^*)$ est fermé dans X^*.

2) a) Soit Z un sous-espace fermé de X et $q\colon X \to X/Z$ la surjection canonique. Montrer que q^* est une isométrie.

b) Montrer que si $T^*(Y^*)$ est fermé dans X^*, alors $T(X)$ est fermé dans Y (*considérer* $\widetilde{T}\colon X/\ker T \to \overline{T(X)}$, *définie par* $\widetilde{T}(\widetilde{x}) = T(x)$).

Exercice 23 (*Un resultat de Å Beurling*).

Soit X un espace de Banach et $T\colon \ell_1 \to X$ une application linéaire continue. On suppose que $T^*(X^*)$ est dense dans ℓ_∞, et l'on veut montrer qu'en fait $T^*(X^*) = \ell_\infty$.

1) Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que $\|T\xi\| \geqslant c\,\|\xi\|_1$ pour tout $\xi \in \ell_1$ (*utiliser l'Exercice 14 ; voir aussi l'Exercice 18 du Chapitre I*).

2) En déduire que $T^*(X^*)$ est fermé et conclure.

Exercice 24 (*Opérateurs de Dunford-Pettis*).

On dit qu'un opérateur $T\colon X \to Y$ entre deux espaces de Banach X et Y est de *Dunford-Pettis* si l'image par T de toute suite faiblement convergente dans X converge en norme dans Y.

1) Montrer que tout opérateur compact est de Dunford-Pettis.

2) Montrer que si X est réflexif, alors tout opérateur de Dunford-Pettis est compact.

3) On considère l'*opérateur de Volterra* $V\colon L^1([0,1]) \to \mathscr{C}([0,1])$, défini par :

$$Vf(x) = \int_0^x f(t)\,dt\,, \quad f \in L^1([0,1]).$$

a) Montrer que V est un opérateur de Dunford-Pettis (*utiliser le 4) de l'Exercice 4 du Chapitre V*).

b) Montrer que V n'est pas compact (*on pourra utiliser* $f_n = n\,\mathbb{1}_{[0,1/n]}$).

Exercice 25.

1) Montrer que tout opérateur $T\colon Z \to \ell_1$ d'un espace de Banach réflexif Z dans ℓ_1 est compact (*utiliser l'Exercice 14 ; voir aussi l'Exercice 18 du Chapitre I*).

2) Montrer que tout opérateur $U\colon c_0 \to Y$ de c_0 dans un espace de Banach réflexif Y est compact.

Exercice 26 (*Quotient d'un espace réflexif*).

On se reportera à l'Exercice 15 du Chapitre I pour la définition de l'espace quotient.

Soit X un espace de Banach, M un sous-espace fermé de X, que l'on suppose différent de X. Montrer que si X est réflexif, alors X/M est aussi réflexif (*on rappelle qu'un espace de Banach est réflexif si et seulement si sa boule unité fermée est faiblement compacte*).

Exercice 27 (*Opérateurs faiblement compacts*).

Soit X un espace de Banach (réel pour fixer les idées).

1) Soit K une partie de X faiblement compacte (c'est-à-dire compacte pour la topologie faible $\sigma(X, X^*)$ de X).

a) Montrer que pour toute $\varphi \in X^*$, il existe une constante $C_\varphi > 0$ telle que $|\varphi(x)| \leqslant C_\varphi$ pour tout $x \in K$.

b) En déduire, en utilisant le Théorème de Banach-Steinhaus, qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\|x\| \leqslant C$ pour tout $x \in K$.

2) Soit A une partie de X. On suppose que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie de $K_\varepsilon \subseteq X$ faiblement compacte telle que $A \subseteq K_\varepsilon + \varepsilon\, B_X$.

a) Montrer que A est bornée.

b) Montrer que si H et L sont deux parties $\sigma(X^{**}, X^*)$-compacte dans X^{**}, alors leur somme $H+L$ est aussi $\sigma(X^{**}, X^*)$-compacte dans X^{**} (*utiliser l'application* $(u,v) \in X^{**} \times X^{**} \mapsto (u+v) \in X^{**}$).

c) En déduire que $K_\varepsilon + \varepsilon\, B_{X^{**}}$ est $\sigma(X^{**}, X^*)$-compacte dans X^{**}.

d) Montrer que la fermeture $\bar{A}^{w^*}$ de A dans X^{**} pour la topologie préfaible $\sigma(X^{**}, X^*)$ est contenue dans $\bigcap_{\varepsilon>0}(X + \varepsilon\, B_{X^{**}})$.

e) En déduire que $\bar{A}^{w^*} \subseteq X$, puis, que A est faiblement relativement compacte, c'est-à-dire que l'adhérence faible de A dans X est faiblement compacte (*résultat dû à Grothendieck*).

3) On dit qu'un opérateur $T\colon X \to Y$ est faiblement compact si l'adhérence de $T(B_X)$ est faiblement compacte dans Y.

a) Montrer que tout opérateur compact est faiblement compact.

b) Montrer que si X ou Y est réflexif, alors tout opérateur $T \in \mathscr{L}(X,Y)$ est faiblement compact.

c) Montrer que si $T \in \mathscr{L}(X,Y)$ est faiblement compact, alors, pour tout $R \in \mathscr{L}(W,X)$ et tout $S \in \mathscr{L}(Y,Z)$, l'opérateur $STR\colon W \to Z$ est faiblement compact.

d) Montrer que l'ensemble $\mathscr{W}(X,Y)$ des opérateurs faiblement compacts de X dans Y est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathscr{L}(X,Y)$ des applications linéaires continues de X dans Y et qu'il est fermé en norme dans l'espace $\mathscr{L}(X,Y)$.

e) Montrer qu'un opérateur $T\colon X \to Y$ est faiblement compact si et seulement si $T^{**}(X^{**}) \subseteq Y$ (*on montrera que $T^{**}\colon X^{**} \to Y^{**}$ est continue pour les topologies préfaibles*).

Exercice 28 (*Théorème de Krein-Milman*).

Soit E un espace vectoriel topologique séparé localement convexe réel, et soit K une partie compacte convexe de E (non vide). On appelle *face extrémale* de K toute partie convexe fermée non vide F de K pour laquelle $tx + (1-t)y \in F$, avec $x, y \in K$ et $0 < t < 1$, entraîne $x, y \in F$. On notera que si une face extrémale est réduite à un point e, ce point est un point extrémal (voir l'Exercice 24 du Chapitre I pour la définition). Le but de l'exercice est de montrer le *Théorème de Krein-Milman*, disant que K est l'enveloppe convexe fermée de l'ensemble de ses points extrémaux.

1) Montrer que si F est une face extrémale de K et si e est un point extrémal de F, alors e est un point extrémal de K.

2) Montrer qu'il existe une face extrémale minimale (pour l'inclusion) F_0 dans K.

3) On suppose que F_0 contient au moins deux points distincts x et y. Soit φ une forme linéaire continue sur E telle que $\varphi(x) \neq \varphi(y)$. On pose $m = \max_{z\in F_0} \varphi(z)$ et $C = \{z \in F_0\,;\ \varphi(z) = m\}$.

a) Montrer que C est une face extrémale de K.

b) Montrer que C n'est pas égal à F_0.

c) Qu'en conclut-on ?

4) Soit K_0 l'enveloppe convexe fermée de l'ensemble des points extrémaux de K. On suppose que $K_0 \neq K$.

a) Montrer qu'il existe une forme linéaire continue ψ sur E telle que

$$\max_{y\in K_0} \psi(y) < \max_{x\in K} \psi(x).$$

b) On pose $M = \max_{x\in K} \psi(x)$ et $C' = \{x \in K\,;\ \psi(x) = M\}$. Montrer que C' contient un point extrémal de K (*raisonner comme au 3) a), et utiliser le 1)*).

5) Conclure.

6) Utiliser ce résultat pour montrer que c_0 et $L^1(0,1)$ ne sont pas isométriques à un espace de Banach dual.

Exercice 29 (*Une preuve du Théorème de Stone-Weierstrass*).

Cette méthode est due à Louis de Branges (1959).

Soit K un espace compact et soit E un sous-espace (fermé) de l'espace complexe $\mathscr{C}(K)$, stable par conjugaison. On note $\mathscr{K}_E$ l'ensemble des mesures *réelles* μ sur K telles que $\int_K f\,d\mu = 0$ pour toute $f \in E$. On le munit de la topologie préfaible $\sigma\big(\mathscr{M}(K), \mathscr{C}(K)\big)$.

1) Montrer que si E n'est pas dense dans $\mathscr{C}(K)$, alors $\mathscr{K}_E$ contient un point extrémal μ tel que $\|\mu\| = 1$.

2) Soit $\nu \in \mathscr{K}_E$ telle que $\|\nu\| = 1$, et soit $g \in L^\infty(|\nu|)$, qui n'est pas $|\nu|$-presque partout constante, et telle que $\int_K fg\,d\nu = 0$ pour toute $f \in E$.

a) Montrer qu'on peut supposer g réelle et positive $|\nu|$-presque partout, et aussi que $\int_K g\,d|\nu| = 1$.

b) Soit $M < +\infty$ tel que $|g| \leqslant M$ $|\nu|$-*p.p.*. Montrer que $M > 1$ (*si l'on avait $M \leqslant 1$, montrer que l'on aurait $\int_K |\mathbb{1} - g|\,d|\nu| = 0$*).

c) Montrer que ν n'est pas un point extrémal de $\mathscr{K}_E$ (*considérer les mesures définies par $\nu_1(B) = \int_B g\,d\nu$ et $\nu_2(B) = \int_B \frac{1-\lambda g}{1-\lambda}\,d\nu$, avec $\lambda = 1/M$*).

3) On suppose maintenant que E, en plus d'être stable par conjugaison, est stable par multiplication (donc est une sous-algèbre fermée de $\mathscr{C}(K)$), et que E sépare les points de K. On suppose de plus que E n'est pas dense dans $\mathscr{C}(K)$.

a) Soit μ la mesure du 1). Montrer que toute $g \in E$ est $|\mu|$-presque partout égale à une constante.

b) Pour toute mesure positive m sur K, on appelle *support* de m le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel m s'annule (autrement dit, le support $\operatorname{supp} m$ de m est le plus petit fermé portant m). Montrer que si une fonction g continue sur K est m-presque partout égale à une constante, alors, elle est partout constante sur $\operatorname{supp} m$.

c) Montrer qu'il existe $a \in K$ tel que $g(a) = 0$ pour toute $g \in E$.

Exercice 30 (*Opérateurs p-sommants et Théorème de Dvoretzky-Rogers*).

Soit X et Y deux espaces de Banach On dit qu'un opérateur de $T\colon X \to Y$ est *p-sommant* ($1 \leqslant p < \infty$) s'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tous $x_1, \ldots, x_N \in X$, on ait :

$$\Big(\sum_{n=1}^{N} \|Tx_n\|^p\Big)^{1/p} \leqslant C \sup_{\xi \in B_{X^*}} \Big(\sum_{n=1}^{N} |\xi(x_n)|^p\Big)^{1/p}.$$

La meilleure constante C possible est notée $\pi_p(T)$. On a $\|T\| \leqslant \pi_p(T)$ (prendre $N = 1$).

1) Soit H un espace de Hilbert séparable et $T \in \mathscr{L}(H)$.

a) Montrer que si T est un opérateur 2-sommant , alors T est un opérateur de Hilbert-Schmidt (voir Chapitre II, Exercice 23) et $\|T\|_{\mathfrak{HS}} \leqslant \pi_2(T)$.

b) On suppose que T est un opérateur de Hilbert-Schmidt. Montrer qu'il existe une base orthonormée de vecteurs propres de T^*T (*utiliser le Théorème VII.3.10*), et en déduire que T est 2-sommant et $\pi_2(T) \leqslant \|T\|_{\mathfrak{HS}}$.

2) Soit K un espace compact et μ une mesure de probabilité régulière sur K, muni de sa tribu borélienne. Montrer que, pour $1 \leqslant p < \infty$, l'injection canonique $j_p\colon \mathscr{C}(K) \to L^p(K,\mu)$ est p-sommante et $\pi_p(j_p) = 1$.

3) Soit $T\colon X \to Y$ un opérateur p-sommant. Montrer que si $\sum_{n=1}^{\infty} |\xi(x_n)|^p < +\infty$ pour toute $\xi \in X^*$, alors $\sum_{n=1}^{\infty} \|Tx_n\|^p < +\infty$ (*utiliser le Théorème du graphe fermé pour montrer la continuité de l'application linéaire* $U\colon \xi \in X^* \mapsto \big(\xi(x_n)\big)_{n\geqslant 1} \in \ell_p$).

4) Soit $T\colon X \to Y$ un opérateur p-sommant.

On note K l'espace compact (B_{X^*}, w^*) formé de la boule unité de X^* munie de la topologie préfaible.

a) On pose :

$$\mathfrak{C} = \Big\{\phi\colon K \to \mathbb{R}\,;\ \exists x_1, \ldots, x_N \in X\,,\quad \phi(\xi) = [\pi_p(T)]^p \sum_{n=1}^{N} |\xi(x_n)|^p - \sum_{n=1}^{N} \|Tx_n\|^p \Big\}\,.$$

Montrer que $\mathfrak{C}$ est un cône convexe de $\mathscr{C}(K)$.

b) Montrer que $\mathfrak{C}^- = \{\psi \in \mathscr{C}(K)\,;\ \sup_K \psi < 0\}$ est un cône convexe ouvert de $\mathscr{C}(K)$.

c) Montrer qu'il existe une mesure régulière ν sur K telle que :

$$\int_K \psi\, d\nu \leqslant 0\,,\quad \forall \psi \in \mathfrak{C}^-\,,\quad \text{et}\quad \int_K \phi\, d\nu \geqslant 0\,,\quad \forall \phi \in \mathfrak{C}\,.$$

d) Montrer que la mesure ν est positive.

e) En déduire que $\|Tx\| \leqslant \pi_p(T) \left(\int_K |\xi(x)|^p\, d\nu(\xi)\right)^{1/p}$ (*Théorème de factorisation de Pietsch, 1967*).

5) Montrer qu'il existe un isomorphisme isométrique $i\colon X \to X_0 \subseteq \mathscr{C}(K)$, un sous-espace fermé X_p de $L^p(K,\nu)$ et une application linéaire continue $\widetilde{T}\colon X_p \to Y$ tels que $T = \widetilde{T} \circ j_p \circ i$, où $j_p\colon \mathscr{C}(K) \to L^p(K,\nu)$ est l'injection canonique.

6) En déduire que pour tout opérateur p-sommant $T\colon X \to Y$, $1 \leqslant p < \infty$ est r-sommant pour tout $r \geqslant p$.

7) Déduire de ce qui précède que pour tout opérateur p-sommant ($1 \leqslant p < \infty$) est :

(i) faiblement compact (voir l'Exercice 27) (*pour $p = 1$, utiliser le 5)*) ;

(ii) Dunford-Pettis (voir l'Exercice 24).

8) Montrer que si X est réflexif, alors tout opérateur p-sommant $T\colon X \to Y$ est compact.

9) En déduire que si l'identité de X est p-sommante pour un $p < \infty$, alors X est de dimension finie.

10) Soit X un espace de Banach. On dit qu'une série $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ d'éléments de X est *inconditionnellement convergente* si pour toute permutation π est entiers $\geqslant 1$, la série $\sum_{n\geqslant 1} x_{\pi(n)}$ est convergente. On dit qu'elle est *absolument convergente* si $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < +\infty$. On rappelle le résultat de Riemann : dans $\mathbb{R}$ (et donc aussi dans $\mathbb{R}^d$ et dans tout espace normé de dimension finie) la convergence inconditionnelle équivaut à convergence absolue (on peut modifier l'ordre des termes de toute série est semi-convergente de façon à la rendre divergente).

a) Donner un exemple de série dans ℓ_2, et un dans c_0, qui est inconditionnellement convergente, mais pas absolument convergente.

b) On *admettra* le résultat suivant (Théorème de Bessaga-Pełczyński, 1958) : Si X est espace de Banach ne contenant pas de sous-espace isomorphe à c_0, toute série

$\sum_{n\geqslant 1} x_n$ telle que $\sum_{n=1}^{\infty} |\xi(x_n)| < +\infty$ pour toute $\xi \in X^*$, est inconditionnellement convergente.

Montrer que si dans X, toute série inconditionnellement convergente est absolument convergente, alors X est de dimension finie (*Théorème de Dvoretzky-Rogers, 1950*).

Chapitre IX

ESPACES DE SOBOLEV

IX.1. Introduction

La méthode que l'on va décrire s'applique à un grand nombre de cas (voir le livre de H. Brézis, *Analyse Fonctionnelle : théorie et applications*, ou les exercices).

IX.1.1. Équation du pendule

On considère l'*équation du pendule forcé* :

$$\alpha'' + \sin\alpha = g \tag{EPF}$$

où $\alpha = \alpha(t)$ est l'angle que fait le pendule avec la verticale (vers le bas) à l'instant t, et g est une fonction continue donnée, représentant l'impulsion que l'on donne au pendule.

On cherche si cette équation a une solution α telle que $\alpha(0) = \alpha(1) = 0$ (c'est-à-dire que l'on veut que le pendule soit à la verticale au départ, et qu'à la fin, au temps $t = 1$, il soit revenu à sa position initiale). Par solution, on entend une fonction $\alpha\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $[0,1]$.

IX.1.2. Stratégie

Notons $\mathscr{C}_0^2([0,1])$ l'espace des $u \in \mathscr{C}^2([0,1])$ vérifiant $u(0) = u(1) = 0$.

Pour $u \in \mathscr{C}_0^2([0,1])$, on pose :

$$I(u) = \int_0^1 \Big(\frac{1}{2}\,u'^2 + \cos u + u\,g\Big)(t)\,dt\,.$$

On a une application $I\colon \mathscr{C}^2([0,1]) \to \mathbb{R}$, et l'on va voir que <u>si</u> I possède un <u>minimum</u> en u, alors u est solution de (EPF).

Fixons u et $h \in \mathscr{C}_0^2([0,1])$; on obtient une fonction $\varphi_h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi_h(s) = I(u + sh)\,.$$

Alors si I a un minimum en u, on a $\varphi_h'0) = 0$. Comme

$$\varphi_h(s) = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}(u' + sh')^2 + \cos(u + sh) + (u + sh)\, g\right](t)\, dt\,,$$

on a, par dérivation sous le signe intégral :

$$\varphi_h'(s) = \int_0^1 \left[(u' + sh')\, h' - h\sin(u + sh) + hg\right](t)\, dt\,,$$

et donc :

$$\int_0^1 \left[u'h' + h(-\sin u + g)\right](t)\, dt = 0\,.$$

Comme $h(0) = h(1) = 0$, on a, en intégrant par parties :

$$\int_0^1 u'(t)h'(t)\, dt = \left[u'(t)\cancel{h}(t)\right]_0^1 - \int_0^1 u''(t)\, h(t)\, dt\,.$$

On obtient :

$$\int_0^1 h(t)\left[u''(t) + \sin u(t) - g(t)\right] dt = 0\,.$$

Comme c'est vrai pour toute $h \in \mathscr{C}_0^2([0,1])$, il en résulte que :

$$U = u'' + \sin u - g$$

est nulle, c'est-à-dire que u est solution de (EPF).

En effet, en prenant $h(t) = (1 - \mathrm{e}^{-2\pi int})$, on obtient $\widehat{U}(n) - \widehat{U}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$; donc $U - \widehat{U}(0)\mathbb{1} = 0$ et U est constante. Ensuite, en prenant h telle que $h(t) > 0$ sur $]0,1[$ (par exemple $h(t) = \sin^2(2\pi t)$ ou $h(t) = t(1-t)$; mais en fait, il suffit que l'intégrale de h ne soit pas nulle), on obtient $U = 0$.

Ainsi, on pourra trouver une solution de (EPF) si on sait minimiser I.

Le problème est que dans $\mathscr{C}_0^2([0,1])$, qui n'est pas un dual, et en particulier n'est pas réflexif, on a peu de compacité. L'idée est donc de remplacer $\mathscr{C}_0^2([0,1])$ par un espace réflexif (un espace de Hilbert) pour lequel les propriétés de compacité faible de la boule unité permettrons la minimilisation.

Ce que l'on gagne d'un côté étant forcément perdu de l'autre, en faisant cela, on perdra la dérivabilité des fonctions. On est amené à un compromis en introduisant la notion de *dérivée faible.*

IX.2. Espaces de Sobolev

IX.2.1. Dérivées faibles.

Dans ce qui suit, on considérera un intervalle ouvert (non vide) I de $\mathbb{R}$, borné ou non, d'extrémités a et b $(-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty)$; et on notera $\bar{I}$ son adhérence dans $\mathbb{R}$: $\bar{I} = [0, +\infty[$ si $I =]0, +\infty[$.

On notera $\mathscr{D}^1(I)$ l'espace des fonctions continûment dérivables à support compact contenu dans I (voir le paragraphe III.1.5.1). Plus généralement, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on notera $\mathscr{D}^k(I)$ l'espace des fonctions de classe C^k à support compact contenu dans I, et $\mathscr{D}^\infty(I)$ l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact contenu dans I : $\mathscr{D}^\infty(I) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \mathscr{D}^k(I)$.

Le point de départ est la remarque suivante : si u est continûment dérivable sur I et si $\varphi \in \mathscr{D}^1(I)$, alors, en intégrant par parties, on obtient :

$$\int_I u(t)\,\varphi'(t)\,dt = -\int_I u'(t)\,\varphi(t)\,dt\,,$$

puisque le fait que $\operatorname{supp}(\varphi)$ soit un compact de $]a,b[$ entraîne

$$[u\,\varphi]_a^b = u(b)\,\varphi(b) - u(a)\,\varphi(a) = 0\,.$$

Cela conduit à :

Définition IX.2.1. *On dit que $u \in L^p(I)$, $1 \leqslant p < +\infty$, a une dérivée faible s'il existe $v \in L^p(I)$ telle que :*

$$\int_I u(t)\,\varphi'(t)\,dt = -\int_I v(t)\,\varphi(t)\,dt\,, \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}^1(I)\,.$$

Exemple. Pour $I =]-1,1[$ et $u(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad -1 < x \leqslant 0 \\ x & \text{si} \quad 0 \leqslant x < 1 \end{cases}$, on a (Exercice 1) : $u'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad -1 < x \leqslant 0 \\ 1 & \text{si} \quad 0 \leqslant x < 1 \end{cases}$ (u' est définie presque partout).

Notons que, puisque $\mathscr{D}^1(I) \subseteq \mathscr{D}^0(I) = \mathscr{K}(I) \subseteq L^q(I)$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$, cela peut s'écrire, avec la dualité entre $L^p(I)$ et $L^q(I)$:

$$\boxed{\langle u, \varphi' \rangle = -\langle v, \varphi \rangle\,, \qquad \forall \varphi \in \mathscr{D}^1(I)}\,.$$

On a unicité d'une telle dérivée faible.

Proposition IX.2.2. *Si un tel v existe, il est unique.*

Notation. On notera $\boxed{v = u'}$.

Cette unicité résulte directement de la proposition suivante.

Proposition IX.2.3. *Soit $v_1, v_2 \colon I \to R$ deux fonctions localement intégrables sur I, c'est-à-dire qu'elles sont intégrables sur tout intervalle borné contenu dans I. Si $\int_I v_1(t)\,\varphi(t)\,dt = \int_I v_2(t)\,\varphi(t)\,dt$ pour toute $\varphi \in \mathscr{D}^1(I)$, alors $v_1 = v_2$ presque partout.*

Preuve. Nous allons montrer que $v = v_1 - v_2$ est nulle.

Soit $x_0 \in I$ et $r > 0$ tel que $[x_0 - 2r, x_0 + 2r] \subseteq I$. Soit $\rho_\varepsilon \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ telles que $\operatorname{supp}(\rho_\varepsilon) \subseteq [-r, r]$, formant une unité approchée pour la convolution. Lorsque $|x - x_0| \leqslant r$, la fonction

$$\varphi_\varepsilon \colon y \longmapsto \rho_\varepsilon(x - y)$$

est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et à support dans $[x_0 - 2r, x_0 + 2r] \subseteq I$. Elle est donc dans $\mathscr{D}^\infty(I) \subseteq \mathscr{D}^1(I)$.

Définissons $\widetilde{v} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par :

$$\widetilde{v}(x) = \begin{cases} v(x) & \text{si } |x - x_0| < 2r \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a

$$\begin{aligned} \widetilde{v} * \rho_\varepsilon(x) &= \int_{x_0 - 2r}^{x_0 + 2r} v(y)\, \rho_\varepsilon(x - y)\, dy = \int_I v(y)\, \rho_\varepsilon(x - y)\, dy \\ &= \int_I \big(v_1(y) - v_2(y)\big)\, \varphi_\varepsilon(y)\, dy = 0. \end{aligned}$$

D'autre part, comme $\widetilde{v} \in L^p(\mathbb{R})$, on a :

$$\widetilde{v} * \rho_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{L^p(\mathbb{R})} \widetilde{v}.$$

Donc $\widetilde{v} = 0$ presque partout sur $\mathbb{R}$. Cela signifie que $v = 0$ presque partout sur $[x_0 - 2r, x_0 + 2r]$. Comme c'est vrai pour tout $x_0 \in I$ et pour tout $r > 0$ tel que $[x_0 - 2r, x_0 + 2r] \subseteq I$, il en résulte que $v = 0$ presque partout sur I. □

Remarque. On peut donner d'autres interprétations des dérivées faibles.

1) Si $p = 2$ et $I = \mathbb{R}$, alors $u \in L^2(\mathbb{R})$ a une dérivée faible si et seulement si :

$$\int_{\mathbb{R}} (1 + t^2) |\mathscr{F} u(t)|^2\, dt < +\infty,$$

où $\mathscr{F}$ est la transformation de Fourier-Plancherel (Exercice 3).

2) Pour $I = \mathbb{R}$, si l'on a :

$$\left\| \frac{1}{h}(\tau_h u - u) - v \right\|_p \xrightarrow[h \to 0]{} 0,$$

avec $\tau_h u(t) = u(t - h)$, alors u a une dérivée faible et $u' = v$. La réciproque est vraie, mais un peu plus délicate à montrer.

IX.2.2. Espaces de Sobolev

Définition IX.2.4. *Pour $1 \leqslant p < +\infty$, on définit l'espace de Sobolev $W^{1,p}(I)$ par :*

$$\boxed{W^{1,p}(I) = \{u \in L^p(I)\,;\ u \text{ a une dérivée faible } u' \in L^p(I)\}}.$$

On le munit de la norme $\boxed{\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p}}$.

On pourrait définir de même $W^{2,p}(I)$, comme l'espace des $u \in L^p(I)$ ayant une dérivée faible seconde, et plus généralement $W^{k,p}(I)$ pour tout entier $k \geqslant 1$.

Pour $p = 2$, on note :

$$\boxed{W^{1,2}(I) = H^1(I)},$$

et on le munit du produit scalaire $\boxed{(u \mid v) = (u \mid v)_{L^2} + (u' \mid v')_{L^2}}$. La norme associée est :

$$\boxed{\|u\|_{H^1} = \left(\|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2\right)^{1/2}},$$

qui est *équivalente* à $\|u\|_{W^{1,2}}$: $\boxed{\|u\|_{H^1} \leqslant \|u\|_{W^{1,2}} \leqslant \sqrt{2}\,\|u\|_{H^1}}$.

Pour $k \geqslant 1$, on note $H^k(I) = W^{k,2}(I)$.

Proposition IX.2.5. *$W^{1,p}(I)$ est un espace de Banach séparable. Il est réflexif pour $1 < p < +\infty$.*

$H^1(I)$ est un espace de Hilbert séparable.

Preuve. 1) Si $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de Cauchy dans $W^{1,p}(I)$, alors $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(u'_n)_{n\geqslant 1}$ sont de Cauchy dans $L^p(I)$. Donc $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^p} u$ et $u'_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^p} v$. Pour toute $\varphi \in \mathscr{D}^1(I)$:

$$\langle u, \varphi' \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle u_n, \varphi' \rangle = -\lim_{n\to\infty} \langle u'_n, \varphi \rangle = -\langle v, \varphi \rangle\,;$$

donc u a une dérivée faible et $u' = v$.

2) Soit

$$\begin{array}{rccl} T\colon & W^{1,p}(I) & \to & L^p(I) \times L^p(I) \\ & u & \mapsto & T(u) = (u, u')\,. \end{array}$$

Alors T est une isométrie, si l'on met sur le produit $L^p(I) \times L^p(I)$ la norme $\|(u,v)\| = \|u\|_p + \|v\|_p$, et $L^p(I) \times L^p(I)$ est séparable, et, pour $1 < p < \infty$, est réflexif; donc $W^{1,p}(I)$ aussi (Proposition VIII.2.9). $\square$

IX.2.3. Théorèmes d'immersion

Le premier de ces théorèmes dit que, pour $p < \infty$, le fait, pour une fonction de $L^p(I)$ d'avoir une dérivée faible, entraîne qu'elle est en fait continue.

Théorème IX.2.6 (Sobolev, 1935). *Pour toute fonction $u \in W^{1,p}(I)$, avec $1 \leqslant p < \infty$, il existe une fonction $\widetilde{u}$ continue sur $\bar{I}$ dont la restriction à I est un représentant de u. De plus :*

$$\widetilde{u}(y) - \widetilde{u}(x) = \int_x^y u'(t)\, dt\,, \quad \forall x, y \in I\,.$$

Dans la suite, on identifiera u à son représentant continu, de sorte que l'on peut écrire :

$$\boxed{W^{1,p}(I) \subseteq \mathscr{C}(\bar{I})}\,.$$

Remarque. Il se passe ici un phénomène un peu particulier. En dimension supérieure $N \geqslant 2$, et en remplaçant l'intervalle I par un ouvert "régulier" $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, on a $W^{1,p}(\Omega) \subseteq \mathscr{C}(\bar{\Omega})$ seulement pour $p > N$ (voir par exemple le livre de Brézis).

Preuve. Fixons $x_0 \in I$ et posons :

$$u_0(x) = \int_{x_0}^x u'(t)\, dt\,, \quad \forall x \in \bar{I}.$$

• Pour $p = 1$, il est clair que cela a un sens et que u_0 est continue, par le Théorème de convergence dominée.

• Pour $1 < p < \infty$, cette définition a un sens car si $J \subseteq \bar{I}$ est un intervalle de longueur finie, on a $L^p(J) \subseteq L^1(J)$. De plus, comme

$$u_0(x) - u_0(y) = \int_y^x u'(t)\, dt\,, \quad \forall x, y \in I\,,$$

la fonction $u_0 \colon I \to \mathbb{R}$ est uniformément continue, par l'inégalité de Hölder :

$$|u_0(x) - u_0(y)| \leqslant |x - y|^{1/q} \|u'\|_p \leqslant |x - y|^{1/q} \|u\|_{W^{1,p}}.$$

On peut donc la prolonger en une fonction uniformément continue sur $\bar{I}$.

Notons qu'en particulier u_0 est intégrable sur tout sous-intervalle J de I de longueur finie.

Maintenant, pour toute $\varphi \in \mathscr{D}^1(I)$, on a :

$$\begin{aligned}
\langle u_0, \varphi' \rangle &= \int_I \Big(\int_{x_0}^{x} u'(t)\, dt \Big) \varphi'(x)\, dx \\
&= -\int_a^{x_0} \Big(\int_{x_0}^{x} u'(t)\, dt \Big) \varphi'(x)\, dx + \int_{x_0}^{b} \Big(\int_{x_0}^{x} u'(t)\, dt \Big) \varphi'(x)\, dx \\
&\underset{\text{Fubini}}{=} -\int_a^{x_0} u'(t) \Big(\int_a^{t} \varphi'(x)\, dx \Big)\, dt + \int_{x_0}^{b} u'(t) \Big(\int_t^{b} \varphi'(x)\, dx \Big)\, dt \\
&\underset{\varphi \in \mathscr{D}^1}{=} -\int_a^{x_0} u'(t)\, [\varphi(t) - \cancel{\varphi(a)}]\, dt + \int_{x_0}^{b} u'(t)\, [\cancel{\varphi(b)} - \varphi(t)]\, dt \\
&= -\int_a^{b} u'(t)\, \varphi(t)\, dt = -\langle u', \varphi \rangle = \langle u, \varphi' \rangle.
\end{aligned}$$

Remarquons ensuite que

$$\Big\{ \varphi' \,;\ \varphi \in \mathscr{D}^1(I) \} = \{ \psi \in \mathscr{D}^0(I) \,;\ \int_I \psi(t)\, dt = 0 \Big\}.$$

En effet, si $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq [a,b]$, on a $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ et, puisque φ' est continue, $\int_I \varphi'(t)\, dt = \varphi(a) - \varphi(b) = 0$. Inversement, si $\operatorname{supp}(\psi) \subseteq [a,b]$ et $\int_I \psi(t)\, dt = 0$, on pose $\varphi(x) = \int_a^x \psi(t)\, dt$. Comme ψ est continue, φ est continûment dérivable et $\varphi' = \psi$. De plus $\varphi(x) = 0$ pour $x \leqslant a$ (car $\psi(t) = 0$ pour $t \leqslant a$) et $\varphi(x) = 0$ pour $x \geqslant b$, parce que, d'une part $\int_a^b \psi(t)\, dt = \int_I \psi(t)\, dt = 0$, et, d'autre part, $\psi(t) = 0$ pour $t \geqslant b$.

Considérons alors les formes linéaires

$$\begin{array}{rccc} J_1 \colon & \mathscr{D}^0(I) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \psi & \longmapsto & \int_I \psi(t)\, dt \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccc} J_2 \colon & \mathscr{D}^0(I) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \psi & \longmapsto & \int_I [u(t) - u_0(t)]\, \psi(t)\, dt\,. \end{array}$$

Les égalités précèdentes disent que $\ker J_1 \subseteq \ker J_2$. Il existe donc $c \in \mathbb{R}$ tel que $J_2 = cJ_1$. Cela veut dire que

$$\int_I [u(t) - u_0(t) - c]\, \psi(t)\, dt = 0\,, \quad \forall \psi \in \mathscr{D}^0(I)\,.$$

C'est en particulier vrai pour toute $\psi \in \mathscr{D}^1(I)$, et l'on a vu (Proposition IX.2.3) qu'alors $u - u_0 - c = 0$ presque partout sur I.

Ainsi u est presque partout égale sur I à la fonction $u_0 + c$, qui est continue sur $\bar{I}$. □

Théorème IX.2.7 (Théorème de Rellich-Kondrachov)**.** *Supposons que l'intervalle $I =]a,b[$ soit borné. Alors, pour $\underline{1 < p < \infty}$, l'injection naturelle*

$$j\colon \quad W^{1,p}(I) \longrightarrow \mathscr{C}(\bar{I})$$

est compacte.

Remarques. 1) En particulier, j est <u>continue</u> :

$$\left(u_k \xrightarrow[k\to\infty]{} u \text{ dans } W^{1,p}(I)\right) \implies \left(u_k \xrightarrow[k\to\infty]{} u \text{ \underline{uniformément} sur } \bar{I}\right).$$

2) En fait, la <u>continuité</u> de $j\colon W^{1,p}(I) \to \mathscr{C}_b(\bar{I})$ reste vraie même si I n'est pas borné et si $p = 1$.

Preuve. On utilise le Théorème d'Ascoli.

• D'abord, $j\big(B_{W^{1,p}}\big)$ est <u>équicontinue</u> car pour $\|u\|_{W^{1,p}} \leqslant 1$, on a :

$$|u(x) - u(y)| = \left|\int_x^y u'(t)\,dt\right| \leqslant \|u'\|_{L^p}\,|x-y|^{1/q} \leqslant \|u\|_{W^{1,p}}\,|x-y|^{1/q} \leqslant |x-y|^{1/q}.$$

• Ensuite, $j\big(B_{W^{1,p}}\big)$ est bornée. En effet, l'inégalité précédente montre que :

$$|u(x)| \leqslant |u(y)| + |x-y|^{1/q} \leqslant |u(y)| + (b-a)^{1/q}\,;$$

d'où, en intégrant par rapport à y :

$$(b-a)\,|u(x)| \leqslant \|u\|_{L^1} + (b-a)^{1+1/q} \leqslant \|u\|_{L^p}\,(b-a)^{1/q} + (b-a)^{1+1/q}\,,$$

et donc :

$$\|u\|_\infty \leqslant \frac{1}{(b-a)^{1/p}}\|u\|_{L^p} + (b-a)^{1/q} \leqslant \frac{1}{(b-a)^{1/p}}\Big[1 + (b-a)\Big]\,. \qquad \square$$

IX.3. Retour à l'équation du pendule

Nous prenons $I =]0,1[$ et nous travaillerons dans

$$\boxed{H_0^1 = \{u \in H^1\,;\ u(0) = u(1) = 0\}}\,.$$

Comme l'injection $j\colon H^1 \to \mathscr{C}([0,1])$ est continue, H_0^1 est un sous-espace <u>fermé</u> de H^1.

Proposition IX.3.1 (Inégalité de Poincaré). *Pour* $\boxed{u \in H_0^1}$, *on a :*

$$\boxed{\|u\|_{H^1} \leqslant \sqrt{\tfrac{3}{2}}\,\|u'\|_{L^2}}\,.$$

Par conséquent, $u \mapsto \|u'\|_{L^2}$ est une <u>norme équivalente</u> sur H_0^1.

Rappelons que $\|u\|_{H^1} = \big(\|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2\big)^{1/2}$.

Preuve. On a :

$$|u(x)| = |u(x) - u(0)| \leqslant \int_0^x |u'(t)|\,dt \leqslant \sqrt{x}\,\|u'\|_{L^2}\,;$$

d'où :

$$\|u\|_{L^2}^2 = \int_0^1 |u(x)|^2\,dx \leqslant \|u'\|_{L^2}^2 \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}\,\|u'\|_{L^2}^2,$$

ce qui donne bien $\|u\|_{H^1} \leqslant \sqrt{\frac{3}{2}}\,\|u'\|_{L^2}$. □

Posons alors, pour $u \in H_0^1$:

$$I(u) = \int_0^1 \Big(\frac{1}{2}\,u'^2 + \cos u + ug\Big)(t)\,dt\,.$$

Cela a un sens puisque $u \in \mathscr{C}([0,1])$ et que $u' \in L^2([0,1])$.

On a :

$$I(u) = \frac{1}{2}\,\|u'\|_{L^2}^2 + \int_0^1 (\cos u + ug)(t)\,dt\,.$$

Lemme IX.3.2. *I est continue sur H_0^1 et $I(u) \xrightarrow[\|u\|_{H^1} \to +\infty]{} +\infty$.*

Preuve. a) La fonction $u \mapsto \int_0^1 (\cos u + ug)(t)\,dt$ est continue sur $\mathscr{C}([0,1])$, donc sur H_0^1 car $j\colon H_0^1 \to \mathscr{C}([0,1])$ est continue. D'autre part, l'application $u \mapsto \frac{1}{2}\,\|u'\|_{L^2}^2$ est continue sur H_0^1 ; donc I est continue sur H_0^1.

b) On a :

$$\begin{aligned} I(u) &\geqslant \frac{1}{2}\,\|u'\|_{L^2}^2 - (1 + \|g\|_\infty \|u\|_{L^1}) \geqslant \frac{1}{2}\,\|u'\|_{L^2}^2 - (1 + \|g\|_\infty \|u\|_{L^2}) \\ &\geqslant \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}\,\|u\|_{H^1}^2 - (1 + \|g\|_\infty \|u\|_{H^1}) \xrightarrow[\|u\|_{H^1} \to +\infty]{} +\infty\,. \end{aligned}$$ □

Conséquence. Il existe $R > 0$ tel que :

$$m = \inf_{u \in H_0^1} I(u) = \inf_{\|u\|_{H_0^1} \leqslant R} I(u)\,.$$

Or H_0^1 est un espace de Hilbert. Donc ses boules fermées sont faiblement compactes. Toutefois, I n'étant pas linéaire, on ne peut pas dire que sa continuité pour la norme entraîne sa continuité pour la topologie faible (I n'est d'ailleurs pas faiblement continue, car sinon, $u \mapsto \|u'\|_{L^2}^2$, et donc $u \mapsto \|u'\|_{L^2}$ aussi, serait faiblemement continue ; mais ce n'est pas possible, puisque c'est une norme équivalente sur H_0^1 et que cet espace est de dimension infinie). Néanmoins, si

$$m = \lim_{k \to \infty} T(u_k) \qquad \text{avec } \|u_k\|_{H_0^1} \leqslant R\,,$$

on peut extraire une sous-suite, que l'on notera encore $(u_k)_{k \geqslant 1}$ faiblement convergente, vers un $u_0 \in H_0^1$. Comme l'injection $j\colon H_0^1 \to \mathscr{C}([0,1])$ est **compacte**, la suite $(u_k)_{k \geqslant 1}$ converge uniformément vers u_0, en vertu du lemme suivant (voir aussi l'Exercice 24 du Chapitre VIII).

Lemme IX.3.3 (Lemme de Dunford-Pettis). *Soit $T\colon E \to F$ un opérateur compact. Alors :*

$$x_k \xrightarrow[k\to\infty]{w} x \quad \Longrightarrow \quad Tx_k \xrightarrow[k\to\infty]{\|\cdot\|} Tx\,.$$

Preuve. On sait que T est continu pour les topologies faibles. Donc $(Tx_k)_{k\geqslant}$ converge faiblement vers Tx. Donc la seule valeur d'adhérence, pour la norme, possible pour $(Tx_k)_{k\geqslant 1}$ est Tx. La compacité donne la convergence. □

Par conséquent :

$$\int_0^1 \big(\cos u_k(t) + u_k(t)g(t)\big)\,dt \xrightarrow[k\to\infty]{} \int_0^1 \big(\cos u_0(t) + u_0(t)g(t)\big)\,dt\,.$$

Mais on a aussi, puisque $u \mapsto \|u'\|_{L^2}$ est équivalente à $u \mapsto \|u\|_{H_0^1}$ (et donc les topologies faibles associées à ces deux normes sont les mêmes) :

$$\|u_0'\|_{L^2} \leqslant \liminf_{k\to\infty} \|u'\|_{L^2}\,,$$

de sorte que :

$$I(u_0) \leqslant \liminf_{k\to\infty} \frac{1}{2}\|u'\|_{L^2}^2 + \lim_{k\to\infty} \int_0^1 (\cos u_0 + u_0 g)(t)\,dt = \liminf_{k\to\infty} I(u_k) = m\,.$$

Il en résulte que $m = I(u_0)$: <u>la borne inférieure est atteinte</u> (et, en particulier, on a $m > -\infty$).

Maintenant, si l'on pose, comme dans l'Introduction, pour $h \in H_0^1$:

$$\varphi_h(s) = I(u_0 + sh)\,, \qquad s \in \mathbb{R}\,,$$

on a $\varphi_h'(0) = 0$, soit :

$$\int_0^1 \big[u_0'h' + h(-\sin u_0 + g)\big](t)\,dt = 0\,. \tag{$*$}$$

Toutefois, u_0 n'a *a priori* pas de dérivée seconde (même au sens faible) ; on ne peut donc pas raisonner en intégrant par parties comme dans l'Introduction. Néanmoins, c'est vrai, et on va voir que u_0 est de classe $\mathcal{C}^2$. En effet, la fonction $(-\sin u_0 + g)$ étant continue a une primitive U_0 sur $[0,1]$, qui est donc de classe $\mathcal{C}^1$. Si $h \in \mathscr{C}^1$ et $h(0) = h(1) = 0$, on peut intégrer par parties :

$$\int_0^1 h(t)(-\sin u_0 + g)(t)\,dt = \Big[h(t)U_0(t)\Big]_0^1 - \int_0^1 h'(t)U_0(t)\,dt\,.$$

L'égalité $(*)$ devient donc :

$$\int_0^1 h'(t)\big[u_0'(t) - U_0(t)\big]\,dt = 0\,.$$

Pour $h(t) = (1 - \mathrm{e}^{-2\pi int})$, cela donne :

$$2\pi in\big(\widehat{u_0'}(n) - \widehat{U_0}(n)\big) = 0\,, \quad \forall n \in \mathbb{Z}\,.$$

Par conséquent, $u_0' - U_0$ est presque partout constante. Mais alors, si C est cette constante, on a :

$$u_0(x) = \int_0^x u_0'(t)\,dt = \int_0^x [U_0(t) + C]\,dt\,;$$

le Théorème Fondamental du Calcul Intégral dit alors, puisque U_0+C est continue sur $[0,1]$, que u_0 est (plus précisément, a un représentant) continûment dérivable (c'est-à-dire de classe $\mathcal{C}^1$) et que sa dérivée, au sens usuel, est $U_0 + C$. Comme $U_0 + C$ est de classe $\mathcal{C}^1$, u_0 est donc de classe $\mathcal{C}^2$.

On a alors vu dans l'Introduction que u_0 est solution de l'équation (EPF). $\square$

IX.4. Exercices

Exercice 1.

1) Calculer la dérivée faible dans $L^p(]-1,1[)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ de la fonction u avec $u(x) = 1 - |x|$.

2) Même question avec $u(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad -1 < x < 0 \\ x+1 & \text{si} \quad 0 < x < 1\,. \end{cases}$

Exercice 2 (*Caractérisation des fonctions lipschitziennes*).

Soit $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Le but de l'exercice est de montrer l'équivalence des deux propriétés suivantes :

(*i*) F est lipschitzienne ;

(*ii*) il existe une fonction $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ telle que $F(x) = F(0) + \int_0^x f(t)\,dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1) Montrer l'implication facile.

2) On suppose F lipschitzienne.

a) Montrer que si $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 à support compact, alors :

$$\int_{\mathbb{R}} F(x)\,\varphi'(x)\,dx = -\lim_{h\to 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}\,\varphi(x)\,dx\,.$$

b) En déduire qu'il existe une constante $0 < C < +\infty$ telle que l'on ait $\left|\int_{\mathbb{R}} F(x)\,\varphi'(x)\,dx\right| \leqslant C \int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|\,dx$, pour toute $\varphi \in \mathscr{D}^1(\mathbb{R})$.

c) Montrer qu'il existe $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\int_{\mathbb{R}} F(x)\,\varphi'(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}} f(t)\,\varphi(t)\,dt$ pour toute $\varphi \in \mathscr{D}^1(\mathbb{R})$.

d) Conclure.

Exercice 3 (*Caractérisation des fonctions de H^1 par transformation de Fourier*).

1) Soit φ une fonction continûment dérivable sur $\mathbb{R}$ à support compact ; montrer que $\widehat{\varphi'}(y) = 2\pi i y\,\widehat{\varphi}(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

2) Soit $f \in H^1$.

a) Montrer que pour $\varphi \in \mathscr{D}^1(\mathbb{R})$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} 2\pi i y\,(\mathscr{F} f)(y)\,\overline{(\mathscr{F}\varphi)(y)}\,dy = -\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\overline{\varphi'(x)}\,dx = \int_{\mathbb{R}} [\mathscr{F}(f')](y)\,\overline{(\mathscr{F}\varphi)(y)}\,dy\,.$$

b) En déduire que la fonction $\mathscr{F}(f')$ est égale (presque partout) à la fonction $y \mapsto 2\pi i y\,(\mathscr{F} f)(y)$ et que $\int_{\mathbb{R}} y^2 |(\mathscr{F} f)(y)|^2\,dy < +\infty$.

3) Inversement, on suppose que $f \in L^2(\mathbb{R})$ et que la fonction $y \mapsto y\,(\mathscr{F} f)(y)$ est dans $L^2(\mathbb{R})$.

a) Montrer qu'il existe $g \in L^2(\mathbb{R})$ telle que $(\mathscr{F} g)(y) = 2\pi i y\,(\mathscr{F} f)(y)$ pour (presque) tout $y \in \mathbb{R}$.

b) Si $\varphi \in \mathscr{D}^1(\mathbb{R})$, montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\varphi'(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}} 2\pi i y\,(\mathscr{F} f)(y)\,\overline{(\mathscr{F}\,\overline{\varphi})(y)}\,dy = -\int_{\mathbb{R}} g(x)\,\varphi(x)\,dx\,.$$

c) Conclure.

Exercice 4 (*Norme de l'injection canonique de* $H_0^1(0,1)$ *dans* $L^2(0,1)$).

1) Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et soit $1 < p < \infty$. Soit $f \in W^{1,p}(I)$. Montrer que si la dérivée faible f' de f possède elle-même une dérivée faible, alors f est (la classe d'équivalence d'une fonction) dérivable au sens usuel, et f' est (la classe d'équivalence de) la dérivée forte, c'est-à-dire la dérivée usuelle, de f (*on se rappellera le Théorème fondamental du Calcul Intégral*).

2) On considère maintenant $H_0^1(0,1)$. On le munit de la norme définie par $\|f\| = \|f'\|_{L^2}$ pour $f \in H_0^1(0,1)$. On rappelle que, en vertu de l'inégalité de Poincaré, cette norme est équivalente à la norme usuelle de $H_0^1(0,1)$.

a) Soit $J\colon H_0^1(0,1) \to L^2(0,1)$ l'injection canonique : $J(f) = f$. Montrer qu'il existe $f_0 \in H_0^1(0,1)$ telle que $\|f_0'\|_{L^2} = 1$ et $\|f_0\|_{L^2} = \|J\|$ (*on utilisera le Théorème de Rellich-Kondrachov, et le Lemme de Dunford-Pettis*).

b) On pose, pour φ de classe C^1 à support compact contenu dans $]0,1[$,

$$F_\varphi(t) = \|J\|^2 \|f_0' + t\,\varphi'\|_{L^2}^2 - \|f_0 + t\,\varphi\|_{L^2}^2.$$

Montrer que $F'_\varphi(0) = 0$.

c) En déduire que f_0' a une dérivée faible f_0'' et que $f_0'' = -\big(1/\|J\|^2\big)\, f_0$.

d) En utilisant la question 1), en déduire f_0 (*on rappelle que* $f_0(0) = f_0(1) = 0$), puis que $\|J\| = 1/\pi$.

Exercice 5 (*Prolongement de* $W^{1,p}(I)$ *à* $W^{1,p}(\mathbb{R})$).

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $1 \leqslant p < \infty$. On veut montrer qu'il existe une application linéaire continue $P\colon W^{1,p}(I) \to W^{1,p}(\mathbb{R})$ telle que $(Pu)_{|I} = u$ pour toute $u \in W^{1,p}(I)$. Par des changements de variable affines, il suffit de le faire dans les cas $I =]0,+\infty[$ et $I =]0,1[$.

1) Expliquer pourquoi si l'on pose, pour $u \in W^{1,p}(I)$, $\widetilde{u}(x) = u(x)$ si $x \in I$ et $\widetilde{u}(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R} \setminus I$, alors $\widetilde{u}$ n'est pas forcément dans $W^{1,p}(\mathbb{R})$.

2) On prend $I =]0,+\infty[$ dans cette question.

Montrer que si l'on pose, pour $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}_+^*)$, $u^*(x) = \begin{cases} u(x) \text{ si } x > 0\,, \\ u(-x) \text{ si } x < 0\,, \end{cases}$ alors $u^* \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ et $\|u^*\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leqslant 2\,\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}_+^*)}$.

3) On prend maintenant $I =]0,1[$. Pour $u\colon]0,1[\to \mathbb{R}$, on pose :

$$\widetilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } 0 < x < 1\,, \\ 0 & \text{si } \quad x \geqslant 1\,. \end{cases}$$

On fixe une fonction $\eta \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ telle que $0 \leqslant \eta \leqslant 1$, $\eta(x) = 1$ si $x < 1/4$ et $\eta(x) = 0$ si $x > 3/4$.

a) Montrer que si $u \in W^{1,p}(]0,1[)$, alors $\widetilde{\eta u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}_+^*)$ et il existe une constante $C > 0$, ne dépendant que de η, telle que $\|\widetilde{\eta u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}_+^*)} \leqslant C\,\|u\|_{W^{1,p}(0,1)}$. En déduire un prolongement de ηu à $W^{1,p}(\mathbb{R})$.

b) Montrer que l'on peut prolonger de même $(1-\eta)u$ à $W^{1,p}(]-\infty,1[)$, puis à $W^{1,p}(\mathbb{R})$ (*faire le changement de variable* $t = 1 - x$).

c) Conclure.

Exercice 6 (*Problème de Dirichlet*).

Étant donnée $f \in \mathscr{C}([0,1])$, on cherche à résoudre le problème suivant, avec conditions aux limites :

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{sur }]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0\,. \end{cases} \tag{PD}$$

Soit $f \in L^2(0,1)$. On considère l'espace de Hilbert $H_0^1 = H_0^1(0,1)$, et l'on pose, pour $u, v \in H_0^1$:

$$a(u,v) = \int_0^1 [u(x)\,v(x) + u'(x)\,v'(x)]\,dx \quad \text{et} \quad L(v) = \int_0^1 f(x)\,v(x)\,dx\,.$$

1) Montrer qu'il existe une unique $u_0 \in H_0^1$ telle que :

$$\int_0^1 [u_0(x)\,v(x) + u_0'(x)\,v'(x)]\,dx = \int_0^1 f(x)\,v(x)\,dx\,, \quad \forall v \in H_0^1 \tag{PDF}$$

(*utiliser le Théorème de Lax-Milgram de l'Exercice 14 du Chapitre II, ou le Théorème de représentation de Riesz*).

2) Montrer que si $f \in \mathscr{C}([0,1])$, alors u_0 est deux fois continûment dérivable sur $[0,1]$.

3) En déduire que u_0 est solution du problème (PD).

Exercice 7 (*Problème de Dirichlet non homogène*).

Étant donnés $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{C}([a,b])$, on cherche à résoudre le problème suivant, avec conditions aux limites :

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{sur }]a,b[\\ u(a) = \alpha\,,\ u(b) = \beta\,. \end{cases} \tag{PDNH}$$

1) Montrer $C = \{u \in H^1(a,b)\,;\ u(a) = \alpha \text{ et } u(b) = \beta\}$ est convexe et fermé dans $H^1(a,b)$.

2) Montrer que, pour toute $f \in L^2(a,b)$, il existe une unique $u_0 \in H^1(a,b)$ telle que l'on ait, pour tout $w \in C$:

$$\int_a^b u_0'(t)\,[w'(t) - u_0'(t)]\,dt + \int_a^b u_0(t)\,[w(t) - u_0(t)]\,dt \geqslant \int_a^b f(t)\,[w(t) - u_0(t)]\,dt$$

(*utiliser le Théorème de Stampacchia de l'Exercice 17 du Chapitre VIII*).

3) En déduire que :

$$\int_a^b u_0'(t)\,v'(t)\,dt + \int_a^b u_0(t)\,v(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,v(t)\,dt\,, \quad \forall v \in H_0^1(a,b)\,.$$

4) Montrer que si $f \in \mathscr{C}([a,b])$, alors u_0 est deux fois continûment dérivable sur $[a,b]$.

5) En déduire que u_0 est solution de l'équation (PDNH).

Exercice 8 (*Problème de Neumann*[1]).

On considère le problème suivant, dit *de Neumann* :

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{sur }]a,b[\\ u'(a) = 0\,, \ u'(b) = 0\,. \end{cases} \tag{PN}$$

1) Montrer que pour toute $f \in L^2(a,b)$, il existe une unique $u_0 \in H^1(a,b)$ telle que :

$$\int_a^b u_0'(t)\, v'(t)\, dt + \int_a^b u_0(t)\, v(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, v(t)\, dt\,, \quad \forall v \in H^1(a,b)\,.$$

2) Montrer que $u_0 \in H^2(a,b)$ et que $-u_0'' + u_0 = f$ presque partout.

3) Montrer que si $f \in \mathscr{C}([a,b])$, alors u_0 est deux fois continûment dérivable sur $[a,b]$ et u_0 est solution de (PN).

Exercice 9 (*Un problème mixte*).

On considère le problème suivant, avec des conditions aux limites mixtes :

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{sur }]a,b[\\ u(a) = \alpha\,, \ u'(b) = \beta\,. \end{cases} \tag{PM}$$

1) Montrer que l'ensemble $C = \{w \in H^1(a,b)\,;\ w(a) = \alpha\}$ est une partie convexe fermée de $H^1(a,b)$.

2) Montrer que pour toute $f \in L^2(a,b)$, il existe une unique $u_0 \in H^1(a,b)$ telle que l'on ait, pour toute $w \in C$:

$$\begin{aligned} \int_a^b u_0'(t)\,[w'(t) - u_0'(t)]\, dt &+ \int_a^b u_0(t)\,[w(t) - u_0(t)]\, dt \\ &\geqslant \int_a^b f(t)\,[w(t) - u_0(t)]\, dt + \beta\,[w(b) - u_0(b)] \end{aligned}$$

(*utiliser le Théorème de Stampacchia de l'Exercice 17 du Chapitre VIII*).

3) En déduire que, si l'on pose $K = \{v \in H^1(a,b)\,;\ v(a) = 0\}$, alors :

$$\int_a^b u_0'(t)\, v'(t)\, dt + \int_a^b u_0(t)\, v(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, v(t)\, dt + \beta\, v(b)\,, \quad \forall v \in K\,.$$

4) Montrer que si $f \in \mathscr{C}([a,b])$, alors u_0 est deux fois continûment dérivable sur $[a,b]$ et en déduire que u_0 est solution de (PM).

1. Du nom de Carl Neumann (1832–1925).

Exercice 10 (*Valeurs propres d'opérateur différentiel*).

Pour toute $f \in L^2(0,1)$, on pose $Tf = u$, où $u \in H_0^1(0,1)$ est l'unique solution de l'équation (PDF) :

$$\int_0^1 [u(x)\,v(x) + u'(x)\,v'(x)]\,dx = \int_0^1 f(x)\,v(x)\,dx\,, \quad \forall v \in H_0^1 \tag{PDF}$$

de l'Exercice 6.

1) Montrer que $T\colon L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ est linéaire continue.

2) Montrer que T est un opérateur compact.

3) Montrer que T est auto-adjoint positif (*montrer que* $(Tf \mid g) = (f \mid Tg)$ *pour* f, g *continues*).

4) Montrer qu'il existe une base orthonormée $(u_n)_{n\geqslant 1}$ de $L^2(0,1)$ et une suite de nombres positifs $\lambda_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ tels que $u_n \in \mathscr{C}^\infty([0,1])$, $u_n(0) = u_n(1) = 0$, et :

$$-u_n'' + u_n = \lambda_n u_n$$

pour tout $n \geqslant 1$.

Chapitre X

NOTIONS SUR LES DISTRIBUTIONS

On ne parlera que des distributions sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}$, mais on peut étendre pratiquement tout, sans changement essentiel, à des ouverts de $\mathbb{R}^N$.

X.1. Définitions

X.1.1. Espace de fonctions-test

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$. Rappelons les notations suivantes.

1) Si $K \subseteq \Omega$ est compact, on note, pour tout entier $m \in \mathbb{N}$, $\mathscr{D}_K^m(\Omega)$ l'espace des fonctions $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{C}$ de *classe* C^m dont le *support* est *contenu dans* K. On le munit de la *norme* :

$$\|\varphi\|_{(m)} = \sum_{j=0}^{m} \|\varphi^{(j)}\|_\infty\,,$$

où :

$$\|\psi\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} |\psi(x)| = \sup_{x\in K} |\psi(x)|\,,$$

qui en fait un espace de Banach. L'espace :

$$\mathscr{D}_K^\infty(\Omega) = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \mathscr{D}_K^m(\Omega)$$

est simplement noté $\boxed{\mathscr{D}_K^m(\Omega)}$. Cet espace n'est pas normé ; néanmoins, on peut le munir de la distance suivante :

$$d_K(\varphi,\psi) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^{m+1}} \frac{\|\varphi-\psi\|_{(m)}}{1+\|\varphi-\psi\|_{(m)}}\,,$$

qui en fait un *e.v.t.* localement convexe métrique complet (ce que l'on appelle un *espace de Fréchet*), et pour laquelle on a :

Une suite $(\varphi_n)_n$ converge vers φ dans $\mathscr{D}_K^m(\Omega)$ si et seulement si :

$$\varphi_n^{(m)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi^{(m)} \quad \textit{uniformément sur } \Omega\,, \quad \textit{pour tout } m \in \mathbb{N}\,.$$

2) L'espace :

$$\boxed{\mathscr{D}(\Omega)} = \bigcup_{K \text{ compact},\, K\subseteq\Omega} \mathscr{D}_K(\Omega)$$

est l'espace des *fonctions* $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{C}$ *indéfiniment dérivables à support compact* (contenu dans Ω). On dit que c'est l'**espace des fonctions-test**.

Définition X.1.1. *Soit $\varphi_n, \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$; on dit que la suite $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$* converge *vers φ* dans $\mathscr{D}(\Omega)$ *si :*

1) *il existe un compact $K \subseteq \Omega$ tel que* $\boxed{\operatorname{supp}\varphi_n \subseteq K}$ **pour tout** $n \geqslant 1$ *;*

2) *la suite $(\varphi_n^{(j)})_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur K, donc sur Ω, vers $\varphi^{(j)}$, pour tout $j \in \mathbb{N}$.*

En d'autres termes :

$$\boxed{(\exists K \subseteq \Omega\,,\ \text{compact}) \qquad \varphi_n, \varphi \in \mathscr{D}_K(\Omega) \quad \text{et} \quad \varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi \quad \underline{\text{dans } \mathscr{D}_K(\Omega)}.}$$

X.1.2. Distributions

Définition X.1.2. *On appelle* **distribution** *sur l'ouvert Ω toute forme linéaire $T\colon \mathscr{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ ayant la propriété de continuité suivante :*

$$\boxed{T(\varphi_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} T(\varphi) \textit{ pour toute suite } (\varphi_n)_n \textit{ convergeant vers } \varphi \textit{ dans } \mathscr{D}(\Omega).}$$

On note $\boxed{\mathscr{D}'(\Omega)}$ *l'ensemble des distributions sur Ω.*

En d'autres termes :

$T\colon \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ est une distribution si et seulement si, pour tout compact $K \subseteq \Omega$, la restriction $T_{|\mathscr{D}_K(\Omega)}$ est une forme linéaire continue sur $\mathscr{D}_K(\Omega)$.

On notera souvent : $\boxed{T(\varphi) = \langle T, \varphi\rangle}$.

Remarque. On peut munir $\mathscr{D}(\Omega)$ d'une topologie, dite *limite inductive* des topologies des $\mathscr{D}_K(\Omega)$, pour K parcourant les compacts de Ω, de la façon suivante : si $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{D}(\Omega)$ est <u>convexe</u>, on dit que c'est un *voisinage de* 0 *dans* $\mathscr{D}(\Omega)$ si, pour tout compact $K \subseteq \Omega$, $\mathscr{A} \cap \mathscr{D}_K(\Omega)$ est un voisinage de 0 dans $\mathscr{D}_K(\Omega)$. On montre que cela forme une base de voisinages de 0 pour une topologie sur $\mathscr{D}(\Omega)$ en faisant un *e.v.t.* localement convexe séparé (mais non métrisable), et qu'une forme linéaire $T\colon \mathscr{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ est une distribution si et seulement si elle est continue pour cette topologie ; c'est-à-dire que, bien que la topologie de $\mathscr{D}(\Omega)$ ne soit pas métrisable, tester sur des suites convergentes suffit pour la la continuité des formes linéaires.

Ces considérations topologiques, délicates, ne seront d'aucun intérêt pour la suite.

La caractérisation suivante montre que l'on peut en fait se contenter d'un nombre *fini* de dérivées pour vérifier que l'on a une distribution.

Proposition X.1.3. *Soit $T\colon \mathscr{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ une forme linéaire. C'est une distribution sur Ω si et seulement si : pour tout compact $K \subseteq \Omega$, il existe un entier $m = m(K) \in \mathbb{N}$ et une constante $C_K > 0$ tels que :*

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}_K(\Omega) \qquad |T(\varphi)| \leqslant C_K \, \|\varphi\|_{(m)}. \tag{$*$}$$

Preuve. 1) La condition suffisante est évidente : si $\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi$ dans $\mathscr{D}(\Omega)$, il existe un compact $K \subseteq \Omega$ tel que $\varphi_n, \varphi \in \mathscr{D}_K(\Omega)$ et $\varphi_n^{(j)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi^{(j)}$ uniformément, pour tout $j \in \mathbb{N}$; *a fortiori*, $\|\varphi_n - \varphi\|_{(m)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, et donc, en utilisant $(*)$, $T(\varphi_n) - T(\varphi) = T(\varphi_n - \varphi) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, de sorte que T est une distribution.

2) Inversement, si T est une distribution, alors, pour tout compact $K \subseteq \Omega$, la restriction $T_{|\mathscr{D}_K(\Omega)}$ est continue pour la topologie de $\mathscr{D}_K(\Omega)$ (tester sur des suites convergentes suffit, puisque la topologie de $\mathscr{D}_K(\Omega)$ est définie par une distance). Il existe donc $\alpha > 0$ tel que :

$$d_K(\varphi, 0) \leqslant \alpha \qquad \Longrightarrow \qquad |T(\varphi)| \leqslant 1.$$

Choisissons $m = m(K) \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{1}{2^m} \leqslant \alpha$. Alors :

$$\begin{aligned}
\|\varphi\|_{(m)} \leqslant \frac{\alpha}{2} \quad &\Longrightarrow \quad \frac{\|\varphi\|_{(j)}}{1 + \|\varphi\|_{(j)}} \leqslant \|\varphi\|_{(j)} \leqslant \|\varphi\|_{(m)} \leqslant \frac{\alpha}{2}, \quad \forall j \leqslant m \\
&\Longrightarrow \quad \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{2^{j+1}} \frac{\|\varphi\|_{(j)}}{1 + \|\varphi\|_{(j)}} \leqslant \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{2^{j+1}} \frac{\alpha}{2} \leqslant \frac{\alpha}{2} \\
&\Longrightarrow \quad d_K(\varphi, 0) \leqslant \frac{\alpha}{2} + \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^{j+1}} \frac{\|\varphi\|_{(j)}}{1 + \|\varphi\|_{(j)}} \\
&\qquad\qquad \leqslant \frac{\alpha}{2} + \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^{j+1}} = \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2^{m+1}} \leqslant \alpha \\
&\Longrightarrow \quad |T(\varphi)| \leqslant 1.
\end{aligned}$$

Puisque $\|\,.\,\|_{(m)}$ est une norme sur $\mathscr{D}_K(\Omega)$, on obtient, par homogénéité :

$$|T(\varphi)| \leqslant (2/\alpha) \, \|\varphi\|_{(m)}$$

pour toute $\varphi \in \mathscr{D}_K(\Omega)$. □

Définition X.1.4. *On dit qu'une distribution T sur Ω est d'***ordre fini** *s'il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout compact $K \subseteq \Omega$, il existe $C_K > 0$ tel que :*

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}_K(\Omega) \qquad |T(\varphi)| \leqslant C_K \, \|\varphi\|_{(m)}.$$

Autrement dit, dans la Proposition X.1.3, l'entier m peut être choisi indépendemment du compact K. Notons qu'une forme linéaire $T\colon \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ vérifiant la condition de la définition est forcément une distribution, en vertu de la Proposition X.1.3.

Le plus petit entier possible s'appelle alors l'*ordre de la distribution T*. Une distribution qui n'est pas d'ordre fini est dite d'*ordre infini.*

X.2. Exemples

X.2.1. Fonctions localement intégrables

Notons $L^1_{loc}(\Omega)$ l'espace des (classes de) fonctions $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ qui sont *localement intégrables* sur Ω (pour la mesure de Lebesgue), c'est-à-dire telles que $f\mathbb{1}_K \in L^1(\Omega)$ pour tout compact $K \subseteq \Omega$.

On a, pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$:

$$L^p(\Omega) \subseteq L^1_{loc}(\Omega).$$

Proposition X.2.1. *Toute fonction $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ définit une distribution T_f sur Ω, qui est d'ordre* 0.
On a $T_f = T_g$ pour $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ si et seulement si $f = g$ presque partout.

C'est en ce sens que l'on dit que les distributions généralisent les fonctions.

On identifiera souvent f et T_f, et on peut alors écrire :

$$L^1_{loc}(\Omega) \subseteq \mathscr{D}'(\Omega).$$

Preuve. Posons, pour toute $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$:

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_\Omega f(x)\, \varphi(x)\, dx\,,$$

ce qui a un sens car φ est à support compact, bornée, et $f.\mathbb{1}_{\operatorname{supp}\varphi} \in L^1(\Omega)$. Cela définit une distribution sur Ω car si K est un compact de Ω, on a, pour toute $\varphi \in \mathscr{D}_K(\Omega)$:

$$|\langle T_f, \varphi \rangle| \leqslant C_K \, \|\varphi\|_\infty = C_K \, \|\varphi\|_{(0)}\,,$$

avec :

$$C_K = \int_K |f(x)|\, dx.$$

Cela prouve aussi que T_f est d'ordre 0.

Reste à voir que $f = 0$ presque partout si $T_f = 0$ (on a en fait déjà vu cela : voir la Proposition IX.2.3).

Soit $x_0 \in \Omega$ et $r > 0$ tel que $[x_0 - 2r, x_0 + 2r] \subseteq \Omega$. Soit (voir Chapitre III) $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une unité approchée pour la convolution de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que :

$$\operatorname{supp}(\rho_\varepsilon) \subseteq [-r, r] \qquad \text{pour } 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_r.$$

Alors, si $|x - x_0| \leqslant r$, la fonction :

$$\varphi_{\varepsilon,x} \colon y \longmapsto \rho_\varepsilon(x - y)$$

est $\mathcal{C}^\infty$ et son support est contenu dans $[x_0 - 2r, x_0 + 2r] \subseteq \Omega$; elle est donc dans $\mathscr{D}(\Omega)$.

D'autre part, en posant $\widetilde{f} = f.\mathbb{I}_{[x_0-r,x_0+r]}$, on a :

$$(\widetilde{f} * \rho_\varepsilon)(x) = \int_{x_0-r}^{x_0+r} f(y)\,\rho_\varepsilon(x-y)\,dy = \int_\Omega f(y)\,\rho_\varepsilon(x-y)\,dy = \langle T_f, \varphi_{\varepsilon,x}\rangle = 0.$$

Mais $\widetilde{f} \in L^1(\mathbb{R})$, et donc (voir Chapitre III) :

$$\widetilde{f} * \rho_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{L^1(\mathbb{R})} \widetilde{f}.$$

Il existe donc une suite de nombres strictement positifs $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ pour laquelle on a $(\widetilde{f} * \rho_{\varepsilon_n})(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \widetilde{f}(t)$ pour presque tout $t \in \mathbb{R}$. Comme $(\widetilde{f} * \rho_\varepsilon)(x) = 0$ pour $|x - x_0| \leqslant r$ et que $\widetilde{f}$ est nulle en dehors de $[x_0 - r, x_0 + r]$, on a $\widetilde{f} = 0$ presque partout.

Cela signifie que $f = 0$ presque partout sur $[x_0 - r, x_0 + r]$. Mais x_0 était arbitraire dans Ω ; on obtient donc $f = 0$ presque partout sur Ω. □

X.2.2. Mesures

De la même façon, on a :

Proposition X.2.2. *Soit μ une mesure de Borel positive, ou une mesure complexe sur $(\Omega, \mathscr{B}or(\Omega))$. Alors la formule :*

$$\langle T_\mu, \varphi\rangle = \int_\Omega \varphi\, d\mu\,, \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega),$$

définit une distribution d'ordre 0 sur Ω. De plus $\mu = \nu$ si $T_\mu = T_\nu$.

On identifiera T_μ et μ.

Définition X.2.3. *On dit qu'une distribution est* positive *si :*

$$\varphi \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad T(\varphi) \geqslant 0.$$

Proposition X.2.4. *Toute distribution positive est d'ordre* 0.

Preuve. Soit K un compact de Ω, et soit $\rho_K \in \mathscr{D}(\Omega)$ telle que $0 \leqslant \rho_K \leqslant 1$ et $\rho_K = 1$ sur K. Pour toute $\varphi \in \mathscr{D}_K(\Omega)$, on a $|\varphi| = |\varphi\rho_K| \leqslant \|\varphi\|_\infty \,\rho_K$. Si φ est à valeurs réelles, cela signifie que :

$$-\|\varphi\|_\infty \,\rho_K \leqslant \varphi \leqslant \|\varphi\|_\infty \,\rho_K\,;$$

la linéarité de T et sa positivité entraînent :

$$|T(\varphi)| \leqslant T(\rho_K)\, \|\varphi\|_\infty.$$

Lorsque φ est à valeurs complexes, on écrit $\varphi = \operatorname{Re}\varphi + i \operatorname{Im}\varphi$, et on obtient :

$$|T(\varphi)| \leqslant 2\,T(\rho_K)\, \|\varphi\|_\infty.$$

Corollaire X.2.5. *Pour toute distribution positive T, il existe une mesure de Borel positive μ sur Ω telle que $T = T_\mu$.*

Preuve. Nous allons voir que T se prolonge en une forme linéaire positive sur $\mathscr{K}(\Omega) = \mathscr{D}^0(\Omega)$; le Théorème de représentation de Riesz donnera le résultat.

Soit $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une unité approchée avec $\rho_\varepsilon \in \mathscr{D}(\Omega)$ et $\rho_\varepsilon \geqslant 0$. Soit $\varphi \in \mathscr{D}^0(\Omega)$ et soit K un compact de Ω tel que $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq \overset{\circ}{K}$. Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, on a $\varphi*\rho_\varepsilon \in \mathscr{D}_K(\Omega)$; donc :

$$|T(\varphi * \rho_{\varepsilon_1}) - T(\varphi * \rho_{\varepsilon_2})| \leqslant C_K\, \|\varphi * \rho_{\varepsilon_1} - \varphi * \rho_{\varepsilon_2}\|_\infty.$$

Comme $\|\varphi * \rho_\varepsilon - \varphi\|_\infty \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$, on voit que $\lim_{\varepsilon\to 0} T(\varphi * \rho_\varepsilon)$ existe. Notons la $\widetilde{T}(\varphi)$.

Il est clair que $\widetilde{T}\colon \mathscr{D}^0(\Omega) \to \mathbb{C}$ ainsi définie est linéaire ; elle est de plus positive puisque $\rho_\varepsilon \geqslant 0$ entraîne :

$$\varphi \geqslant 0 \quad\Longrightarrow\quad \varphi * \rho_\varepsilon \geqslant 0 \quad\Longrightarrow\quad \widetilde{T}(\varphi) = \lim_{\varepsilon\to 0} T(\varphi * \rho_\varepsilon) \geqslant 0,$$

et cela termine la preuve. □

Remarque. On voit de même que toute distribution T d'ordre 0 se prolonge en $\widetilde{T}\colon \mathscr{D}^0(\Omega) \to \mathbb{C}$, de sorte que, pour tout compact K de Ω :

$$|\widetilde{T}(\varphi)| \leqslant C_K\, \|\varphi\|_\infty\,, \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}^0(\Omega).$$

Si T est à valeurs réelles, $\widetilde{T}$ le sera aussi, et l'on peut poser pour $\varphi \in \mathscr{D}^0(\Omega)$ positive :

$$\begin{cases} T^+(\varphi) = \sup\{\widetilde{T}(\psi)\,;\ \psi \in \mathscr{D}^0(\Omega) \text{ et } 0 \leqslant \psi \leqslant \varphi\} \\ T^-(\varphi) = \sup\{-\widetilde{T}(\psi)\,;\ \psi \in \mathscr{D}^0(\Omega) \text{ et } 0 \leqslant \psi \leqslant \varphi\}. \end{cases}$$

Alors, T^+ et T^- se prolongent en des formes linéaires positives sur $\mathscr{D}^0(\Omega)$ et $\widetilde{T} = T^+ - T^-$.

Il résulte du corollaire que, pour toute distribution d'ordre 0, il existe quatre mesures de Borel positives $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ telles que :

$$T = (T_{\mu_1} - T_{\mu_2}) + i(T_{\mu_3} - T_{\mu_4}).$$

X.2.3. Distributions d'ordre $\geqslant 1$

Proposition X.2.6. *Soit $p \in \mathbb{N}$, et soit $a \in \Omega$ fixés. Posons :*

$$\langle T, \varphi \rangle = \varphi^{(p)}(a)\,, \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Alors T est une distribution sur Ω d'ordre p.

Preuve. Que ce soit une distribution d'ordre $\leqslant p$ est clair. Pour voir que l'ordre est exactement p, on peut supposer $p \geqslant 1$ (puisque si $p = 0$ l'ordre ne peut être que 0; d'ailleurs T est alors la distribution associée à la mesure de Dirac en 0), considérons $\rho \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ telle que $\rho(0) = 1$, et posons, pour $\varepsilon > 0$:

$$\varphi_\varepsilon(x) = (x-a)^p \rho\Big(\frac{x-a}{\varepsilon}\Big)\cdot$$

Pour ε assez petit, le support de φ_ε, qui est compact, est contenu dans Ω; on a donc $\varphi_\varepsilon \in \mathscr{D}(\Omega)$, et :

$$\langle T, \varphi_\varepsilon \rangle = p!\,.$$

D'autre part, pour $j \leqslant p-1$, on a, pour $0 < \varepsilon \leqslant 1$:

$$\|\varphi_\varepsilon^{(j)}\|_\infty \leqslant C_j\, \varepsilon\,,$$

où C_j ne dépend que de j et de ρ; donc :

$$\|\varphi_\varepsilon\|_{(p-1)} \leqslant C\, \varepsilon\,,$$

où C ne dépend que de ρ. Il n'existe donc aucune constante C_K telle que :

$$|\langle T, \varphi_\varepsilon \rangle| \leqslant C_K\, \|\varphi_\varepsilon\|_{(p-1)}$$

pour tout $\varepsilon > 0$ (car on aurait $p! \leqslant C C_K\, \varepsilon$), T n'est pas d'ordre $\leqslant p-1$. □

Corollaire X.2.7. *Si l'on pose, pour $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$:*

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{p=0}^{\infty} \varphi^{(p)}(p)\,,$$

alors T est une distribution sur $\mathbb{R}$ d'ordre infini.

Preuve. Comme supp(φ) est compact, la somme n'a qu'un nombre fini de termes non nuls, et $\langle T, \varphi\rangle$ est donc bien défini. De plus, pour tout compact K de $\mathbb{R}$, on a, si $K \subseteq [-N, N]$:

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leqslant \|\varphi\|_{(N)}, \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}_K(\mathbb{R});$$

de sorte que T est bien une distribution sur $\mathbb{R}$.

Elle est d'ordre infinie car, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, si l'on considère le compact $K = \left[p - \frac{1}{2}, p + \frac{1}{2}\right]$, on a $\langle T, \varphi\rangle = \varphi^{(p)}(p)$ pour toute $\varphi \in \mathscr{D}_K(\mathbb{R})$; or, on a vu dans la proposition précédente que le plus petit entier m pour lequel :

$$(\exists C > 0) \quad \left(\forall \varphi \in \mathscr{D}_K(\mathbb{R})\right) \qquad |\varphi^{(p)}(p)| \leqslant C \, \|\varphi\|_{(m)}$$

est $m = p$; cela signifie que T ne peut être d'ordre $\leqslant p - 1$.

Comme c'est vrai pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, T est bien d'ordre infini. □

X.2.4. Valeur principale

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est localement intégrable sur $\mathbb{R}^*$ et définit donc une distribution sur $\mathbb{R}^*$; nous allons voir que, bien qu'elle ne soit pas localement intégrable sur $\mathbb{R}$, elle définit une distribution sur $\mathbb{R}$.

Proposition X.2.8. *Pour toute $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, la limite :*

$$\boxed{\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} \, dx}$$

existe, et définit une distribution d'ordre 1 *sur* $\mathbb{R}$, *appelée* **valeur principale** *de* $1/x$, *et notée* $\boxed{\mathrm{vp}\,(1/x)}$.

Preuve. Elle utilise le fait que $x \mapsto 1/x$ est impaire : si supp$(\varphi) \subseteq [-A, A]$, on peut écrire :

$$\int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} \, dx = \int_{-A}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \, dx + \int_{\varepsilon}^{A} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \, dx .$$

Mais $x \mapsto \dfrac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}$ se prolonge par continuité en 0 par $\varphi'(0)$; donc :

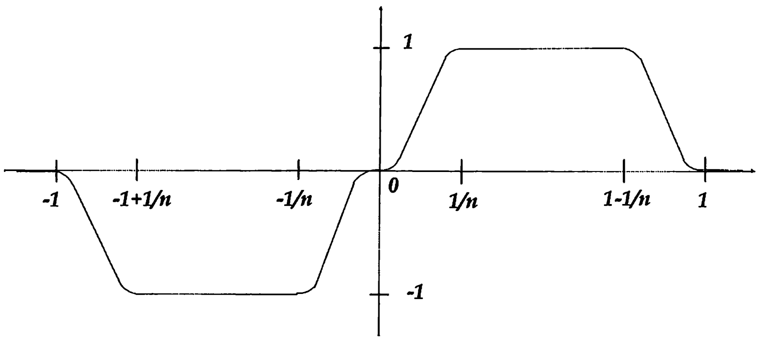
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} \, dx = \int_{-A}^{A} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \, dx.$$

Le Théorème des accroissements finis donne :

$$\left| \int_{-A}^{A} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \, dx \right| \leqslant 2A \, \|\varphi'\|_\infty \leqslant 2A \, \|\varphi\|_{(1)} ,$$

ce qui prouve que $T \colon \varphi \mapsto \displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} \, dx$ est une distribution d'ordre $\leqslant 1$.

Pour voir qu'elle est d'ordre 1, considérons des fonctions $\varphi_n \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, impaires, telles que $\operatorname{supp}(\varphi_n) \subseteq]-1, 0[\cup]0, 1[$, $0 \leqslant \varphi_n \leqslant 1$ sur $\mathbb{R}_+$, et $\varphi_n = 1$ sur $\left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right]$.



Si $K = [-1, 1]$, on a $\varphi_n \in \mathscr{D}_K(\mathbb{R})$, $\|\varphi_n\|_{(0)} = \|\varphi_n\|_\infty = 1$, et :

$$\langle \operatorname{vp}(1/x), \varphi_n \rangle = 2 \int_0^1 \frac{\varphi_n(x)}{x}\, dx \geqslant 2 \log(n-1)\,,$$

de sorte que $\operatorname{vp}(1/x)$ n'est pas d'ordre 0. □

X.2.5. Parties finies

Pour des fonctions qui ne sont pas impaires, ce procédé ne marche plus ; il faut donc corriger la divergence de l'intégrale.

Notation. La fonction indicatrice $\mathbb{1}_{[0,+\infty[}$ est notée Y : $\boxed{Y = \mathbb{1}_{[0,+\infty[}}$, et est appelée *fonction de Heaviside.*

Proposition X.2.9. *Pour toute $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, la limite :*

$$\boxed{\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx + \varphi(0) \log \varepsilon \right)}$$

existe et définit une distribution T d'ordre 1 sur $\mathbb{R}$.

On dit que c'est la **partie finie** *de $Y(x)/x$, et on la note* $\boxed{\operatorname{Pf}\big(Y(x)/x\big)}$.

Preuve. Si $\operatorname{supp}\varphi \subseteq [-A, A]$:

$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx = \int_\varepsilon^{A} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}\, dx + \varphi(0) \log A - \varphi(0) \log \varepsilon\,,$$

d'où l'existence de la limite. Le Théorème des accroissements finis montre que c'est une distribution d'ordre $\leqslant 1$. Elle est d'ordre 1 car si φ_n est la fonction utilisée dans la preuve précédente, alors la fonction $\psi_n = \varphi_n Y$ est dans $\mathscr{D}_{[0,1]}(\mathbb{R})$ et l'on a $\langle \mathrm{Pf}\,[Y(x)/x], \psi_n\rangle \geqslant \log(n-1)$. □

X.3. Opérations sur les distributions

X.3.1. Multiplication par une fonction de classe C^∞

Notation. On désigne par $\mathscr{E}^m(\Omega)$ l'espace des fonctions $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ de classe C^m, et par $\mathscr{E}(\Omega) = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \mathscr{E}^m(\Omega)$ celui des fonctions de classe C^∞ (c'est-à-dire indéfiniment dérivables).

La preuve de la proposition suivante résulte de la formule de Leibniz, qui entraîne que $\|(f\varphi)^{(m)}\|_\infty \leqslant \big(\sum_{j=0}^m \mathrm{C}_m^j \|f^{(j)}\|_\infty\big)\,\|\varphi\|_{(m)}$.

Proposition X.3.1. *Pour toute $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ et toute $f \in \mathscr{E}(\Omega)$, on définit une distribution $fT \in \mathscr{D}'(\Omega)$ en posant :*

$$\langle fT, \varphi\rangle = \langle T, f\varphi\rangle\,, \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

On remarquera que si T est d'ordre m, on peut en fait définir fT pour $f \in \mathscr{E}^m(\Omega)$.

Exemple. On a $x\,\mathrm{vp}\,(1/x) = \mathbb{1}$. En effet :

$$\langle x\,\mathrm{vp}\,(1/x), \varphi\rangle = \langle \mathrm{vp}\,(1/x), x\,\varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon} \frac{x\varphi\,(x)}{x}\,dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi\,(x)\,dx = \langle \mathbb{1}, \varphi\rangle.$$

X.3.2. Dérivation.

Il est immédiat de prouver la proposition suivante.

Proposition X.3.2. *Pour toute distribution $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$, la formule :*

$$\boxed{\langle T', \varphi\rangle = -\langle T, \varphi'\rangle}\,, \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$$

définit une distribution $T' \in \mathscr{D}'(\Omega)$, appelée la **dérivée de** *T.*

De plus, si T est d'ordre m, alors T' est d'ordre $\leqslant m+1$.

Exemple. On a $\langle \delta_a', \varphi\rangle = -\langle \delta_a, \varphi'\rangle = -\varphi'(a)$.

L'ordre est $m+1$ si $m \geqslant 1$ (Exercice 6). Par contre, si $T = T_f$ pour une fonction continûment dérivable f, il est clair, par intégration par parties, que $(T_f)' = T_{f'}$, et qu'elle est donc aussi d'ordre 0.

Corollaire X.3.3. *Toute distribution est indéfiniment dérivable.*

La dérivation est linéaire sur $\mathscr{D}'(\Omega)$ et l'on a $\boxed{(fT)' = f'T + fT'}$ pour toute $f \in \mathscr{E}(\Omega)$, ainsi qu'il est facile de le voir. La proposition suivante se montre exactement comme le Théorème d'immersion de Sobolev (voir Chapitre IX).

Proposition X.3.4. *Soit I un* <u>*intervalle*</u> *ouvert de $\mathbb{R}$ et $f \in L^1_{loc}(I)$. Alors les solutions de l'équation $T' = f$ dans $\mathscr{D}'(I)$ sont les distributions T_{F+C}, où C est une constante et F est la fonction* **continue** *définie, pour $a \in I$, fixé, par :*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt\,.$$

Corollaire X.3.5. *Si $u \in W^p(I)$ est dans l'espace de Sobolev $W^p(I)$, et si u' est sa dérivée faible, alors $(T_u)' = T_{u'}$.*

Corollaire X.3.6. *Si I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $T \in \mathscr{D}(I)$, alors $T' = 0$ si et seulement si T est constante.*

"Constante" signifiant que c'est la distribution associée à une fonction constante.

Proposition X.3.7 (Formule des sauts). *On a :*

1) $\boxed{Y' = \delta_0}$ [1].

2) *Si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est de classe C^1 par morceaux, discontinue en $a_1, \dots, a_n$, alors, si $f' \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, on a la* formule des sauts *:*

$$\boxed{(T_f)' = T_{f'} + \sum_{k=1}^{n} \left[f(a_k^+) - f(a_k^-)\right] \delta_{a_k}}\,.$$

Preuve. 1) Pour toute $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$:

$$\langle Y', \varphi\rangle = -\langle Y, \varphi'\rangle = -\int_0^{+\infty} \varphi'(x)\,dx = \varphi\,(0),$$

puisque, φ ayant un support compact, elle est nulle pour x assez grand.

2) De même, en intégrant par parties :

$$\begin{aligned}
\langle (T_f)', \varphi\rangle &= -\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\varphi'(x)\,dx \\
&= -\int_{-\infty}^{a_1} f(x)\,\varphi'(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\,\varphi'(x)\,dx - \int_{a_n}^{+\infty} f(x)\,\varphi'(x)\,dx \\
&= -f(a_1^-)\,\varphi(a_1) + \int_{-\infty}^{a_1} f'(x)\,\varphi(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n-1}\left[f(a_{k+1}^-)\,\varphi(a_{k+1}) - f(a_k^+)\,\varphi(a_k)\right] \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f'(x)\,\varphi\,(x)\,dx + f(a_n^+)\,\varphi\,(a_n) + \int_{a_n}^{+\infty} f'(x)\,\varphi\,(x)\,dx \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left[f(a_k^+) - f(a_k^-)\right]\varphi\,(a_k) + \int_{\mathbb{R}} f'(x)\,\varphi\,(x)\,dx\,,
\end{aligned}$$

d'où la formule des sauts. □

1. La mesure de Dirac δ_0 est souvent notée simplement δ. Elle est appelée "fonction de Dirac" par les Physiciens.

X.4. Théorème de structure

Ce théorème dit, qu'en un certain sens, les distributions ont été définies de façon optimale : on a juste introduit ce qu'il fallait pour que toute fonction continue possède des dérivées de tous les ordres.

> **Théorème X.4.1** (Laurent Schwartz). *Soit $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ une distribution sur Ω, et K un compact de Ω. Alors il existe une fonction continue $f \in \mathscr{C}(\Omega)$ et un entier $r \in \mathbb{N}$ tels que, sur $\mathscr{D}_K(\Omega)$, T soit égale à $(T_f)^{(r)}$.*

Preuve. On sait qu'il existe un entier $m = m(K) \in \mathbb{N}$ et une constante $C_K > 0$ tels que :

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leqslant C_K \|\varphi\|_{(m)}, \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}_K(\Omega).$$

On peut prolonger chaque $\varphi \in \mathscr{D}_K(\Omega)$ en $\varphi \in \mathscr{D}_K(\mathbb{R})$ (par 0 en dehors de Ω). Alors :

$$\varphi^{(j)}(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi^{(j+1)}(t)\, dt, \quad \forall j \in \mathbb{N} \tag{1}$$

et :

$$\|\varphi^{(m)}\|_\infty \leqslant \|\varphi^{(m+1)}\|_{L^1(\mathbb{R})} = \|\varphi^{(m+1)}\|_{L^1(K)}.$$

Si $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq [-A, A]$, le Théorème des accroissements finis (sur $[x, A]$) donne :

$$\|\varphi^{(j)}\|_\infty \leqslant 2A\, \|\varphi^{(j+1)}\|_\infty, \quad \forall j \geqslant 0;$$

donc :

$$\|\varphi^{(j)}\|_\infty \leqslant (2A)^{m+1-j}\, \|\varphi^{(m+1)}\|_{L^1(K)}, \quad \text{pour } 0 \leqslant j \leqslant m,$$

et il existe donc $B > 0$ tel que :

$$\|\varphi\|_{(m)} \leqslant B\, \|\varphi^{(m+1)}\|_{L^1(K)}.$$

On a donc une constante $B_K > 0$ telle que :

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leqslant B_K\, \|\varphi^{(m+1)}\|_{L^1(K)}. \tag{2}$$

Notons que la formule (1) permet, par itération, de définir une application linéaire $U\colon \varphi^{(m+1)} \mapsto \varphi$. Les inégalités (2) s'écrivent donc :

$$|(T \circ U)(\varphi^{(m+1)}| \leqslant B_K\, \|\varphi^{(m+1)}\|_{L^1(K)},$$

ce qui signifie que TU est continue sur le sous-espace $\{\varphi^{(m+1)}\ ;\ \varphi \in \mathscr{D}_K(\Omega)\}$ de $L^1(K)$, pour la norme de $L^1(K)$. Le Théorème de Hahn-Banach permet de la prolonger en une forme linéaire continue sur $L^1(K)$; il existe donc $g \in L^\infty(K)$ telle que :

$$\langle T, \varphi\rangle = (Tu)(\varphi^{(m+1)}) = \int_K g(x)\, \varphi^{(m+1)}(x)\, dx, \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}_K(\Omega). \tag{3}$$

Prolongeons g par 0 en dehors de K, et posons :

$$G(x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)\, dt\,.$$

Alors G est continue sur $\mathbb{R}$ et on a vu à la Proposition X.3.4 que $(T_G)' = T_g$.

Si l'on pose $f = (-1)^{m+1}G$, alors l'égalité (3) montre que :

$$\langle T, \varphi\rangle = \langle (T_f)^{(m+2)}, \varphi\rangle$$

pour toute $\varphi \in \mathscr{D}_K(\Omega)$, ce qui achève la preuve. □

X.4.1. Support d'une distribution

Si Ω' est un ouvert contenu dans l'ouvert Ω, on peut considérer $\mathscr{D}(\Omega')$ comme un sous-espace de $\mathscr{D}(\Omega)$, en prolongeant les fonctions par 0 sur $\Omega \setminus \Omega'$. Toute distribution T sur Ω définit donc une distribution sur Ω', par restriction de $T\colon \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ à $\mathscr{D}(\Omega')$; on dit que c'est la *restriction* de T à Ω', et on la note $T_{|\Omega'}$. Par exemple, la restriction à $\mathbb{R}^*$ de $\mathrm{vp}\,(1/x)$ est la fonction $1/x$, qui est localement intégrable sur $\mathbb{R}^*$. On dit que deux distributions T_1 et T_2 sur Ω sont égales sur Ω' si $T_{1|\Omega'} = T_{2|\Omega'}$, c'est-à-dire si $\langle T_1, \varphi\rangle = \langle T_2, \varphi\rangle$ pour toute $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega')$. On dit que la distribution T s'*annule sur l'ouvert* Ω' si $T_{|\Omega'} = 0$, c'est-à-dire si $\langle T, \varphi\rangle = 0$ pour toute $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega')$.

Proposition X.4.2. *Si la distribution $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ s'annule sur des ouverts $U_j \subseteq \Omega$, $j \in J$, alors elle s'annule sur $U = \bigcup_{j\in J} U_j$.*

Preuve. Soit $\varphi \in \mathscr{D}(U)$ et soit $K = \operatorname{supp}\varphi \subseteq U$. Comme K est compact, il existe une partie finie J_0 de J telle que $K \subseteq \bigcup_{j\in J_0} U_j$. Soit $(\varphi_j)_{j\in J_0}$ une partition de l'unité de K subordonnée à ce recouvrement. On a $\varphi\varphi_j \in \mathscr{D}(U_j)$ et $\varphi = \sum_{j\in J_0}(\varphi\varphi_j)$; donc $\langle T, \varphi\rangle = \sum_{j\in J_0}\langle T, \varphi\varphi_j\rangle = 0$. □

Il en résulte qu'il existe un plus grand ouvert de Ω sur lequel T s'annule.

Définition X.4.3. *On appelle* support de la distribution *T le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel T s'annule. On le note* $\operatorname{supp} T$.

Remarque. Par définition, on a $\langle T, \varphi\rangle = 0$ si $(\operatorname{supp} T) \cap (\operatorname{supp}\varphi) = \emptyset$. Par contre, on peut avoir $\langle T, \varphi\rangle \neq 0$ avec $\varphi(x) = 0$ pour tout $x \in \operatorname{supp} T$, comme on le voit en prenant $T = \delta_0'$, dont le support est $\{0\}$ et $\varphi(x) = x\psi(x)$, où $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ vaut 1 sur $]-1, 1[$; on a $\varphi(0) = 0$, alors que $\langle T, \varphi\rangle = -1$. Par contre, si $T = T_\mu$ est associée à une mesure μ (et donc aussi si T est d'ordre 0), et si $\varphi(x) = 0$ pour tout $x \in \operatorname{supp}\mu$, alors :

$$\langle T_\mu, \varphi\rangle = \int_\Omega \varphi(x)\, d\mu(x) = \int_{\operatorname{supp}\mu} \varphi(x)\, d\mu(x) = 0\,.$$

On peut montrer que si T est une distribution d'ordre m et si $\varphi, \varphi', \ldots, \varphi^{(m)}$ s'annulent sur $\operatorname{supp} T$, alors $\langle T, \varphi\rangle = 0$ (voir l'Exercice 7).

Proposition X.4.4 (Localisation). *Soit T une distribution sur l'ouvert Ω et $S = \operatorname{supp} T$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $S_\varepsilon = S + [-\varepsilon, \varepsilon] = \{x \in \mathbb{R}\,;\ \operatorname{dist}(x, S) \leqslant \varepsilon\}$ soit contenu dans Ω. Il existe une fonction χ_ε indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ à support dans S_ε telle que $S = \chi_\varepsilon S$, c'est-à-dire telle que :*

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \varphi\, \chi_\varepsilon \rangle\,, \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)\,.$$

Notons qu'il est possible qu'il n'existe aucun $\varepsilon > 0$ tel que $S_\varepsilon \subseteq \Omega$ (on peut avoir, par exemple $\operatorname{supp} T = \Omega$) ; par contre, il y en a toujours si T est à support compact.

Preuve. Soit $\rho_\varepsilon \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{supp} \rho_\varepsilon \subseteq [-\varepsilon/3, \varepsilon/3]$ et $\int_{\mathbb{R}} \rho_\varepsilon(u)\, du = 1$. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\chi_\varepsilon(x) = (\mathbb{1}_{S_{2\varepsilon/3}} * \rho_\varepsilon)(x) = \int_{S_{2\varepsilon/3}} \rho_\varepsilon(x - t)\, dt.$$

Alors χ_ε est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\operatorname{supp} \chi_\varepsilon \subseteq S_{2\varepsilon/3} + \operatorname{supp} \rho_\varepsilon \subseteq S_\varepsilon$. De plus, si $x \in S_{\varepsilon/3}$, on a $|x - t| > \varepsilon/3$ pour tout $t \notin S_{2\varepsilon/3}$; donc $\rho_\varepsilon(x - t) = 0$, de sorte que $\chi_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}} \rho_\varepsilon(x-t)\, dt = \int_{\mathbb{R}} \rho_\varepsilon(u)\, du = 1$. Alors $\varphi - \varphi\, \chi_\varepsilon \in \mathscr{D}\,(\Omega)$ et $\operatorname{supp}(\varphi - \varphi\, \chi_\varepsilon) \subseteq \Omega \setminus S_{\varepsilon/3} \subseteq \Omega \setminus S$; donc $\langle T, \varphi - \varphi\, \chi_\varepsilon \rangle = 0$, de sorte que $\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \varphi\, \chi_\varepsilon \rangle$. □

Corollaire X.4.5. *Toute distribution T à support compact est d'ordre fini. De plus, il existe un voisinage compact K de* $\operatorname{supp} T$ *et une constante $C > 0$ tels que, m étant l'ordre de T, on ait :*

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leqslant C \sup_{0 \leqslant j \leqslant m} \sup_{x \in K} |\varphi^{(j)}(x)|\,, \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)\,.$$

Preuve Avec les notations de la proposition, S_ε est compact et donc $\chi_\varepsilon \in \mathscr{D}_{S_\varepsilon}(\mathbb{R})$, de sorte que $\varphi\, \chi_\varepsilon \in \mathscr{D}_{S_\varepsilon}(\Omega)$ pour toute $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$; on connaît donc S dès que l'on connaît ses valeurs sur $\mathscr{D}_{S_\varepsilon}(\Omega)$. Le Théorème de structure dit qu'il existe un entier $p \geqslant 0$ et une fonction continue f tels que, pour toute $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$:

$$\langle S, \varphi \rangle = \langle S, \varphi\, \chi_\varepsilon \rangle = \langle (T_f)^{(p)}, \varphi\, \chi_\varepsilon \rangle = \langle \chi_\varepsilon (T_f)^{(p)}, \varphi \rangle\,;$$

donc $S = \chi_\varepsilon (T_f)^{(p)}$, et S est d'ordre $m \leqslant p$.

Par conséquent il existe une constante $C > 0$ telle que $|\langle T, \varphi \rangle| \leqslant C\, \|\varphi\, \chi_\varepsilon\|_{(m)}$ pour toute $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$. Notons $K = S_\varepsilon$; c'est un voisinage compact de $\operatorname{supp} T = S$. Comme $\|(\varphi\, \chi_\varepsilon)^{(j)}\|_\infty \leqslant C_j \sup_{0 \leqslant h \leqslant j} \sup_{x \in K} |\varphi^{(h)}(x)|$, d'après la formule de Leibniz, on obtient $|\langle T, \varphi \rangle| \leqslant C \sup_{0 \leqslant j \leqslant m} \sup_{x \in K} |\varphi^{(j)}(x)|$ pour toute $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$. □

X.5. Transformation de Fourier

De l'avis même de Laurent Schwartz, c'est dans le domaine de la transformation de Fourier que l'introduction des Distributions est essentielle. Il n'est toutefois pas possible de définir la transformée de Fourier pour toutes les distributions, et on doit se restreindre à une sous-classe, celle des *distributions tempérées.* Nous nous contenterons, ce chapitre n'étant destiné qu'à donner un aperçu de la Théorie des Distributions, de définir les distributions tempérées, et leur transformée de Fourier.

X.5.1. Impossibilité de définir la transformée de Fourier pour toutes les distributions

Tout d'abord, la définition naturelle à laquelle on pourrait penser : $\langle \mathscr{F}T, \varphi\rangle = \langle T, \mathscr{F}\varphi\rangle$, $\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ ne fonctionne pas, parce qu'en général $\mathscr{F}\varphi \notin \mathscr{D}(\mathbb{R})$. Il faut donc trouver un espace de fonctions $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ tel que $\mathscr{F}\varphi$ ait un sens pour toute $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ et $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}) \Rightarrow \mathscr{F}\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. L'espace $L^2(\mathbb{R})$ vérifie cette implication, mais n'a pas d'assez bonnes propriétés vis-à-vis de la dérivation. On doit chercher un espace $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ dont les fonctions sont indéfiniment dérivables.

D'autre part, on aimerait pouvoir définir une transformation de Fourier $\mathscr{F}$ sur $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$, qui, comme la transformation de Fourier-Plancherel sur $L^2(\mathbb{R})$, envoie bijectivement $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ sur lui-même, et $\mathscr{F}^{-1}$ ayant les “mêmes” propriétés que $\mathscr{F}$. Si l'on cherche à avoir une définition “acceptable”, il est indispensable de lui demander d'être linéaire, et continue, au sens où $\mathscr{F}(T_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathscr{F}(T)$ lorsque $T_n \xrightarrow[n\to\infty]{} T$ (la convergence étant la convergence simple sur les éléments de $\mathscr{D}(\mathbb{R})$). Il est aussi naturel de lui demander de “bien se comporter” vis-à-vis de la dérivation, c'est-à-dire que l'on voudrait que $\mathscr{F}(xT) = \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)(\mathscr{F}T)'$. En particulier, comme $\mathscr{F}(\mathbb{1}) = \delta_0$, on devrait avoir $\mathscr{F}(x^m) = \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^m \delta_0^{(m)}$, pour tout $m \in \mathbb{N}$. Comme la série $\sum_{m\geqslant 1} \frac{x^m}{m!}$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$ vers e^x, donc dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$, la série $\sum_{m\geqslant 1} \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^m \frac{\delta_0^{(m)}}{m!}$ devrait aussi converger dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$. Mais on peut montrer que ce n'est pas possible : il faudrait pour cela qu'il existe un $m_0 \geqslant 0$ *fixe* tel que les termes de la série s'écrivent $(T_{f_m})^{(m_0)}$, pour des fonctions continues $f_m \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, ce qui n'est pas le cas.

Il faut donc se placer dans un sous-espace vectoriel de $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$, muni d'une notion de convergence plus forte, empêchant la série $\sum_{m\geqslant 1} \frac{x^m}{m!}$ de converger dans ce sous-espace.

X.5.2. L'espace $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ de Schwartz des fonctions indéfiniment dérivables à décroissance rapide

Définition X.5.1. *On note $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe C^∞ telles que :*

$$|f^{(k)}(x)| = o\left(|x|^{-n}\right), \quad |x| \to +\infty, \quad \forall n \in \mathbb{N} \textit{ et } \forall k \in \mathbb{N}.$$

*On dit que $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ est l'*espace de Schwartz des fonctions indéfiniment dérivables à décroissance rapide.

Il est immédiat que si $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, alors $f^{(j)}$ et $x^l f(x)$ (avec l'abus de notation usuel) aussi, pour tous $j, l \in \mathbb{N}$.

Remarque. L'espace vectoriel $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ est, comme $\mathscr{E}(\mathbb{R})$, muni de deux opérations en faisant une algèbre.

- D'une part, la multiplication usuelle. En effet, on sait que si f et g sont indéfiniment dérivables, leur produit fg aussi. De plus, pour tous $k, n \in \mathbb{N}$, on a, si

$f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$:

$$x^n (fg)^{(k)}(x) = x^n \sum_{j=0}^{k} \mathrm{C}_k^j f^{(j)}(x)\, g^{(k-j)}(x) = \sum_{j=0}^{k} \mathrm{C}_k^j [x^n f^{(j)}(x)]\, g^{(k-j)}(x) \xrightarrow[|x|\to+\infty]{} 0\,;$$

donc $fg \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.

- D'autre part, la convolution. En effet, on sait que si l'une des fonctions est indéfiniment dérivable, leur produit de convolution l'est aussi. Notons maintenant que si $u, v \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, alors, pour tous $l, h \in \mathbb{N}$, on a, en posant $u_l(x) = x^l u(x)$ et $v_h(x) = x^h v(x)$:

$$(u_l * v_h)(x) = \int_{\mathbb{R}} (x-t)^l u(x-t)\, t^h v(t)\, dt\,;$$

donc, par la formule du binôme, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} x^n (u*v)(x) &= \int_{\mathbb{R}} x^n u(x-t)\, v(t)\, dt = \sum_{h+l=n} \mathrm{C}_n^l \left(\int_{\mathbb{R}} (x-t)^l u(x-t)\, t^h v(t)\, dt \right) \\ &= \sum_{h+l=n} \mathrm{C}_n^l (u_l * v_h)(x) \xrightarrow[|x|\to+\infty]{} 0\,, \end{aligned}$$

parce que, par exemple, $u_l, v_h \in L^2(\mathbb{R})$, et donc $u_l * v_h \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R})$.

Pour $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, on obtient, pour tous $k, n \in \mathbb{N}$, en appliquant cela à $u = f^{(k)}$ et $v = g$:

$$|x^n (f*g)^{(k)}(x)| = x^n (f^{(k)} * g)(x) \xrightarrow[|x|\to+\infty]{} 0\,,$$

de sorte que $f * g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.

Proposition X.5.2. *L'espace de Schwartz a les propriétés suivantes :*

1) *On a* $\mathscr{S}(\mathbb{R}) \subseteq L^1(\mathbb{R})$ *et* $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}) \Rightarrow \mathscr{F} f = \widehat{f} \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.

2) $\mathscr{F}$ *réalise une bijection de* $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ *sur lui-même.*

3) *Pour toutes* $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, *on a :*

$$\mathscr{F}(f*g) = (\mathscr{F} f)(\mathscr{F} g) \text{ et } \mathscr{F}(fg) = (\mathscr{F} f) * (\mathscr{F} g).$$

4) *Pour tout* $k, n \in \mathbb{N}$, *on a, pour tout* $y \in \mathbb{R}$:

$$\widehat{f}^{(k)}(y) = \widehat{f_k}(y), \text{ où } f_k(x) = (-2\pi i x)^k f(x)$$

et

$$\widehat{f^{(n)}}(y) = (2\pi i y)^n \widehat{f}(y)\,.$$

Preuve. 1) Si $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, f est continue ; comme $f(x) = o\,(x^{-2})$, elle est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Montrons maintenant que $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}) \Rightarrow \mathscr{F} f = \widehat{f} \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, posons $f_k(x) = (-2\pi i x)^k f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

a) *$\widehat{f}$ est indéfiniment dérivable si f est continue et $f(x) = o(|x|^{-n})$ pour tout* $n \in \mathbb{N}$. L'hypothèse entraîne que $f_k(x) = o(x^{-2})$; donc $f_k \in L^1(\mathbb{R})$. En particulier, $f_1 \in L^1(\mathbb{R})$. Le Théorème de dérivation sous le signe intégral (voir l'Exercice 11 du Chapitre III) nous dit que $\widehat{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\widehat{f})'(y) = \widehat{f_1}(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. Une récurrence nous montre alors, en utilisant le fait que $f_k \in L^1(\mathbb{R})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, que $\widehat{f}$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\widehat{f}^{(k)} = \widehat{f_k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

b) *Les dérivées de $\widehat{f}$ sont à décroissance rapide si $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.* Une intégration par parties nous montre (voir l'Exercice 11 du Chapitre III) que si $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g, g' \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\widehat{g'}(y) = (2\pi i y)\widehat{g}(y)$. Par récurrence, on obtient, en utilisant le fait que $f^{(n-1)}$ et $f^{(n)}$ sont intégrables (car à décroissance rapide), que :

$$(2\pi i y)^n \widehat{f}(y) = \widehat{f^{(n)}}(y)\,, \quad \forall y \in \mathbb{R}\,.$$

Comme $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ entraîne $f^{(n)} \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, on a $f^{(n)} \in L^1(\mathbb{R})$; donc $\widehat{f^{(n)}}(y) \xrightarrow[|y|\to+\infty]{} 0$ (Théorème III.2.2). Il en résulte que $(2\pi i y)^n \widehat{f}(y) \xrightarrow[|y|\to+\infty]{} 0$ et ainsi $\widehat{f}(y) = o(|y|^{-n})$.

Maintenant, $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ entraîne que $f_k \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ car $f_k^{(n)}(x) = \sum_{j=0}^{n} P_j(x)\, f^{(j)}(x)$, où les P_j sont des polynômes (de degré $k - n + j$ si $n \leqslant k$, et $P_j = 0$ si $n > k$). Comme on a vu que $(\widehat{f})^{(k)} = \widehat{f_k}$, on obtient, en remplaçant dans ce qui précède f par f_k :

$$(\widehat{f})^{(k)}(y) = \widehat{f_k}(y) = o(|y|^{-n}) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}\,.$$

2) Il résulte du 1) que si $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, on a $f, \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. On peut donc utiliser le Théorème d'inversion : on a $\widehat{\widehat{f}}(x) = f(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (c'est vrai pour tout x, et pas seulement pour presque tout x car f est continue). Alors pour toute $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ on a $g = \widehat{f}$, avec $f(x) = \widehat{g}(-x)$. Donc $\mathscr{F}$ envoie $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ sur lui-même. Comme on sait que la transformation de Fourier est injective sur $L^1(\mathbb{R}) \supseteq \mathscr{S}(\mathbb{R})$, elle réalise une bijection de $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ sur lui-même.

3) L'égalité $\mathscr{F}(f * g) = (\mathscr{F} f)(\mathscr{F} g)$ est vraie pour toutes $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, donc en particulier pour $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Pour l'autre, on utilise la bijectivité de la transformation de Fourier, et donc aussi de la co-tranformation de Fourier $\overline{\mathscr{F}}$, sur $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. Si $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, il existe $u, v \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ telles que $f = \overline{\mathscr{F}} u$ et $g = \overline{\mathscr{F}} v$. Alors $fg = (\overline{\mathscr{F}} u)(\overline{\mathscr{F}} v) = \overline{\mathscr{F}}(u * v)$; d'où, par le Théorème d'inversion (puisque l'on a vu au a) que $\mathscr{S}(\mathbb{R}) \subseteq A(\mathbb{R})$), $\mathscr{F}(fg) = u * v = (\mathscr{F} f) * (\mathscr{F} g)$.

4) Cela a déjà été vu au cours de la preuve du 1). □

On va maintenant introduire une *topologie* sur $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. Pour toute $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, on pose, pour $k, n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{q_{k,n}(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |x|^n \, |f^{(k)}(x)|}\,.$$

ce sont des *semi-normes* sur $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. Notons que l'on utilise plus couramment les semi-normes :

$$\widetilde{q}_{k,n}(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}} (1 + x^2)^n \, |f^{(k)}(x)|$$

qui leurs sont équivalentes, mais sont moins naturelles. On pose alors, pour $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$:

$$d(f,g) = \sum_{k,n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+n}} \frac{q_{k,n}(f-g)}{1+q_{k,n}(f-g)}\,.$$

C'est une *distance* sur $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. En effet, l'inégalité triangulaire résulte de l'inégalité triangulaire pour les semi-normes $q_{k,n}$ et du fait que l'application $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \frac{t}{1+t}$ est croissante. D'autre part, si $d(f,g) = 0$, on a $q_{k,n}(f-g) = 0$ pour tous $k, n \geqslant 0$; en particulier, $\|f-g\|_\infty = q_{0,0}(f-g) = 0$, donc $f = g$.

Remarquons que l'on a :

$$d(f_j, f) \xrightarrow[j\to\infty]{} 0 \text{ si et seulement si } q_{k,n}(f_j - f) \xrightarrow[j\to\infty]{} 0 \text{ pour tous } k, n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Il est facile de voir que pour cette distance $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel topologique. Il est localement convexe car toute boule de centre f et de rayon ε pour la distance d contient l'intersection d'un nombre fini de boules $B_{q_{k,n}}(f, \varepsilon/2)$, qui est un voisinage convexe de f. En effet, si l'on choisit $N \geqslant 0$ tels que $\sum_{k+n>N} \frac{1}{2^{k+n}} \leqslant \varepsilon/2$, alors $q_{k,n}(f-g) \leqslant \varepsilon/2$ pour $0 \leqslant k+n \leqslant N$ entraîne $d(f,g) \leqslant \varepsilon$. On peut montrer qu'il est complet (on dit que c'est un *espace de Fréchet*) ; mais nous n'aurons pas besoin de cela.

Proposition X.5.3. *La transformation de Fourier est continue sur $\mathscr{S}(\mathbb{R})$.*

Preuve. Soit $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a, pour tous $k, n \in \mathbb{N}$, d'après le 4) de la Proposition X.5.2 :

$$(2\pi i y)^n \widehat{f}^{(k)}(y) = (2\pi i y)^n (-2\pi i y)^k \widehat{f}(y) = (-1)^k \widehat{f^{(k+n)}}(y)\,.$$

Donc $q_{k,n}(\widehat{f}) \leqslant \|\widehat{f^{(k+n)}}\|_\infty \leqslant \|f^{(k+n)}\|_1$.

Mais, pour toute $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, on a :

$$\|g\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |g(x)|\,dx \leqslant \big(\sup_{x\in\mathbb{R}}[(1+x^2)\,|g(x)|]\big) \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+x^2} = \pi\,[q_{0,0}(g) + q_{0,2}(g)]\,.$$

On obtient donc $q_{k,n}(\widehat{f}) \leqslant \pi\,[q_{0,0}(f^{(k+n)}) + q_{0,2}(f^{(k+n)})] = \pi\,[q_{k+n,0}(f) + q_{k+n,2}(f)]$, ce qui prouve, grâce à (1), la continuité de $\mathscr{F}$ sur $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. □

X.5.3. Distributions tempérées

Définition X.5.4. *On dit qu'une forme linéaire $T\colon \mathscr{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ est une* **distribution tempérée** *s'il existe une constante $C > 0$ et un entier $m \in \mathbb{N}$ tels que :*

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leqslant C \sup_{0\leqslant k,n\leqslant m} q_{k,n}(\varphi)\,, \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})\,.$$

La cohérence de la définition résulte de la proposition suivante.

Proposition X.5.5. *Toute distribution tempérée est une distribution sur* $\mathbb{R}$. *Elle est de plus d'ordre fini.*

Preuve. On utilise la Proposition X.1.3. Soit K un compact de $\mathbb{R}$. Soit $C_K \geqslant 1$ tel que $K \subseteq [-C_K, C_K]$. Pour toute $\varphi \in \mathscr{D}_K(\mathbb{R})$, on a, pour $0 \leqslant n \leqslant m$:

$$q_{k,n}(\varphi) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^n \varphi^{(k)}(x)| = \sup_{x\in K} |x^n \varphi^{(k)}(x)| \leqslant C_K^n \sup_{x\in K} |\varphi^{(k)}(x)| \leqslant C_K^m \sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi^{(k)}(x)| \, ;$$

donc :

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leqslant C \sup_{0\leqslant k,n\leqslant m} C_K^m \|\varphi^{(k)}\|_\infty \leqslant (C\, C_K^m) \sum_{k=0}^{m} \|\varphi^{(k)}\|_\infty = (C\, C_K^m)\, \|\varphi\|_{(m)} \, ,$$

ce qui montre que T est une distribution d'ordre $\leqslant m$. □

Proposition X.5.6. *Une forme linéaire* $T\colon \mathscr{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ *est une distribution tempérée si et seulement si elle se prolonge en une forme linéaire continue* $\widetilde{T}\colon \mathscr{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$.

Notation. On note $\boxed{\mathscr{S}'(\mathbb{R}) \text{ l'espace des distributions tempérées.}}$ [2]

On aura besoin du lemme suivant.

Lemme X.5.7. $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ *est dense dans* $\mathscr{S}(\mathbb{R})$.

Preuve du lemme. Soit $\rho \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ telle que $\rho(x) = 1$ pour $|x| \leqslant 1$. On pose $\rho_j(x) = \rho(x/j)$ pour tout $j \in \mathbb{N}^*$. Alors $\rho_j \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, $\rho_j(x) = 1$ si $|x| \leqslant j$ et $\|\rho_j^{(k)}\|_\infty \leqslant \|\rho^{(k)}\|_\infty$ pour tout $j \geqslant 1$.

Soit $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. On pose $f_j = \rho_j f$. Alors $f_j \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, car $\operatorname{supp} f_j \subseteq \operatorname{supp} \rho_j$. On va montrer que $(f_j)_{j\geqslant 1}$ converge vers f. Cela revient à montrer que :

$$q_{k,n}(f_j - f) \xrightarrow[j\to\infty]{} 0 \quad \text{pour tous } k, n \in \mathbb{N}\, .$$

Posons $\theta_j = \rho_j - 1$ et $g_j = f_j - f$. La formule de Leibniz donne, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$g_j^{(k)} = \sum_{h=0}^{k} \mathrm{C}_k^h \, \theta_j^{(k-h)} f^{(h)} \, .$$

2. La lettre $\mathscr{S}$, utilisée par Schwartz, vient du fait qu'il les appelait "distributions sphériques", car elles se prolongent au compactifié d'Alexandrov de $\mathbb{R}$, qui peut être vu comme un cercle ; en dimension supérieure, elles se prolongent à des sphères.

Comme $\theta_j^{(k-h)}$ s'annule sur $[-j, j]$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$q_{k,n}(g_j) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^n g_j^{(k)}(x)| = \sup_{|x|\geqslant j} |x^n g_j^{(k)}(x)| \leqslant C_k \sum_{h=0}^{k} \sup_{|x|\geqslant j} |x^n f^{(h)}(x)|\,,$$

où $C_k = 2^k \|\theta_j^{(k)}\|_\infty \leqslant 2^k(\|\rho_j^{(k)}\|_\infty + 1) \leqslant 2^k(\|\rho^{(k)}\|_\infty + 1)$. Mais, comme on l'a dit, la fonction $x \mapsto x^n f^{(h)}(x)$ est dans $\mathscr{S}(\mathbb{R})$; donc elle tend vers 0 à l'infini, d'où $\sup_{|x|\geqslant j} |x^n f^{(h)}(x)| \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$, ce qui entraîne que $q_{k,n}(g_j) \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$ et termine ainsi la preuve. □

Preuve de la proposition. 1) Si T se prolonge en $\widetilde{T}\colon \mathscr{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ continue, fixons un $\varepsilon_0 > 0$. Il existe $\delta_0 > 0$ tel que $d(f, 0) \leqslant \delta_0$ entraîne $|\langle \widetilde{T}, f\rangle| \leqslant \varepsilon_0$. On choisit $m \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{(k,n)\notin I_m} \frac{1}{2^{k+n}} \leqslant \delta_0/2$, où l'on a noté $I_m = \{0, 1 \ldots, m\}^2$. Pour toute $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ telle que $\sup_{0\leqslant k,n\leqslant m} q_{k,n}(f) \leqslant \delta_0/8$, on a $\sum_{0\leqslant k,n\leqslant m} \frac{1}{2^{k+n}} \frac{q_{k,n}(f)}{1+q_{k,n}(f)} \leqslant \delta_0/2$; donc $d(f, 0) \leqslant \delta_0$, de sorte que $|\langle \widetilde{T}, f\rangle| \leqslant \varepsilon_0$. Mais $q_m = \sup_{0\leqslant k,n\leqslant m} q_{k,n}$ est une semi-norme sur $\mathscr{S}(\mathbb{R})$; donc, par homogénéité, on obtient :

$$|\langle \widetilde{T}, f\rangle| \leqslant \left(\frac{8\,\varepsilon_0}{\delta_0}\right) q_m(f)\,, \quad \forall f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})\,.$$

En particulier, $|\langle T, \varphi\rangle| \leqslant \left(\frac{2\varepsilon_0}{\delta_0}\right) q_m(\varphi)$ pour toute $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, et T est une distribution tempérée.

2) Inversement, soit T une distribution tempérée. Il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ et une constante $C > 0$ tels que $|\langle T, \varphi\rangle| \leqslant C \sup_{0\leqslant k,n\leqslant m} q_{k,n}(\varphi)$ pour toute $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. Soit $\varphi_0 \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. Posons $\delta = \frac{1}{2^{2m}} \frac{\varepsilon/C}{1+\varepsilon/C}$. Si $d(\varphi, \varphi_0) \leqslant \delta$, on a :

$$\frac{1}{2^{k+n}} \frac{q_{k,n}(\varphi - \varphi_0)}{1 + q_{k,n}(\varphi - \varphi_0)} \leqslant d(\varphi, \varphi_0) \leqslant \delta = \frac{1}{2^{2m}} \frac{\varepsilon/C}{1 + \varepsilon/C}$$

pour tous $k, n \in \mathbb{N}$. En particulier, pour $k, n \leqslant m$, cela donne $q_{k,n}(\varphi - \varphi_0) \leqslant \varepsilon/C$. On obtient donc $|\langle T, \varphi\rangle - \langle T, \varphi_0\rangle| = |\langle T, \varphi - \varphi_0\rangle| \leqslant \varepsilon$. Ainsi donc, T est continue sur $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ pour la distance d de $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. Comme $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathscr{S}(\mathbb{R})$, T se prolonge, de façon unique, en une forme linéaire $\widetilde{T}$ continue sur $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. □

Corollaire X.5.8. *La dérivée de toute distribution tempérée est aussi une distribution tempérée.*

Donnons maintenant des exemples de distributions tempérées. Pour cela, donnons d'abord la définition suivante.

Définition X.5.9. *On dit qu'une* fonction *mesurable* $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *est* à croissance lente *s'il existe* $m \in \mathbb{N}$ *tel que* $\int_{\mathbb{R}} \frac{|g(x)|}{(1+x^2)^m}\, dx < +\infty$.

Proposition X.5.10. *Toute fonction à croissance lente définit une distribution tempérée. En particulier, toute fonction* $g \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *définit une distribution tempérée.*

Preuve. Soit g une fonction à croissance lente. Notons qu'elle est localement intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour toute $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned}|\langle T_g, \varphi\rangle| &= \left|\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, g(x)\, dx\right| \leqslant \int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|\, |g(x)|\, dx \\ &\leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}} [|\varphi(x)|\,(1+x^2)^m] \int_{\mathbb{R}} \frac{|g(x)|}{(1+x^2)^m}\, dx\,,\end{aligned}$$

ce qui prouve que T_μ est une distribution tempérée puisque :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}[|\varphi(x)|\,(1+x^2)^m] \leqslant \sum_{j=0}^{m} \mathrm{C}_m^j \sup_{x\in\mathbb{R}} x^{2j} |\varphi(x)| = \sum_{j=0}^{m} \mathrm{C}_m^j\, q_{0,2j}(\varphi) \leqslant 2^m \sup_{k,n\leqslant 2m} q_{k,n}(\varphi)\,.$$

Il est clair que toute $g \in L^1(\mathbb{R})$ est à croissance lente (prendre $m = 0$). Pour $1 < p \leqslant \infty$, l'inégalité de Hölder donne, q étant l'exposant conjugué de p, tel que $1 \leqslant q < \infty$:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|g(x)|}{1+x^2}\, dx \leqslant \|g\|_p \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(1+x^2)^q}\right)^{1/q} < +\infty\,;$$

et donc g est à croissance lente. □

Pour finir, on définit la transformée de Fourier des distributions tempérées par transposition.

Définition X.5.11. *Pour toute distribution tempérée T, on définit sa* **transformée de Fourier** $\mathscr{F}T$ *comme la distribution tempérée définie par :*

$$\langle \mathscr{F}T, f\rangle = \langle T, \mathscr{F}f\rangle\,, \quad \forall f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})\,.$$

$\mathscr{F}T$ est bien une distribution tempérée car $\mathscr{F}T = T \circ \mathscr{F}$ est la composée de l'application linéaire continue $\mathscr{F} \colon \mathscr{S}(\mathbb{R}) \to \mathscr{S}(\mathbb{R})$ avec la forme linéaire continue $T \colon \mathscr{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$; c'est donc une forme linéaire continue sur $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. D'autre part, $\mathscr{F}$ étant bijective sur $\mathscr{S}(\mathbb{R})$, elle l'est aussi sur l'espace $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ des distributions tempérées.

On s'arrêtera ici. Il faudrait bien sûr voir ce que l'on peut faire avec la transformée de Fourier. Il faudrait aussi introduire le produit de convolution des distributions [3], qui n'existe pas pour toutes les distributions, mais existe, par exemple, lorsque l'une des distributions est à support compact. On renvoie au livre de F. Hirsch et G. Lacombe pour cela.

3. Lors d'une conférence destinée à des étudiants, Laurent Schwartz avait raconté qu'il n'arrivait pas à définir le produit de convolution, que l'on appelait alors *produit de composition*, des distributions. S'étant endormi sur sa table de travail, il s'était pris à rêver qu'il était capable de composer deux distributions, mais que ça ne lui donnait pas une distribution, mais un concerto !

X.6. Exercices

Exercice 1.

Chercher les fonctions continues $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ vérifiant l'équation :

$$f(x) + \int_0^x \sin t\, f(t)\, dt = g(x)\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}\,,$$

où $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est continue.

Exercice 2.

1) Montrer que $\mathrm{e}^{1/x^2} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^*)$.

2) a) Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. On pose $\varphi_n(x) = \mathrm{e}^{-n}\varphi(nx)$. Montrer que $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ converge dans $\mathscr{D}(\mathbb{R})$.

b) Montrer qu'il existe $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ telle que, avec la notation du a), $\operatorname{supp}\varphi_n \subseteq \mathbb{R}^*$ pour tout $n \geqslant 1$ et $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{1/x^2}\varphi_n(x)\, dx \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

3) En déduire qu'il n'existe aucune distribution sur $\mathbb{R}$ dont la restriction à $\mathbb{R}^*$ soit e^{1/x^2}.

Exercice 3 (*Convergence de distributions*).

On dit qu'une suite de distributions $T_n \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ converge vers la distribution $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ si $\langle T_n, \varphi\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle T, \varphi\rangle$ pour toute $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$.

Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, on identifiera la distribution T_f et la fonction f.

1) On pose $f_n = n\mathbb{1}_{]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}[}$ et $g_n = n^2\mathbb{1}_{]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}[}$. Déterminer si les suites $(f_n)_{n\geqslant 1}$ et $(g_n)_{n\geqslant 1}$ ont des limites dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$. Comparer avec leur limite ponctuelles presque partout.

2) On pose $h_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}}\,\mathrm{e}^{-n^2x^2}$. Déterminer la limite dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ de $(h_n)_{n\geqslant 1}$.

3) Calculer la limite dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ de $(\sin nx)_{n\geqslant 1}$ et de $\left(\frac{\sin nx}{x}\right)_{n\geqslant 1}$.

4) Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, on notera $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$ la limite dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$, si elle existe, de $\left(\int_{-n}^{n} f(x)\, dx\right)_{n\geqslant 1}$. Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2\pi ixy}\, dx$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-2\pi ixy}\, dx$.

Exercice 4 (*Distributions $\frac{1}{x+i0}$ et $\frac{1}{x-i\,0}$*).

Si $F\colon I \to \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ est une fonction d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans l'espace des distributions sur $\mathbb{R}$, on dit que F a une limite $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ lorsque t tend vers $a \in \overline{I}$ si $\langle F(t), \varphi\rangle \xrightarrow[t\to a]{} \langle T, \varphi\rangle$ pour toute $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$.

1) Pour tout $\varepsilon > 0$, on considère la distribution sur $\mathbb{R}$ associée à la fonction localement intégrable $\log(x + i\,\varepsilon)$.

a) Montrer que l'on a $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \log(x + i\,\varepsilon) = \log|x| + i\pi Y(-x)$, dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

b) En déduire que $\frac{1}{x+i\,\varepsilon}$ possède une limite, notée $\frac{1}{x+i0}$, dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$, et que l'on a $\frac{1}{x+i0} = \operatorname{vp}(1/x) - i\pi\delta$ (*formule de Sokhotski*).

2) De la même manière, on obtient $\frac{1}{x-i\,0} = \operatorname{vp}(1/x) + i\pi\delta$ en posant $\frac{1}{x-i\,0} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{x-i\,\varepsilon}$.

Utiliser cela pour calculer $\lim_{a\to 0^+} \frac{a}{x^2+a^2}$ dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

Exercice 5 (*Division des distributions*).

1) Montrer que pour toute $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ telle que $\psi(0) = 0$, il existe $\chi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ telle que $\psi(x) = x\chi(x)$ (*remarquer que* $\chi(x) = \int_0^1 \psi'(tx)\, dt$).

2) Soit $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$. On fixe une fonction $\theta \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ telle que $\theta(0) = 1$.

a) Montrer que l'on définit une distribution T_0 sur $\mathbb{R}$ en posant $\langle T_0, \varphi\rangle = \langle T, \chi\rangle$, pour toute $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, avec $\varphi(x) - \varphi(0)\,\theta(x) = x\chi(x)$.

b) Expliciter T_0 lorsque $T = \mathbb{1}$.

c) Montrer que les solutions $S \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ de l'équation $xS = T$ sont $S = T_0 + C\,\delta$, avec $C \in \mathbb{C}$.

3) Résoudre dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$, pour $a \neq b \in \mathbb{R}$, $l \geqslant 1$, les équations suivantes :

a) $(x-a)\,S = 0$; b) $(x-a)\,S = \delta_b$; c) $(x-a)\,S = \delta_a$; d) $(x-a)\,S = \delta'_b$;
e) $(x-a)\,S = \delta'_a$; f) $(x-a)^2 S = 0$; g) $(1-x^4)^2 S = 0$; h) $(x-a)^l S = 0$;

4) Résoudre dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ l'équation $PS = 0$, où P polynôme (*montrer que le support de S est contenu dans l'ensemble des zéros de P, puis utiliser une partition de l'unité, ainsi que 3) h)*).

Exercice 6 (*Dérivation*).

A. Soit $J =]a,b[$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $T \in \mathscr{D}'(J)$ une distribution d'ordre $m \geqslant 1$.

1) Montrer qu'il existe un compact $K \subseteq J$ et des fonctions $\varphi_n \in \mathscr{D}_K(J)$ telles que $\langle T, \varphi_n\rangle = 1$ pour tout $n \geqslant 1$ et $\|\varphi_n\|_{(m-1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

2) Soit $\psi \in \mathscr{D}(J)$ telle que $\int_J \psi(x)\, dx = 1$. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose :

$$\alpha_n = \int_J \varphi_n(x)\, dx \quad \text{et} \quad \chi_n(x) = \int_a^x [\varphi_n(t) - \alpha_n\psi(t)]\, dt.$$

Montrer que $\chi_n \in \mathscr{D}(J)$ et que $\|\chi_n\|_{(m)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, alors que $\langle T', \chi_n\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} -1$.

3) En déduire que T' est d'ordre $m+1$.

B. 1) a) Montrer que si l'on pose $f(x) = \log|x|$, alors $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

b) Montrer que $(T_f)' = \mathrm{vp}\,(1/x)$.

2) Montrer que si $g(x) = Y(x)\log|x|$, alors $(T_g)' = \mathrm{Pf}\,[Y(x)/x]$.

3) On pose, pour $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$:

$$\langle \mathrm{Pf}\,(1/x^2), \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2}\, dx - 2\,\frac{\varphi(0)}{\varepsilon}\right].$$

Montrer que $\mathrm{Pf}\,(1/x^2)$ est la distribution $-[\mathrm{vp}\,(1/x)]'$ et qu'elle est d'ordre 2.

4) a) Montrer que l'on définit une distribution, notée $\mathrm{Pf}\,[Y(x)/x^2]$ en posant, pour $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$:

$$\langle \mathrm{Pf}\,[Y(x)/x^2], \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2}\, dx - \frac{\varphi(0)}{\varepsilon} + \varphi'(0)\,\log\varepsilon\right].$$

b) Calculer la dérivée de $\mathrm{Pf}\,[Y(x)/x]$.

c) En déduire que $\mathrm{Pf}\,[Y(x)/x^2]$ est d'ordre 2.

5) Calculer $x\left(\mathrm{Pf}\,[Y(x)/x]\right)'$ et en déduire une relation entre les distributions $\mathrm{Pf}\,[Y(x)/x^2]$ et $\mathrm{Pf}\,[Y(x)/x]$.

6) Résoudre dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ les équations différentielles (*on utilisera l'Exercice 5*) :

a) $xy' + y = \delta$;

b) $xy' + y = \mathrm{Pf}\,[Y(x)/x]$ (*on introduira la distribution définie par :*

$$\langle \mathrm{Pf}\,[Y(x)\log|x|/x], \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\varphi(x)\log x}{x}\,dx + \varphi(0)\,\frac{(\log\varepsilon)^2}{2}\right)\ ).$$

Exercice 7 (*Support des distributions*).

A. Soit $\mathscr{E}(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$. Pour $f\in\mathscr{E}(\mathbb{R})$ et $K\subseteq\mathbb{R}$ compact, on pose $p_{K,m} = \sup_{x\in K}|f^{(m)}(x)|$. Si $K=[-n,n]$, on note $p_{K,m} = p_{n,m}$. On munit $\mathscr{E}(\mathbb{R})$ de la distance définie par :

$$d(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2^m}\,\frac{p_{n,m}(f-g)}{1+p_{n,m}(f-g)}\right).$$

1) Soit T une forme linéaire continue sur $\mathscr{E}(\mathbb{R})$.

a) Montrer que T définit une distribution $T\in\mathscr{D}'(\mathbb{R})$, et qu'elle est d'ordre fini.

b) Montrer que T est à support compact.

2) Montrer que toute distribution $T\in\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ à support compact se prolonge en une forme linéaire continue sur $\mathscr{E}(\mathbb{R})$.

3) Montrer que toute distribution $T\in\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ à support compact est tempérée.

B. 1) Soit K un compact de $\mathbb{R}$. On pose $K_\varepsilon = \{x\in\mathbb{R};\ \mathrm{dist}\,(x,K)\leqslant\varepsilon\}$ pour $\varepsilon>0$.

a) Montrer qu'il existe $\chi_\varepsilon\in\mathscr{D}(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{supp}\chi_\varepsilon\subseteq K_{3\varepsilon}$, $\chi_\varepsilon(x)=1$ pour tout $x\in K_\varepsilon$, et $\|\chi_\varepsilon^{(j)}(x)\|_\infty\leqslant C_j/\varepsilon^j$, pour tout $j\in\mathbb{N}$ et tout $x\in\mathbb{R}$, où $C_j>0$ ne dépend pas de ε.

b) Soit $m\in\mathbb{N}$ et $\psi\in\mathscr{E}(\mathbb{R})$ telle que $\psi^{(j)}(x)=0$ pour tout $x\in K$ et $0\leqslant j\leqslant m$. Montrer qu'il existe une constante $M>0$, ne dépendant pas de ε, telle $|\psi^{(j)}(x)|\leqslant M\,\varepsilon^{m-j+1}$ pour tout $x\in K_{3\varepsilon}$ et $0\leqslant j\leqslant m$ (*utiliser une formule de Taylor*).

c) En déduire que si T est une distribution sur $\mathbb{R}$ d'ordre m et de support contenu dans K, on a $\langle T,\psi\rangle = 0$.

d) En déduire que si T est une distribution dont le support est égal à $\{0\}$, alors T s'écrit $T=\sum_{j=0}^m c_j\delta^{(j)}$ pour un entier $m\geqslant 0$ et des nombres $c_0,\ldots,c_m\in\mathbb{C}$.

2) Soit $T\in\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ une distribution d'ordre fini m. Montrer que si $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R})$ est telle que $\varphi^{(j)}(x)=0$ pour tout $x\in\operatorname{supp}T$ et tout $j=0,\ldots,m$, alors $\langle T,\varphi\rangle=0$ (*utiliser le 1) c)*).

3) Soit $T\in\mathscr{D}'(\mathbb{R})$. Montrer que si $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R})$ est telle que $\varphi^{(j)}(x)=0$ pour tout $x\in\operatorname{supp}T$ et tout $j\in\mathbb{N}$, alors $\langle T,\varphi\rangle=0$ (*utiliser une partition de l'unité et le 1) c)*).

Exercice 8 (*Support des distributions 2*).

1) Soit $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ une distribution à support compact K. Montrer qu'il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que si les fonctions $\varphi_n \in \mathscr{E}(\Omega)$ sont telles qu'il existe un voisinage V de K pour lequel $\varphi_n^{(j)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ uniformément sur V pour $0 \leqslant j \leqslant m$, alors $\langle T, \varphi_n\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

2) On pose, pour $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, $\langle T, \varphi\rangle = \lim\limits_{m\to\infty} \left[\sum_{k=1}^{m} \varphi\Big(\frac{1}{k}\Big) - m\,\varphi(0) - \varphi'(0)\log m\right]$.

a) Montrer que T est une distribution d'ordre fini et montrer que son support est contenu dans $K = \{0\} \cup \{1/k\,;\ k \geqslant 1\}$.

b) Montrer que l'on peut trouver une suite $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ qui converge uniformément sur K vers 0 et telle que $\varphi_n^{(j)}(x) = 0$ pour tout $x \in K$ pour tout $j \geqslant 1$, mais pour laquelle $(\langle T, \varphi_n\rangle)_{n\geqslant 1}$ ne converge pas dans $\mathbb{R}$.

Exercice 9 (*Distributions tempérées*).

1) Parmi les distributions suivantes : $\sum_{k=0}^{\infty} \delta_k^{(k)}$, $\log|x|$, $\mathrm{vp}\,(1/x)$, lesquelles sont tempérées ?

2) On veut montrer que e^x n'est pas une distribution tempérée.

Soit g une fonction positive localement intégrable sur $\mathbb{R}$ telle que la distribution associée T_g soit tempérée.

a) Montrer qu'il existe un voisinage V de 0 dans $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ tel que $|\langle T_g, \varphi\rangle| \leqslant 1$ pour toute $\varphi \in V \cap \mathscr{D}(\mathbb{R})$.

b) Soit $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ telle que $0 \leqslant \psi \leqslant 1$ et telle que $\psi(x) = 1$ pour $|x| \leqslant 1$. Montrer qu'il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ et $\lambda > 0$ tels que, si $\varphi_j(x) = \frac{\psi(x/j)}{(1+x^2)^m}$, alors $\lambda\,\varphi_j \in V$ pour tout $j \geqslant 1$.

c) En déduire que g est à croissance lente.

d) Conclure.

Exercice 10 (*Calcul de transformées de Fourier*).

1) a) Calculer $\mathscr{F}(\delta)$.

b) Calculer $\mathscr{F}(\mathbb{1})$ et $\mathscr{F}(P)$, où P est un polynôme.

2) Montrer que pour toute distribution tempérée T, $\mathscr{F}(T') = (2\pi i x)\,\mathscr{F}(T)$.

3) a) Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{C}$ tel que $\mathscr{F}(Y) = \frac{1}{2\pi i}\,\mathrm{vp}\,(1/x) + C\,\delta$ (*utiliser le 2) de l'Exercice 5*).

b) Montrer que $C = 1/2$ (*utiliser le fait que* $Y(x) + Y(-x) = 1$ *pour tout* $x \neq 0$).

c) En déduire $\mathscr{F}[\mathrm{vp}\,(1/x)]$.

4) (*Autre méthode*).

a) Calculer $\mathscr{F}[Y(x)\,\mathrm{e}^{-2\pi\lambda x}]$ pour $\lambda > 0$.

b) Montrer que $Y(x)\,\mathrm{e}^{-2\pi\lambda x} \xrightarrow[\lambda\to 0]{} Y(x)$ dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$.

c) En déduire $\mathscr{F}(Y)$ (*utiliser l'Exercice 4*).

5) a) Montrer que pour toute $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$, on a $\mathscr{F}(xT) = -\frac{1}{2\pi i}\,[\mathscr{F}(T)]'$.

b) Déterminer $\mathscr{F}(|x|)$ (*remarquer que* $|x| = x[Y(x) - Y(-x)]$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$).

XI

CORRIGÉS DES EXERCICES

XI.1. Exercices du Chapitre I

Exercice 1

Soit $f \in L^2([0,1])$ telle qu'il existe des $f_n \in B_\infty$ tels que $\|f_n - f\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. On peut extraire une sous-suite $(f_{n_k})_{k\geqslant 1}$ convergeant presque partout vers f. Comme $|f_{n_k}| \leqslant 1$ presque partout, on obtient $|f| \leqslant 1$ presque partout. Par conséquent B_∞ est fermée dans $L^2([0,1])$.

Exercice 2

Comme δ_0 est linéaire, l'inégalité $|f(0)| \leqslant \|f\|_\infty$ montre que δ_0 est continue pour la norme uniforme $\|\,.\,\|_\infty$.

Pour voir qu'elle n'est pas continue pour la norme $\|\,.\,\|_1$, considérons la suite de fonctions définies par $f_n(t) = 1 - nt$ pour $0 \leqslant t \leqslant 1/n$ et $f_n(t) = 0$ pour $1/n \leqslant t \leqslant 1$. On a $\|f_n\|_1 = 1/(2n)$; donc $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0 pour la norme $\|\,.\,\|_1$, mais $\delta_0(f_n) = 1$, alors que $\delta_0(0) = 0$.

Exercice 3

1) Soit $x_n \in c_0$ tels que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \in \ell_\infty$. Cela signifie que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $N \geqslant 1$ tel que $|x_n(k) - x(k)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $k \geqslant 1$ et tout $n \geqslant N$. Comme $x_N \in c_0$, il existe un $K \geqslant 1$ tel que $|x_N(k)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $k \geqslant K$. On a alors $|x(k)| \leqslant |x_N(k)| + |x_N(k) - x(k)| \leqslant \varepsilon + \varepsilon = 2\,\varepsilon$ pour tout $k \geqslant K$. Cela signifie que $x \in c_0$.

2) a) Commençons par montrer que ℓ_∞ est complet. Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de Cauchy dans ℓ_∞. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \geqslant 1$ tel que $\|x_n - x_{n+p}\|_\infty \leqslant \varepsilon$ pour tous $n \geqslant N$, $p \geqslant 0$. Cela signifie que :

$$|x_n(k) - x_{n+p}(k)| \leqslant \varepsilon \quad \text{pour tout } k \geqslant 1, \text{ et tous } n \geqslant N, p \geqslant 0. \tag{$*$}$$

En particulier, pour chaque $k \geqslant 1$, la suite $\big(x_n(k)\big)_{n\geqslant 1}$ est de Cauchy dans $\mathbb{K}$. Elle est donc convergente, et si l'on note $x(k)$ sa limite, on obtient, en faisant tendre p vers l'infini dans $(*)$, $|x_n(k) - x(k)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $k \geqslant 1$ et tout $n \geqslant N$. On en déduit, d'une part, en fixant $\varepsilon = \varepsilon_0 > 0$, que $|x(k)| \leqslant |x_N(k)| + \varepsilon_0 \leqslant \|x_N\|_\infty + \varepsilon_0$, et donc que $x \in \ell_\infty$, et, d'autre part, que $\|x_n - x\|_\infty \leqslant \varepsilon$ pour $n \geqslant N$. Comme c'est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, cela signifie que $(x_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers x dans ℓ_∞.

Remarque. On a en fait montré que si une suite de fonctions bornées sur $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \ldots\}$ est uniformément de Cauchy, elle converge uniformément vers une fonction bornée. Le même raisonnement vaut avec un ensemble arbitraire au lieu de $\mathbb{N}^*$.

b) La complétude de c_0 résulte alors de celle de ℓ_∞ et du 1). On peut aussi la montrer directement, comme au a), la seule différence étant que l'on exploite $(*)$ en utilisant, comme au 1), si les $x_n \in c_0$, $|x_N(k)| \leqslant \varepsilon$ pour $k \geqslant K$, ce qui donne $|x(k)| \leqslant |x_N(k)| + \varepsilon \leqslant 2\varepsilon$, montrant que $x \in c_0$ (inversement, si l'on avait montré directement la complétude de c_0, on en aurait déduit sa fermeture dans ℓ_∞).

c) La complétude des espaces ℓ_p, pour $1 \leqslant p < \infty$ se démontre de la même façon que celle des espaces $L^p(m)$ (Théorème de Riesz-Fisher), mais avec des simplifications (le Lemme de Fatou est masqué par l'utilisation de sommes finies). Elle est aussi, en fait, analogue à celle faite pour ℓ_∞, aux notations près. Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de Cauchy dans ℓ_p. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \geqslant 1$ tel que $\|x_n - x_{n+l}\|_p \leqslant \varepsilon$ pour tous $n \geqslant N$, $l \geqslant 0$. Cela signifie que :

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_n(k) - x_{n+l}(k)|^p \leqslant \varepsilon^p \quad \text{pour tous } n \geqslant N, l \geqslant 0. \qquad (**)$$

En particulier, $|x_n(k) - x_{n+l}(k)| \leqslant \varepsilon$ pour tous $n \geqslant N$ et $l \geqslant 0$; la suite $\big(x_n(k)\big)_{n\geqslant 1}$ est de Cauchy dans $\mathbb{K}$. Elle est donc convergente, et si l'on note $x(k)$ sa limite, on obtient, en faisant tendre l vers l'infini dans $(**)$, $\sum_{k=1}^{K} |x_n(k) - x(k)|^p = \lim_{l\to\infty} \sum_{k=1}^{K} |x_n(k) - x_{n+l}(k)|^p \leqslant \limsup_{l\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |x_n(k) - x_{n+l}(k)|^p \leqslant \varepsilon^p$ pour tout $K \geqslant 1$ et tout $n \geqslant N$. On en déduit que $\sum_{k=1}^{\infty} |x_n(k) - x(k)|^p \leqslant \varepsilon^p$ pour $n \geqslant N$. Donc, d'une part, $x_N - x \in \ell_p$, de sorte que $x \in \ell_p$, et, d'autre part, $\|x_n - x\|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

3) Considérons les fonctions f_n, $n \geqslant 1$, définies par $f_n(t) = 1$ si $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}$, $f_n(t) = 0$ pour $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^n} \leqslant t \leqslant 1$, et f_n affine sur $\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2^n}\right]$ (explicitement, mais c'est sans intérêt, $f_n(t) = -2^n t + 2^{n-1} + 1$). Alors la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ est de Cauchy pour la norme $\|\,.\,\|_1$ car $\|f_n - f_{n+p}\|_1 \leqslant 1/2^n$. Comme $L^1(0,1)$ est complet, cette suite converge dans $L^1(0,1)$, vers une fonction f. Comme on peut extraire une sous-suite $(f_{n_k})_{k\geqslant 1}$ convergeant presque partout vers f, cette fonction f doit être égale à 1 presque partout sur $[0, 1/2]$ et à 0 presque partout sur $]1/2, 1]$. Mais il n'existe aucune fonction continue g sur $[0,1]$ égale presque partout à une telle fonction f. En effet, g devrait être partout égale à 1 sur $[0,1/2]$ (car si $g(t_0) \neq 1$, il existe par continuité un intervalle contenu dans $[0,1/2]$, de longueur strictement positive et contenant t_0, sur lequel g ne prend pas la valeur 1 ; g ne peut donc pas être presque partout égale égale à 1 sur $[0,1/2]$), et, de même, g devrait être partout égale à 0 sur $]1/2,1]$; g ne peut donc pas être continue sur $[0,1]$.

Donc $(f_n)_{n\geqslant 1}$ ne converge pas dans $\mathscr{C}([0,1])$ pour la norme $\|\,.\,\|_1$.

4) a) Il est bien connu que toute fonction convexe sur un intervalle est continue en tout point intérieur à cet intervalle. Il ne reste qu'à voir la continuité en 0. Mais, comme $\varphi(0) = 0$, la convexité de φ donne, pour $0 \leqslant t \leqslant 1$, $\varphi(t) = \varphi\big((1-t)\,0 + t1\big) \leqslant t\varphi(1)$, et cela montre que φ est continue en 0. D'autre part, φ étant continue et strictement croissante, elle réalise une bijection (et même un homéomorphisme) sur son image. Il suffit donc de montrer que cette image est $\mathbb{R}_+$, et pour cela de montrer que $\varphi(u) \xrightarrow[u\to+\infty]{} +\infty$. Mais, pour $u \geqslant 1$, on a $t = 1/u \in]0,1]$; donc la convexité de φ donne $\varphi(1) = \varphi(tu) = \varphi\big((1-t)\,0 + tu\big) \leqslant (1-t)\varphi(0) + t\varphi(u) = t\varphi(u)$, de sorte que $\varphi(u) \geqslant \varphi(1)u$.

b) Montrons que ℓ_φ est un sous-espace vectoriel de l'espace de toutes les suites de nombres complexes.

Évidemment, la suite nulle est dans ℓ_φ. Ensuite, si $x \in \ell_\varphi$, il existe $C > 0$ tel que $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(|x_n|/C) < +\infty$. Alors, si $a \in \mathbb{C}^*$, on a $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi\big(|ax_n|/(|a|\,C)\big) < +\infty$; donc $ax \in \ell_\varphi$. Soit maintenant $x, y \in \ell_\varphi$; il existe $C_1, C_2 > 0$ tels que $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(|x_n|/C_1) < +\infty$ et

$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(|y_n|/C_2) < +\infty$. Soit $C = \max(C_1, C_2)$. Comme φ est croissante, on a $\varphi(|x_n|/C) \leqslant \varphi(|x_n|/C_1)$ et $\varphi(|y_n|/C) \leqslant \varphi(|y_n|/C_2)$. Alors, comme φ est convexe et croissante,

$$\varphi\Big(\frac{|x_n+y_n|}{2C}\Big) \leqslant \varphi\Big(\frac{|x_n|+|y_n|}{2C}\Big) \leqslant \frac{\varphi(|x_n|/C)+\varphi(|y_n|/C)}{2},$$

et donc :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \varphi\Big(\frac{|x_n+y_n|}{2C}\Big) &\leqslant \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}[\varphi(|x_n|/C)+\varphi(|y_n|/C)] \leqslant \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}[\varphi(|x_n|/C_1)+\varphi(|y_n|/C_2)] \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(|x_n|/C_1) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(|y_n|/C_2) < +\infty,\end{aligned}$$

de sorte que $x + y \in \ell_\varphi$.

Montrons maintenant que $\|\,.\,\|_\varphi$ est une norme sur ℓ_φ (en fait, c'est la *jauge* du convexe des $x \in \ell_\varphi$ tels que $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(|x_n|) \leqslant 1$: voir l'Exercice 17).

Notons d'abord que $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(|x_n|/\|x\|_\varphi) \leqslant 1$. En effet, pour tout $C > \|x\|_\varphi$, on a $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(|x_n|/C) \leqslant 1$ (on a utilisé le fait que φ est croissante). Donc, pour tout $N \geqslant 1$, on a $\sum_{n=1}^{N} \varphi(|x_n|/C) \leqslant 1$. En faisant tendre C vers $\|x\|_\varphi$, et en utilisant la continuité de φ, on obtient $\sum_{n=1}^{N} \varphi(|x_n|/\|x\|_\varphi) \leqslant 1$. Comme c'est vrai pour tout $N \geqslant 1$, on a $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(|x_n|/\|x\|_\varphi) \leqslant 1$.

• Il est clair que $\|0\|_\varphi = 0$. Si $\|x\|_\varphi = 0$, on a $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(|x_n|/C) \leqslant 1$ pour tout $C > 0$. En particulier, pour tout $n \geqslant 1$, on a $\varphi(|x_n|/C) \leqslant 1$ pour tout $C > 0$. On a donc $|x_n| \leqslant C\,\varphi^{-1}(1)$ pour tout $C > 0$; donc $x_n = 0$ pour tout $n \geqslant 1$, et $x = 0$.

• Comme, pour $a \neq 0$, on a $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(|ax_n|/|a|\,C) \leqslant 1$ si et seulement si $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(|x_n|/C) \leqslant 1$, on obtient $\|ax\|_\varphi = |a|\,\|x\|_\varphi$. C'est aussi évidemment vrai pour $a = 0$.

• Pour l'inégalité triangulaire, on peut supposer que $x \neq 0$ et $y \neq 0$. Alors, d'après le premier point, $\|x\|_\varphi + \|y\|_\varphi > 0$. Comme $t = \frac{\|x\|_\varphi}{\|x\|_\varphi+\|y\|_\varphi} \in [0,1]$, on peut utiliser la convexité de φ, et l'on obtient, avec la croissance de φ, en remarquant que $1 - t = \frac{\|y\|_\varphi}{\|x\|_\varphi+\|y\|_\varphi}$:

$$\begin{aligned}\varphi\Big(\frac{|x_n+y_n|}{\|x\|_\varphi+\|y\|_\varphi}\Big) &\leqslant \varphi\Big(\frac{|x_n|}{\|x\|_\varphi+\|y\|_\varphi} + \frac{|y_n|}{\|x\|_\varphi+\|y\|_\varphi}\Big) \\ &= \varphi\Big(\frac{\|x\|_\varphi}{\|x\|_\varphi+\|y\|_\varphi}\,\frac{|x_n|}{\|x\|_\varphi} + \frac{\|y\|_\varphi}{\|x\|_\varphi+\|y\|_\varphi}\,\frac{|y_n|}{\|y\|_\varphi}\Big) \\ &\leqslant \frac{\|x\|_\varphi}{\|x\|_\varphi+\|y\|_\varphi}\,\varphi\Big(\frac{|x_n|}{\|x\|_\varphi}\Big) + \frac{\|y\|_\varphi}{\|x\|_\varphi+\|y\|_\varphi}\,\varphi\Big(\frac{|y_n|}{\|y\|_\varphi}\Big);\end{aligned}$$

donc, en sommant :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi\Big(\frac{|x_n+y_n|}{\|x\|_\varphi+\|y\|_\varphi}\Big) &\leqslant \frac{\|x\|_\varphi}{\|x\|_\varphi+\|y\|_\varphi}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi\Big(\frac{|x_n|}{\|x\|_\varphi}\Big) + \frac{\|y\|_\varphi}{\|x\|_\varphi+\|y\|_\varphi}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi\Big(\frac{|y_n|}{\|y\|_\varphi}\Big) \\ &\leqslant \frac{\|x\|_\varphi}{\|x\|_\varphi+\|y\|_\varphi} + \frac{\|y\|_\varphi}{\|x\|_\varphi+\|y\|_\varphi} = 1;\end{aligned}$$

cela entraîne que $\|x+y\|_\varphi \leqslant \|x\|_\varphi + \|y\|_\varphi$.

c) Dire que la suite $(x^{(k)})_{k\geqslant 1}$ est de Cauchy signifie que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $K \geqslant 1$ tel que $\|x^{(k)} - x^{(l)}\|\varphi \leqslant \varepsilon$ pour $k, l \geqslant K$. Autrement dit, on a $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(|x_n^{(k)} - x_n^{(l)}|/\varepsilon) \leqslant 1$. En particulier, pour tout $n \geqslant 1$, on a $\varphi(|x_n^{(k)} - x_n^{(l)}|/\varepsilon) \leqslant 1$. Cela s'écrit aussi : $|x_n^{(k)} - x_n^{(l)}| \leqslant \varphi^{-1}(1)\,\varepsilon$, pour $k, l \geqslant K$. La suite $(x_n^{(k)})_{k\geqslant 1}$ est donc de Cauchy dans $\mathbb{C}$.

b) Elle converge donc dans $\mathbb{C}$. Soit $x_n = \lim_{k\to\infty} x_n^{(k)}$ et $x = (x_n)_{n\geqslant 1}$. Pour tout $N \geqslant 1$, on a :

$$\sum_{n=1}^{N} \varphi(|x_n^{(k)} - x_n^{(l)}|/\varepsilon) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(|x_n^{(k)} - x_n^{(l)}|/\varepsilon) \leqslant 1 \quad \forall k, l \geqslant K\,;$$

comme φ est continue, on obtient $\sum_{n=1}^{N} \varphi(|x_n^{(k)} - x_n|/\varepsilon) \leqslant 1$, en faisant tendre l vers l'infini. Comme c'est vrai pour tout $N \geqslant 1$, on obtient $\sum_{n=1}^{N} \varphi(|x_n^{(k)} - x_n|/\varepsilon) \leqslant 1$, pour $k \geqslant K$. Cela prouve, d'une part, que $x^{(k)} - x \in \ell_\varphi$, et donc que $x = x^{(k)} - (x^{(k)} - x) \in \ell_\varphi$, et, d'autre part, que $\|x^{(k)} - x\|_\varphi \leqslant \varepsilon$ pour $k \geqslant K$. Autrement dit, on a $\|x^{(k)} - x\|_\varphi \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.

Exercice 4

1) Il suffit de montrer que $\mathrm{Lip}\,(X)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel de toutes les applications de X dans $\mathbb{R}$.

Or il est clair que la fonction nulle est dans $\mathrm{Lip}\,(X)$ et que si $f \in \mathrm{Lip}\,(X)$, alors $\alpha f \in \mathrm{Lip}\,(X)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, car $\mathrm{Lip}\,(\alpha f) = |\alpha|\,\mathrm{Lip}\,(f)$. D'autre part, si $f, g \in \mathrm{Lip}\,(X)$, alors, pour tous $x, y \in X$:

$$\begin{aligned}\big|[f(x) + g(x)] - [f(y) + g(y)]\big| &\leqslant |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \\ &\leqslant \mathrm{Lip}\,(f)\, d(x,y) + \mathrm{Lip}\,(g)\, d(x,y) \\ &= [\mathrm{Lip}\,(f) + \mathrm{Lip}\,(g)]\, d(x,y)\,;\end{aligned}$$

donc $f + g$ est lipschitzienne, et de constante $\mathrm{Lip}\,(f+g) \leqslant \mathrm{Lip}\,(f) + \mathrm{Lip}\,(g)$.

2) a) Il est clair que $\|0\|_{Lip,a} = 0$ et, d'après ce qui a été vu à la question 1) que $\|\alpha f\|_{Lip,a} = |\alpha|\,\|f\|_{Lip,a}$ et $\|f + g\|_{Lip,a} \leqslant \|f\|_{Lip,a} + \|g\|_{Lip,a}$ pour tous $f, g \in \mathrm{Lip}\,(X)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. $\|\,.\,\|_{Lip,a}$ est donc une semi-norme sur $\mathrm{Lip}\,(X)$. Montrons que c'est une norme. Si $\|f\|_{Lip,a} = 0$, alors $f(a) = 0$ et $|f(x) - f(y)| = 0$ pour tous $x \neq y$; en particulier, avec $y = a$, on a $f(x) = f(a) = 0$, pour tous les $x \neq a$, et donc pour tous les $x \in X$. On a bien $f = 0$.

b) On a $|f(b)| \leqslant |f(a)| + |f(b) - f(a)| \leqslant |f(a)| + \mathrm{Lip}\,(f)\, d(a,b)$. Comme $|f(a)| \leqslant \|f\|_{Lip,a}$ et $\mathrm{Lip}\,(f) \leqslant \|f\|_{Lip,a}$, on obtient : $\|f\|_{Lip,b} \leqslant \max[1, d(a,b)]\,\|f\|_{Lip,a}$. Par symétrie, on a aussi $\|f\|_{Lip,a} \leqslant \max[1, d(a,b)]\,\|f\|_{Lip,b}$. Donc :

$$\frac{1}{\max[1, d(a,b)]}\,\|f\|_{Lip,a} \leqslant \|f\|_{Lip,b} \leqslant \max[1, d(a,b)]\,\|f\|_{Lip,a}\,,$$

et les deux normes sont donc bien équivalentes.

c) On sait que $|\varphi(x)| \leqslant \|\varphi\|_{X^*}\|x\|$ pour tout $x \in X$; comme φ est linéaire, on en déduit : $|\varphi(x) - \varphi(y)| = |\varphi(x - y)| \leqslant \|\varphi\|_{X^*}\|x - y\|$ pour tous $x, y \in X$. Donc φ est lipschitzienne et $\|\varphi\|_{Lip,0} = \mathrm{Lip}\,(\varphi) \leqslant \|\varphi\|_{X^*}$. Il y a égalité car

$$\|\varphi\|_{X^*} = \sup_{x\neq 0} \frac{|\varphi(x)|}{\|x\|} = \sup_{x\neq 0} \frac{|\varphi(x) - \varphi(0)|}{\|x - 0\|} \leqslant \sup_{x\neq y} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{\|x - y\|} = \|\varphi\|_{Lip,0}\,.$$

3) Comme toutes les normes $\|\,.\,\|_{Lip,a}$ sont équivalentes entre-elles, il suffit de montrer la complétude pour l'une d'entre-elles.

Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de Cauchy dans $\mathrm{Lip}\,(X)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N \geqslant 1$ tel que si $n, k \geqslant N$, alors :

$$|f_n(a) - f_k(a)| + \sup_{x\neq y} \frac{\big|[f_n(x) - f_k(x)] - [f_n(y) - f_k(y)]\big|}{d(x,y)} \leqslant \varepsilon\,. \tag{1}$$

En particulier :

$$|f_n(a) - f_k(a)| \leqslant \varepsilon \qquad \text{pour } n, k \geqslant N. \tag{2}$$

Cela dit que la suite $\big(f_n(a)\big)_{n\geqslant 1}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ et donc converge. Notons $f(a)$ sa limite. Il résulte d'autre part de (1) que, pour $x \neq a$, on a, pour $n, k \geqslant N$:

$$\big|[f_n(x) - f_k(x)] - [f_n(a) - f_k(a)]\big| \leqslant \varepsilon\, d(x,a)\,,$$

et donc, avec (2) :

$$|f_n(x) - f_k(x)| \leqslant |f_n(a) - f_k(a)| + \varepsilon\, d(x,a) \leqslant [1 + d(x,a)]\,\varepsilon \qquad \text{pour } n, k \geqslant N.$$

La suite $\big(f_n(x)\big)_{n\geqslant 1}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ et donc converge. On note $f(x)$ sa limite.

On a donc obtenu la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$.

Montrons que la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers f pour la norme $\|\,.\,\|_{Lip,a}$. Dans (1), faisons tendre k vers l'infini ; on obtient, pour $n \geqslant N$:

$$|f_n(a) - f(a)| + \sup_{x\neq y} \frac{\big|[f_n(x) - f(x)] - [f_n(y) - f(y)]\big|}{d(x,y)} \leqslant \varepsilon\,.$$

Cela entraîne d'une part que $f_n - f \in \mathrm{Lip}\,(X)$, et donc que $f \in \mathrm{Lip}\,(X)$; et d'autre part que $\|f_n - f\|_{Lip,a} \leqslant \varepsilon$ pour $n \geqslant N$, et donc que $\|f_n - f\|_{Lip,a} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Exercice 5

1) Les applications $N_0 \colon f \mapsto |f(0)|$ et $N_2 \colon f \mapsto \big(\int_0^1 |f'(t)|^2\,dt\big)^{1/2}$ sont des semi-normes sur $\mathscr{C}^1([0,1])$ (c'est clair pour la première; pour la seconde, il s'agit de la composée de la norme $\|\,.\,\|_2$ avec la forme linéaire $f \mapsto f'$). Donc $\|f\| = [N_0(f)^2 + N_2(f)^2]^{1/2}$ définit une semi-norme sur $\mathscr{C}^1([0,1])$. C'est en fait une norme car si $\|f\| = 0$, on a $f(0) = 0$ et $\int_0^1 |f'(t)|^2\,dt = 0$. Alors f' est nulle presque partout, donc partout car elle est continue (on peut bien sûr aussi utiliser le résultat élémentaire disant que l'inégrale d'une fonction continue positive non nulle est strictement positive). Donc f est constante sur $[0,1]$, et comme $f(0) = 0$, $f = 0$.

2) Supposons que $\|f_n - f\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Alors, d'une part $f_n(0) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(0)$, et, d'autre part, $\|f_n' - f'\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Comme $f_n - f$ est continûment dérivable, le *Théorème fondamental du Calcul Intégral* nous dit que, pour tout $t \in [0,1]$, on a $[f_n(t) - f(t)] - [f_n(0) - f(0)] = \int_0^t [f_n'(u) - f'(u)]\,du$. Alors $|f_n(t) - f(t)| \leqslant |f_n(0) - f(0)| + \int_0^1 |f_n'(u) - f'(u)|\,du$, et, en utilisant l'*inégalité de Cauchy-Schwarz*, on obtient :

$$|f_n(t) - f(t)| \leqslant |f_n(0) - f(0)| + \left(\int_0^1 |f_n'(u) - f'(u)|^2\,du\right)^{1/2}.$$

Ainsi $\|f_n - f\|_\infty \leqslant |f_n(0) - f(0)| + \|f_n' - f'\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

3) On a $f_n(0) = 0$ et $f_n'(t) = t^{n-1}[n - (n+1)t]$, d'où, en élevant au carré, $[f_n'(t)]^2 = n^2 t^{2n-2} - 2n(n+1)t + (n+1)^2 t^2$ et (*sauf erreur de calcul !*) $\int_0^1 [f_n'(t)]^2\,dt = n\left[\frac{n}{2n-1} - \frac{n+1}{2n+1}\right]$, ce qui donne $\|f_n\| = \sqrt{\frac{n}{4n^2-1}}$.

Exercice 6

1) On a $|(Tf)(x)| \leqslant 3\,|f(x)| + 2\,|f(x+4)| \leqslant 3\,\|f\|_\infty + 2\,\|f\|_\infty = 5\,\|f\|_\infty$; donc $\|Tf\|_\infty \leqslant 5\,\|f\|_\infty$, de sorte que T est continue et $\|T\| \leqslant 5$.

Si l'on prend une fonction $f \in \mathscr{C}_b(\mathbb{R})$ de norme 1 telle que $f(0) = 1$ et $f(4) = -1$ (par exemple $f(x) = 1$ pour $x \leqslant 0$, $f(x) = -1$ pour $x \geqslant 4$ et $f(x) = -\frac{x}{2} + 1$ pour $0 \leqslant x \leqslant 4$), on aura $(Tf)(0) = 5$; donc $\|Tf\|_\infty = 5$. Il en résulte que $\|T\| = 5$.

2) Puisque $|u_n| \leqslant \|u\|_\infty$ pour tout $n \geqslant 1$, on a $|\varphi(u)| \leqslant \sum_{n=1}^\infty \frac{\|u\|_\infty}{2^n} = \|u\|_\infty$. Donc φ est continue et $\|\varphi\| \leqslant 1$. Pour voir que $\|\varphi\| = 1$, considérons l'élément u^k de c_0 défini par $(u^k)_n = 1$ pour $1 \leqslant n \leqslant k$ et $(u^k)_n = 0$ pour $n \geqslant k+1$. On a $\|u^k\|_\infty = 1$ et $\varphi(u^k) = \sum_{n=1}^k \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1$, et *a fortiori* $\sup_{k\geqslant 1} |\varphi(u^k)| \geqslant 1$ (donc $= 1$, puisque l'on a vu l'inégalité inverse). La norme n'est pas atteinte, car pour tout $u \in c_0$ de norme 1, il existe, puisque $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, un entier $N \geqslant 1$ tel que $|u_n| \leqslant 1/2$ pour $n \geqslant N+1$; alors $|\varphi(u)| \leqslant \sum_{n=1}^N \frac{1}{2^n} + \sum_{n=N+1}^\infty \frac{1/2}{2^n} = \left(1 - \frac{1}{2^N}\right) + \frac{1/2}{2^N} = 1 - \frac{1}{2^{N+1}} < 1$.

Exercice 7

Si $x = (x_j)_{1\leqslant j\leqslant d}$, on a $Ax = \left(\sum_{j=1}^d a_{i,j}x_j\right)_{1\leqslant i\leqslant d}$.

1) On a, pour $\|x\|_1 \leqslant 1$:

$$\begin{aligned}\|Ax\|_1 &= \sum_{i=1}^d \left|\sum_{j=1}^d a_{i,j}x_j\right| \leqslant \sum_{i=1}^d \left(\sum_{j=1}^d |a_{i,j}|\,|x_j|\right) = \sum_{j=1}^d \left(\sum_{i=1}^d |a_{i,j}|\right)|x_j| \\ &\leqslant \sum_{j=1}^d \left(\max_{1\leqslant k\leqslant d} \sum_{i=1}^d |a_{i,k}|\right)|x_j| = \left(\max_{1\leqslant k\leqslant d}\sum_{i=1}^d |a_{i,k}|\right)\|x\|_1 \leqslant \max_{1\leqslant k\leqslant d}\sum_{i=1}^d |a_{i,k}|\,;\end{aligned}$$

donc $\|A\|_{1,1} \leqslant \max_{1\leqslant k\leqslant d} \sum_{i=1}^d |a_{i,k}|$. Pour voir qu'il y a égalité, considérons la base canonique $\{e_1, \ldots, e_d\}$ de $\mathbb{R}^d$. On a, pour tout $k = 1, \ldots, d$, $Ae_k = (a_{i,k})_{1\leqslant i\leqslant d}$; donc $\sum_{i=1}^d |a_{i,k}| = \|Ae_k\|_1 \leqslant \|A\|_{1,1}$ (puisque $\|e_k\|_1 = 1$), et $\max_{1\leqslant k\leqslant d} \sum_{i=1}^d |a_{i,k}| \leqslant \|A\|_{1,1}$.

2) Pour $\|x\|_\infty \leqslant 1$, on a :

$$\|Ax\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant d}\left|\sum_{j=1}^d a_{i,j}x_j\right| \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant d}\sum_{j=1}^d |a_{i,j}|\,|x_j| \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant d}\sum_{j=1}^d |a_{i,j}|\,;$$

donc $\|A\|_{\infty,\infty} \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant d} \sum_{j=1}^d |a_{i,j}|$. Pour voir l'inégalité inverse, considérons, pour chaque $k = 1, \ldots, d$, le vecteur $x^k = (\operatorname{sgn} a_{k,1}, \ldots, \operatorname{sgn} a_{k,d})$; il est de norme $\leqslant 1$ (et de norme 1 si $a_{k,1}, \ldots, a_{k,d}$ ne sont pas tous nuls), et $(Ax^k)_k = |a_{k,1}| + \cdots + |a_{k,d}|$. Donc $|a_{k,1}| + \cdots + |a_{k,d}| \leqslant \|Ax^k\|_\infty \leqslant \|A\|_{\infty,\infty}$.

On aurait pu raisonner par dualité et montrer que $\|A\|_{\infty,\infty} = \|A^*\|_{1,1}$.

3) La matrice A^*A, étant symétrique, possède une base orthonormée de vecteurs propres $\{f_1, \ldots, f_d\}$ (ou, avec la terminologie matricielle, est diagonalisable dans une base orthonormée). On a $(A^*A)f_k = \lambda_k f_k$ pour tout $k = 1, \ldots, d$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ étant les valeurs propres de A^*A (écrites autant de fois que leur multiplicité). Elles sont positives, puisque A^*A est positive. Puisque $\|f_k\|_2 = 1$, on a $\lambda_k = \big(((A^*A)f_k \mid f_k) = (Af_k \mid Af_k) = \|Af_k\|_2^2 \leqslant \|A\|_{2,2}^2$. Donc $\max_{1\leqslant k\leqslant d} \sqrt{\lambda_k} \leqslant \|A\|_{2,2}$. Inversement, tout $x \in \mathbb{R}^d$ de norme $\|x\|_2 = 1$ s'écrit $x = \sum_{k=1}^d \alpha_k f_k$, avec $\sum_{k=1}^d \alpha_k^2 = 1$. Alors $\|Ax\|_2^2 = (Ax \mid Ax) = (A^*Ax \mid x) = \big((A^*A)\big(\sum_{k=1}^d \alpha_k f_k\big) \mid \sum_{j=1}^d \alpha_j f_j\big) = \sum_{j,k=1}^d \alpha_j\alpha_k (A^*Af_k \mid f_j) = \sum_{j,k=1}^d \alpha_j\alpha_k\lambda_k (f_k \mid f_j) = \sum_{k=1}^d \alpha_k^2\lambda_k$, en utilisant l'orthonormalité de $\{f_1, \ldots, f_d\}$. On obtient par conséquent $\|Ax\|_2^2 \leqslant (\max_{1\leqslant j\leqslant k} \lambda_j) \sum_{k=1}^d \alpha_k^2 = \max_{1\leqslant j\leqslant k} \lambda_j$.

Exercice 8

Soit E un espace normé de dimension infinie et $x_1, x_2, \ldots$ une suite infinie de vecteurs linéairement indépendants de norme 1. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par ces vecteurs. On peut définir une forme linéaire $\varphi_0 \colon F \to \mathbb{K}$ en posant $\varphi_0(x_n) = n$. En effet, tout $x \in F$ s'écrivant, de façon unique, comme combinaison linéaire *finie* $x = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$ des $x_1, x_2, \ldots$, on a $\varphi_0(x) = a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n$. Cette forme linéaire n'est pas continue puisque $\sup_{\|x\|=1} |\varphi_0(x)| \geqslant \sup_{n\geqslant 1} |\varphi_0(x_n)| = +\infty$.

Pour obtenir une forme linéaire φ sur E, il suffit de prendre un supplémentaire algébrique G de F et de prolonger φ_0 en posant $\varphi(x) = 0$ pour $x \in G$. Cette forme linéaire ne peut être continue puisque sa restriction φ_0 à F ne l'est pas.

Exercice 9

Soit E un espace de Banach et $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ une série absolument convergente. Comme $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < +\infty$, on a $\left\| \sum_{k=n}^{n+p} x_k \right\| \leqslant \sum_{k=n}^{n+p} \|x_k\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, uniformément en p. La suite des sommes partielles de la série $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ est donc de Cauchy. Puisque E est complet, elle converge, ce qui signifie que la série $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ converge.

Réciproquement, supposons que toute série absolument convergente soit convergente, et soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de Cauchy dans E. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N \geqslant 1$ tel que, pour $n, p \geqslant N$, on ait $\|u_n - u_p\| \leqslant \varepsilon$. On peut alors trouver une sous-suite $(u_{n_k})_{k\geqslant 1}$ telle que $\|u_{n_{k+1}} - u_{n_k}\| \leqslant 1/2^k$ pour tout $k \geqslant 1$. En effet, partant de $\varepsilon = 1/2$, on trouve un $n_1 \geqslant 1$ tel que $\|u_p - u_{n_1}\| \leqslant 1/2$ pour tout $p \geqslant n_1$. Prenant ensuite $\varepsilon = 1/4$, on trouve un $n_2 \geqslant 1$, mais que l'on peut augmenter au besoin pour avoir $n_2 > n_1$, tel que $\|u_p - u_{n_2}\| \leqslant 1/4$ pour tout $p \geqslant n_2$. On note que, puisque $n_2 > n_1$, on a $\|u_{n_2} - u_{n_1}\| \leqslant 1/2$. On continue ensuite de même, en prenant $\varepsilon = 1/8$, et l'on trouve $n_3 > n_2$ tel que $\|u_p - u_{n_3}\| \leqslant 1/8$ pour tout $p \geqslant n_3$ et l'on a $\|u_{n_3} - u_{n_2}\| \leqslant 1/4$. On obtient la sous-suite $(u_{n_k})_{k\geqslant 1}$ en continuant par récurrence.

Comme $\|u_{n_{k+1}} - u_{n_k}\| \leqslant 1/2^k$ pour tout $k \geqslant 1$, la série $\sum_{k\geqslant 1}(u_{n_{k+1}} - u_{n_k})$ est absolument convergente. Grâce à l'hypothèse, ell est donc convergente, ce qui signifie que $S = \lim_{K\to\infty} \sum_{k=1}^{K} (u_{n_{k+1}} - u_{n_k}) = \lim_{K\to\infty} (u_{n_{K+1}} - u_{n_1})$ existe dans E. La sous-suite $(u_{n_k})_{k\geqslant 1}$ est donc convergente. Alors, $(u_n)_{n\geqslant 1}$ étant une suite de Cauchy avec une sous-suite convergente, est elle même convergente, de sorte que E est complet.

Exercice 10

Soit $(y_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'éléments de $\operatorname{im}(T)$ convergeant vers $y \in Y$. Pour chaque $n \geqslant 1$, il existe $x_n \in X$ tel que $T(x_n) = y_n$. Par hypothèse, on a $\|y_n - y_k\| = \|T(x_n) - T(x_k)\| = \|T(x_n - x_k)\| \geqslant c\,\|x_n - x_k\|$ pour tous $n, k \geqslant 1$. Comme la suite $(y_n)_n$ est convergente, elle est de Cauchy : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \geqslant 1$ tel que $\|y_n - y_k\| \leqslant \varepsilon$ pour $n, k \geqslant N$. On a donc $\|x_n - x_k\| \leqslant \varepsilon / c$ pour $n, k \geqslant N$. Puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire, cela signifie que la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy dans X. Comme X est complet, elle converge. Si on appelle x sa limite, on a, par continuité de T : $y = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} T(x_n) = T(x)$. Ainsi $y \in \operatorname{im}(T)$. On a bien montré que $\operatorname{im}(T)$ est fermée.

Alors T réalise un isomorphisme entre X et $\operatorname{im}(T)$ puisque l'on a $c\,\|x\| \leqslant \|Tx\| \leqslant \|T\|\,\|x\|$ pour tout $x \in X$.

Notons que, puisque X est complet et T est un isomorphisme de X sur $\operatorname{im}(T)$, cela montre que $\operatorname{im}(T)$ est aussi complet, donc fermé dans Y. Mais la preuve du fait qu'un espace isomorphe à un espace complet est lui-même complet est identique à celle faite ci-dessus montrant que $\operatorname{im}(T)$ est fermée.

Exercice 11

1) Cela résulte du *Lemme de Fatou* :

$$\int_S |f|\, dm \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_S |f_n|\, dm = \|f_n\|_1 \leqslant M < +\infty.$$

2) Si $(f_n)_n$ converge pour la norme $\| \ \|_1$, vers une fonction $g \in L^1(m)$, il existe une *sous-suite* $(f_{n_k})_k$ convergeant m-presque partout vers g. On a donc $g = f$ m-*p.p.*.

On prend $S = [0,1]$, m la mesure de Lebesgue, et $f_n = n\,\mathbb{1}_{]0,1/n]}$; la suite $(f_n)_n$ converge (partout) vers 0, mais $\|f_n\|_1 = 1$ pour tout n. La suite $(f_n)_n$ ne peut pas converger pour la norme $\|\,.\,\|_1$, puisque ce serait vers 0, et cela voudrait dire que $\|f_n\|_1$ tend vers 0.

3) Puisque $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ m-presque partout, on a $|f_n - f| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et $|f_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} |f|$ m-*p.p.* ; donc $|f_n - f| - |f_n| + |f| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ m-*p.p.* ; d'autre part, on a $|f_n| - |f| \leqslant |f_n - f| \leqslant |f_n| + |f|$; donc $0 \leqslant |f_n - f| - |f_n| + |f| \leqslant 2\,|f|$. Comme f, et donc aussi $|f|$, est m-intégrable, par le 1), on peut appliquer le Théorème de convergence dominée, et l'on obtient :

$$\lim_{n\to\infty} \int_S \big(|f_n - f| - |f_n| + |f|\big)\, dm = 0\,.$$

4) Si l'on suppose de plus que $\|f_n\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} \|f\|_1$, c'est-à-dire $\int_S (|f_n| - |f|)\, dm \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, on obtient $\int_S |f_n - f|\, dm \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, c'est-à-dire $\|f_n - f\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Exercice 12

1) Pour tout $n \geqslant 1$, il existe $x_n \in F$ tel que $\|a - x_n\| \leqslant d(a,F) + 1/n$. Alors $\|x_n\| \leqslant \|a\| + d(a,F) + 1/n \leqslant \|a\| + d(a,F) + 1$; donc la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée dans F. Comme F est de dimension finie, ses parties bornées sont relativement compactes, et la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ a par conséquent une sous-suite $(x_{n_k})_{k\geqslant 1}$ convergente. Si $x_0 = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$, on a donc $\|a - x_0\| = \lim_{k\to\infty} \|a - x_{n_k}\| \leqslant \lim_{k\to\infty} [d(a,F) + 1/n_k] = d(a,F)$. Comme $x_0 \in F$, cela implique que $\|a - x_0\| = d(a,F)$.

2) Pour tout $u \in \ker\varphi$, on a $|\varphi(a)| = |\varphi(a-u)| \leqslant \|\varphi\|\,\|a-u\|$; d'où $\|\varphi(a)| \leqslant \|\varphi\|\, d(a,\ker\varphi)$.

3) a) Pour tout $u \in \ker\varphi$ et $t \in R$, on a $|\varphi(u+ta)| = |t|\,|\varphi(a)|$ et, pour $t \in \mathbb{R}^*$, $\|u+ta\| = |t|\,\big\|\frac{1}{t}u + a\big\| \geqslant |t|\, d(a,\ker\varphi)$. Donc $\frac{|\varphi(u+ta)|}{\|u+ta\|} \leqslant \frac{|\varphi(a)|}{d(a,\ker\varphi)}$ pour $t \neq 0$.

b) Tout $x \in E$ s'écrit $x = u + ta$, avec $u \in \ker\varphi$ et $t \in \mathbb{R}$. Pour $t = 0$ (mais $u \neq 0$), l'inégalité du a) reste vraie, puisque le membre de gauche est égal à $\frac{|\varphi(u)|}{\|u\|} = 0$. Donc, puisque $\|\varphi\| = \sup_{x\neq 0} \frac{|\varphi(x)|}{\|x\|} = \sup_{(u,t)\neq(0,0)} \frac{|\varphi(u+ta)|}{\|u+ta\|}$, on obtient $\|\varphi\| \leqslant \frac{|\varphi(a)|}{d(a,\ker\varphi)}$, puis l'égalité, grâce au 2).

4) $(i) \Rightarrow (ii)$. Par (i) et 3) b), on a $|\varphi(a-u_0)| = |\varphi(a)| = \|\varphi\|\, d(a,\ker\varphi) = \|\varphi\|\,\|a-u_0\|$; donc si on pose $x_0 = \frac{a-u_0}{\|a-u_0\|}$, on a $\|x_0\| = 1$ et $|\varphi(x_0)| = \|\varphi\|$.

$(ii) \Rightarrow (i)$. On peut écrire $x_0 = v_0 + t_0 a$ avec $v_0 \in \ker\varphi$ et $t_0 \in \mathbb{R}$. Alors $|\varphi(x_0)| = |t_0|\,|\varphi(a)|$. Par (ii) et 3) b), on a donc $|t_0|\, d(a,\ker\varphi) = 1$. Comme $\|x_0\| = 1$, on a $\|v_0 + t_0 a\| = |t_0|\, d(a,\ker\varphi)$, d'où (en notant que $t_0 \neq 0$, puisque $|t_0|\, d(a,\ker\varphi) = 1$) $d(a,\ker\varphi) = \|a - u_0\|$, avec $u_0 = -v_0/|t_0|$.

5) a) On a $|\varphi(f)| \leqslant \frac{1}{2}\,\|f\|_\infty + \frac{1}{2}\,\|f\|_\infty = \|f\|_\infty$; donc φ est continue et $\|\varphi\| \leqslant 1$.

Soit, pour $n \geqslant 2$, f_n la fonction continue valant 1 sur $\big[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}\big]$, -1 sur $\big[\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1\big]$ et affine sur l'intervalle $\big[\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\big]$. On a $\|f_n\|_\infty = 1$ et (par symétrie) $\varphi(f_n) = 2\,\big[\big(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\big) + \frac{1}{2n}\big] = 1 - \frac{1}{n}$. Comme $\|\varphi\| \geqslant |\varphi(f_n)|$ pour tout $n \geqslant 2$, on obtient $\|\varphi\| \geqslant 1$, et finalement $\|\varphi\| = 1$.

b) Si $|\varphi(f)| = 1$ avec $\|f\|_\infty = 1$, on peut supposer, en remplaçant au besoin f par $-f$, que $\varphi(f) = 1$. On a donc $\int_0^{1/2} f(t)\, dt - \int_{1/2}^1 f(t)\, dt = 1$. Mais $1 = \int_0^{1/2} dt + \int_{1/2}^1 dt$; on obtient donc :

$$\int_{1/2}^1 [-1 - f(t)]\, dt = \int_0^{1/2} [1 - f(t)]\, dt\,.$$

Comme $\|f\|_\infty = 1$, on a $-1 \leqslant f(t) \leqslant 1$ pour tout $t \in [0,1]$. Donc l'intégrale de gauche est $\leqslant 0$ et celle de droite est $\geqslant 0$; elles sont par conséquent toutes les deux nulles, ce qui, avec le fait que $-1 - f(t) \leqslant 0$ et $1 - f(t) \geqslant 0$, entraîne que $-1 - f(t) = 0$ presque partout sur

$[1/2, 1]$ et $1 - f(t) = 0$ presque partout sur $[0, 1/2]$. Mais ce sont des fonctions continues ; on a donc $f(t) = -1$ partout sur $[1/2, 1]$ et $f(t) = 1$ partout sur $[0, 1/2]$. Ce n'est pas possible. Il n'existe donc aucune $f \in E$ telle que $\|f\|_\infty = 1$ et $|\varphi(f)| = \|\varphi\|$.

Exercice 13

Si $E = c_0$ et $\mathbf{x} \in c_0$, on a $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$; donc :

$$\Big\|\mathbf{x} - \sum_{k=1}^{n} x_k \mathbf{e}_k\Big\|_\infty = \|(0, \ldots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots)\|_\infty = \sup_{k \geqslant n+1} |x_k| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Si $E = \ell_p$ et $\mathbf{x} \in \ell_p$, on a $\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p < +\infty$; donc :

$$\Big\|\mathbf{x} - \sum_{k=1}^{n} x_k \mathbf{e}_k\Big\|_p = \|(0, \ldots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots)\|_p = \Big(\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p\Big)^{1/p} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Exercice 14

1) Commençons par le cas $X = c_0$ (voir le 3) de l'Exercice 15). Si $\sum_{n=1}^\infty |b_n| = \|\mathbf{b}\|_1 < +\infty$, on a $|\varphi_{\mathbf{b}}(\mathbf{a})| = \big|\sum_{n=1}^\infty a_n b_n\big| \leqslant \sum_{n=1}^\infty |a_n|\,|b_n| \leqslant \sup_{k\geqslant 1} |a_k| \sum_{n=1}^\infty |b_n| = \|\mathbf{a}\|_\infty \|\mathbf{b}\|_1$; donc $\varphi_{\mathbf{b}}$ est continue et $\|\varphi_{\mathbf{b}}\| \leqslant \|\mathbf{b}\|_1$.

Inversement, si $\varphi \in (c_0)^*$, soit $b_n = \varphi(\mathbf{e}_n)$. Il existe ε_n tel que $|\varepsilon_n| = 1$ et $|b_n| = \varepsilon_n b_n$. Pour tout $N \geqslant 1$, on a $\sum_{n=1}^N |b_n| = \sum_{n=1}^N \varepsilon_n b_n = \varphi\big(\sum_{n=1}^N \varepsilon_n \mathbf{e}_n\big) = \big|\varphi\big(\sum_{n=1}^N \varepsilon_n \mathbf{e}_n\big)\big| \leqslant \|\varphi\|\,\big\|\sum_{n=1}^N \varepsilon_n \mathbf{e}_n\big\|_\infty = \|\varphi\|$. Donc $\sum_{n=1}^\infty |b_n| \leqslant \|\varphi\| < +\infty$. D'autre part (voir l'Exercice 13), $\varphi(\mathbf{a}) = \varphi\big(\sum_{n=1}^\infty a_n \mathbf{e}_n\big) = \sum_{n=1}^\infty a_n \varphi(\mathbf{e}_n)$, puisque φ est linéaire continue. On a bien $\varphi = \varphi_{\mathbf{b}}$. De plus, comme $\|\mathbf{b}\|_1 \leqslant \|\varphi\| = \|\varphi_{\mathbf{b}}\| \leqslant \|\mathbf{b}\|_1$, on a $\|\varphi\| = \|\mathbf{b}\|_1$.

2) Le cas de $X = \ell_1$ est analogue. Si $\mathbf{b} \in \ell_\infty$; on a :

$$|\varphi_{\mathbf{b}}(\mathbf{a})| = \Big|\sum_{n=1}^\infty a_n b_n\Big| \leqslant \sum_{n=1}^\infty |a_n|\,|b_n| \leqslant \sup_{k\geqslant 1} |b_k| \sum_{n=1}^\infty |a_n| = \|\mathbf{b}\|_\infty \|\mathbf{a}\|_1 ;$$

donc $\varphi_{\mathbf{b}}$ est continue et $\|\varphi_{\mathbf{b}}\| \leqslant \|\mathbf{b}\|_\infty$.

Inversement, si $\varphi \in (\ell_1)^*$, soit $b_n = \varphi(\mathbf{e}_n)$. Pour tout $n \geqslant 1$, on a $|b_n| = |\varphi(\mathbf{e}_n)| \leqslant \|\varphi\|\,\|\mathbf{e}_n\|_1 = \|\varphi\|$; donc $\mathbf{b} \in \ell_\infty$ et $\|\mathbf{b}\|_\infty \leqslant \|\varphi\|$. De plus, puisque φ est linéaire continue, on a, en utilisant l'Exercice 13, $\varphi(\mathbf{a}) = \varphi\big(\sum_{n=1}^\infty a_n \mathbf{e}_n\big) = \sum_{n=1}^\infty a_n \varphi(\mathbf{e}_n) = \sum_{n=1}^\infty a_n b_n$; donc $\varphi = \varphi_{\mathbf{b}}$ et $\|\varphi\| = \|\mathbf{b}\|_\infty$ puisque $\|\varphi_{\mathbf{b}}\| \leqslant \|\mathbf{b}\|_\infty$ et $\|\mathbf{b}\|_\infty \leqslant \|\varphi\|$.

3) Passons au cas de $X = \ell_p$, avec $1 < p < \infty$. L'inégalité de Hölder donne la continuité de $\varphi_{\mathbf{b}}$: $|\varphi_{\mathbf{b}}(\mathbf{a})| \leqslant \sum_{n=1}^\infty |a_n|\,|b_n| \leqslant \big(\sum_{n=1}^\infty |a_n|^p\big)^{1/p} \big(\sum_{n=1}^\infty |b_n|^q\big)^{1/q} = \|\mathbf{a}\|_p \|\mathbf{b}\|_q$, de sorte que $\|\varphi_{\mathbf{b}}\| \leqslant \|\mathbf{b}\|_q$.

Inversement, si $\varphi \in (\ell_p)^*$, posons $b_n = \varphi(\mathbf{e}_n)$ et soit θ_n tel que $|b_n|^q = \theta_n b_n$ (on prend $\theta_n = 0$ si $b_n = 0$). Pour tout $N \geqslant 1$, on a $\sum_{n=1}^N |b_n|^q = \sum_{n=1}^N \theta_n b_n = \varphi\big(\sum_{n=1}^N \theta_n \mathbf{e}_n\big) = \big|\varphi\big(\sum_{n=1}^N \theta_n \mathbf{e}_n\big)\big| \leqslant \|\varphi\|\,\big\|\sum_{n=1}^N \theta_n \mathbf{e}_n\big\|_p = \|\varphi\|\,\big(\sum_{n=1}^N |\theta_n|^p\big)^{1/p}$. Mais $|\theta_n|^p = |b_n|^{p(q-1)} = |b_n|^q$; donc $\big(\sum_{n=1}^N |\theta_n|^p\big)^{1/p} = \big(\sum_{n=1}^N |b_n|^q\big)^{1/p}$, de sorte qu'en simplifiant (si $\sum_{n=1}^N |b_n|^q \neq 0$; mais la conclusion est évidemment vraie sinon), on obtient $\big(\sum_{n=1}^N |b_n|^q\big)^{1/q} \leqslant \|\varphi\|$, puisque $1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$. Ainsi $(b_n)_{n\geqslant 1} \in \ell_q$ et $\|\mathbf{b}\|_q = \big(\sum_{n=1}^\infty |b_n|^q\big)^{1/q} \leqslant \|\varphi\|$. De plus, comme précédemment, $\varphi(\mathbf{a}) = \varphi\big(\sum_{n=1}^\infty a_n \mathbf{e}_n\big) = \sum_{n=1}^\infty a_n \varphi(\mathbf{e}_n) = \sum_{n=1}^\infty a_n b_n$; donc $\varphi = \varphi_{\mathbf{b}}$ et $\|\varphi\| = \|\varphi_{\mathbf{b}}\| = \|\mathbf{b}\|_q$.

Exercice 15

1) a) Notons d'abord que $\|\widetilde{x}\|_\sim = \inf\{\|x-u\|\,;\ u \in N\}$.

Il est clair que $\|\widetilde{0}\|_\sim = 0$, et donc que $\|\alpha\widetilde{x}\|_\sim = 0$ si $\alpha = 0$. Pour $\alpha \neq 0$, on a $\|\alpha\widetilde{x}\|_\sim = \inf\{\|\alpha x - u\|\,;\ u \in N\} = \inf\{\|\alpha x - \alpha v\|\,;\ v \in N\} = |\alpha| \inf\{\|x - v\|\,;\ v \in N\} = |\alpha|\,\|\widetilde{x}\|_\sim$. Si $x, y \in E$, on a $\|\widetilde{x}+\widetilde{y}\|_\sim = \inf\{\|x+y-u\|\,;\ u \in N\} = \inf\{\|x+y-(v+w)\|\,;\ v, w \in N\} \leqslant \inf\{\|x-v\|\,;\ v \in N\} + \inf\{\|y-w\|\,;\ w \in N\} = \|\widetilde{x}\|_\sim + \|\widetilde{y}\|_\sim$. Donc $\|\,.\,\|_\sim$ est une semi-norme sur E/N. Maintenant, si $\|\widetilde{x}\|_\sim = 0$, il existe, pour tout $n \geqslant 1$ un $u_n \in N$ tel que $\|x - u_n\| \leqslant 1/n$; alors $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ et donc, puisque N est fermé, $x \in N$, c'est-à-dire que $\widetilde{x} = \widetilde{0}$. Par conséquent $\|\,.\,\|_\sim$ est une norme sur E/N.

L'application quotient q est linéaire (par définition des opérations sur E/N) et $\|q(x)\|_\sim = \|\widetilde{x}\|_\sim \leqslant \|x\|$; donc q est continue, et $\|q\| \leqslant 1$.

b) Comme $\|q(x)\|_\sim \leqslant \|x\|$, il est clair que l'image de la boule ouverte $B_E^o(0,r)$ de E de centre 0 et de rayon r est contenue dans la boule ouverte $B_{E/N}^o(\widetilde{0},r)$ de E/N de centre $\widetilde{0}$ et de rayon r. Inversement, soit $\xi \in E/N$ tel que $\|\xi\|_\sim < r$. Comme $\|\xi\|_\sim = \inf\{\|x\|\,;\ q(x) = \xi\}$, il existe $x \in E$ tel que $\xi = q(x)$ et $\|x\| < r$, d'où l'inclusion inverse.

Ce n'est pas vrai en général pour les boules fermées. Si l'on a bien $q[B_E(0,r)] \subseteq B_{E/F}(0,r)$, car $\|q(x)\|_\sim \leqslant \|x\|$, il n'y a pas égalité en général. Pour voir cela, considérons la forme linéaire continue sur $E = \mathscr{C}([0,1])$ définie dans le 5) de l'Exercice 12, et $F = \ker\varphi$. Comme $\|\varphi\| = 1$, la formule du 3) de cet exercice dit que $|\varphi(f)| = \mathrm{dist}\,(f, \ker\varphi) = \|\widetilde{f}\|_\sim$ pour toute $f \in \mathscr{C}([0,1])$. Or on a vu qu'il n'existe aucune $f \in E$ telle que $\|f\| = 1$ et vérifiant $|\varphi(f)| = 1$, c'est-à-dire $\|\widetilde{f}\|_\sim = 1$ (*a fortiori* aucune $f \in B_E$ ne peut le vérifier). Autrement dit, si $\|\widetilde{f}\|_\sim = 1$, alors $f \notin B_E$. Ainsi $q(B_E) \subseteq B_{E/F}^o(0,1)$.

L'égalité $q[B_E^o(0,1)] = B_{E/N}^o(\widetilde{0},1)$ entraîne que l'on a $\|q\| = \sup_{x\in B_E^o(0,1)} \|q(x)\| = \sup_{y\in B_{E/N}^o} \|y\| = 1$.

Soit Ω un ouvert de E, non vide ; pour tout $\xi \in q(\Omega)$, il existe $x \in \Omega$ tel que $\xi = q(x)$. Comme Ω est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B_E^o(x,r) \subseteq \Omega$. On obtient alors $B_{E/N}^o(\xi,r) = \xi + B_{E/N}^o(\widetilde{0},r) = q[x + B_E^o(0,r)] = q[B_E^o(x,r)] \subseteq q(\Omega)$.

Si O est ouvert dans E/N, $q^{-1}(O)$ est ouvert dans E, puisque q est continue. Inversement, si $q^{-1}(O)$ est ouvert dans E, alors O est ouvert dans E/N, d'après ce qui précède, car $O = q[q^{-1}(O)]$.

c) Si $f\colon E/N \to X$ est continue, il en est de même de $f \circ q$, puisque q est continue. Inversement, supposons $f \circ q$ continue ; pour tout ouvert U de X, $q^{-1}[f^{-1}(U)] = (f\circ q)^{-1}(U)$ est ouvert dans E ; $f^{-1}(U)$ est donc ouvert dans E/N, par la question précédente.

d) Utilisons l'Exercice 9. Soit $x_n \in E$ tels que $\sum_{n=1}^\infty \|\widetilde{x_n}\|_\sim = M < +\infty$. Pour tout $n \geqslant 1$, il existe $u_n \in N$ tel que $\|x_n - u_n\| \leqslant \|\widetilde{x_n}\|_\sim + 1/2^n$. Alors $\sum_{n=1}^\infty \|x_n - u_n\| \leqslant M + 1 < +\infty$. Comme E est complet, la série $\sum_{n\geqslant 1}(x_n - u_n)$ converge dans E. Comme q est continue, et comme $q(x_n - u_n) = q(x_n) = \widetilde{x_n}$, la série $\sum_{n\geqslant1} \widetilde{x_n}$ converge dans E/N, et ainsi E/N est complet.

2) Par définition, on a $\|q(x)\|_{\ell_\infty/c_0} = \mathrm{dist}\,(x, c_0)$. Notons d cette distance et posons $l = \limsup_{n\to\infty} |x_n|$.

Pour tout $n \geqslant 1$, on a, en notant e_n le $n^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique de c_0, $d \leqslant \left\|x - \sum_{k=1}^n x_k e_k\right\|_\infty = \sup_{k\geqslant n+1} |x_k|$; donc $d \leqslant l$, en faisant tendre n vers l'infini.

Inversement, soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $y \in c_0$, on a $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$; il existe donc $n_1 \geqslant 1$ tel que $|y_k| \leqslant \varepsilon$ pour $k \geqslant n_1$. On a alors $|x_k - y_k| \geqslant |x_k| - \varepsilon$ pour $k \geqslant n_1$. Alors :

$$\|x-y\|_\infty \geqslant \sup_{k\geqslant n_1} |x_k - y_k| \geqslant \sup_{k\geqslant n_1} |x_k| - \varepsilon \geqslant l - \varepsilon$$

(rappelons que $l = \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\geqslant n}|x_k|\right) = \inf_{n\geqslant1}\left(\sup_{k\geqslant n}|x_k|\right)$). Donc, en prenant la borne inférieure sur tous les $y \in c_0$, on obtient $d \geqslant l - \varepsilon$. Ceci étant établi pour tout $\varepsilon > 0$, il en résulte que $d \geqslant l$; d'où l'égalité.

3) Comme T est continu, $\ker T$ est fermé ; l'espace quotient $E/\ker T$ est donc normé. Pour tout $x \in E$ et $y \in \ker T$, on a $\|\widetilde{T}(\widetilde{x})\| = \|T(x-y)\| \leqslant \|T\|\,\|x-y\|$; en prenant la borne inférieure du dernier terme lorsque $y \in \ker T$, on obtient $\|\widetilde{T}(\widetilde{x})\| \leqslant \|T\|\,\|\widetilde{x}\|_\sim$. Donc $\widetilde{T}$ est continu et $\|\widetilde{T}\| \leqslant \|T\|$.

Il y a en fait égalité car, si $q\colon E \to E/\ker T$ est la surjection canonique, on a $T = \widetilde{T} \circ q$ et donc $\|T\| \leqslant \|\widetilde{T}\|\,\|q\| = \|\widetilde{T}\|$.

4) On sait que $E/\ker T$ est isomorphe (algébriquement) à $\operatorname{im} T = T(E)$. Comme T est de rang fini, $E/\ker T$ est de dimension finie. D'autre part, comme $\ker T$ est fermé, l'espace quotient $E/\ker T$ est normé. Il résulte du Corollaire I.2.4, 3), que $\widetilde{T}$ est continue. Par conséquent T est continue, puisque $T = \widetilde{T} \circ q$.

5) Il est clair que si $\sum_{n=1}^\infty |b_n| = M < +\infty$, alors $\sum_{n=1}^\infty |a_n b_n| < +\infty$; on peut donc définir $\varphi(\mathbf{a}) = \sum_{n=1}^\infty b_n a_n$, ce qui donne une application linéaire telle que $|\varphi(\mathbf{a})| \leqslant M\,\|\mathbf{a})\|_\infty$; elle est donc continue. Inversement, si φ est une forme linéaire continue sur c_0, posons $b_n = \varphi(\mathbf{e}_n)$. Pour tout $\mathbf{a} = (a_n)_{n\geqslant 1} \in c_0$, on a $\mathbf{a} = \sum_{n=1}^\infty a_n \mathbf{e}_n$ (voir l'Exercice 13). Comme φ est linéaire et continue, on obtient $\varphi(\mathbf{a}) = \sum_{n=1}^\infty a_n \varphi(\mathbf{e}_n) = \sum_{n=1}^\infty a_n b_n$. D'autre part, si $|\varepsilon_n| = 1$ et $|b_n| = \varepsilon_n b_n$, on a, pour tout $n \geqslant 1$:

$$\sum_{k=1}^n |b_k| = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k b_k = \varphi\Big(\sum_{k=1}^n \varepsilon_k \mathbf{e}_k\Big) \leqslant \|\varphi\| \,\Big\|\sum_{k=1}^n \varepsilon_k \mathbf{e}_k\Big\|_\infty = \|\varphi\|\,,$$

puisque $\big\|\sum_{k=1}^n \varepsilon_k \mathbf{e}_k\big\|_\infty = \max_{1\leqslant k\leqslant n} |\varepsilon_k| = 1$. Donc $\sum_{k=1}^\infty |b_k| \leqslant \|\varphi\| < +\infty$.

6) (Voir l'Exercice 8) Pour obtenir une forme linéaire discontinue sur c_0, complétons les vecteurs linéairement indépendants $\mathbf{e}_n$, $n \geqslant 1$, en une base algébrique de c_0. On sait que pour définir une forme linéaire, il suffit de se donner les valeurs en les vecteurs de cette base. En particulier, on peut prendre $\varphi(\mathbf{e}_n) = 1$ pour tout $n \geqslant 1$ (et ce que l'on veut sur les autres vecteurs de base). Comme $\sum_{n=1}^\infty |\varphi(\mathbf{e}_n)| = +\infty$, il résulte de la question précédente que φ est discontinue.

Il est clair que $T(a_1, a_2, \ldots) = 0$ entraîne $a_1 = a_2 = \cdots = 0$, et donc $\ker T = \{0\}$ est fermé. Pourtant T n'est pas continue, car si elle l'était, sa composée avec la première projection serait continue ; or ce n'est pas le cas, puisque cette composée est φ.

Exercice 16

1) G étant de dimension finie, il en est de même pour $q(G)$; donc $q(G)$ est fermé dans E/F (Corollaire I.2.4, 2)). Alors $F + G = q^{-1}(G)$ est fermé dans E.

2) a) Si $x \in B_E(0,1)$, il existe, par hypothèse, un k tel que $x \in B_E(x_k, 1/2)$. On a donc $\|x - x_k\| \leqslant 1/2$, et comme $x_k \in F$, on obtient $\|q(x)\|_{E/F} = \operatorname{dist}(x, F) \leqslant \|x - x_k\| \leqslant 1/2$.

b) On a vu à l'Exercice 15 que $q[B^o_E(x,r)] = B^o_{E/F}\big(q(x), r\big)$ pour tout $x \in E$ et pour tout $r > 0$. Comme $B^o_{E/F}(0,1) = q[B^o_E(0,1)] \subseteq q[B_E(0,1)]$, on obtient donc $B^o_{E/F}(\widetilde{0},1) \subseteq B^o_{E/F}(\widetilde{0},1/2)$, ce qui n'est possible que si $E/F = \{\widetilde{0}\}$.

Il en résulte que $E = F$, et donc que E est de dimension finie, et $\dim E \leqslant n$.

Exercice 17

1) Supposons K absorbant. Par définition, pour tout $x \in E$, il existe $t > 0$ tel que $[0, tx] \subseteq K$ (on notera qu'un ensemble absorbant contient toujours 0). En particulier $tx \in K$, de sorte que $x \in (1/t)\,K$. Ainsi $E = \bigcup_{\lambda>0} \lambda K$. Réciproquement, supposons que $E = \bigcup_{\lambda>0} \lambda K$, et soit x un vecteur arbitraire de E. Il existe $\lambda > 0$ tel que $x \in \lambda K$, c'est-à-dire que $(1/\lambda)x \in K$. Comme K est convexe et contient 0, le segment $[0, (1/\lambda)x]$ est contenu dans K, et donc K est absorbant.

2) Soit E un espace normé et V un voisinage de 0. Pour tout $x \in E$, on a $\lim_{t\to 0} tx = 0$; il existe donc un $\delta > 0$ tel que $tx \in V$ pour $|t| \leqslant \delta$. Donc $[0, \delta x] \subseteq [-\delta x, \delta x] \subseteq V$, et V est absorbant.

3) Notons d'abord que, si $x \in K$ (K n'est pas vide), alors $-x \in K$, par symétrie, et donc $0 = \frac{x+(-x)}{2} \in K$.

a) Tout d'abord, K étant absorbant, on a $j_K(x) < +\infty$ pour tout $x \in E$. Ensuite, comme $0 \in K$, il est clair que $j_K(0) = 0$. Pour tout $x \in E$, on a donc $j_K(ax) = 0$ si $a = 0$. Lorsque $a > 0$, on a $j_K(ax) = \inf\{\lambda > 0\,;\ ax \in \lambda K\} = \inf\{\lambda > 0\,;\ x \in (\lambda/a)\,K\} = a \inf\{t > 0\,;\ x \in tK\} = a j_K(x)$. Lorsque $a < 0$, il suffit de remarquer que, grâce à la symétrie de K par rapport à 0, on a $ax \in K$ si et seulement si $-ax \in K$; donc $j_K(ax) = j_K(-ax) = (-a)\, j_K(x) = |a|\, j_K(x)$. Reste à vérifier l'inégalité triangulaire. Soit $x, y \in E$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $\lambda, \mu > 0$ tels que $\lambda \leqslant j_K(x) + \varepsilon$, $\mu \leqslant j_K(y) + \varepsilon$ et $(1/\lambda)x, (1/\mu)y \in K$. Comme K est convexe, $\frac{1}{\lambda+\mu}\,(x+y) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\,(1/\lambda)\,x + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\,(1/\mu)\,y \in K$; donc $j_K(x+y) \leqslant \lambda + \mu \leqslant j_K(x) + j_K(y) + 2\,\varepsilon$. Ceci étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient $j_K(x+y) \leqslant j_K(x) + j_K(y)$.

b) Si $j_K(x) < 1$, il existe $\lambda > 0$ tel que $\lambda < 1$ et $x \in \lambda K$. Mais $tK \subseteq K$ pour $0 \leqslant t \leqslant 1$ car K est convexe et contient 0 : si $u \in K$, alors $tu = tu + (1-t)\,0 \in K$. Donc $x \in K$. Par ailleurs, si $x \in K$, il est clair que $j_K(x) \leqslant 1$.

c) Pour montrer que c'est une norme, supposons que l'on ait $j_K(x) = 0$. Alors, pour tout $n \geqslant 1$, on peut trouver des λ_n tels que $0 < \lambda_n \leqslant 1/n$ et $x \in \lambda_n K$. On a alors $(1/\lambda_n)\,x \in K$ pour tout $n \geqslant 1$; mais ce n'est possible que pour $x = 0$ car sinon $\|(1/\lambda_n)\,x\| = (1/\lambda_n)\|x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, ce qui est incompatible avec le fait que K soit borné.

4) Comme 0 est dans l'intérieur de K, K est absorbant, par le 2) ; j_K est donc une norme, par 3) a) et 3) c). De plus, le fait que 0 soit dans l'intérieur de K entraîne l'existence d'un $r > 0$ tel que la boule $B(0, r)$ soit contenue dans K. Pour tout $x \in E$ non nul, on a donc $\frac{r}{\|x\|}\, x \in K$. Par 3) b), on a donc $j_K\big(\frac{r}{\|x\|}\, x\big) \leqslant 1$, c'est-à-dire $j_K(x) \leqslant r\,\|x\|$. Par ailleurs, K étant borné, il existe $R > 0$ tel que $\|x\| \leqslant R$ pour tout $x \in K$, et en particulier lorsque $j_K(x) < 1$, par 3) b). Si $X \in E$ est arbitraire, non nul, on a $j_K\big(\frac{a}{j_K(x)}\, x\big) = a < 1$ pour $0 < a < 1$; donc $\big\|\frac{a}{j_K(x)}\, x\big\| \leqslant R$, et $\|x\| \leqslant \frac{R}{a}\, j_K(x)$. Ceci étant vrai pour tout $a \in]0, 1[$, on obtient $\|x\| \leqslant R\, j_K(x)$. Par conséquent, la norme j_K est équivalente à la norme $\|\,.\,\|$.

Finalement, on a vu au 3) b) que K est contenu dans la boule unité fermée pour la norme j_K. Pour montrer l'inclusion inverse, on utilise le fait que K contient la boule unité ouverte pour la norme j_K. On sait (Corollaire I.1.8) que l'adhérence d'une boule ouverte est la boule fermée correspondante ; ceci étant entendu pour la norme associée, ici j_K. Mais comme cette norme est équivalente à la norme $\|\,.\,\|$, cette adhérence est la même si on la prend pour la norme $\|\,.\,\|$. Maintenant, comme K est fermé (pour la norme $\|\,.\,\|$ *a priori*), cette adhérence est contenue dans K. Donc la boule unité fermée pour la norme j_K est contenue dans K, et elle est donc finalement égale à K.

Exercice 18

1) a) Remarquons d'abord qu'en prenant, pour tout $k \geqslant 1$, $b_k = 1$ et $b_j = 0$ pour $j \neq k$, on a $x_{n,k} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Prenons $n_1 = 1$. Comme $\sum_{k=1}^{\infty} |x_{1,k}| < +\infty$, il existe $k_1 \geqslant 1$ tel que $\sum_{k=k_1+1}^{\infty} |x_{1,k}| \leqslant a/5$. Par la remarque précédente, on a $x_{n,1}, x_{n,2}, \ldots, x_{n,k_1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Il existe donc un entier $N \geqslant 1$ tel que $\sum_{k=1}^{k_1} |x_{n,k}| \leqslant a/5$ pour tout $n \geqslant N$. Choisissons un tel entier $n = n_2$ tel que $n_2 > n_1$. On a donc $\sum_{k=1}^{k_1} |x_{n_2,k}| \leqslant a/5$. Comme $\sum_{k=1}^{\infty} |x_{n_2,k}| < +\infty$, il existe $k_2 \geqslant 1$, que l'on peut prendre $> k_1$, tel que $\sum_{k=k_2+1}^{\infty} |x_{n_2,k}| \leqslant a/5$. On recommence comme précédemment : puisque $x_{n,1}, x_{n,2}, \ldots, x_{n,k_2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, il existe $n_3 > n_2$ tel que $\sum_{k=1}^{k_2} |x_{n,k}| \leqslant$

$a/5$ et, puisque $\sum_{k=1}^{\infty} |x_{n_3,k}| < +\infty$, il existe $k_3 > k_2$ tel que $\sum_{k=k_3+1}^{\infty} |x_{n_3,k}| \leqslant a/5$. Par récurrence on obtient deux suites strictement croissantes $(n_j)_{j\geqslant 1}$ et $(k_j)_{j\geqslant 1}$ telles que, pour tout $j \geqslant 1$, on ait $\sum_{k=k_j+1}^{\infty} |x_{n_j,k}| \leqslant a/5$ et $\sum_{k=1}^{k_j} |x_{n_{j+1},k}| \leqslant a/5$.

Puisque $\sum_{k=1}^{\infty} |x_{n,k}| = \|\mathbf{x}_n\|_1 \geqslant a$ pour tout $n \geqslant 1$, ces conditions entraînent, en notant $k_0 = 0$, que, pour tout $j \geqslant 1$, on a :

$$\sum_{k=k_{j-1}+1}^{k_j} |x_{n_j,k}| = \sum_{k=1}^{\infty} |x_{n_j,k}| - \sum_{k=1}^{k_{j-1}} |x_{n_j,k}| - \sum_{k=k_j+1}^{\infty} |x_{n_j,k}| \geqslant a - \frac{a}{5} - \frac{a}{5} = \frac{3\,a}{5}$$

(c'est la "*bosse glissante*").

b) Pour tout $j \geqslant 1$, soit $\varepsilon_{j,k}$ tel que $|\varepsilon_{j,k}| = 1$ et $|x_{n_j,k}| = \varepsilon_{j,k} x_{n_j,k}$ si $k_{j-1}+1 \leqslant k \leqslant k_j$. Définissons $b_k = \varepsilon_{j,k}$ pour $k_{j-1}+1 \leqslant k \leqslant k_j$, $j \geqslant 1$. On a $|b_k| = 1$ pour tout $k \geqslant 1$ et, pour tout $j \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{k=1}^{\infty} b_k x_{n_j,k}\Big| &\geqslant \Big|\sum_{k=k_{j-1}+1}^{k_j} b_k x_{n_j,k}\Big| - \sum_{k=1}^{k_{j-1}} |x_{n_j,k}| - \sum_{k=k_j+1}^{\infty} |x_{n_j,k}| \\ &= \sum_{k=k_{j-1}+1}^{k_j} |x_{n_j,k}| - \sum_{k=1}^{k_{j-1}} |x_{n_j,k}| - \sum_{k=k_j+1}^{\infty} |x_{n_j,k}| \geqslant \frac{3\,a}{5} - \frac{a}{5} - \frac{a}{5} = \frac{a}{5}\cdot\end{aligned}$$

2) Si $\|\mathbf{x}_n\|_1$ ne converge pas vers 0, on peut supposer, quitte à extraire une sous-suite, que pour un certain $a > 0$, on a $\|\mathbf{x}_n\|_1 \geqslant a$ pour tout $n \geqslant 1$. On a alors vu au 1) qu'il existe une sous-suite $(\mathbf{x}_{n_j})_{j\geqslant 1}$ et suite bornée $(b_k)_{k\geqslant 1}$ telles que $\big|\sum_{k=1}^{\infty} b_k x_{n_j,k}\big| \geqslant a/5$, ce qui empêche $\sum_{k=1}^{\infty} b_k x_{n,k}$ de tendre vers 0.

Exercice 19

1) Comme x et x' ne prennent que les valeurs 0 et 1, si $x \neq x'$, il existe un indice $k \geqslant 1$ tel que $x_k = 0$ et $x'_k = 1$, ou l'inverse. Quoiqu'il en soit, on a $\|x - x'\|_\infty \geqslant |x_k - x'_k| = 1$. Or si $y \in \omega_x \cap \omega_{x'}$, on a $\|x - x'\|_\infty \leqslant \|x - y\|_\infty + \|y - x'\|_\infty < 1/2 + 1/2 = 1$; cela n'est donc possible que si $x = x'$.

2) Comme Δ est dense, il recontre l'ouvert non vide ω_x ; il existe donc un entier $n(x) \geqslant 1$ tel que $v_{n(x)} \in \omega_x$. Si $n(x) = n(x')$, on a $v_{n(x)} = v_{n(x')} \in \omega_x \cap \omega_{x'}$; donc $x = x'$.

3) D'après l'*axiome du choix*, on a une application $\gamma\colon \{0,1\}^{\mathbb{N}^*} \to \Delta$, et il résulte du 2) qu'elle est injective. Ce n'est pas possible car Δ est dénombrable, alors que $\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ ne l'est pas. Donc ℓ_∞ ne contient aucune partie dénombrable dense.

Exercice 20

1) On peut supposer que $F = \mathbb{R}^d$ (en prenant une base de F). Alors, si $B_F \subseteq B_1 \cup \cdots \cup B_N$, où $B_n = B(x_n, \varepsilon) = x_n + \varepsilon\, B_F$, on a $\lambda_d(B_F) \leqslant \sum_{n=1}^{N} \lambda_d(B_n)$. Mais, par l'invariance par translation et l'homogénéité de la mesutre de Lebesgue, on a $\lambda_d(B_n) = \varepsilon^d \lambda_d(B_F)$. On a donc $\lambda_d(B_F) \leqslant N\,\varepsilon^d \lambda_d(B_F)$. Mais $0 < \lambda_d(B_F) < +\infty$, car B_F est borné et d'intérieur non vide ; on peut donc simplifier, et l'on obtient $N \geqslant (1/\varepsilon)^d$.

2) Supposons que la boule unité B_E de E peut être recouverte par N boules $B_1 = B(x_1, \varepsilon), \ldots, B_N = B(x_N, \varepsilon)$ de E de rayon ε. Soit G un sous-espace E de dimension finie, arbitraire. Considérons l'espace F engendré par G et les vecteurs $x_1, \ldots, x_N$. Il est de dimension finie, disons d, et $B_F = B_E \cap F \subseteq (B_1 \cap F) \cup \cdots \cup (B_N \cap F)$. Mais, pour tout $n = 1, \ldots, N$, $x_n \in F$, par définition ; donc $B_n \cap F$ est la boule fermée de F de centre x_n et de rayon ε. Il résulte du 1) que $N \geqslant (1/\varepsilon)^d$, c'est-à-dire que $d \leqslant \log N/\log(1/\varepsilon)$. *A fortiori*, $\dim G \leqslant \log N/\log(1/\varepsilon)$. Ceci étant vrai pour tout sous-espace de dimension finie G de E, E lui-même doit être de dimension finie et $\dim E \leqslant \log N/\log(1/\varepsilon)$.

3) a) Le fait que les boules $B(x_i, \varepsilon/2)$ sont deux-à-deux disjointes résulte de la condition d'écartement $\|x_i - x_j\| > \varepsilon$ pour $i \neq j$: si $\|x - x_i\| \leqslant \varepsilon/2$ et $\|x - x_j\| \leqslant \varepsilon/2$, alors $\|x_i - x_j\| \leqslant \|x - x_i\| + \|x - x_j\| \leqslant \varepsilon$, d'où $i = j$. Ensuite, si $\|x - x_i\| \leqslant \varepsilon/2$, on a $\|x\| \leqslant \|x_i\| + (\varepsilon/2) \leqslant 1 + (\varepsilon/2)$; donc $\bigcup_{i=1}^{k} B\big(x_i, \frac{\varepsilon}{2}\big) \subseteq B\big(0, 1 + \frac{\varepsilon}{2}\big)$. Il en résulte, en utilisant la disjonction, que $k\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^d \lambda_d(B_E) \leqslant \big(1 + \frac{\varepsilon}{2}\big)^d \lambda_d(B_E)$, et donc que $k \leqslant \big(1 + \frac{2}{\varepsilon}\big)^d$.

b) Prenons un ensemble maximal de points $x_1, \ldots, x_k$ de B_E tels que $\|x_i - x_j\| > \varepsilon$ pour $i \neq j$. Alors B_E est recouvert par les boules $B(x_i, \varepsilon)$. En effet, si ce n'était pas le cas, on aurait un $x \in B_E$ dans aucune de ces boules ; mais cela voudrait dire que $\|x - x_i\| > \varepsilon$ pour tout $i = 1, \ldots, k$, et on aurait un ensemble $\{x, x_1, \ldots, x_k\}$ de $k+1$ points de B_E à distances mutuelles $> \varepsilon$, contredisant la maximalité de k. Par conséquent, par définition, $k \geqslant N(\varepsilon)$. Il résulte alors du a) que $N(\varepsilon) \leqslant \big(1 + \frac{2}{\varepsilon}\big)^d$.

c) Il résulte de b) que $d \geqslant \frac{\log N(\varepsilon)}{\log\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)}$, pour tout $\varepsilon \in]0,1[$. Donc $d \geqslant \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)}$. Mais $1/\varepsilon$ tend vers l'infini quand ε tend vers 0 ; donc $\log\big(1 + \frac{\varepsilon}{2}\big) \sim \log\frac{\varepsilon}{2} \sim \log\frac{1}{\varepsilon}$. Donc $d \geqslant \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)}$. D'autre part, on a vu au 1) que $N(\varepsilon) \geqslant (1/\varepsilon)^d$ pour $0 < \varepsilon < 1$; donc $d \leqslant \liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)}$. On a donc $d = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)}$.

Exercice 21

Considérons l'espace E de tous les polynômes de degré au plus 2013, restreints à l'intervalle $[\pi^{1874}, \pi^{1932}]$, muni de la norme uniforme. C'est un espace de dimension finie ; donc la norme $\|\,.\,\|_1$ est équivalente à la norme uniforme sur E. La condition sur les intégrales entraîne donc la bornitude de la suite $(P_n)_{n\geqslant 1}$, pour la norme uniforme. Les parties bornées des espaces normés de dimension finie étant relativement compactes, on peut extraire de $(P_n)_{n\geqslant 1}$ une sous-suite uniformément convergente sur $[\pi^{1874}, \pi^{1932}]$.

Exercice 22

1) Pour toute $f \in L^p(\mathbb{R})$, on sait que $\lim_{R\to+\infty} \int_{|x|>R} |f(x)|^p\,dx = 0$ (cela résulte directement du Théorème de convergence monotone), et que $\lim_{t\to 0} \|f_t - f\|_p = 0$.

Supposons que $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} B(f_k, \varepsilon/3)$.

Pour chaque $k = 1, 2, \ldots, n$, il existe $R_{k,\varepsilon} > 0$ et $\delta_{k,\varepsilon} > 0$ tels que :

$$\int_{|x|>R_{k,\varepsilon}} |f_k(x)|^p\,dx \leqslant \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^p \qquad \text{et} \qquad \|(f_k)_t - f_k\|_p \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{si } |t| \leqslant \delta_{k,\varepsilon}\,.$$

Posons $R_\varepsilon = \max_{1\leqslant k\leqslant n} R_{k,\varepsilon}$ et $\delta_\varepsilon = \min_{1\leqslant k\leqslant n} \delta_{k,\varepsilon}$.

Soit $f \in A$, arbitraire. Il existe $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tel que $\|f - f_k\|_p \leqslant \varepsilon/3$. Alors :

$$\begin{aligned}
\left[\int_{|x|>R_\varepsilon} |f(x)|^p\,dx\right]^{1/p} &\leqslant \left[\int_{|x|>R_\varepsilon} |f_k(x)|^p\,dx\right]^{1/p} + \left[\int_{|x|>R_\varepsilon} |f(x) - f_k(x)|^p\,dx\right]^{1/p} \\
&\leqslant \left[\int_{|x|>R_\varepsilon} |f_k(x)|^p\,dx\right]^{1/p} + \left[\int_{\mathbb{R}} |f(x) - f_k(x)|^p\,dx\right]^{1/p} \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \|f - f_k\|_p \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3} \leqslant \varepsilon\,,
\end{aligned}$$

et, pour $|t| \leqslant \delta_\varepsilon$ (puisqu'alors $|t| \leqslant \delta_{k,\varepsilon}$) :

$$\begin{aligned}
\|f_t - f\|_p &\leqslant \|f_t - (f_k)_t\|_p + \|(f_k)_t - f_k\|_p + \|f_k - f\|_p \\
&= 2\,\|f_k - f\|_p + \|(f_k)_t - f_k\|_p \leqslant 2\,\frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

2) a) On peut écrire :

$$[\varphi_\varepsilon(f)](x) = \frac{1}{\delta_\varepsilon}\left[\int_0^{x+\delta_\varepsilon} f(u)\,du - \int_0^x f(u)\,du\right].$$

La continuité de φ_ε résulte alors de la continuité de la fonction $F\colon x \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^x f(u)\,du$ (rappelons que la continuité de F vient, pour $p=1$, du Théorème de convergence dominée, et pour $1<p<\infty$, de l'inégalité de Hölder).

b) Utilisons le Théorème d'Ascoli. Considérons l'ensemble :

$$A_\varepsilon = \left\{[\varphi_\varepsilon(f)]_{|[-R,R]}\,;\ f \in A\right\}.$$

C'est une partie de $\mathscr{C}([-R,R])$ et il est uniformément borné. En effet, comme A est borné, il existe $M<\infty$ tel que $\|f\|_p \leqslant M$ pour toute $f \in A$, et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\big|[\varphi_\varepsilon(f)](x)\big| \leqslant \begin{cases} \frac{1}{\delta_\varepsilon}\,\|f\|_1 & \text{pour } p=1\,, \\ \frac{1}{\delta_\varepsilon}\,\|f\|_p\,\delta_\varepsilon^{1/q} = \frac{1}{\delta_\varepsilon^{1/p}}\,\|f\|_p & \text{pour } 1<p<\infty \end{cases}$$

(en utilisant l'inégalité de Hölder dans le second cas, q étant l'exposant conjugué de p), de sorte que les fonctions $\varphi_\varepsilon(f)$, pour $f \in A$, sont uniformément bornées sur $\mathbb{R}$, et en particulier sur $[-R,R]$.

D'autre part, A_ε est équicontinu sur $[-R,R]$. En effet, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
[\varphi_\varepsilon(f)](x) - [\varphi_\varepsilon(f)](x+h) &= \frac{1}{\delta_\varepsilon}\left[\int_x^{x+\delta_\varepsilon} f(t)\,dt - \int_{x+h}^{x+h+\delta_\varepsilon} f(t)\,dt\right] \\
&= \frac{1}{\delta_\varepsilon}\left[\int_x^{x+\delta_\varepsilon} f(t)\,dt - \int_x^{x+\delta_\varepsilon} f(u+h)\,du\right] \\
&= \frac{1}{\delta_\varepsilon}\int_x^{x+\delta_\varepsilon}[f(t) - f_{-h}(t)]\,dt\,;
\end{aligned}$$

donc, pour $p=1$: $\big|[\varphi_\varepsilon(f)](x) - [\varphi_\varepsilon(f)](x+h)\big| \leqslant \frac{1}{\delta_\varepsilon}\,\|f - f_{-h}\|_1$, et, pour $1<p<\infty$, par l'inégalité de Hölder :

$$\big|[\varphi_\varepsilon(f)](x) - [\varphi_\varepsilon(f)](x+h)\big| \leqslant \frac{1}{\delta_\varepsilon}\,\|f - f_{-h}\|_p\,\delta_\varepsilon^{1/q} = \frac{1}{\delta_\varepsilon^{1/p}}\,\|f - f_{-h}\|_p\,.$$

Alors, d'après la condition (ii), on a, pour tout $a>0$:

$$|h| \leqslant \delta_a \qquad \Longrightarrow \qquad \big|[\varphi_\varepsilon(f)](x) - [\varphi_\varepsilon(f)](x+h)\big| \leqslant \frac{1}{\delta_\varepsilon}\,a\,, \quad \forall f \in A\,.$$

Cela signifie que l'ensemble des $\varphi_\varepsilon(f)$, pour $f \in A$, est équicontinu sur $\mathbb{R}$; en particulier, A_ε est équicontinu sur $[-R,R]$.

c) Notons que $f(x) = \frac{1}{\delta_\varepsilon}\int_0^{\delta_\varepsilon} f(x)\,dt$ et que :

$$(\varphi_\varepsilon f)(x) = \frac{1}{\delta_\varepsilon}\int_0^{\delta_\varepsilon} f(x+t)\,dt\,.$$

Donc :

$$f(x) - (\varphi_\varepsilon f)(x) = \frac{1}{\delta_\varepsilon}\int_0^{\delta_\varepsilon}[f(x) - f(x+t)]\,dt\,.$$

• pour $p = 1$, on a, en utilisant le Théorème de Fubini-Tonelli :

$$\|f - \varphi_\varepsilon f\|_1 \leqslant \frac{1}{\delta_\varepsilon} \int_0^{\delta_\varepsilon} \left[\int_{\mathbb{R}} |f(x) - f(x+t)|\, dx \right] dt = \frac{1}{\delta_\varepsilon} \int_0^{\delta_\varepsilon} \|f - f_{-t}\|_1\, dt \leqslant \varepsilon\,,$$

car $|-t| = |t| \leqslant \delta_\varepsilon$ entraîne $\|f - f_{-t}\|_1 \leqslant \varepsilon$, par (ii).

• Pour $1 < p < \infty$, on a :

$$\|f - \varphi_\varepsilon f\|_p^p \leqslant \frac{1}{\delta_\varepsilon^p} \int_{\mathbb{R}} \left[\int_0^{\delta_\varepsilon} |f(x) - f(x+t)|\, dt \right]^p dx\,;$$

or, par l'inégalité de Hölder :

$$\int_0^{\delta_\varepsilon} |f(x) - f(x+t)|\, dt \leqslant \left[\int_0^{\delta_\varepsilon} |f(x) - f(x+t)|^p\, dt \right]^{1/p} \delta_\varepsilon^{1/q}\,;$$

donc, en utilisant le Théorème de Fubini-Tonelli :

$$\begin{aligned}\|f - \varphi_\varepsilon f\|_p^p &\leqslant \frac{1}{\delta_\varepsilon^p}\, \delta_\varepsilon^{1/q} \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} |f(x) - f(x+t)|^p\, dt \right] dx \\ &= \frac{1}{\delta_\varepsilon} \int_0^{\delta_\varepsilon} \left[\int_{\mathbb{R}} |f(x) - f(x+t)|^p\, dx \right] dt = \frac{1}{\delta_\varepsilon} \int_0^{\delta_\varepsilon} \|f - f_{-t}\|_p^p\, dt \leqslant \varepsilon\,,\end{aligned}$$

par (ii), puisque, pour $|-t| = |t| \leqslant \delta_\varepsilon$, on a $\|f - f_{-t}\|_p^p \leqslant \varepsilon^p$.

d) Prenons $R = R_\varepsilon$ dans b). L'ensemble A_ε étant précompact dans $\mathscr{C}([-R_\varepsilon, R_\varepsilon])$, il existe $f_1, \ldots, f_n \in A$ telles que $A_\varepsilon \subseteq \bigcup_{k=1}^n B_\infty\big(\varphi_\varepsilon f_k, \varepsilon/(2R_\varepsilon)^{1/p}\big)$ (les boules étant prises pour la norme uniforme sur $[-R_\varepsilon, R_\varepsilon]$).

Soit $f \in A$, arbitraire.

Comme $(\varphi_\varepsilon f)_{|[-R_\varepsilon, R_\varepsilon]} \in A_\varepsilon$, il existe $k \in \{1, \ldots, n\}$ tel que :

$$\sup_{|x| \leqslant R_\varepsilon} \big|(\varphi_\varepsilon f)(x) - (\varphi_\varepsilon f_k)(x)\big| \leqslant \frac{\varepsilon}{(2R_\varepsilon)^{1/p}}\,\cdot$$

On a :

$$\|f - f_k\|_p^p = \int_{|x| > R_\varepsilon} |f(x) - f_k(x)|^p\, dx + \int_{|x| \leqslant R_\varepsilon} |f(x) - f_k(x)|^p\, dx\,.$$

Or, d'une part :

$$\begin{aligned}\int_{|x|>R_\varepsilon} |f(x) - f_k(x)|^p\, dx &\leqslant \int_{|x|>R_\varepsilon} [|f(x)| + |f_k(x)|]^p\, dx \leqslant 2^p \int_{|x|>R_\varepsilon} [|f(x)|^p + |f_k(x)|^p]\, dx \\ &\quad \text{car pour } a, b \geqslant 0, \text{ on a } (a+b)^p \leqslant [2\max(a,b)]^p = 2^p \max(a^p, b^p) \leqslant 2^p(a^p + b^p) \\ &= 2^p \int_{|x|>R_\varepsilon} |f(x)|^p\, dx + 2^p \int_{|x|>R_\varepsilon} |f_k(x)|^p\, dx \\ &\leqslant 2^p \times 2\,\varepsilon^p\,,\end{aligned}$$

grâce à (i), vu que f et f_k sont dans A. D'autre part,

$$\begin{aligned}
\left[\int_{|x|\leqslant R_\varepsilon} |f(x)-f_k(x)|^p\,dx\right]^{1/p} &\leqslant \left[\int_{|x|\leqslant R_\varepsilon} |f(x)-(\varphi_\varepsilon f)(x)|^p\,dx\right]^{1/p} \\
&\qquad + \left[\int_{|x|\leqslant R_\varepsilon} |(\varphi_\varepsilon f)(x)-(\varphi_\varepsilon f_k)(x)|^p\,dx\right]^{1/p} \\
&\qquad\qquad + \left[\int_{|x|\leqslant R_\varepsilon} |(\varphi_\varepsilon f_k)(x)-f_k(x)|^p\,dx\right]^{1/p} \\
&\leqslant \left[\int_{\mathbb{R}} |f(x)-(\varphi_\varepsilon f)(x)|^p\,dx\right]^{1/p} \\
&\qquad + \left[2R_\varepsilon \sup_{|x|\leqslant R_\varepsilon} \left|(\varphi_\varepsilon f)(x)-(\varphi_\varepsilon f_k)(x)\right|^p\right]^{1/p} \\
&\qquad\qquad + \left[\int_{\mathbb{R}} |(\varphi_\varepsilon f_k)(x)-f_k(x)|^p\,dx\right]^{1/p} \\
&\leqslant \|f-\varphi_\varepsilon f\|_p + \left(2R_\varepsilon\,\frac{\varepsilon^p}{2R_\varepsilon}\right)^{1/p} + \|f_k-\varphi_\varepsilon f_k\|_p \\
&\leqslant \varepsilon+\varepsilon+\varepsilon = 3\varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Par conséquent $\|f-f_k\|_p^p \leqslant 2.2^p\varepsilon^p + 3^p\varepsilon^p \leqslant 3^{p+1}\varepsilon^p$, c'est-à-dire que $\|f-f_k\|_p \leqslant 3.3^{1/p}\varepsilon$. Cela signifie, puisque $f\in A$ était arbitraire, que $A \subseteq \bigcup_{k=1}^n B(f_k, 3.3^{1/p}\varepsilon)$. Comme $\varepsilon>0$ était arbitraire, A est bien précompact dans $L^p(\mathbb{R})$.

Exercice 23

1) Il s'agit de montrer que f est intégrable sur $]0,x]$. On a, en utilisant l'inégalité de Hölder pour l'espace mesuré $]0,x]$:

$$\begin{aligned}
\int_0^x |f(t)|\,dt &\leqslant \left(\int_0^x |f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}\left(\int_0^x 1^q\,dt\right)^{1/q} = \left(\int_0^x |f(t)|^p\,dt\right)^{1/p} x^{1/q} \\
&\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}_+^*} |f(t)|^p\,dt\right)^{1/p} x^{1/q} = \|f\|_p\,x^{1/q} < +\infty\,,
\end{aligned}$$

ce qui prouve l'intégrabilité de f sur $]0,x]$ et l'existence de $(Tf)(x)$. De plus $|(Tf)(x)| \leqslant \frac{1}{x}\int_0^x |f(t)|\,dt \leqslant \frac{1}{x}\,\|f\|_p\,x^{1/q} = x^{-1/p}\|f\|_p$.

De même, si $0<x<x'$, on a $|(Tf)(x')-(Tf)(x)| \leqslant \frac{1}{x}\int_x^{x'} |f(t)|\,dt \leqslant \|f\|_p(x'-x)^{1/p}$, ce qui prouve que Tf est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) Utilisons l'inégalité du 1), en remplaçant f par $f-g$; on obtient $|(Tg)(x)-(Tf)(x)| = |[T(g-f)](x)| \leqslant x^{-1/p}\|g-f\|_p$.

3) a) • Soit $0<\alpha<A$ tels que le support de g soit contenu dans $[\alpha,A]$. Comme $g(x)=0$ pour $0<x\leqslant\alpha$, g se prolonge en une fonction continue sur $[0,+\infty[$, en posant $g(0)=0$. Alors $|g|$ est aussi continue sur $\mathbb{R}_+$ et le Théorème fondamental du Calcul Intégral dit que la fonction $P\colon \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ définie $P(x)=\int_0^x |g(t)|\,dt$ est continûment dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $P'(x)=|g(x)|$ pour tout $x\geqslant 0$. La fonction G est par conséquent continûment dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $G'(x)=\frac{1}{x}\,|g(x)| - \frac{1}{x^2}\,P(x) = \frac{1}{x}\,|g(x)| - \frac{1}{x}\,G(x)$.

• Comme $|g(t)|=0$ pour $0\leqslant t\leqslant\alpha$, on a évidemment $G(x)=0$ pour $0<x\leqslant\alpha$.

• Il est clair aussi que $0\leqslant G(x)\leqslant \frac{1}{x}\int_{\mathbb{R}_+^*} |g(t)|\,dt = \frac{1}{x}\,\|g\|_1$.

On a donc $0\leqslant x[G(x)]^p \leqslant x^{1-p}\|g\|_1^p \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$ (car $1-p<0$), de sorte que $\lim\limits_{x\to+\infty} x[G(x)]^p = 0$.

Pour finir, on a aussi $0 \leqslant [G(x)]^p \leqslant \|g\|_1^p \frac{1}{x^p}$ pour tout $x > 0$. Donc $\int_0^{+\infty} [G(x)]^p\, dx = \int_\alpha^{+\infty} [G(x)]^p\, dx \leqslant \|g\|_1^p \int_\alpha^{+\infty} \frac{dx}{x^p} < +\infty$, et G^p est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (elle est mesurable car continue).

b) La relation $G'(x) = \frac{1}{x}\,|g(x)| - \frac{1}{x}\,G(x)$ donne :

$$\int_0^x x\,G'(x)\,[G(x)]^{p-1}\,dx + \int_0^x [G(x)]^p\,dx = \int_0^x |g(x)|\,[G(x)]^{p-1}\,dx\,.$$

En intégrant par parties la première intégrale, on a :

$$\int_0^x x\,G'(x)\,[G(x)]^{p-1}\,dx = \left[\frac{1}{p}\,x\,[G(x)]^p\right]_0^{+\infty} - \frac{1}{p}\int_0^{+\infty} [G(x)]^p\,dx = -\frac{1}{p}\int_0^{+\infty} [G(x)]^p\,dx\,,$$

car G est nulle au voisinage de 0 et $\lim_{x\to+\infty} x\,[G(x)]^p = 0$. On obtient donc :

$$\left(1 - \frac{1}{p}\right)\int_0^{+\infty} [G(x)]^p\,dx = \int_0^x |g(x)|\,[G(x)]^{p-1}\,dx\,. \qquad (*)$$

c) L'inégalité de Hölder pour l'intégrale de droite donne :

$$\int_0^x |g(x)|\,[G(x)]^{p-1}\,dx \leqslant \left(\int_0^{+\infty} |g(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\left(\int_0^{+\infty} [G(x)^{p-1}]^q\,dx\right)^{1/q} = \|g\|_p\|G\|_p^{p/q}$$

(on a $(p-1)q = p$ car $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$).

En reportant dans $(*)$, on obtient $\left(1 - \frac{1}{p}\right)\|G\|_p^p \leqslant \|g\|_p\|G\|_p^{p/q}$, d'où $\left(1 - \frac{1}{p}\right)\|G\|_p \leqslant \|g\|_p$, puisque $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$ (on peut diviser par $\|G\|_p^{p/q}$ si $\|G\|_p \neq 0$; mais l'inégalité est évidemment vraie si $\|G\|_p = 0$).

Comme $|(Tg)(x)| \leqslant G(x)$, on en déduit, d'une part, que $Tg \in L^p(\mathbb{R}_+^*)$ et, d'autre part, que $\|Tg\|_p \leqslant \|G\|_p \leqslant \frac{p}{p-1}\,\|g\|_p$.

4) On sait (voir le cours d'Intégration) que l'espace $\mathscr{K}(\mathbb{R}_+^*)$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$ à support compact est dense dans $L^p(\mathbb{R}_+^*)$. Voyons néanmoins comment on peut le déduire du Théorème III.1.2 du Chapitre III, disant que $\mathscr{K}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$, en considérant $L^p(\mathbb{R}_+^*)$ comme un sous-espace de $L^p(\mathbb{R})$ (chaque fonction de $L^p(\mathbb{R}_+^*)$ étant prolongée par 0 sur $]-\infty, 0]$). Soit $f \in L^p(\mathbb{R}_+^*) \subseteq L^p(\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $h \in \mathscr{K}(\mathbb{R})$ telle que $\int_{\mathbb{R}} |f(x) - h(x)|^p\,dx \leqslant (\varepsilon/2)^p$. *A fortiori*, on a $\int_{\mathbb{R}_+^*} |f(x) - h(x)|^p\,dx \leqslant (\varepsilon/2)^p$. Il faut modifier h en g continue et à support compact contenu dans $]0, +\infty[$. h étant continue sur $\mathbb{R}$ et à support compact, elle est bornée : $|h(x)| \leqslant M < +\infty$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On peut supposer $M > 0$. Soit $\alpha > 0$, qui sera précisé après. On pose $g(x) = 0$ si $0 < x \leqslant \alpha$ et $g(x) = h(x)$ si $x \geqslant 2\alpha$, et on prend g affine sur $[\alpha, 2\alpha]$. Cette fonction g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et son support est contenu dans $[\alpha, \beta]$ (où β est un majorant du support de h). De plus $\|g\|_\infty \leqslant \|h\|_\infty \leqslant M$. On a :

$$\begin{aligned}\|f - g\|_p &\leqslant \|f - h\|_p + \|h - g\|_p \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \left(\int_0^{2\alpha} |h(x) - g(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \left(\int_0^{2\alpha} (2M)^p\,dx\right)^{1/p} = \frac{\varepsilon}{2} + (2M)(2\alpha)^{1/p} \leqslant \varepsilon\,,\end{aligned}$$

en ayant pris $\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{4M}\right)^p$. Cela prouve la densité de $\mathscr{K}(\mathbb{R}_+^*)$ dans $L^p(\mathbb{R}_+^*)$.

5) Soit $f \in L^p(\mathbb{R}_+^*)$; par le 4), il existe une suite de fonctions $g_n \in \mathscr{K}(\mathbb{R}_+^*)$ telles que $\|f - g_n\|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Le 2) assure que $(Tg_n)(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} (Tf)(x)$ pour tout $x > 0$; donc le Lemme

de Fatou donne :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}_+^*} |(Tf)(x)|^p\, dx &\leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}_+^*} |(Tg_n)(x)|^p\, dx = \liminf_{n\to\infty} \|Tg_n\|_p^p \\ &\leqslant \liminf_{n\to\infty} \Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p \|g_n\|_p^p \quad \text{par le 3) c)} \\ &= \Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p \|f\|_p^p ,\end{aligned}$$

d'où l'inégalité de Hardy.

6) Pour $A > 1$, on prend $f(x) = 1/x^{1/p}$ pour $1 \leqslant x \leqslant A$ et 0 sinon ; on a $\|f\|_p = (\log A)^{1/p}$. D'autre part, on a $(Tf)(x) = 0$ pour $0 < x < 1$; $(Tf)(x) = \frac{p}{p-1} \frac{x^{1-1/p}-1}{x} \geqslant \frac{p}{p-1} x^{-1/p}$ si $1 \leqslant x \leqslant A$, et $(Tf)(x) = \frac{p}{p-1} \frac{A^{1-1/p}-1}{x} \geqslant \frac{p}{p-1} \frac{A^{1-1/p}}{x}$ si $x \geqslant A$. Donc

$$\begin{aligned}\|Tf\|_p^p = \int_0^{+\infty} |(Tf)(x)|^p\, dx &\geqslant \Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p \Big[\int_1^A \frac{dx}{x} + A^{p-1} \int_A^{+\infty} \frac{dx}{x^p}\Big] \\ &= \Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p \Big(\log A + A^{p-1} \frac{1}{p-1}\, \frac{1}{A^{p-1}}\Big) = \Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p \Big(\log A + \frac{1}{p-1}\Big),\end{aligned}$$

de sorte que $\frac{\|Tf\|_p}{\|f\|_p} \xrightarrow[A\to+\infty]{} \frac{p}{p-1}$.

7) Si $f \in L^1(\mathbb{R}_+^*)$ est telle que $f(t) > 0$ pour tout $t > 0$, on a, en utilisant le Théorème de Fubini-Tonelli :

$$\int_0^{+\infty} (Tf)(x)\, dx = \int_0^{+\infty} \Big[\int_0^x f(t)\, dt\Big] \frac{dx}{x} = \int_0^{+\infty} \Big[\int_t^{+\infty} \frac{dx}{x}\Big] f(t)\, dt = +\infty ;$$

donc Tf n'est même pas intégrable (on peut noter que Tf est mesurable car elle est continue, pour toute $f \in L^1(\mathbb{R}_+^*)$; cela se voit en utilisant le Théorème de convergence dominée).

Exercice 24

1) La boule unité Q de $(\mathbb{R}^2, \|\,.\,\|_\infty)$ est formée des points $x = (u,v) \in \mathbb{R}^2$ tels que $-1 \leqslant u \leqslant 1$ et $-1 \leqslant v \leqslant 1$. Si $-1 < u < 1$, le point (u,v) n'est pas extrémal car on peut trouver $a > 0$ tel que $-1 < u - a < u < u + a < 1$, de sorte que $(u-a,v), (u+a,v) \in Q$, alors que $(u,v) = \frac{1}{2}\,[(u-a,v) + (u+a,v)]$. De même si $-1 < v < 1$.

Les seuls points extrémaux de Q possibles sont donc $(-1,-1), (-1,1), (1,-1), (1,1)$. Vérifions qu'ils sont bien extrémaux. Par symétrie, il suffit de le faire pour $(1,1)$. Pour cela, il suffit d'observer que l'égalité $(1,1) = \frac{(u,v)+(s,t)}{2} = \big(\frac{u+s}{2}, \frac{v+t}{2}\big)$ avec $|u|, |v|, |s|, |t| \leqslant 1$ n'est possible que si $u = v = s = t = 1$.

2) Supposons que $\big\|\frac{x+y}{2}\big\| = 1$, avec $\|x\| = \|y\| \leqslant 1$, et utilisons l'*identité du parallélogramme* : $\|x\|^2 + \|y\|^2 = 2\big(\big\|\frac{x+y}{2}\big\|^2 + \big\|\frac{x-y}{2}\big\|^2\big)$; on obtient $2 \geqslant 2\big(1 + \big\|\frac{x-y}{2}\big\|^2\big)$, ce qui n'est possible que si $x = y$.

3) Si x_0 est dans l'intérieur du convexe C, il existe $r > 0$ tel que $B(x_0, r) \subseteq C$. Prenons $y \in E$ de norme 1. Alors, puisque $x_0 + ry, x_0 - ry \in B(x_0, r)$ et $x_0 = \frac{1}{2}[(x_0 + ry) + (x_0 - ry)]$, x_0 n'est pas extrémal dans C.

4) Soit $x \in c_0$ tel que $\|x\|_\infty \leqslant 1$. Comme $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, il existe $N \geqslant 1$ tel que $|x_n| \leqslant 1/2$ pour $n \geqslant N + 1$. Prenons $y_n = z_n = x_n$ pour $1 \leqslant n \leqslant N$ et $y_n = x_n + 2^{-n}$ et $z_n = x_n - 2^{-n}$ pour $n \geqslant N + 1$. On a $y, z \in c_0$ et $\|y\|_\infty \leqslant 1$, $\|z\|_\infty \leqslant 1$, et $x = \frac{1}{2}\,(y + z)$. Donc x n'est pas extrémal dans la boule unité de c_0.

5) Soit $f \in L^1(0,1)$ tel que $\|f\|_1 \leqslant 1$. D'après le 3), on peut supposer que $\|f\|_1 = 1$. L'application définie par $F(x) = \int_0^x |f(t)|\, dt$ est continue, d'après le Théorème de convergence

dominée (ou le Théorème de convergence monotone), et l'on a $F(0) = 0$ et $F(1) = 1$. Il existe donc, par le Théorème des valeurs intermédiaires, un $x_0 \in [0,1]$ tel que $F(x_0) = 1/2$. Considérons alors $g = 2\,f\mathbb{1}_{[0,x_0]}$ et $h = 2\,f\,\mathbb{1}_{[x_0,1]}$. On a $\|g\|_1 = 2\int_0^{x_0} |f(t)|\,dt = 2\,F(x_0) = 1$ et $\|h\|_1 = 2\int_{x_0}^1 |f(t)|\,dt = 2[F(1) - F(x_0)] = 1$. Comme $f = \frac{1}{2}\,(g+h)$ (presque partout), f n'est pas extrémal dans la boule unité de $L^1([0,1])$.

Exercice 25

1) T étant un homomorphisme du groupe additif $(X,+)$ dans le groupe additif $(Y,+)$, on a $T(nu) = n\,T(u)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $u \in X$. Rappelons pourquoi. Tout d'abord, $T(0) = 0$ car $T(0) = T(0+0) = T(0) + T(0)$. On montre ensuite par récurrence que $T(nu) = n\,T(u)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: c'est vrai pour $n = 0$, comme on vient de le voir, et si c'est vrai pour un entier $n \geqslant 0$, alors $T\big((n+1)\,u\big) = T(nu+u) = T(nu)+T(u) = n\,T(u)+T(u)$, en utilisant l'hypothèse de récurrence, d'où $T\big((n+1)\,u\big) = (n+1)\,T(u)$, de sorte que la propriété est vraie pour l'entier successeur $(n+1)$. Elle est donc vraie, par récurrence, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. Ensuite, comme $T(-v) = -T(v)$ pour tout $v \in X$, car $T(v)+T(-v) = T\big(v+(-v)\big) = T(0) = 0$, on a, pour tout entier $n \leqslant -1$, $T(nu) = -T\big((-n)u\big) = -(-n)\,T(u)$, car $-n \in \mathbb{N}^*$. On a donc bien $T(nu) = nT(u)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Maintenant, si $r \in \mathbb{Q}$, il s'écrit $r = p/q$, avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. On a, pour tout $u \in X$, $q\,T(ru) = T(qru) = T(pu) = p\,T(u)$; donc $T(ru) = (p/q)T(u) = rT(u)$.

Finalement, si $\lambda \in \mathbb{R}$, il existe une suite de rationnels r_n convergeant vers λ. Alors, puisque T est continue, $T(\lambda u) = T\big(\lim_{n\to\infty} r_n u\big) = \lim_{n\to\infty} T(r_n u) = \lim_{n\to\infty} r_n T(u) = \lambda T(u)$.

2) T n'est évidemment pas linéaire puisque $T(1,0,0,\ldots) = (1,1,0,0,\ldots)$, alors que $T(-1,0,0,\ldots) = (1,-1,0,0,\ldots) \neq -T(1,0,0,\ldots)$.

On a $\|T(x) - T(y)\|_\infty = \max\{\big|\,|x_1| - |y_1|\,\big|, \sup_{n\geqslant 1} |x_n - y_n|\} \geqslant \sup_{n\geqslant 1} |x_n - y_n| = \|x-y\|_\infty$. D'autre part, grâce à l'inégalité $\big|\,|x_1|-|y_1|\,\big| \leqslant |x_1-y_1|$, on a aussi $\|T(x)-T(y)\|_\infty = \max\{\big|\,|x_1|-|y_1|\,\big|, \sup_{n\geqslant 1}|x_n-y_n|\} \leqslant \max\{|x_1-y_1|, \sup_{n\geqslant 1}|x_n-y_n|\} = \sup_{n\geqslant 1}|x_n-y_n| = \|x-y\|_\infty$. Donc T est une isométrie.

On peut noter que, puisque T est continue (toute isométrie est continue), elle ne peut être additive, par le 1), mais cela se voit facilement : $T(1,0,0,\ldots)+T(-1,0,0,\ldots) = (2,0,0,\ldots) \neq (0,0,\ldots) = T(0,0,\ldots)$.

3) a) Pour $u \in K_0(a,b)$, posons $v = u - \frac{a+b}{2}$. On a $u - a = v + \frac{b-a}{2}$ et $u - b = v - \frac{b-a}{2}$. Donc $K_0' = K_0(a,b) - \frac{a+b}{2} = \{v \in E\,;\ \|v - \frac{b-a}{2}\| = \|v + \frac{b-a}{2}\| = \frac{\|b-a\|}{2}\}$. Alors, $K_{n+1}' = K_{n+1}(a,b) - \frac{a+b}{2} = \{v \in K_n'\,;\ K_n' \subseteq B(v, d_n/2)\}$.

Il est clair que K_0' est symétrique par rapport à 0. Supposons K_n' symétrique par rapport à 0, et soit $v \in K_{n+1}'$. Pour tout $u \in K_n'$, on a $-u \in K_n'$, par hypothèse de récurrence ; donc $-u \in B(v, d_n/2)$, c'est-à-dire $\|u + v\| \leqslant d_n/2$, ou encore $u \in B(-v, d_n/2)$. Ainsi $K_n' \subseteq B(-v, d_n/2)$, et donc $-v \in K_{n+1}'$. Par récurrence, tous les K_n' sont donc symétrique par rapport à 0.

Par ailleurs, il est clair que $0 \in K_0'$. Supposons que $0 \in K_n'$. Pour tout $u \in K_n'$, on a $2\,\|u\| = \|u - (-u)\| \leqslant d_n$, puisque $-u \in K_n'$, d'après ce que l'on vient de montrer ; donc $\|u\| \leqslant d_n/2$, c'est-à-dire que $u \in B(0, d_n/2)$. Ainsi $K_n' \subseteq B(0, d_n/2)$. Comme on a supposé que $0 \in K_n'$, cela signifie que $0 \in K_{n+1}'$. Par récurrence, on a donc bien $0 \in K_n'$ pour tout $n \geqslant 0$.

b) Soit $u_1, u_2 \in K_{n+1}(a,b)$. Alors $K_n(a,b) \subseteq B(u_1, d_n/2)$. Comme $u_2 \in K_{n+1}(a,b) \subseteq K_n(a,b)$, on a donc $\|u_1 - u_2\| \leqslant d_n/2$. Par conséquent, $\operatorname{diam} K_{n+1}(a,b) \leqslant d_n/2$.

c) Il résulte de a) que $\frac{a+b}{2} \in \bigcap_{n\geqslant 0} K_n(a,b)$ et du b) que cette intersection a un diamètre nul ; elle est donc réduite à ce point $\frac{a+b}{2}$.

4) T étant une isométrie surjective, elle est bijective et son inverse est aussi une isométrie. Donc $\operatorname{diam} T[K_n(x,y)] = \operatorname{diam} K_n(x,y)$ pour tout $n \geqslant 0$. Cela implique aussi que $T[K_0(x,y)] = K_0\big(T(x), T(y)\big)$ (car $\|T(u) - T(x)\| = \|u - x\|$, $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$

et $\|T(u) - T(y)\| = \|u - y\|$). Supposons que $T[K_n(x,y)] = K_n\big(T(x),T(y)\big)$. Alors $u \in K_{n+1}(x,y)$ si et seulement si $K_n(x,y) \subseteq B(u, d_n/2)$; cela équivaut à $K_n\big(T(x),T(y)\big) = T[K_n(x,y)] \subseteq T[B(u,d_n/2)] = B(Tu, d_n/2)$, ce qui signifie que $T(u) \in K_{n+1}\big(T(x),T(y)\big)$. Ainsi $T[K_{n+1}(x,y)] = K_{n+1}\big(T(x),T(y)\big)$. Par récurrence, on a montré que $T[K_n(x,y)] = K_n\big(T(x),T(y)\big)$ pour tout $n \geqslant 0$.

Il résulte alors du 3) que $\big\{\frac{T(x)+T(y)}{2}\big\} = \bigcap_{n\geqslant 0} K_n\big(T(x),T(y)\big) = \bigcap_{n\geqslant 0} T[K_n(x,y)] = T\big[\bigcap_{n\geqslant 0} K_n(x,y)\big] = T\big(\{\frac{x+y}{2}\}\big) = \big\{T\big(\frac{x+y}{2}\big)\big\}$, de sorte que $T\big(\frac{x+y}{2}\big) = \frac{T(x)+T(y)}{2}$.

5) En particulier, puisque $T(0) = 0$, on a $T\big(\frac{x}{2}\big) = \frac{T(x)}{2}$ pour tout $x \in X$. Alors, en remplaçant x par $x+y$, on a $T\big(\frac{x+y}{2}\big) = \frac{T(x+y)}{2}$. Comme $T\big(\frac{x+y}{2}\big) = \frac{T(x)+T(y)}{2}$, on obtient $T(x+y) = T(x) + T(y)$. Il résulte alors du 1) (puisque les isométries sont continues) que T est linéaire.

XI.2. Exercices du Chapitre II

Exercice 1

On a, en développant, $\big\| \|y\|\, x - \|x\|\, y \big\|^2 = \big\|\|y\|\,x\big\|^2 - 2\,\|x\|\,\|y\|\,(x \mid y) + \big\|\|x\|\,y\big\|^2 = (\|x\|\,\|y\|)^2 - 2\,\|x\|\,\|y\|\,(x \mid y) + (\|x\|\,\|y\|)^2$. Cette valeur étant positive, on obtient $(x \mid y) \leqslant \|x\|\,\|y\|$, en divisant par $\|x\|\,\|y\|$ (si ce produit n'est pas nul ; mais s'il l'est, on a $x = 0$ ou $y = 0$, et alors $(x \mid y) = 0$; l'inégalité obtenue reste donc vraie). En remplaçant x par $-x$, on a aussi $-(x \mid y) \leqslant \|x\|\,\|y\|$. Par conséquent, $|(x \mid y)| \leqslant \|x\|\,\|y\|$.

Exercice 2

1) a) On utilise l'identité du parallélogramme ; on a $\|x_1 + x_2 + 2y\|^2 + \|x_1 - x_2\|^2 = \|(x_1 + y) + (x_2 + y)\|^2 + \|(x_1 + y) - (x_2 + y)\|^2 = 2\,(\|x_1 + y\|^2 + \|x_2 + y\|^2)$. De même, on a $\|x_1 + x_2 - 2y\|^2 + \|x_1 - x_2\|^2 = \|(x_1 - y) + (x_2 - y)\|^2 + \|(x_1 - y) - (x_2 - y)\|^2 = 2\,(\|x_1 - y\|^2 + \|x_2 - y\|^2)$.

b) Soustrayons membre à membre ; on obtient : $\|x_1 + x_2 + 2y\|^2 - \|x_1 + x_2 - 2y\|^2 = 2\,(\|x_1 + y\|^2 + \|x_2 + y\|^2 - \|x_1 - y\|^2 - \|x_2 - y\|^2$, d'où $B(x_1, x_2, 2y) = 2\,[B(x_1, y) + B(x_2, y)]$.

2) En prenant $x_2 = 0$ et $x_1 = x$, on a $B(x, 2y) = 2\,B(x, y)$. Alors $2\,B(u + u', v) = B(u + u', 2v) = 2\,[B(u, v) + B(u', v)]$, d'où $B(u + u', v) = B(u, v) + B(u', v)$.

3) Pour $v \in H$ fixé, considérons l'application $\varphi_v\colon H \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi_v(u) = B(u, v)$. Il résulte du 3) que $\varphi_v(u + u') = \varphi_v(u) + \varphi_v(u')$ pour tous $u, u' \in H$. Comme φ_v est continue : si $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} u$, alors $\|u_n + v\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \|u + v\|$ et $\|u_n - v\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \|u - v\|$; donc $\varphi_v(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi_v(u)$, il résulte du 1) de l'Exercice 25 que φ_v est linéaire. Donc B est linéaire par rapport à la première variable. Comme $B(u, v) = B(v, u)$, B est une forme bilinéaire symétrique. Comme $B(u, u) = \|u\|^2$, elle est définie positive. C'est donc un produit scalaire sur H, et l'on vient de voir que la norme associée est la norme donnée sur E.

Exercice 3

1) Notons d'abord que, puisque $T(0) = 0$, on a $\|Tx\| = \|x\|$ pour tout $x \in H$. Ensuite, comme $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,(x \mid y)$, on a $(x \mid y) = \frac{1}{2}\,[\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2]$. On obtient $\big(T(x) \mid T(y)\big) = \frac{1}{2}\,[\|T(x) + T(y)\|^2 - \|T(x)\|^2 - \|T(y)\|^2] = \frac{1}{2}\,[\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2] = (x \mid y)$.

2) On obtient alors $\|T(x+y) - T(x) - T(y)\|^2 = \|T(x+y)\|^2 + \|T(x)\|^2 + \|T(y)\|^2 - 2\,\big(T(x+y) \mid T(x)\big) - 2\,\big(T(x+y) \mid T(y)\big) + 2\,\big(T(x) \mid T(y)\big) = \|x+y\|^2 + \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\,(x+y \mid x) - 2\,(x+y \mid y) + 2\,(x \mid y) = \|(x+y) - x - y)\|^2 = 0$; donc $T(x+y) = T(x) + T(y)$. Il résulte du 1) de l'Exercice 25 du Chapitre I (puisque T est clairement continue) que T est linéaire.

Exercice 4

Pour tous $n > k \geqslant 1$, on a $\left\| \sum_{j=k}^{n} u_j \right\|^2 = \sum_{j=k}^{n} \|u_j\|^2$, par orthogonalité. Donc la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est de Cauchy dans l'espace de Hilbert si et seulement si la série $\sum_{n\geqslant 1} \|u_n\|^2$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$. D'où le résultat.

Exercice 5

On le montre par récurrence. Pour $n = 1$, c'est évident : $\|x_1\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|x_1\|^2 + \|-x_1\|^2\right)$. Supposons l'égalité vraie à l'ordre n. On a alors :

$$\sum_{k=1}^{n+1} \|x_k\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2 + \|x_{n+1}\|^2 = \frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon_k=\pm 1} \left\| \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k x_k \right\|^2 + \frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon_k=\pm 1} \|x_{n+1}\|^2$$

(en utilisant l'hypothèse de récurrence, et, pour le second terme, le fait qu'il y a 2^n uplets $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ avec $\varepsilon_k = \pm 1$) ; donc

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \|x_k\|^2 &= \frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon_k=\pm 1} \left(\left\| \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k x_k \right\|^2 + \|x_{n+1}\|^2 \right) \\
&= \frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon_k=\pm 1} \frac{1}{2} \left(\left\| \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k x_k + x_{k+1} \right\|^2 + \left\| \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k x_k - x_{k+1} \right\|^2 \right) \\
&\qquad \text{(par l'identité du parallélogramme } \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)\text{)} \\
&= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{\varepsilon_k=\pm 1, \varepsilon_{n+1}=\pm 1} \left\| \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k x_k + \varepsilon_{n+1} x_{k+1} \right\|^2,
\end{aligned}$$

ce qui est l'identité à l'ordre $n + 1$.

Supposons qu'il existe un isomorphisme $T\colon \ell_p \to \ell_2$. Il existe alors deux constantes $0 < a < b < +\infty$ telles que $a\,\|x\|_p \leqslant \|Tx\|_2 \leqslant b\,\|x\|_p$ pour tout $x \in \ell_p$. Considérons la base canonique $(e_n)_{n\geqslant 1}$ de ℓ_p. On a :

$$a\,\frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon_k=\pm 1} \left\| \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k e_k \right\|_p^2 \leqslant \frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon_k=\pm 1} \left\| \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k T e_k \right\|_2^2 \leqslant b\,\frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon_k=\pm 1} \left\| \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k e_k \right\|_p^2. \tag{1}$$

Mais, par l'identité du parallélogramme généralisée,

$$\frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon_k=\pm 1} \left\| \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k T e_k \right\|_2^2 = \sum_{k=1}^{n} \|Te_k\|_2^2;$$

donc

$$a\,n = a \sum_{k=1}^{n} \|e_k\|_p^2 \leqslant \frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon_k=\pm 1} \left\| \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k T e_k \right\|_2^2 \leqslant b \sum_{k=1}^{n} \|e_k\|_p^2 = b\,n\,. \tag{2}$$

Combinant (1) et (2), on obtient $an^{2/p} \leqslant bn$ et $an \leqslant bn^{2/p}$. Or la premiře inégalité n'est possible, pour tout $n \geqslant 1$ que si $p \geqslant 2$ et la seconde, que si $p \leqslant 2$. Donc le seul cas possible est $p = 2$.

Remarque. Pour $p = \infty$, le résultat est vrai aussi, puisque ℓ_∞ n'est pas séparable, alors que ℓ_2 l'est. En fait, avec le même raisonnement, on voit que ℓ_∞ n'est isomorphe à aucun espace de Hilbert (voir l'Exercice 13 du Chapitre IV). Le même raisonnement montre que c_0 n'est pas isomorphe à ℓ_2.

Exercice 6

On a : $\|x+e^{i\theta}y\|^2 = \|x\|^2+2\,\mathrm{Re}\,(x \mid e^{i\theta}y)+\|e^{i\theta}y\|^2 = \|x\|^2+2\,\mathrm{Re}\,[e^{-i\theta}(x \mid y)]+\|y\|^2$ (car $|e^{i\theta}| = 1$), et $\|x+i\,e^{i\theta}y\|^2 = \|x\|^2+2\,\mathrm{Re}\,[i\,e^{-i\theta}(x \mid y)]+\|y\|^2 = \|x\|^2+2\,\mathrm{Im}\,[e^{-i\theta}(x \mid y)]+\|y\|^2$. Donc

$$2\,(x \mid y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\big[\|x+e^{i\theta}y\|^2 + i\,\|x+i\,e^{i\theta}y\|^2\big]\,e^{i\theta}\,d\theta\,,$$

puisque $\int_0^{2\pi} e^{i\theta}\,d\theta = 0$. Comme $i\,e^{i\theta} = e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}$, le changement de variable $t = \theta + \frac{\pi}{2}$ donne $\int_0^{2\pi} i\,\|x+i\,e^{i\theta}y\|^2\,e^{i\theta}\,d\theta = \int_0^{2\pi}\|x+e^{it}y\|^2\,e^{it}\,dt$, et l'on obtient bien la formule $(x \mid y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|x+e^{i\theta}y\|^2\,e^{i\theta}\,d\theta$.

Exercice 7

1) On sait que $\{a\}^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de H. Par définition, on a donc $d(x,\{a\}^\perp)) = \|x - P(x)\|$, où $P(x)$ est la projection orthogonale de x sur $\{a\}^\perp$. Écrivons x dans la décomposition orthogonale de H : $H = \mathbb{K}\,a \oplus \{a\}^\perp$; on a $x = ta + P(x)$, avec $t \in \mathbb{K}$. Comme $P(x) \perp a$, on a $(x \mid a) = (ta \mid a) = t\,\|a\|^2$. Il en résulte, puisque $\|x - P(x)\| = \|ta\|$, que $d(x,\{a\}^\perp)) = \frac{|(x|a)|}{\|a\|}$.

2) a) Cela résulte de l'*inégalité de Cauchy-Schwarz* :

$$\int_0^1 |f(t)|\,dt \leqslant \left(\int_0^1 \mathbb{1}^2(t)\,dt\right)^{1/2}\left(\int_0^1 |f(t)|^2\,dt\right)^{1/2} = \|f\|_2 < +\infty.$$

b) Puisque $\left|\int_0^1 f(t)\,dt\right| \leqslant \int_0^1 |f(t)|\,dt \leqslant \|f\|_2$, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz (voir le a) ci-dessus), il s'ensuit que l'application $f \in L^2([0,1]) \mapsto \int_0^1 f(t)\,dt$ est linéaire continue. Comme F est son noyau, c'est un sous-espace vectoriel fermé.

c) Pour toute $f \in L^2([0,1])$, on a $\int_0^1 f(t)\,dt = (f \mid \mathbb{1})$; donc $F = \{\mathbb{1}\}^\perp$. Donc $F^\perp = \{\mathbb{1}\}^{\perp\perp}$ est le sous-espace vectoriel fermé engendré par $\mathbb{1}$, c'es-à-dire le sous-espace vectoriel fermé constitué par les fonctions constantes $a\mathbb{1}$, pour $a \in \mathbb{K}$.

d) Puisque $F = \{\mathbb{1}\}^\perp$, on a, par la question 1) : $d(f,F) = \frac{|(f|\mathbb{1})|}{\|\mathbb{1}\|_2} = \int_0^1 f(t)\,dt$. Pour $f(t) = e^t$, cela donne $d(f,F) = e - 1$.

Exercice 8

Pour tous $x, y \in H$, on a $(Tx \mid y) = (x \mid T^*y)$. Or $y \in \ker T^*$ si et seulement si $T^*y = 0$, et cela équivaut à dire que $(x \mid T^*y) = 0$ pour tout $x \in H$, c'est-à-dire encore à ce que $(Tx \mid y) = 0$ pour tout $x \in H$. Mais cela signifie que y est orthogonal à Tx pour tout $x \in H$, c'est-à-dire que y est orthogonal à $\mathrm{Im}\,(T)$.

Exercice 9

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $|(Tx \mid y)| \leqslant \|Tx\|\,\|y\| \leqslant \|T\|\,\|x\|\,\|y\| \leqslant \|T\|$ pour $\|x\|, \|y\| \leqslant 1$. Inversement, prenons $y = Tx/\|Tx\|$ (si $Tx \neq 0$) ; on a $\|y\| = 1$; donc $\sup\{|(Tx \mid y)|\,;\ \|y\| \leqslant 1\} \geqslant |(Tx \mid Tx)/\|Tx\| = \|Tx\|$ et par conséquent (puisque l'on peut supposer $Tx \neq 0$) $\sup\{|(Tx \mid y)|\,;\ \|x\|, \|y\| \leqslant 1\} \geqslant \sup\{\|Tx\|\,;\ \|x\| \leqslant 1\} = \|T\|$.

Alternativement, on peut considérer la forme linéaire $\varphi_{Tx} \colon y \mapsto (y \mid Tx)$. On sait que $\|Tx\| = \sup_{\|y\|\leqslant 1} |\varphi_{Tx}(y)| = \sup_{\|y\|\leqslant 1} |(Tx \mid y)|$; on obtient donc $\|T\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1}\|Tx\| = \sup\{|(Tx \mid y)|\,;\ \|x\|, \|y\| \leqslant 1\}$.

Exercice 10

1) Soit $y \in \mathrm{im}\,P$; il existe $x \in H$ tel que $y = Px$. Alors $y - Py = Px - P^2x = 0$; donc $y \in \ker\,(\mathrm{Id}_H - P)$. Inversement, si $y \in \ker\,(\mathrm{Id}_H - P)$, on a $y - Py = 0$, donc $y = Py \in \mathrm{im}\,P$.

Comme $\mathrm{im}\,P = \ker\,(\mathrm{Id}_H - P)$, on a, si $y \in \mathrm{im}\,P \cap \ker P$, on a $Py = 0$ et $y - Py = 0$; donc $y = 0$. D'autre part, tout $x \in H$ s'écrit $x = Px + (x - Px) \in \mathrm{im}\,P + \ker P$ (car $P(x - Px) = Px - P^2x = 0$). Donc $H = \mathrm{im}\,P \oplus \ker P$, algébriquement.

2) a) Pour tous $A, B \in \mathscr{L}(H)$, on a $\|AB\| \leqslant \|A\| \, \|B$; donc $\|P\| = \|P^2\| \leqslant \|P\|^2$; puisque $P \neq 0$ entraîne $\|P\| > 0$, on obtient $\|P\| \geqslant 1$.

b) Pour $x \in H$, on a $({P^*}^2 x \mid y) = (P^*x \mid Py) = (x \mid P^2 y) = (x \mid Py) = (P^*x \mid y)$, pour tout $y \in H$; donc ${P^*}^2 x = P^*x$ et P^* est un projecteur.

3) a) Si P est auto-adjoint, on a, pour tout $x \in H$: $(Px \mid x) = (P^2 x \mid x) = (Px \mid P^*x) = (Px \mid Px) = \|Px\|^2$. Comme, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $|(Px \mid x)| \leqslant \|Px\| \, \|x\|$, on obtient $\|Px\| \leqslant \|x\|$. Donc $\|P\| \leqslant 1$. Comme on a vu que $\|P\| \geqslant 1$, on a finalement $\|P\| = 1$.

b) Montrons que $\ker P$ et $\operatorname{im} P$ sont orthogonaux. Soit $x \in \ker P$ et $y \in \operatorname{im} P$; il existe $u \in H$ tel que $y = Pu$. Alors $(x \mid y) = (x \mid Pu) = (P^*x \mid u) = (Px \mid u) = 0$.

4) a) On a $\|x - P^*x\|^2 = \|x\|^2 + \|P^*x\|^2 - 2\operatorname{Re}(x \mid P^*x)$. Si $x \in \ker\,(\mathrm{Id}_H - P)$, on a $x = Px$; donc $(x \mid P^*x) = (Px \mid x) = (x \mid x) = \|x\|^2$. D'autre part, $\|P^*\| = \|P\| = 1$; donc $\|P^*x\|^2 \leqslant (\|P^*\| \, \|x\|)^2 = \|x\|^2$, et par conséquent $\|x - P^*x\|^2\| \leqslant \|x\|^2 + \|x\|^2 - 2\,\|x\|^2 = 0$, de sorte que $x - P^*x = 0$ et $x \in \ker\,(\mathrm{Id}_H - P^*)$. Donc $\ker\,(\mathrm{Id}_H - P) \subseteq \ker\,(\mathrm{Id}_H - P^*)$.

On fait de même en développant $\|x - Px\|^2$ (ou bien, l'on échange les rôles de P et P^*, ce qui est possible car P^* est un projecteur de norme $\|P^*\| = 1$, et car $P^{**} = P$), on obtient l'inclusion inverse, et donc l'égalité.

b) Pour tout $x \in H$, $Px \in \ker\,(\mathrm{Id}_H - P)$; donc $Px \in \ker\,(\mathrm{Id}_H - P^*)$, c'est-à-dire que $Px - P^*Px = 0$. Donc $P = P^*P$. En prenant l'adjoint, cela entraîne $P^* = (P^*P)^* = P^*P^{**} = P^*P = P$.

Remarque. Comme la projection orthogonale sur tout sous-espace fermé non réduit à $\{0\}$ est de norme 1, on obtient qu'il y a équivalence, pour un projecteur non nul P d'un espace de Hilbert, entre : a) $\|P\| = 1$; b) P est auto-adjoint ; c) P est un projecteur orthogonal.

Exercice 11

a) Montrons que (i) et (i') sont équivalents. Si T est inversible, il existe $U = T^{-1} \in \mathscr{L}(H)$ tel que $TU = UT = \mathrm{Id}_H$; alors $U^*T^* = (TU)^* = (UT)^* = T^*U^* = \mathrm{Id}_H$, donc T^* est inversible et $(T^*)^{-1} = U^* = (T^{-1})^*$. Inversement, on montre de la même façon que si T^* est inversible, alors T l'est aussi (ou bien, on applique l'implication $(i) \Rightarrow (i')$ en remplaçant T par T^*, sachant que $T^{**} = T$).

b) Si T est inversible, son inverse T^{-1} est continu ; on a donc $\|T^{-1}y\| \leqslant \|T^{-1}\| \, \|y\|$ pour tout $y \in H$. En particulier, pour tout $x \in H$, on a $\|T^{-1}(Tx)\| \leqslant \|T^{-1}\| \, \|Tx\|$; d'où $\|Tx\| \geqslant (1/\|T^{-1}\|) \, \|x\|$. De même, T^* étant inversible, comme on vient de le voir, on a $\|T^*x\| \geqslant (1/\|(T^*)^{-1}\|) \, \|x\|$. On a donc (ii), avec $c = \min[(1/\|T^{-1}\|), (1/\|(T^*)^{-1}\|)]$.

c) Supposons maintenant que T vérifie (ii). Montrons que $\operatorname{im} T$ est fermée. Soit $x_n \in H$ tels que $Tx_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y \in H$. La suite $(Tx_n)_{n\geqslant 1}$ est en particulier une suite de Cauchy : pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un $N \geqslant 1$ tel que $\|Tx_n - Tx_k\| \leqslant \varepsilon$ pour $n, k \geqslant N$. Il résulte de (ii) qu'alors $\|x_n - x_k\| \leqslant (\varepsilon/c)$, pour $n, k \geqslant N$. La suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est donc de Cauchy dans H. Comme H est complet, elle converge, et, si x est sa limite, on a, puisque T est continue, $Tx_n \xrightarrow[n\to\infty]{} Tx$. Il en résulte que $y = Tx \in \operatorname{im} T$.

Montrons maintenant que $\operatorname{im} T$ est dense dans H. Il suffit pour cela de montrer que $[\operatorname{im} T]^\perp = \{0\}$. Mais on a vu à l'Exercice 8 que $[\operatorname{im} T]^\perp = \ker(T^*)$, et comme (ii) implique en particulier l'injectivité de T^*, on obtient bien $[\operatorname{im} T]^\perp = \{0\}$.

L'image de T étant à la fois fermée et dense dans H, elle est égale à H, c'est-à-dire que T est surjective. Comme (ii) implique en particulier l'injectivité de T, T est ainsi bijective. Son inverse T^{-1} est continu car, pour tout $y \in H$, on peut écrire, à partir de (ii), $\|y\| = \|T(T^{-1}y)\| \geqslant c\,\|T^{-1}y\|$, c'est-à-dire $\|T^{-1}y\| \leqslant (1/c)\,\|y\|$, ce qui prouve que T^{-1} est continue, *i.e.* $T^{-1} \in \mathscr{L}(H)$, et que $\|T^{-1}\| \leqslant (1/c)$. Par conséquent, T est inversible.

Exercice 12

2) a) Si $T^*T = \mathrm{Id}_H$, alors, pour tous $x, y \in H$, on a $(Tx \mid Ty) = (T^*Tx \mid y) = (x \mid y)$. Inversement, si T conserve le produit scalaire, on a $(T^*Tx \mid y) = (Tx \mid Ty) = (x \mid y)$ pour tous $x, y \in H$; donc $T^*Tx = x$ (car $T^*Tx - x \in H^\perp = \{0\}$) pour tout $x \in H$, c'est-à-dire que $T^*T = \mathrm{Id}_H$. (i) et (ii) sont donc équivalents.

Si l'on a (ii), alors, en prenant $y = x$, on obtient $\|Tx\|^2 = \|x\|^2$; donc T est une isométrie. Inversement, si T est une isométrie, on a $\|T(x+y)\|^2 = \|x+y\|^2$; donc, en développant : $\|Tx\|^2 + \|Ty\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(Tx \mid Ty) = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(x \mid y)$. Comme $\|Tx\| = \|x\|$ et $\|Ty\| = \|y\|$, on obtient $\mathrm{Re}\,(Tx \mid Ty) = \mathrm{Re}\,(x \mid y)$. Dans le cas complexe, on remplace y par iy ; on obtient $\mathrm{Im}\,(Tx \mid Ty) = \mathrm{Re}\,[-i\,(Tx \mid Ty)] = \mathrm{Re}\,(Tx \mid i(Ty)) = \mathrm{Re}\,(Tx \mid T(iy)) = \mathrm{Re}\,(x \mid iy) = \mathrm{Im}\,(x \mid y)$. Donc $(Tx \mid Ty) = (x \mid y)$.

b) Pour tout $x = (x_n)_{n\geqslant 1}$ et $y = (y_n)_{n\geqslant 1}$ dans ℓ_2, on a $(S^*x \mid y) = (x \mid Sy) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n (Sy)_n = x_1 \times 0 + \sum_{n=2}^{\infty} x_n y_{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} x_{n+1} y_n$. Donc $S^*x = (x_{n+1})_{n\geqslant 1} = (x_2, x_3, \ldots)$.

3) On a $(S^*S)(x_1, x_2, \ldots) = S^*(0, x_1, x_2, \ldots) = (x_1, x_2, \ldots)$; donc $S^*S = \mathrm{Id}_{\ell_2}$ (c'est normal, vu le 1), puisque S est une isométrie). Dans l'autre sens, on a $(SS^*)(x_1, x_2, \ldots) = S(x_2, x_3, \ldots) = (0, x_2, x_3, \ldots)$; donc SS^* est la projection orthogonale sur le sous-espace $E_1 = \{x(x_n)_{n\geqslant 1} \in \ell_2\,;\ x_1 = 0\}$.

4) Si T est unitaire, T est en particulier inversible, donc bijective ; de plus, l'égalité $T^*T = \mathrm{Id}_H$ montre que T est une isométrie. Inversement, si T est une isométrie surjective, T est bijective ; on a $T^{-1}T = TT^{-1} = \mathrm{Id}_H$. Comme on a vu au 1) que $T^*T = \mathrm{Id}_H$, on a forcément $T^* = T^{-1}$ (par exemple parce que $T^* = T^*(TT^{-1}) = (T^*T)T^{-1} = T^{-1}$). Donc $T^*T = TT^* = \mathrm{Id}_H$, et T est unitaire.

Exercice 13

1) $(\,.\mid .\,)_w$ est clairement une forme hermitienne ; de plus $(x \mid x)_w = \sum_{n=1}^{\infty} w_n |x_n|^2 \geqslant 0$ et n'est nul que si $x_n = 0$ car $w_n > 0$, pour tout $n \geqslant 0$, donc que si $x = 0$.

2) L'application i_w clairement linéaire, et c'est une isométrie, par définition de la norme de $\ell_2(w)$. Elle est surjective car $w_n \neq 0$ pour tout $n \geqslant 1$. C'est donc un isomorphisme (isométrique) ; il en résulte que $\ell_2(w)$ est complet, comme ℓ_2.

3) a) Si A est précompacte, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut recouvrir A par un nombre fini de boules $B(x_1, \varepsilon), \ldots, B(x_n, \varepsilon)$ de rayon ε. Soit F_ε le sous-espace de E engendré par $x_1, \ldots, x_n$. Il est de dimension finie, et pour tout $x \in A$, on a $x \in B(x_k, \varepsilon)$ pour un $k = 1, \ldots, n$; donc $\mathrm{dist}\,(x, F_\varepsilon) \leqslant d(x, x_k) \leqslant \varepsilon$. Inversement, soit A tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-espace vectoriel F_ε de E de dimension finie tel que $d(x, F_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$ pour tout $x \in A$. Donnons nous $\varepsilon > 0$ arbitraire. Pour chaque $x \in A$, on peut trouver $u_{x,\varepsilon} \in F_{\varepsilon/4}$ tel que $\|x - u_{x,\varepsilon}\| \leqslant \varepsilon/2$. Comme A est bornée, il existe $R > 0$ tel que $A \subseteq B(0, R)$. On a donc $\|u_{x,\varepsilon}\| \leqslant \|u_{x,\varepsilon} - x\| + \|x\| \leqslant \frac{3\varepsilon}{4} + R$. Comme F_ε est de dimension finie, sa boule de centre 0 et de rayon $R + \frac{\varepsilon}{2}$ est compacte. Elle peut donc être recouverte par un nombre fini de boules $B(u_1, \varepsilon/2), \ldots, B(u_n, \varepsilon/2)$ de rayon $\varepsilon/2$. Alors pour tout $x \in A$, $u_{x,\varepsilon} \in B(u_k, \varepsilon/2)$ pour un $k = 1, \ldots, n$. On a $\|x - u_k\| \leqslant \|x - u_{x,\varepsilon}\| + \|u_{x,\varepsilon} - u_k\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Donc $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} B(u_k, \varepsilon)$, de sorte que A est précompacte.

b) Notons d'abord que $\ell_2(v) \subseteq \ell_2(w)$. En effet, comme la suite $(w_n/v_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0, elle est bornée : il existe $C < +\infty$ tel que $0 < w_n \leqslant C v_n$ pour tout $n \geqslant 1$. Alors $\sum_{n=1}^{\infty} w_n |x_n|^2 \leqslant C \sum_{n=1}^{\infty} v_n |x_n|^2 < +\infty$; donc $\ell_2(v) \subseteq \ell_2(w)$ et $\|x\|_w \leqslant C\,\|x\|_v$ pour tout $x \in \ell_2(v)$.

Notons B la boule unité fermée de $\ell_2(v)$. On a $\|x\|_w \leqslant C$ pour tout $x \in B$; donc B est bornée dans $\ell_2(w)$.

Par ailleurs, B est fermée dans $\ell_2(w)$. En effet, soit $x^{(k)} = (x_{k,n})_{n\geqslant 1} \in B$ tels que $\|x^{(k)} - x\|_w \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$. On a en particulier $x_{k,n} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x_n$ pour tout $n \geqslant 1$. Alors, $\sum_{j=1}^{n} v_j |x_j|^2 =$

$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{n} v_j |x_{k,j}|^2 \leqslant 1$, puisque $\sum_{j=1}^{n} v_j |x_{k,j}|^2 \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} v_j |x_{k,j}|^2 = \|x^{(k)}\|_v^2 \leqslant 1$, pour tout $n \geqslant 1$. Donc $\sum_{j=1}^{\infty} v_j |x_j|^2 \leqslant 1$, c'est-à-dire que $x \in B$.

Notons que pour l'instant, on a juste utilisé le fait que $w_n \leqslant C v_n$ pour tout $n \geqslant 1$.

Montrons maintenant que B est précompacte dans $\ell_2(w)$. On utilise pour cela le a).

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \geqslant 1$ tel que $w_n \leqslant \varepsilon\, v_n$ pour $n \geqslant N+1$. Notons $e_1 = (1, 0, 0, \ldots)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0, \ldots)$, … les vecteurs de la base canonique usuelle de ℓ_2. Soit F_ε le sous-espace vectoriel de $\ell_2(w)$ engendré par $e_1, \ldots, e_N$. Pour tout $x = (x_n)_{n\geqslant 1} \in B$, on a :

$$\Big\|x - \sum_{n=1}^{N} x_n e_n\Big\|_w = \Big(\sum_{n=N+1}^{\infty} w_n |x_n|^2\Big)^{1/2} \leqslant \varepsilon \Big(\sum_{n=N+1}^{\infty} v_n |x_n|^2\Big)^{1/2} \leqslant \varepsilon \Big(\sum_{n=1}^{\infty} v_n |x_n|^2\Big)^{1/2} = \varepsilon;$$

donc $\operatorname{dist}(x, F_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$. Grâce au a), on en déduit que B est précompacte dans $\ell_2(w)$.

Finalement, B étant précompacte et fermée dans l'espace complet $\ell_2(w)$ est compacte dans $\ell_2(w)$.

Exercice 14

1) a) Fixons $x \in H$ et considérons la forme linéaire $\varphi_x \colon y \in H \mapsto B(x, y) \in \mathbb{R}$. On a $|\varphi_x(y)| = |B(x, y)| \leqslant C\,\|x\|\,\|y\|$ pour tout $y \in H$; donc φ_x est continue, et $\|\varphi_x\| \leqslant C\,\|x\|$. Par le *Théorème de représentation de Fréchet-Riesz*, il existe un unique vecteur $T_x \in H$ tel que $B(x, y) = \varphi_x(y) = (y \mid T_x)$ pour tout $y \in H$, et $\|T_x\| = \|\varphi_x\| \leqslant C\,\|x\|$. Soit $T \colon H \to H$ l'application définie par $T(x) = T_x$, pour tout $x \in H$. Elle est linéaire car on a, grâce à la bilinéarité de B, pour tout $y \in H$:

$$\begin{aligned}\big(y \mid T(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)\big) &= B(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 B(x_1, y) + \lambda_2 B(x_2, y)\\ &= \lambda_1 \big(y \mid T(x_1)\big) + \lambda_2 \big(y \mid T(x_2)\big) = \big(y \mid \lambda_1 T(x_1) + \lambda_2 T(x_2)\big)\,;\end{aligned}$$

donc $T(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 T(x_1) + \lambda_2 T(x_2)$. Ensuite, comme $\|T(x)\| \leqslant C\,\|x\|$, T est continue, et $\|T\| \leqslant C$. De plus, $B(x, y) = \big(y \mid T(x)\big) = \big(T(x) \mid y\big)$ pour tous $x, y \in H$.

b) Pour $x \neq 0$, on a :

$$\|Tx\| = \|\varphi_x\| = \sup_{\|y\|\leqslant 1} |\varphi_x(y)| = \sup_{\|y\|\leqslant 1} |B(x, y)| \geqslant \Big|B\Big(x, \frac{x}{\|x\|}\Big)\Big| = \frac{1}{\|x\|}\,|B(x, x)| \geqslant a\,\|x\|\,.$$

Cela reste évidemment vrai pour $x = 0$.

D'autre part, on a, pour l'adjoint T^* de T, $(T^* x \mid y) = (x \mid Ty) = (Ty \mid x) = B(y, x)$. La forme bilinéaire $\widetilde{B}$ définie par $\widetilde{B}(x, y) = B(y, x)$ est aussi coercive, avec les mêmes constantes. Il en résulte que l'on peut appliquer ce qui précède en remplaçant B par $\widetilde{B}$; l'application linéaire continue associée étant T^*, on obtient $\|T^*(x)\| \geqslant a\,\|x\|$ pour tout $x \in H$.

Il résulte alors de l'Exercice 11 que T est inversible, c'est-à-dire que c'est un isomorphisme de H sur lui-même.

2) a) Si L est une forme linéaire continue sur H, il existe, de nouveau par le *Théorème de représentation de Fréchet-Riesz*, un unique vecteur $v \in H$ tel que $L(y) = (y \mid v)$ pour tout $u \in H$. Posons $u = T^{-1}(v)$ (ce qui est possible puisque T est inversible), de sorte que $T(u) = v$. On a $L(y) = (y \mid Tu) = B(u, y)$ pour tout $y \in H$. Un tel vecteur u est unique car si $L(y) = B(u, y)$ pour tout $y \in H$, on a $L(y) = (Tu \mid y) = (y \mid Tu)$ pour tout $y \in H$; donc $Tu = v$, par l'unicité de v, c'est-à-dire $u = T^{-1}(v)$.

b) Il résulte du a) que $J(x) = B(x, x) - 2\,B(u, x)$. En particulier $J(u) = -B(u, u)$. Puisque B est symétrique, on a $B(x-u, x-u) = B(x, x) - 2\,B(u, x) + B(u, u) = J(x) - J(u)$. Comme $B(x-u, x-u) \geqslant a\,\|x-u\|^2$, on a $\min_{x\in H} B(x-u, x-u) = 0$, et ce minimum n'est atteint que pour $x = u$. Il en résulte que $\min_{x\in H} J(x) = J(u)$, et que u est l'unique élément de H réalisant ce minimum.

3) a) La restriction de B à $F_n \times F_n$ reste coercive ; le 2) a) appliqué à F_n au lieu de H donne un $u_n \in F_n$, unique, tel que $B(u_n, y) = L(y)$ pour tout $y \in F_n$.

b) Par définition de u et u_n, on a à la fois $L(x) = B(u, x)$ et $L(x) = B(u_n, x)$ pour tout $x \in F_n$. Donc $B(u_n - u, x) = 0$ pour tout $x \in F_n$. En particulier, $B(u_n - u, u_n) = 0$. Alors, pour tout $x \in F_n$:

$$\begin{aligned} a\,\|u_n - u\|^2 &\leqslant B(u_n - u, u_n - u) = B(u_n - u, -u) = B(u_n - u, -u) + B(u_n - u, x) \\ &= B(u_n - u, x - u) \leqslant C\,\|u_n - u\|\,\|u - x\|\,; \end{aligned}$$

cela donne $\|u_n - u\| \leqslant (C/a)\,\|u - x\|$, d'où $\|u_n - u\| \leqslant (C/a)\operatorname{dist}(u, F_n)$.

Comme la suite $(F_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et la réunion des F_n est dense dans H, on a $\operatorname{dist}(u, F_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. En effet, puisque la réunion est dense, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in \bigcup_{n\geqslant 1} F_n$ tel que $\|x - u\| \leqslant \varepsilon$. Il existe $N \geqslant 1$ tel que $x \in F_N$. Comme la suite $(F_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante, on a $x \in F_n$ pour tout $n \geqslant N$. Alors, pour $n \geqslant N$, on a $\operatorname{dist}(u, F_n) \leqslant \|u - x\| \leqslant \varepsilon$.

Par conséquent, $\|u_n - u\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Exercice 15

1) $(Tf)(x)$ existe pour tout $x \in [0,1]$, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\int_0^x |f(t)|\,dt \leqslant \left(\int_0^1 |f(t)|^2\,dt\right)^{1/2} \left(\int_0^1 [\mathbb{1}_{[0,x]}(t)]^2\,dt\right)^{1/2} = \|f\|_2\sqrt{x} \leqslant \|f\|_2 < +\infty\,.$$

De plus, $Tf \in L^2([0,1])$ car, d'une part Tf est continue, donc mesurable, car, comme ci-dessus, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$|(Tf)(x) - (Tf)(x')| \leqslant \sqrt{|x - x'|}\,\|f\|_2\,;$$

et, d'autre part :

$$\int_0^1 |(Tf)(x)|^2\,dx \leqslant \int_0^1 \left(\int_0^x |f(t)|\,dt\right)^2 \leqslant \|f\|_2^2\,,$$

d'après le calcul précédent. Cela dit en plus que $\|Tf\|_2 \leqslant \|f\|_2$.

Comme l'application $T\colon f \in L^2([0,1]) \mapsto Tf \in L^2([0,1])$ est clairement linéaire, cette inégalité montre que T est continue.

2) Par définition, l'adjoint T^* de T est caractérisé par :

$$(Tf \mid g) = (f \mid T^*g)\,, \qquad \forall f, g \in L^2([0,1])\,.$$

Or :

$$\begin{aligned} (Tf \mid g) &= \int_0^1 (Tf)(x)\,g(x)\,dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(t)\,\mathbb{1}_{[0,x]}(t)\,dt\right) g(x)\,dx \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^1 g(x)\,\mathbb{1}_{[t,1]}(x)\,dx\right) f(t)\,dt\,, \end{aligned}$$

par le Théorème de Fubini, que l'on peut appliquer car :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_0^1 |f(t)\,g(x)\,\mathbb{1}_{[0,x]}(t)|\,dt\right) dx &\leqslant \left(\int_0^1 |f(t)|\,dt\right)\left(\int_0^1 |g(x)|\,dx\right) \\ &\leqslant \left(\int_0^1 |f(t)|^2\,dt\right)^{1/2}\left(\int_0^1 |g(x)|^2\,dx\right)^{1/2} = \|f\|_2\|g\|_2 < +\infty\,. \end{aligned}$$

Donc $(T^*g)(t) = \int_t^1 g(x)\,dx = \int_0^1 g(x)\,dx - \int_0^t g(x)\,dx$. Donc $T^*g = [(Tg)(1)]\,\mathbb{1} - Tg$.

Exercice 16

Pour $0 < r < 1$, posons $f_r(t) = f(r\,e^{it})$. On a $f_r(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n e^{int}$. Le système trigonométrique étant une base orthonormée de $L^2(0, 2\pi)$, il en résulte que $\widehat{f_r}(n) = c_n r^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\widehat{f_r}(n) = 0$ pour $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$; puisque $\|f_r\|_2^2 = \int_0^{2\pi} |f(r\,e^{it})|^2 \,\frac{dt}{2\pi}$, la formule de Parseval donne $\int_0^{2\pi} |f(r\,e^{it})|^2 \,\frac{dt}{2\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n}$ (cette égalité est appelée *formule de Gutzmer*). Par le Théorème de convergence monotone, on a $\sup_{0<r<1} \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} = \lim_{r \to 1} \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2$. Il en résulte qu'on a bien $\sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} |f(r\,e^{it})|^2 \,\frac{dt}{2\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2$.

Remarque. Les fonctions analytiques $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ telles que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ pour lesquelles $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 < +\infty$ forment l'*espace de Hardy* (voir l'Exercice 31).

Exercice 17

1) Écrivons $f(z_0 + r\,e^{it}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{int}$, pour $0 \leqslant r \leqslant r_0$; alors, en passant en coordonnées polaires, en utilisant la convergence uniforme, on a :

$$\begin{aligned}\int_{\overline{D}} f(w)\, dA(w) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{r} \left(\int_0^{2\pi} f(z_0 + r\,e^{it})\, dt \right) r\, dr \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\int_0^{r_0} r^{n+1}\, dr \right) \left(\int_0^{2\pi} e^{nit}\, dt \right) \\ &= \frac{1}{\pi}\, a_0\, \frac{r_0^2}{2}\, 2\pi = a_0 r_0^2\,,\end{aligned}$$

car $\int_0^{2\pi} e^{int}\, dt = 0$ pour $n \geqslant 1$. On obtient $f(z_0) = a_0 = \frac{1}{r_0^2} \int_{\mathbb{D}} f(w)\, dA(w)$.

Pour tout $z \in \mathbb{D}$, il existe $r > 0$ tel que $\overline{D}(z, r) \subseteq \mathbb{D}$. Pour un tel r, on a $1 - |z| = \operatorname{dist}(z, \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}) \leqslant r$. Comme $f(z) = \frac{1}{r^2} \int_{\overline{D}(z,r)} f(w)\, dA(w)$, par ce qui précède, on obtient, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned}|f(z)| &\leqslant \frac{1}{r^2} \int_{\overline{D}(z,r)} |f(w)|\, dA(w) \leqslant \frac{1}{r^2} \int_{\mathbb{D}} |f(w)|\, dA(w) \\ &\leqslant \frac{1}{(1-|z|)^2} \left(\int_{\mathbb{D}} |f(w)|^2\, dA(w) \right)^{1/2} = \frac{\|f\|_{L^2(\mathbb{D})}}{(1-|z|)^2}\,.\end{aligned}$$

2) a) Si K est un compact contenu dans $\mathbb{D}$, la distance $d = d_K$ de K à $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$ est strictement positive (autrement dit, il existe $r = 1 - \delta < 1$ tel que K soit contenu dans le disque fermé $\overline{D}(0, r)$). Alors $1 - |z| \geqslant d_K$ pour tout $z \in K$, et donc $|f_n(z) - f_k(z)| \leqslant \frac{1}{d_K^2} \|f_n - f_k\|_{L^2(\mathbb{D})}$ pour tout $z \in K$. Il en résulte que si $(f_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite de Cauchy dans $B^2(\mathbb{D})$, alors $(f_n)_{n \geqslant 1}$ est uniformément de Cauchy sur K.

b) Soit $(f_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite de Cauchy dans $B^2(\mathbb{D})$. Par le a), $(f_n)_{n \geqslant 1}$ est uniformément de Cauchy sur tout compact de $\mathbb{D}$. Il résulte du Théorème de Weierstrass sur la convergence des suites de fonctions holomorphes que $(f_n)_{n \geqslant 1}$ converge uniformément sur tout compact vers une fonction f holomorphe dans $\mathbb{D}$. D'autre part, $(f_n)_{n \geqslant 1}$ est aussi de Cauchy dans $L^2(\mathbb{D})$; elle converge donc $g \in L^2(\mathbb{D})$, c'est-à-dire que $\|f_n - g\|_{L^2(\mathbb{D})} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$. Mais $(f_n)_{n \geqslant 1}$ a alors une sous-suite convergeant preque partout vers g. Donc $f = g$ presque partout, de sorte que $f \in L^2(\mathbb{D})$. Par conséquent $f \in \mathscr{H}(\mathbb{D}) \cap L^2(\mathbb{D}) = B^2(\mathbb{D})$ et $\|f_n - f\|_{B^2(\mathbb{D})} = \|f_n - g\|_{L^2(\mathbb{D})} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.

Le produit scalaire est défini par $(f \mid g) = \int_{\mathbb{D}} f(w)\, \overline{g(w)}\, dA(w)$.

3) a) Posons $f_r(t) = f(r\,e^{it}) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n e^{int}$ pour $0 \leqslant r < 1$ et $t \in [0, 2\pi]$. La formule de Parseval dans $L^2(0, 2\pi) = L^2\big([0, 2\pi], \frac{dt}{2\pi}\big)$ donne $\|f_r\|_{L^2(0,2\pi)}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n}$. Alors, en

passant en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned}\|f\|_{B^2(\mathbb{D})}^2 &= \int_{\mathbb{D}} |f(w)|^2\, dA(w) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} |f_r(t)|^2\, dt\right) r\, dr \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^1 2\pi\, \|f_r\|_{L^2(0,2\pi)}^2 r\, dr = 2\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n}\right) r\, dr \\ &= 2\sum_{n=0}^{\infty}\left(|c_n|^2 \int_0^1 r^{2n+1}\, dr\right),\end{aligned}$$

par le Théorème de convergence monotone. Cela donne $\|f\|_{B^2(\mathbb{D})}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|c_n|^2}{n+1}$.

b) On a, en utilisant les coordonnées polaires :

$$\begin{aligned}(e_n \mid e_k) &= \frac{1}{\sqrt{(n+1)(k+1)}}\int_{\mathbb{D}} w^n \overline{w^k}\, dA(w) \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{(n+1)(k+1)}}\left(\int_0^1 r^{n+k+1}\, dr\right)\left(\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i(n-k)t}\, dt\right);\end{aligned}$$

donc $(e_n \mid e_k) = 0$ pour $n \neq k$. D'autre part, pour $k = n$, cela donne :

$$\|e_n\|_2^2 = \frac{1}{\pi(n+1)}\left(\int_0^1 r^{2n+1}\, dr\right) \times 2\pi = 1\,.$$

Par conséquent la suite $(e_n)_{n\geqslant 1}$ est orthonormée dans $B^2(\mathbb{D})$. Montrons que c'est une base orthonormée de $B^2(\mathbb{D})$. En effet, toute fonction holomorphe $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ (donc en particulier toute $f \in B^2(\mathbb{D})$) a un développement en série entière $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{\sqrt{n+1}}\, e_n(z)$ convergent pour tout $z \in \mathbb{D}$. On a, par le a) :

$$\left\|f - \sum_{n=0}^{N} \frac{c_n}{\sqrt{n+1}}\, e_n\right\|_{B^2(\mathbb{D})}^2 = \left\|\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{c_n}{\sqrt{n+1}}\, e_n\right\|_{B^2(\mathbb{D})}^2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|c_n|^2}{n+1} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0\,,$$

car $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|c_n|^2}{n+1} = \|f\|_{B^2(\mathbb{D})}^2 < +\infty$.

La formule de Parseval donne alors $(f \mid g) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n \overline{b_n}}{n+1}$ si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ et $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$.

4) Il résulte du 1) que pour tout $a \in \mathbb{D}$, la forme linéaire $\delta_a\colon f \in B^2(\mathbb{D}) \mapsto f(a)$ est continue (et de norme $\leqslant 1/(1-|a|)^2$) ; par conséquent, puisque $B^2(\mathbb{D})$ est un espace de Hilbert, il existe, par le *Théorème de représentation de Fréchet-Riesz*, $K_a \in B^2(\mathbb{D})$ tel que $f(a) = (f \mid K_a)$ pour toute $f \in B^2(\mathbb{D})$.

5) Puisque $(e_n)_{n\geqslant 0}$ est une base orthonormée de $B^2(\mathbb{D})$, on a $K_a = \sum_{n=0}^{\infty} (K_a \mid e_n)\, e_n$. La continuité de la forme linéaire δ_z entraîne que $K_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (K_a \mid e_n)\, e_n(z)$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. Or $(K_a \mid e_n) = \overline{(e_n \mid K_a)} = \overline{e_n(a)} = \sqrt{n+1}\, \bar{a}^n$. Donc $K_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, \bar{a}^n z^n = \frac{1}{(1-\bar{a}z)^2}$.

6) Si f est holomorphe dans un voisinage de $\overline{\mathbb{D}}$, elle est en particulier continue sur $\overline{\mathbb{D}}$, et donc bornée sur $\mathbb{D}$. Par conséquent $f \in L^\infty(\mathbb{D}, A) \subseteq L^2(\mathbb{D}, A)$, de sorte que $f \in B^2(\mathbb{D})$. Il résulte de 3) b), 4) et 5) que l'on a $f(a) = (f \mid K_a) = \int_{\mathbb{D}} f(w)\, \overline{K_a(w)}\, dA(w) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1-\bar{w}a)^2}\, dA(w)$ pour tout $a \in \mathbb{D}$.

Exercice 18

1) Remarquons d'abord que l'application T définie par $(Tf)(u) = f(2\pi u - \pi)$ est un isomorphisme isométrique (donc un isomorphisme d'espaces de Hilbert) de $L^2([-\pi,\pi], dt/2\pi)$ sur $L^2([0,1], du)$ car, en faisant le changement de variable $t = 2\pi u - \pi$, on a $\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \frac{dt}{2\pi} = \int_0^1 |(Tf)(u)|^2\, du$. De plus si l'on pose $\varepsilon_n(t) = \mathrm{e}^{int}$ et $e_n(u) = \mathrm{e}^{2\pi inu}$, pour $n \in \mathbb{Z}$, on a $(T\varepsilon_n)(u) = (-1)^n \mathrm{e}^{2\pi inu} = (-1)^n e_n(u)$. Comme $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de $L^2([0,1], du)$, $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ en est une de $L^2([-\pi,\pi], dt/2\pi)$. Calculons les coefficients de Fourier de f associés à cette base : $\widehat{f}(n) = \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \mathrm{e}^{-int} \frac{dt}{2\pi}$.

Pour $n = 0$, $\widehat{f}(0) = \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \frac{dt}{2\pi} = \frac{\pi^2}{3}$. Pour $n \neq 0$, on intègre deux fois par parties :

$$\int_{-\pi}^{\pi} t^2 \mathrm{e}^{-int} \frac{dt}{2\pi} = \left[t^2 \frac{\mathrm{e}^{-int}}{-2\pi in}\right]_{-\pi}^{\pi} - \left[2t \frac{\mathrm{e}^{-int}}{-2\pi in^2}\right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2\,\mathrm{e}^{-int}}{-n^2} \frac{dt}{2\pi} = (-1)^n \frac{2}{n^2},$$

car les premier et troisième termes sont nuls.

La *formule de Parseval* nous dit que $\int_{-\pi}^{\pi} t^4 \frac{dt}{2\pi} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|^2$. Or $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|^2 = \frac{\pi^4}{9} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^4}$ et $\int_{-\pi}^{\pi} t^4 \frac{dt}{2\pi} = \frac{\pi^4}{5}$. On obtient donc $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

2) a) Calculons les coefficients de Fourier de f. On a :

$$\begin{aligned}\widehat{f}(n) &= \int_0^1 f(t)\,\mathrm{e}^{-2\pi int}\,dt = \int_{-1/2}^{1/2} f(t)\,\mathrm{e}^{-2\pi int}\,dt = \int_{-1/2}^{1/2} \mathrm{e}^{2\pi iat}\,\mathrm{e}^{-2\pi int}\,dt \\ &= \left[\frac{\mathrm{e}^{2\pi i(a-n)t}}{2\pi i(a-n)}\right]_{-1/2}^{1/2} = \frac{\sin\pi(a-n)}{\pi(a-n)} = (-1)^n \frac{\sin(\pi a)}{\pi(a-n)}.\end{aligned}$$

La fonction f étant dérivable par morceaux sur $\mathbb{R}$, le *Théorème de Jordan-Dirichlet* dit que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)\,\mathrm{e}^{2\pi int} = \frac{f(t^+)+f(t^-)}{2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ (la convergence étant au sens des sommes symétriques). Pour $t = 1/2$, cela donne :

$$\frac{\sin(\pi a)}{\pi a} + \frac{\sin(\pi a)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{a-n} + \frac{1}{a+n}\right] (-1)^n = \frac{\mathrm{e}^{\pi ia} + \mathrm{e}^{-\pi ia}}{2},$$

soit $\cos(\pi a) = \dfrac{\sin(\pi a)}{\pi a} + \dfrac{\sin(\pi a)}{\pi} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a}{a^2 - n^2}$, ou encore :

$$\operatorname{cotan}(\pi a) = \frac{1}{\pi a} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a}{a^2 - n^2}$$

b) On a :

$$\begin{aligned}\operatorname{cotan} t &= \frac{1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + o(t^4)}{t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} + o(t^5)} \\ &= \frac{1}{t}\left[\left(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + o(t^4)\right)\left(1 + \frac{t^2}{6} - \frac{t^4}{120} + \frac{t^4}{36} + o(t^4)\right)\right] \\ &= \frac{1}{t} - \frac{t}{3} - \frac{t^3}{45} + o(t^3);\end{aligned}$$

donc $\operatorname{cotan}(\pi a) = \dfrac{1}{\pi a} - \dfrac{\pi a}{3} - \dfrac{\pi^3 a^3}{45} + o(a^3)$.

D'autre part,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2 - n^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{2k}}{n^{2k+2}} \right) = -\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k+2}} \right) a^{2k}$$

(on peut intervertir l'ordre des sommes car $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a|^{2k}}{n^{2k+2}} \right) < +\infty$). On obtient ainsi $\frac{1}{\pi a} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k+2}} \right) a^{2k+1} = \frac{1}{\pi a} - \frac{\pi a}{3} - \frac{\pi^3 a^3}{45} + o\,(a^3)$. Par unicité des coefficients du développement limité, on obtient, pour $k = 0$ et $k = 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$ ·

Exercice 19

On remarque d'abord que toute fonction α-höldérienne est continue ; donc $f \in L^2(0,1)$. On peut aussi remarquer que seules les valeurs $\alpha \leqslant 1$ sont intéressantes car pour $\alpha > 1$, f est constante (elle est dérivable et sa dérivée est nulle).

1) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a, en posant $u = t - x$ et en utilisant la périodicité de f, $\widehat{f_x}(n) = \int_0^1 f(t-x)\,\mathrm{e}^{-2\pi int}\,dt = \int_{-x}^{1-x} f(u)\,\mathrm{e}^{-2\pi in(u+x)}\,du = \mathrm{e}^{-2\pi inx} \int_0^1 f(u)\,\mathrm{e}^{-2\pi inu}\,du = \mathrm{e}^{-2\pi inx}\widehat{f}(n)$.

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\|f - f_x\|_2^2 = \int_0^1 |f(t) - f(t-x)|^2\,dt \leqslant C_\alpha^2 \int_0^1 |t - (t-x)|^{2\alpha}\,dt = C_\alpha^2 |x|^{2\alpha}$. D'autre part, la *formule de Parseval* dit que $\|f - f_x\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n) - \widehat{f_x}(n)|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|^2 |1 - \mathrm{e}^{-2\pi inx}|^2$. Or $|1 - \mathrm{e}^{-2\pi inx}|^2 = 4\sin^2(\pi nx)$ et l'on sait que $|\sin t| \geqslant \frac{2}{\pi}|t|$ pour $|t| \leqslant \frac{\pi}{2}$; donc si $|nx| \leqslant 1/2$, on a $|1 - \mathrm{e}^{-2\pi inx}|^2 \geqslant 16n^2x^2$. Pour tout $j \geqslant 0$, prenons $x = x_j = 2^{-(j+2)}$. Pour $|n| \leqslant 2^{j+1}$, on a $|nx_j| \leqslant 1/2$; donc :

$$\begin{aligned}\|f - f_{x_j}\|_2^2 &\geqslant \sum_{2^j+1 \leq |n| \leq 2^{j+1}} |\widehat{f}(n)|^2 |1 - \mathrm{e}^{-2\pi inx_j}|^2 \geqslant \sum_{2^j+1 \leq |n| \leq 2^{j+1}} |\widehat{f}(n)|^2 (16n^2x_j^2) \\ &\geqslant \sum_{2^j+1 \leq |n| \leq 2^{j+1}} |\widehat{f}(n)|^2 (2^{2j+4}x_j^2)\,.\end{aligned}$$

Puisque $\|f - f_{x_j}\|_2^2 \leqslant C_\alpha^2 x_j^{2\alpha}$, on obtient :

$$\sum_{2^j+1 \leq |n| \leq 2^{j+1}} |\widehat{f}(n)|^2 \leqslant C_\alpha^2 2^{-2j-4} x_j^{2\alpha-2} = C'_\alpha 2^{-2\alpha j}\,.$$

3) Remarquons d'abord que pour montrer que $\widehat{f} \in \ell_p(\mathbb{Z})$, on peut supposer que $p < 2$. C'est possible car, α étant > 0, on a $\frac{2}{2\alpha+1} < 2$ (et parce que $\ell_{p_1}(\mathbb{Z}) \subseteq \ell_{p_2}(\mathbb{Z})$ si $p_1 \leqslant p_2$). On va alors appliquer l'inégalité de Hölder pour l'exposant $r = 2/p$, qui est > 1. Notons s l'exposant conjugué de r et I_j l'ensemble des entiers n tels que $2^j + 1 \leq |n| \leq 2^{j+1}$. On a :

$$\sum_{n\in I_j} |\widehat{f}(n)|^p \leqslant |I_j|^{1/s} \Big(\sum_{n\in I_j} |\widehat{f}(n)|^2 \Big)^{1/r} \leqslant C\,2^{j/s} 2^{-2\alpha j/r} = C\,2^{j[1-(1+2\alpha)\frac{p}{2}]}\,,$$

en utilisant le 2). Comme $1 - (1+2\alpha)\frac{p}{2} < 0$, la série $\sum_{j\geqslant 0} 2^{j[1-(1+2\alpha)\frac{p}{2}]}$ converge, et l'on a $\sum_{|n|\geqslant 2} |\widehat{f}(n)|^p = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n\in I_j} |\widehat{f}(n)|^p < +\infty$, de sorte que $\widehat{f} \in \ell_p(\mathbb{Z})$.

Exercice 20

Posons $x = \mathrm{e}^t$. On a $0 = \int_0^a g(t)\,\mathrm{e}^{nt}\,dt = \int_1^{\mathrm{e}^a} g(\ln x)\,x^{(n-1)}\,dx = \int_1^{\mathrm{e}^a} h(x)\,x^{(n-1)}\,dx$, en notant $h(x) = g(\ln x)$. La fonction h est dans $L^2(1, \mathrm{e}^a)$ et orthogonale à tous les monômes x^k pour $k \in \mathbb{N}$, donc orthogonale à l'ensemble de tous les polynômes. Comme cet ensemble est dense dans $L^2(1, \mathrm{e}^a)$, d'après le *Théorème de Stone-Weierstrass* (voir la preuve du Théorème II.4.3), on en déduit que $h = 0$, et donc $g = 0$.

Exercice 21

Il suffit d'appliquer le *Théorème de Stone-Weierstrass*. Vérifions ses hypothèses. On note $E = \mathscr{C}(K) \otimes \mathscr{C}(K)$.

a) E est par définition un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}(K^2)$.

b) E est une sous-algèbre de $\mathscr{C}(K^2)$; pour le voir, il suffit de vérifier que, pour tous $u_1, v_1, u_2, v_2 \in \mathscr{C}(K)$, on a $(u_1 \otimes v_1).(u_2 \otimes v_2) \in E$. Or :

$$\begin{aligned}[(u_1 \otimes v_1).(u_2 \otimes v_2)](x,y) &= [(u_1 \otimes v_1)(x,y)].[(u_2 \otimes v_2)(x,y)] = [u_1(x)v_1(y)].[u_2(x)v_2(y)] \\ &= [(u_1.u_2)(x)].[(v_1v_2(y)] = [(u_1u_2) \otimes (v_1v_2)](x,y)\,.\end{aligned}$$

c) E contient évidemment les fonctions constantes.

d) E sépare les points de K^2 : si $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$, on a, par exemple, $x_1 \neq x_2$ (sinon $y_1 \neq y_2$ et le raisonnement est le même). Or il existe $u \in \mathscr{C}(K)$ telle que $u(x_1) \neq u(x_2)$ (on peut prendre, par exemple, $u(x) = d(x, x_1)$, où d est la distance sur K). Alors $u \otimes \mathbb{1} \in E$ et $(u \otimes \mathbb{1})(x_1, y_1) = u(x_1) \neq u(x_2) = (u \otimes \mathbb{1})(x_2, y_2)$.

Exercice 22

1) Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut recouvrir K par un nombre fini de boules de rayon ε. Pour tout $n \geqslant 1$, il existe donc une partie finie F_n de K telle que $K = \bigcup_{x \in F_n} B(x, 1/n)$. Soit $D = \bigcup_{n \geqslant 1} F_n$; c'est un ensemble dénombrable, et il est dense dans K. En effet, pour tout $z \in K$ et tout $\varepsilon > 0$, on peut choisir un $n \geqslant 1/\varepsilon$; il existe alors $x \in F_n$ tel que $z \in B(x, 1/n)$, et l'on a ainsi un $x \in D$ tel que $d(x,z) \leqslant 1/n \leqslant \varepsilon$.

2) a) Soit $x, y \in K$ et supposons que $d_a(x) = d_a(y)$ pour tout $a \in D$. Comme D est dense dans K, on peut trouver une suite d'éléments $a_n \in D$ tels que $d(a_n, x) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$. Mais alors $d(a_n, y) = d_{a_n}(y) = d_{a_n}(x) = d(a_n, x) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$. Par unicité de la limite, on a $y = x$. Donc $\{d_a\, ;\ a \in D\}$ sépare les points de K.

La sous-algèbre A de $\mathscr{C}(K)$ engendrée par $\mathbb{1}$ et les fonctions d_a, pour $a \in D$ sépare donc *a fortiori* les points de K. Comme, par définition, elle contient les constantes (car $\mathbb{1} \in A$), et que dans le cas complexe, elle est stable par conjugaison (parce que les fonctions d_a sont réelles), le *Théorème de Stone-Weierstrass* dit que A est dense dans $\mathscr{C}(K)$.

b) Grâce au 1), on peut prendre D dénombrable. Soit $A_0 = \{d_a, \,;\ a \in D\} \cup \{\mathbb{1}\}$. L'algèbre A est le sous-espace vectoriel engendré par l'ensemble P des produits *finis* d'éléments de A_0. Cet ensemble est donc total dans $\mathscr{C}(K)$. Comme il est dénombrable, $\mathscr{C}(K)$ est séparable.

3) Les fonctions d_a sont lipschitziennes : $|d_a(x) - d_a(y)| = |d(x,a) - d(y,a)| \leqslant d(x,y)$; donc tous les éléments de A_0 sont des fonctions lipschitziennes. Par ailleurs, l'ensemble $\mathrm{Lip}\,(K)$ des fonctions lipschitziennes sur K est une sous-algèbre de $\mathscr{C}(K)$: c'est clairement un sous-espace vectoriel et, si $f, g \in \mathrm{Lip}\,(K)$, on a $|(fg)(x) - (fg)(y)| \leqslant |f(x) - f(y)|\,|g(x)| + |f(y)|\,|g(x) - g(y)| \leqslant C_f d(x,y)\, \|g\|_\infty + \|f\|_\infty C_g d(x,y)$; donc $fg \in \mathrm{Lip}\,(K)$. Donc $A \subseteq \mathrm{Lip}\,(K)$ et il résulte du 2) a) que l'ensemble des fonctions lipschitziennes sur K est dense dans $\mathscr{C}(K)$.

Exercice 23

1) On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \|T^* e_n\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |(T^* e_n \mid \varepsilon_k)|^2 \Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |(e_n \mid T\varepsilon_k)|^2 \Big) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |(T\varepsilon_k \mid e_n)|^2 \Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |(T\varepsilon_k \mid e_n)|^2 \Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \|T\varepsilon_k\|^2\,.\end{aligned}$$

C'est en particulier vrai si $(\varepsilon_k)_{k \geqslant 1} = (e_n)_{n \geqslant 1}$, ce qui donne $\sum_{n=1}^{\infty} \|T^* e_n\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|T e_k\|^2$, et donc $\sum_{k=1}^{\infty} \|T e_k\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|T^* e_n\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|T\varepsilon_k\|^2$.

2) a) En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\int_S \left[\int_S |K(x,y)\, f(x)|\, d\mu(x)\right]^2 d\mu(y)$$
$$\leqslant \int_S \left[\left(\int_S |K(x,y)|^2\, d\mu(x)\right)\left(\int_S |f(x)|^2\, d\mu(x)\right)\right] d\mu(y)$$
$$= \int_S \left[\|f\|_2^2 \int_S |K(x,y)|^2\, d\mu(x)\right] d\mu(y)$$
$$\underset{\text{Fubini-Tonelli}}{=} \|f\|_2^2 \int_{S\times S} |K(x,y)|^2\, d(\mu\otimes\mu)(x,y) = \|f\|_2^2\, \|K\|^2_{L^2(\mu\otimes\mu)} < +\infty\,;$$

donc $\int_S |K(x,y)\, f(x)|\, d\mu(x) < +\infty$ pour μ-presque tout $y \in S$. On peut donc définir, pour μ-presque tout $y \in S$:

$$(T_K f)(y) = \int_S K(x,y)\, f(x)\, d\mu(x)\,.$$

Cette application est mesurable car si l'on pose $g(x,y) = K(x,y)\, f(x)$, le Théorème de Fubini-Tonelli nous donne la mesurabilité des applications $G_k\colon y \mapsto \int_S g_k(x,y)\, d\mu(x)$, $k = 1,2,3,4$, où $g_1 = (\operatorname{Re} g)^+$, $g_2 = (\operatorname{Re} g)^-$, $g_3 = (\operatorname{Im} g)^+$ et $g_4 = (\operatorname{Im} g)^-$. Ces applications sont finies μ-p.p., puisque $\int_S |K(x,y)\, f(x)|\, d\mu(x) < +\infty$ pour μ-presque tout $y \in S$; on a donc $(T_K f) = (G_1 - G_2) + i(G_3 - G_4)$ μ-p.p., d'où la mesurabilité de $T_K f$.

De plus,

$$\int_S |(T_K f)(y)|^2\, d\mu(y) \leqslant \int_S \left[\int_S |K(x,y)\, f(x)|\, d\mu(x)\right]^2 d\mu(y) \leqslant \|f\|^2_{L^2(\mu)} \|K\|^2_{L^2(\mu\otimes\mu)} < +\infty\,;$$

donc $T_K f \in L^2(\mu)$.

Maintenant, en notant $K_y(x) = K(x,y)$, on a (les fonctions considérées étant positives) :

$$\sum_{n=1}^\infty \|T_K e_n\|^2 = \sum_{n=1}^\infty \int_S |(T_K e_n)(y)|^2\, d\mu(y) = \sum_{n=1}^\infty \int_S |(e_n \mid K_y)|^2\, d\mu(y)$$
$$= \int_S \left(\sum_{n=1}^\infty |(e_n \mid K_y)|^2\right) d\mu(y) = \int_S \|K_y\|^2_{L^2(\mu)}\, d\mu(y)$$
$$= \int_S \left(\int_S |K(x,y)|^2\, d\mu(x)\right) d\mu(y) = \int_{S\times S} |K(x,y)|^2\, d(\mu\otimes\mu)(x,y) < +\infty\,;$$

donc T_K est Hilbert-Schmidt.

b) Il est clair que la famille $(e_n \otimes e_m)_{n,m\geqslant 1}$ est orthonormée ; en effet :

$$\int_{S\times S} (e_{n_1}\otimes e_{m_1})\,(e_{n_2}\otimes e_{m_2})\, d(\mu\otimes\mu) = \left(\int_S e_{n_1} e_{n_2}\, d\mu\right)\left(\int_S e_{m_1} e_{m_2}\, d\mu\right),$$

grâce au Théorème de Fubini, que l'on peut appliquer car $e_{n_1} e_{n_2} \in L^1(\mu)$ et $e_{m_1} e_{m_2} \in L^1(\mu)$.

Pour voir qu'elle est totale, prenons $K \in L^2(\mu\otimes\mu)$ telle que $(K \mid e_n \otimes e_m) = 0$ pour tous $n, m \geqslant 1$. Cette égalité s'écrit $\int_{S\times S} K(x,y)\, e_n(x)\, e_m(y)\, d(\mu\otimes\mu)(x,y) = 0$. Comme :

$$\int_S \left[\int_S |K(x,y)\, e_n(x)|\, d\mu(x)\right] |e_m(y)|\, d\mu(y)$$
$$\leqslant \left(\int_S \left[\int_S |K(x,y)\, e_n(x)|\, d\mu(x)\right]^2 d\mu(y)\right)^{1/2} \left(\int_S |e_m(y)|^2\, d\mu(y)\right)^{1/2}$$
$$= \|T_{|K|}(|e_n|)\|^2_{L^2(\mu)} \|e_m\|_{L^2(\mu)}$$
$$\leqslant \|e_n\|\, \|K\|_{L^2(\mu\otimes\mu)}\, \|e_m\|_{L^2(\mu)} = \|K\|_{L^2(\mu\otimes\mu)} < +\infty\,,$$

d'après le calcul fait au a), on peut utiliser le Théorème de Fubini, et ainsi la condition $(K \mid e_n \otimes e_m) = 0$ devient $\int_S \left[\int_S K(x,y)\, e_n(x)\, d\mu(x)\right] e_m(y)\, d\mu(y) = 0$, soit $(T_K e_n \mid e_m) = 0$. Comme c'est vrai pour tout $m \geqslant 1$ et que $(e_m)_{m\geqslant 1}$ est une base orthonormée, cela implique que $T_K e_n = 0$, et ceci pour tout $n \geqslant 1$. Nous avons donc, pour tout $n \geqslant 1$, $(e_n \mid K_y) = (T_K e_n)(y) = 0$ pour presque tout $y \in S$ (ce qui est la même chose, puisque l'on a affaire à une suite, que, pour tout $n \geqslant 1$, on a $(e_n \mid K_y) = (T_K e_n)(y) = 0$ pour presque tout $y \in S$). Comme $(e_n)_{n\geqslant 1}$ est une base orthonormée, on obtient $K_y = 0$, en tant qu'élément de $L^2(\mu)$, pour presque tout $y \in S$. Cela veut dire que $K(x,y) = 0$ pour μ-presque tout $x \in S$ et μ-presque tout $y \in S$. Par le Théorème de Fubini, cela signifie que $K(x,y) = 0$ pour $(\mu \otimes \mu)$-presque tout $(x,y) \in S \times S$, c'est-à-dire que $K = 0$ dans $L^2(\mu \otimes \mu)$, et montre que $(e_n \otimes e_m)_{n,m\geqslant 1}$ est totale dans $L^2(\mu \otimes \mu)$.

c) Puisque $\sum_{n,m=1}^{\infty} |(Te_n \mid e_m)|^2 = \sum_{n=1} \left[\sum_{m=1}^{\infty} |(Te_n \mid e_m)|^2\right] = \sum_{n=1} \|Te_n\|^2 < +\infty$, il en résulte, grâce au b), que la série double $\sum_{n,m=1}^{\infty} (Te_n \mid e_m)\, e_n \otimes e_m$ converge dans $L^2(\mu \otimes \mu)$. Soit $K \in L^2(\mu \otimes \mu)$ sa somme. On a $K = \sum_{n,m=1}^{\infty} (Te_n \mid e_m)\, e_n \otimes e_m$, c'est-à-dire que $K(x,y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} (Te_n \mid e_m)\, e_n(x)\, e_m(y)$. Considérons l'opérateur T_K associé ; on a :

$$\begin{aligned}(T_K e_n \mid e_m) &= \int_S (T_K e_n)(y)\, e_m(y)\, d\mu(y) = \int_S \left[\int_S K(x,y)\, e_n(x)\, d\mu(x)\right] e_m(y)\, d\mu(y) \\ &= \int_{S\times S} K(x,y)\, e_n(x)\, e_m(y)\, d(\mu \otimes \mu)(x,y) = (K \mid e_n \otimes e_m) = (Te_n \mid e_m)\,.\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tous $n, m \geqslant 1$, on obtient $T_K e_n = Te_n$ pour tout $n \geqslant 1$, et donc $T_K = T$.

3) a) Il est clair que 0 est Hilbert-Schmidt et que αT est Hilbert-Schmidt, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, si T l'est. Si S, T sont Hilbert-Schmidt, on a $(Se_n)_{n\geqslant 1} \in \ell_2$ et $(Te_n)_{n\geqslant 1} \in \ell_2$; donc $(Se_n + Te_n)_{n\geqslant 1} \in \ell_2$, ce qui signifie que $S + T$ est Hilbert-Schmidt.

b) On a, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz (utilisée deux fois, mais sous deux formes différentes) :

$$\sum_{n\geqslant 1} |(Ae_n \mid Be_n)| \leqslant \sum_{n\geqslant 1} \|Ae_n\|\, \|Be_n\| \leqslant \Big(\sum_{n\geqslant 1} \|Ae_n\|^2\Big)^{1/2} \Big(\sum_{n\geqslant 1} \|Be_n\|^2\Big)^{1/2} < +\infty\,;$$

donc la série $\sum_{n\geqslant 1} (Ae_n \mid Be_n)$ converge.

Il est clair que $(A, B) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} (Ae_n \mid Be_n)$ est une forme bilinéaire symétrique, d'après les propriétés du produit scalaire de H. Comme $(A \mid A)_{\mathfrak{S}_2(H)} = \sum_{n=1}^{\infty} \|Ae_n\|^2$, la condition $(A \mid A)_{\mathfrak{S}_2(H)} = 0$ entraîne que $Ae_n = 0$ pour tout $n \geqslant 1$, et donc $A = 0$, puisque $(e_n)_{n\geqslant 1}$ est une base orthonormée de H. Ainsi $(\,.\mid .\,)_{\mathfrak{S}_2(H)}$ est bien un produit scalaire sur $\mathfrak{S}_2(H)$.

4) a) Il suffit d'utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \|(x \mid e_n)\, u_n\| &= \sum_{n=1}^{\infty} |(x \mid e_n)|\, \|u_n\| \leqslant \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |(x \mid e_n)|^2\Big)^{1/2} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|^2\Big)^{1/2} \\ &= \|x\| \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|^2\Big)^{1/2} < +\infty\,;\end{aligned}$$

comme H est complet, la série $\sum_{n\geqslant 1} (x \mid e_n)\, u_n$ converge, et l'on a $\big\| \sum_{n\geqslant 1} (x \mid e_n)\, u_n \big\| \leqslant \|x\| \big(\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|^2\big)^{1/2}$.

b) Appliquons ceci avec $u_n = Te_n$, qui vérifie bien $\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|^2 < +\infty$; on obtient :

$$\|Tx\| = \Big\|T\Big(\sum_{n=1}^{\infty} (x \mid e_n)\, e_n\Big)\Big\| = \Big\|\sum_{n=1}^{\infty} (x \mid e_n)\, Te_n\Big\| \leqslant \|x\| \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2\Big)^{1/2} = \|x\|\, \|T\|_{\mathfrak{S}_2(H)}\,,$$

de sorte que $\|T\| \leqslant \|T\|_{\mathfrak{S}_2(H)}$.

5) Pour montrer que $\mathfrak{S}_2(H)$ est complet, il suffit de montrer que toute série absolument convergente est convergente. Soit $T_k \in \mathfrak{S}_2(H)$ tels que $\sum_{k=1}^{\infty} \|T_k\|_{\mathfrak{S}_2(H)} < +\infty$. Comme $\|T_k\| \leqslant \|T_k\|_{\mathfrak{S}_2(H)}$, on a $\sum_{k=1}^{\infty} \|T_k\| < +\infty$. Comme $\mathscr{L}(H)$ est complet, la série $\sum_{k\geqslant 1} T_k$ converge (en norme) dans $\mathscr{L}(H)$. Soit T sa somme. On a en particulier $Tx = \sum_{k=1}^{\infty} T_k x$ pour tout $x \in H$. Le *Lemme de Fatou* donne :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lim_{K\to\infty} \sum_{k=1}^{K} \|T_k e_n\|^2 \right) \leqslant \liminf_{K\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{K} \|T_k e_n\|^2 \\
&= \liminf_{K\to\infty} \sum_{k=1}^{K} \sum_{n=1}^{\infty} \|T_k e_n\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \|T_k e_n\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|T_k\|_{\mathfrak{S}_2(H)}^2 \\
&\leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|T_k\|_{\mathfrak{S}_2(H)} \right)^2 < +\infty
\end{aligned}$$

(on a utilisé le fait que $\|\,.\,\|_{\ell_2} \leqslant \|\,.\,\|_{\ell_1}$) ; donc T est Hilbert-Schmidt. De plus,

$$\Big\| T - \sum_{k=1}^{K} T_k \Big\|_{\mathfrak{S}_2(H)} = \Big\| \sum_{k=K+1}^{\infty} T_k \Big\|_{\mathfrak{S}_2(H)} \leqslant \sum_{k=K+1}^{\infty} \|T_k\|_{\mathfrak{S}_2(H)} \underset{K\to\infty}{\longrightarrow} 0\,;$$

donc T est la somme de la série $\sum_{k\geqslant 1} T_k$, *au sens de la norme de Hilbert-Schmidt* $\|\,.\,\|_{\mathfrak{S}_2(H)}$, et l'on a bien montré que $\mathfrak{S}_2(H)$, pour le produit scalaire défini au 4), est un espace de Hilbert.

Exercice 24

1) a) On a évidemment $v(T) \geqslant 0$ et, pour $\|x\| = 1$, $\|Tx\|\,\|x\| \leqslant \|T\|\,\|x\|^2 = \|T\|$; donc $v(T) \leqslant \|T\| < +\infty$. Il est clair que $v(0) = 0$ et $v(\alpha T) = |\alpha|\, v(T)$ pour tout réel (resp. complexe) α. Ensuite, si $T, U \in \mathscr{L}(H)$:

$$v(T+U) = \sup_{\|x\|=1} |(Tx \mid x) + (Ux \mid x)| \leqslant \sup_{\|x\|=1} |(Tx \mid x)| + \sup_{\|x\|=1} |(Ux \mid x)| = v(T) + v(U)\,.$$

L'inégalité $|(Tx \mid x)| \leqslant v(T)\,\|x\|^2$ est évidente si $x = 0$ et est vraie, par définition de $v(T)$, si $\|x\| = 1$. Si $x \in H$ et $x \neq 0$, on a $\big\| \frac{x}{\|x\|} \big\| = 1$; donc $\big|\big(T\frac{x}{\|x\|} \mid \frac{x}{\|x\|}\big)\big| \leqslant v(T)$, ce qui donne $|(Tx \mid x)| \leqslant v(T)\,\|x\|^2$.

b) Supposons maintenant T auto-adjoint et supposons que $v(T) = 0$. Cela signifie que $(Tx \mid x) = 0$ pour $\|x\| \leqslant 1$. Par homogénéité, on a $(Tx \mid x) = 0$ pour tout $x \in H$. Soit $x, y \in H$. D'après ce qui précède, on a $\big(T(x+y) \mid x+y\big) = 0$. Mais $\big(T(x+y) \mid x+y\big) = (Tx \mid x) + (Tx \mid y) + (Ty \mid x) + (Ty \mid y)$; donc, puisque $(Tx \mid x) = 0$ et $(Ty \mid y) = 0$, on obtient $(Tx \mid y) + (Ty \mid x) = 0$. Comme T est auto-adjoint, on a $(Ty \mid x) = (y \mid T^*x) = (y \mid Tx) = \overline{(Tx \mid y)}$. On obtient finalement $\mathrm{Re}\,(Tx \mid y) = 0$. Lorsque l'espace H est réel, on a donc $(Tx \mid y) = 0$. Lorsque l'espace H est complexe, appliquons cela, en remplaçant y par iy ; cela donne $0 = \mathrm{Re}\,(Tx \mid iy) = \mathrm{Re}\,[-i\,(Tx \mid y)] = \mathrm{Im}\,(Tx \mid y)$. Donc, là aussi, on a $(Tx \mid y) = 0$. Comme c'est vrai pour tous $x, y \in H$, on obtient, d'abord $Tx = 0$ (car $Tx \in H^\perp = \{0\}$), puis $T = 0$.

Remarque. On a un résultat plus général à la Proposition VII.3.1.

2) a) En développant : $\big(U(x+ty) \mid x+ty\big) = (Ux \mid x) + t\,(Uy \mid x) + t\,(Ux \mid y) + t^2 (Uy \mid y)$; comme $(Uy \mid x) = \overline{(X \mid Uy)} = \overline{(x \mid U^*y)}$ car U est auto-adjoint, on obtient $(Uy \mid x) = \overline{(Ux \mid y)}$ et, par conséquent : $\big(U(x+ty) \mid x+ty\big) = (Ux \mid x) + 2t\,\mathrm{Re}\,(Ux \mid y) + t^2 (Uy \mid y)$. De

même : $\big(U(x-ty) \mid x-ty\big) = (Ux \mid x) - 2t\,\mathrm{Re}\,(Ux \mid y) + t^2(Uy \mid y)$, d'où, en soustrayant : $\big(U(x+ty) \mid x+ty\big) - \big(U(x-ty) \mid x-ty\big) = 4t\,\mathrm{Re}\,(Ux \mid y)$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} 4\,t\,|\mathrm{Re}\,(Ux \mid y)| &\leqslant \big|\big(U(x+ty) \mid x+ty\big)\big| + \big|\big(U(x-ty) \mid x-ty\big)\big| \\ &\leqslant v(U)\,\|x+ty\|^2 + v(U)\,\|x-ty\|^2 = v(U)\,[\|x+ty\|^2 + \|x-ty\|^2]\,. \end{aligned}$$

b) Comme $\|x+ty\|^2 + \|x-ty\|^2 = 2\,\|x\|^2 + 2t^2\|y\|^2$, on obtient :

$$v(U)\,\|y\|^2t^2 - 2\,|t|\,|\mathrm{Re}\,(Ux \mid y)| + v(U)\,\|x\|^2 \geqslant 0\,, \tag{$*$}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. Lorsque $v(U)\,\|y\|^2 \neq 0$, cela exige que le discriminant du trinôme du second degré au premier membre de $(*)$ soit négatif ou nul, soit : $|\mathrm{Re}\,(Ux \mid y)|^2 - v(U)^2\|x\|^2\|y\|^2 \leqslant 0$, c'est-à-dire $|\mathrm{Re}\,(Ux \mid y)| \leqslant v(U)\,\|x\|\,\|y\|$. Cela reste évidemment vrai si $\|y\| = 0$ (car alors $y = 0$) et aussi si $v(U) = 0$, car alors $(*)$ devient $-2\,|t|\,|\mathrm{Re}\,(Ux \mid y)| \geqslant 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, ce qui n'est possible que si $\mathrm{Re}\,(Ux \mid y) = 0$.

3) Considérons l'opérateur $U = \frac{1}{2}\,(S + S^*)$; il est auto-adjoint. Remarquons que $v(U) \leqslant \frac{1}{2}\,[v(S) + v(S^*)] = v(S)$ car $v(S^*) = v(S)$ (puisque $|(S^*x \mid x)| = |(x \mid Sx)| = |\overline{(Sx \mid x)}| = |(Sx \mid x)|$). En utilisant le 2) b), on obtient $|\mathrm{Re}\,[(Sx \mid y) + (x \mid Sy)]| \leqslant 2\,v(S)\,\|x\|\,\|y\|$, puisque $(S^*x \mid y) = (x \mid Sy)$.

4) Choisissons $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| = 1$ et $\lambda^2(T^2x \mid x) \in \mathbb{R}_+$. Soit $S = \lambda T$ et $y = Sx$; on a alors :

$$\begin{aligned} (Sx \mid y) + (x \mid Sy) &= \|Sx\|^2 + (x \mid S^2x) = \|Sx\|^2 + \overline{\lambda}^2(x \mid T^2x) = \|Sx\|^2 + \overline{\lambda^2(T^2x \mid x)} \\ &= \|Sx\|^2 + \lambda^2(T^2x \mid x) \in \mathbb{R}_+\,; \end{aligned}$$

donc le 3) donne, puisque $v(S) = |\lambda|\,v(T) = v(T)$:

$$\begin{aligned} \|Tx\|^2 = \|Sx\|^2 &\leqslant \|Sx\|^2 + \lambda^2(T^2x \mid x) \leqslant 2\,v(S)\,\|x\|\,\|y\| = 2\,v(T)\,\|x\|\,|\lambda|\,\|Tx\| \\ &= 2\,v(T)\,\|x\|\,\|Tx\|\,, \end{aligned}$$

d'où $\|Tx\| \leqslant 2\,v(T)\,\|x\|$ et donc $\|T\| \leqslant 2\,v(T)$.

Remarque. Ce résultat dit en particulier que pour les espaces de Hilbert *complexes*, le rayon numérique des opérateurs est une *norme équivalente* à la norme opérateur. Pour les espaces de Hilbert *réels*, G. Lumer a montré en 1972 que $\|T\| \leqslant 2\,v(T) + v(T^2)$. Pour les espaces de Banach, on peut définir le rayon numérique d'un opérateur $T \in \mathscr{L}(X)$ de façon analogue : $v(T) = \sup\{|x^*(Tx)|\,;\ x \in X, x^* \in X^* \text{ et } x^*(x) = \|x\| = \|x^*\| = 1\}$; il a été montré, par Bohnenblust et Karlin (1955) et Lumer (1961), que pour les espaces de Banach *complexes*, on a $\|T\| \leqslant \mathrm{e}\,v(T)$ pour tout $T \in \mathscr{L}(X)$. De plus, e est la meilleure constante possible (Glickfeld, 1970).

5) Il résulte du 4) que v est une norme sur $\mathscr{L}(H)$, équivalente à la norme opérateur. Donc $T = T^*$ si et seulement si $v(T - T^*) = 0$, c'est-à-dire, si et seulement si, pour tout $x \in H$, on a $\big((T - T^*)x \mid x\big) = 0$, ce qui est équivalent à $(Tx \mid x) = (T^*x \mid x) = (x \mid Tx) = \overline{(Tx \mid x)}$, soit $(Tx \mid x) \in \mathbb{R}$.

6) Il suffit de prendre pour T une rotation d'angle $\pi/2$, puisqu'alors $Tx \perp x$ et donc $(Tx \mid x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 25

1) Développons : $\|T^*(x) - x\|^2 = \|T^*(x)\|^2 + \|x\|^2 - 2\big(T^*(x) \mid x\big)$. On a $\|T^*(x)\| \leqslant \|T^*\| \, \|x\|$ et $\|T^*\| = \|T\| \leqslant 1$; de plus $\big(T^*(x) \mid x\big) = \big(x \mid T(x)\big)$. Donc

$$\|T^*(x) - x\|^2 \leqslant 2\big[\|x\|^2 - \big(x \mid T(x)\big)\big] .$$

2) On a $x \in \ker(I - T)$ (respectivement $x \in \ker(I - T^*)$) si et seulement si $Tx = x$ (resp. $T^*x = x$).

Alors, si $x \in \ker(I - T)$, le membre de droite de l'inégalité de la question 1) est nul, puisque $\big(x \mid T(x)\big) = (x \mid x) = \|x\|^2$. Donc $\|T^*x - x\|^2 = 0$, ce qui signifie que $T^*x = x$, c'est-à-dire que $x \in \ker(I - T^*)$.

Inversement, si $x \in \ker(I - T^*)$, ce qui précède permet de dire que $x \in \ker(I - T^{**})$; mais $T^{**} = T$, et donc $x \in \ker(I - T)$.

L'espace H se décompose en somme directe orthogonale :

$$H = \big[\ker(I - T)\big] \oplus \big[\ker(I - T)\big]^{\perp}.$$

Or on vient de voir que $\ker(I - T) = \ker(I - T^*)$; donc $H = \big[\ker(I - T)\big] \oplus \big[\ker(I - T^*)\big]^{\perp}$. Mais $(I - T^*) = (I - T)^*$ et on a vu à l'Exercice 8 que $\ker[(I - T)^*] = \big[\mathrm{im}(I - T)\big]^{\perp}$. Donc :

$$H = \big[\ker(I - T)\big] \oplus \big[\mathrm{im}(I - T)\big]^{\perp\perp}.$$

3) Pour $x \in \ker(I - T)$, on a $T(x) = x$; donc $T^n(x) = x$ pour tout $n \geqslant 0$, de sorte que $S_n(x) = x$.

Si $x \in \mathrm{im}(I - T)$, il s'écrit $x = y - Ty$ pour un certain $y \in H$. Alors, pour tout entier $k \geqslant 0$, $T^kx = T^ky - T^{k+1}y$ et

$$S_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^kx = \frac{1}{n}(y - T^ny) .$$

Comme $\|T\| \leqslant 1$, on a $\|T^n\| \leqslant \|T\|^n \leqslant 1$ et donc $\|S_n(x)\| \leqslant \frac{1}{n}(\|y\| + \|T^ny\|) \leqslant \frac{2}{n}\,\|y\|$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

4) Soit $x \in H$. Par la question 2), on peut écrire $x = x_1 + x_2$, avec $x_1 \in \ker(I - T)$ et $x_2 \in \big[\mathrm{Im}(I - T)\big]^{\perp\perp}$. On a $S_n(x_1) = x_1$ pour tout $n \geqslant 1$ par la question 3).

D'autre part, on sait que $\big[\mathrm{im}(I - T)\big]^{\perp\perp}$ est égal à l'adhérence de $\mathrm{im}(I - T)$. Donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $z \in \mathrm{im}(I - T)$ tel que $\|x_2 - z\| \leqslant \varepsilon$. Le *point essentiel* est maintenant que $\|S_n\| \leqslant 1$ pour tout $n \geqslant 1$ (car $\|S_n\| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\|T^k\|$ et $\|T^k\| \leqslant 1$). Ainsi :

$$\|S_n(x_2)\| \leqslant \|S_n(x_1 - z)\| + \|S_n(z)\| \leqslant \|S_n\|\,\|x_2 - z\| + \|S_n(z)\| \leqslant \varepsilon + \|S_n(z)\| .$$

Comme $\|S_n(z)\|$ tend vers 0 par la question 3), on obtient $\limsup_{n\to\infty}\|S_n(x_2)\| \leqslant \varepsilon$. Comme c'est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient $\lim_{n\to\infty}\|S_n(x_2)\| = 0$.

Ainsi $S_n(x)$ tend vers x_1, c'est-à-dire la projection orthogonale $P(x)$ de x sur $\ker(I - T)$.

Exercice 26

1) Il est clair que $(x,y) \mapsto (Tx \mid y)$ est un semi-produit scalaire sur H. L'inégalité $|(Tx \mid y)|^2 \leqslant (Tx \mid x)\,(Ty \mid y)$ est donc tout simplement celle de Cauchy-Schwarz (que l'on sait valable dans ce cas).

On a $\|Tx\| = \sup_{\|y\|\leqslant 1} |(Tx \mid y)|$; or $|(Tx \mid y)|^2 \leqslant (Tx \mid x)\,(Ty \mid y)$. Comme, pour $\|y\| \leqslant 1$, on a $(Ty \mid y) \leqslant \|Ty\|\,\|y\| \leqslant \|T\|$, on obtient $\|Tx\|^2 \leqslant \|T\|\,(Tx \mid x)$.

2) Cela résulte du 1), appliqué à $T = S_{n+p} - S_n$, vu que $\|S_{n+p} - S_n\| \leqslant \|S_{n+p}\| + \|S_n\| \leqslant 2M$.

3) Par hypothèse, la suite de nombres réels $\big((S_n x \mid x)\big)_n$ est croissante, et elle est majorée par $M\,\|x\|^2$ (car $(S_n x \mid x) \leqslant \|S_n\|\,\|x\|^2$, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz) ; elle est donc convergente ; en particulier elle est de Cauchy. Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \geqslant 1$ tel que $0 \leqslant (S_{n+p}x \mid x) - (S_n x \mid x) \leqslant \varepsilon^2/2M$ pour $n \geqslant N$ et $p \geqslant 1$. On a donc $\|S_{n+p}(x) - S_n(x)\|^2 \leqslant \varepsilon^2$ pour $n \geqslant N$ et $p \geqslant 1$. Cela signifie que la suite $(S_n x)_n$ est de Cauchy dans H. Comme H est complet, elle converge. Si $Sx = \lim_{n\to\infty} S_n x$, S est clairement une application linéaire de H dans H. Elle est continue car $\|S_n x\| \leqslant M\,\|x\|$ pour tout $n \geqslant 1$ entraîne que $\|Sx\| \leqslant M\,\|x\|$.

Exercice 27

1) Posons $a = \alpha + \beta$ et $b = i(\alpha - \beta)$. Alors $\alpha = \frac{a-ib}{2}$ et $\beta = \frac{a+ib}{2}$. Comme $a, b \in \mathbb{R}$, par hypothèse, on a $\beta = \overline{\alpha}$.

2) a) Développons : $\big(S(x+y) \mid x+y\big) = (Sx \mid x) + (Sx \mid y) + (Sy \mid x) + (Sy \mid y)$. Comme $\big(S(x+y) \mid x+y\big)$, $(Sx \mid x)$ et $(Sy \mid y)$ sont réels par hypothèse, on obtient $(Sx \mid y) + (Sy \mid x) \in \mathbb{R}$.

b) Remplaçant y par iy, on a aussi $i\,[-(Sx \mid y) + (Sy \mid x)] = (Sx \mid iy) + \big(S(iy) \mid x\big) \in \mathbb{R}$. Il résulte du 1) que $(Sy \mid x) = \overline{(Sx \mid y)}$. Comme, par définition, $(Sy \mid x) = (y \mid S^*x) = \overline{(S^*x \mid y)}$, on obtient $(S^*x \mid y) = (Sx \mid y)$. Puisque c'est vrai pour tous $x, y \in H$, on a $S^* = S$.

Remarque. Ceci n'est pas vrai pour un espace de Hilbert *réel* : dans ce cas, pour *tout* opérateur A tel que $\|A\| \leqslant 1$, on a $|(Ax \mid x)| \leqslant \|A\|\,\|x\|^2 \leqslant \|x\|^2$; donc l'opérateur $B = Id_H - A$ vérifie $(Bx \mid x) = (x \mid x) - (Ax \mid x) \geqslant 0$. Il n'est pourtant pas auto-adjoint si A ne l'est pas.

3) a) Puisque R_1 et R_2 *commutent*, on a $(R_1 + R_2)(R_1 - R_2) = R_1^2 - R_2^2 = 0$; donc $\operatorname{im}(R_1 - R_2) \subseteq \ker(R_1 + R_2)$.

b) L'inclusion $(\ker R_1) \cap (\ker R_2) \subseteq \ker(R_1 + R_2)$ est évidente. Montrons l'inclusion inverse. Soit $x \in \ker(R_1 + R_2)$. On a $R_1 x = -R_2 x$; donc $(R_1 x \mid x) = -(R_2 x \mid x)$. Comme R_1 et R_2 sont *positifs*, on a $(R_1 x \mid x) \geqslant 0$ et $(R_2 x \mid x) \geqslant 0$; l'égalité précédente implique donc que $(R_1 x \mid x) = (R_2 x \mid x) = 0$. Pour tout $y \in \ker(R_1 + R_2)$, on a, puisque R_1 est auto-adjoint :

$$\begin{aligned} 0 &= \big(R_1(x+y) \mid x+y\big) = (R_1 x \mid x) + (R_1 x \mid y) + (R_1 y \mid x) + (R_1 y \mid y) \\ &= 0 + (R_1 x \mid y) + (y \mid R_1 x) + 0 = 2\operatorname{Re}(R_1 x \mid y)\,. \end{aligned}$$

Changeant y en iy, on obtient $\operatorname{Im}(R_1 x \mid y) = \operatorname{Re}[-i(R_1 x \mid y)] = \operatorname{Re}(R_1 x \mid iy) = 0$, puisque $iy \in \ker(R_1 + R_2)$. Donc $(R_1 x \mid y) = 0$. Ainsi $R_1 x \in [\ker(R_1 + R_2)]^\perp$. Comme $R_1 x = -R_2 x$, on a donc $R_1 x - R_2 x = 2R_1 x \in [\ker(R_1 + R_2)]^\perp$. Mais $R_1 x - R_2 x \in \operatorname{im}(R_1 - R_2)$, de sorte que $R_1 x - R_2 x \in \ker(R_1 + R_2)$, par le a). Il en résulte que $R_1 x - R_2 x = 0$. Comme $R_1 x = -R_2 x$, on obtient $R_1 x = R_2 x = 0$, et ainsi $x \in (\ker R_1) \cap (\ker R_2)$.

c) Comme au a), on a $(R_1 - R_2)(R_1 + R_2) = 0$; donc $\operatorname{im}(R_1 + R_2) \subseteq \ker(R_1 - R_2)$. Puisque $\ker(R_1 - R_2)$ est fermé, on a en fait $\overline{\operatorname{im}(R_1 + R_2)} \subseteq \ker(R_1 - R_2)$. Mais par l'Exercice 8 et le Corollaire II.2.6, on a $\overline{\operatorname{im}(R_1 + R_2)} = [\ker(R_1 + R_2)]^\perp$, puisque $R_1 - R_2$ est *auto-adjoint* par le 2). Donc $H = \overline{\operatorname{im}(R_1 + R_2)} \oplus \ker(R_1 + R_2)$.

Pour $x \in \overline{\mathrm{im}\,(R_1+R_2)}$, on a $x \in \ker(R_1 - R_2)$, c'est-à-dire $R_1x = R_2x$. Pour $x \in \ker(R_1+R_2)$, on a $R_1x = R_2x = 0$, par le b). Il en résulte que $R_1 = R_2$.

4) On a $(T^2x \mid x) = (Tx \mid T^*x) = (Tx \mid Tx) = \|Tx\|^2 \geqslant 0$. Supposons que, pour $k \geqslant 2$, T^l soit positif pour $1 \leqslant l \leqslant k$. Alors $(T^{k+1}x \mid x) = (T^kx \mid T^*x) = \big(T^{k-1}(Tx) \mid Tx\big) \geqslant 0$. Par récurrence, T^k est donc positif pour tout $k \geqslant 1$.

5) Si l'on pose $\langle x \mid y\rangle = (Sx \mid y)$, $\langle\,.\mid.\,\rangle$ est clairement une forme sesquilinéaire; elle est de plus positive car S est positif : $\langle x \mid x\rangle = (Sx \mid x) \geqslant 0$. La preuve de l'inégalité de Cauchy-Schwarz donnée dans le cours n'utilisant pas la définie positivité du produit scalaire, mais seulement sa positivité, cette inégalité reste valable ici. On a donc $|\langle x \mid y\rangle|^2 \leqslant \langle x \mid x\rangle\,\langle y \mid y\rangle$, soit $|(Sx \mid y)|^2 \leqslant (Sx \mid x)\,(Sy \mid y)$. Or la condition $S \leqslant Id_H$ signifie que $(Sx \mid x) \leqslant (x \mid x)$ pour tout $x \in H$. On a donc $|(Sx \mid y)|^2 \leqslant \|x\|^2\|y\|^2$ pour tous $x, y \in H$. Il résulte de l'Exercice 9 que $\|S\| \leqslant 1$.

6) (On comparera avec l'Exercice 26).

a) La condition $S_n \leqslant S_{n+1}$ pour tout $n \geqslant 1$ est équivalente à la croissance de la suite $\big((S_nx \mid x)\big)_{n\geqslant 1}$, et la condition $S_n \leqslant Id_H$ pour tout $n \geqslant 1$ est équivalente au fait que cette suite est majorée par $(x \mid x) = \|x\|^2$. Cela entraîne la convergence de cette suite et par conséquent l'existence de $N(x) = [\lim_{n\to\infty}(S_nx \mid x)]^{1/2}$. De plus $N(x) \leqslant \|x\|$.

b) Comme S_n est auto-adjoint, on a $\big(S_n(x+y) \mid x+y\big) = (S_nx \mid x) + 2\,\mathrm{Re}\,(S_nx \mid y) + (S_ny \mid y)$; cela montre l'existence de $\lim_{n\to\infty}\mathrm{Re}\,(S_nx \mid y) = \frac{1}{2}\,\big[N(x+y)^2 - N(x)^2 - N(y)^2\big]$. Remplaçant y par iy, on a aussi l'existence de $\lim_{n\to\infty}\mathrm{Im}\,(S_nx \mid y) = \frac{1}{2}\,\big[N(x+iy)^2 - N(x)^2 - N(y)^2\big]$, puisque $\mathrm{Im}\,(S_nx \mid y) = \mathrm{Re}\,[-i\,(S_nx \mid y)] = \mathrm{Re}\,(S_nx \mid iy)$ et $N(iy) = N(y)$ (car $\big(S_n(iy) \mid iy\big) = i(-i)\,(S_ny \mid y)\big)$. On obtient par conséquent l'existence de $\sigma_x(y) = \lim_{n\to\infty}(S_nx \mid y)$.

c) L'application $y \in H \mapsto \overline{\sigma_x(y)} = \lim_{n\to\infty}(y \mid S_nx)$ est clairement une forme linéaire sur H. Elle est de plus continue et $\|\sigma_x\| \leqslant \|x\|$, car $|(S_nx \mid y)| \leqslant \|S_n\|\,\|x\|\,\|y\| \leqslant \|x\|\,\|y\|$ entraîne $|\sigma_x(y)| \leqslant \|x\|\,\|y\|$. Par le *Théorème de représentation de Fréchet-Riesz*, il existe un unique vecteur $Sx \in H$ tel que $\overline{\sigma_x(y)} = (y \mid Sx)$, soit $\sigma_x(y) = (Sx \mid y)$, pour tous $x, y \in H$.

d) Pour tout $y \in H$, on a $\big(S(a_1x_1 + a_2x_2) \mid y\big) = \lim_{n\to\infty}\big(S_n(a_1x_1 + a_2x_2) \mid y\big) = \lim_{n\to\infty}[a_1(S_n(x_1) \mid y) + a_2(S_nx_2 \mid y)] = a_1(Sx_1 \mid y) + a_2(Sx_2 \mid y) = \big(a_1S(x_1) + a_2S(x_2) \mid y\big)$; donc $S(a_1x_1 + a_2x_2) = a_1S(x_1) + a_2S(x_2)$, de sorte que S est linéaire. Elle est alors continue, puisque l'on a, pour tout $x \in H$, $|(Sx \mid y)| \leqslant \|x\|\,\|y\|$ pour tout $y \in H$, de sorte que $\|Sx\| \leqslant \|x\|$.

7) a) Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $|(Tx \mid x)| \leqslant \|Tx\|\,\|x\| \leqslant \|T\|\,\|x\|^2 \leqslant \|x\|^2 = (x \mid x)$; donc $(Vx \mid x) = (x \mid x) - (Tx \mid x) \geqslant 0$. Par conséquent $V \geqslant 0$. D'autre part, comme T est positif, on a $(Vx \mid x) = (x \mid x) - (Tx \mid x) \leqslant (x \mid x)$ pour tout $x \in H$. On a ainsi $0 \leqslant V \leqslant Id_H$. Il résulte du 5) que $\|V\| \leqslant 1$.

b) Raisonnons par récurrence. Pour $n = 0$, il est évident que $0 \leqslant S_0 \leqslant Id_H$. Supposons $0 \leqslant S_n \leqslant Id_H$. Alors $(S_{n+1}x \mid x) = \frac{1}{2}\,\big[(Tx \mid x) + (S_n^2x \mid x)\big] = \frac{1}{2}\,\big[(Tx \mid x) + (S_nx \mid S_n^*x)\big] = \frac{1}{2}\,\big[(Tx \mid x) + (S_nx \mid S_nx)\big]$. Donc, d'une part $(S_{n+1}x \mid x) \geqslant 0$, puisque $T \geqslant 0$ et $S_n \geqslant 0$, de sorte que $S_{n+1} \geqslant 0$; d'autre part $(S_{n+1}x \mid x) \leqslant \frac{1}{2}\,[\|T\|\,\|x\|^2 + (x \mid x)] \leqslant \frac{1}{2}\,[\|x\|^2 + (x \mid x)] = (x \mid x)$, donc $S_{n+1} \leqslant Id_H$.

c) Il suffit aussi de raisonner par récurrence. En effet, si $P_n(X)$ est un polynôme à coefficients positifs et $S_n = P_n(V)$, alors $S_{n+1} = P_{n+1}(V)$, avec $P_{n+1}(X) = \frac{1}{2}\,(X + [P_n(X)]^2)$ et P_{n+1} est aussi un polynôme à coefficients positifs.

d) On a $S_{n+1} - S_n = \frac{V+S_n^2}{2} - \frac{V+S_{n-1}^2}{2} = \frac{S_n^2 - S_{n-1}^2}{2} = \frac{(S_n - S_{n-1})(S_n + S_{n-1})}{2}$. Là aussi, il suffit de faire une récurrence. On a $S_1 - S_0 = S_1 = P_1(V)$, et $Q_1(X) = P_1(X) = X/2$ est un polynôme à coefficients positifs. Si l'on suppose que $S_n - S_{n-1} = Q_{n-1}(V)$, où Q_{n-1} est un polynôme à coefficients positifs, alors $S_{n+1} - S_n = \frac{(S_n - S_{n-1})(S_n + S_{n-1})}{2} = \frac{Q_{n-1}(V)\,[P_n(V) + P_{n-1}(V)]}{2} = Q_n(V)$, avec $Q_n = \frac{Q_{n-1}(P_n + P_{n-1})}{2}$, qui est encore un polynôme à coefficients positifs.

e) Écrivons $Q_n(X) = \sum_{k=0}^{d_k} a_{n,k} X^k$ avec $a_{n,k} \geqslant 0$. On obtient $\big(Q_n(V)x \mid x\big) = \sum_{k=0}^{d_k} a_{n,k}(V^k x \mid x) \geqslant 0$, par le 4). Donc $S_{n+1} - S_n = Q_n(V) \geqslant 0$ et $S_{n+1} \geqslant S_n$.

f) Il résulte du 6) qu'il existe $S \in \mathscr{L}(H)$ tel que $(Sx \mid y) = \lim_{n\to\infty}(S_n x \mid y)$. Puisque $0 \leqslant (S_n x \mid x) \leqslant (x \mid x)$ pour tout $n \geqslant 0$, on a $0 \leqslant (Sx \mid x) \leqslant (x \mid x)$, donc $0 \leqslant S \leqslant Id_H$. Comme $(S_{n+1}x \mid y) = \frac{1}{2}\left[(Vx \mid y) + S_n^2 x \mid y)\right]$, on obtient, en passant à la limite, $(Sx \mid y) = \frac{1}{2}\left[V + (S^2 x \mid y)\right]$, pour tous $x, y \in H$. Donc $2\,S = V + S^2$, ce qui donne $(Id_H - S)^2 = Id_H - 2\,S + S^2 = Id_H - V = T$. Si l'on pose $R = Id_H - S$, R est positif et on bien $R^2 = T$. Pour montrer l'unicité, soit R' un opérateur positif tel que $R'^2 = T$. Comme R est la limite de la suite $\big(Id_H - P_n(Id_H - T)\big)_{n\geqslant 0}$, formée de polynômes en T, et donc de polynômes en R', il commute avec R'. Il résulte du 3) que $R' = R$.

8) Notons d'abord que $(A^*Ax \mid x) = (Ax \mid Ax) = \|Ax\|^2 \geqslant 0$; donc A^*A est positif. Comme A est inversible, on a $A \neq 0$; alors $T = \frac{1}{\|A^*A\|}(A^*A)$ est un opérateur positif de norme $\|T\| \leqslant 1$. Grâce au 7), il existe un opérateur positif R_0 tel que $R_0^2 = T$. Alors $R = \|A^*A\|^{1/2} R_0$ est positif et $R^2 = A^*A$ (c'est-à-dire que $R = \sqrt{A^*A}$). Posons $U = A^{*-1}R$. Alors $UR = A^{*-1}R^2 = A^{*-1}(A^*A) = A$.

D'autre part, $UU^* = (A^{*-1}R)(R^*A^{-1}) = A^{*-1}R^2A^{-1} = A^{*-1}(A^*A)A^{-1} = Id_H$ et $U^*U = (R^*A^{-1})(A^{*-1}R) = R(A^*A)^{-1}R = (A^*A)^{-1}R^2$ (car R commute avec A^*A), et donc $U^*U = (A^*A)^{-1}(A^*A) = Id_H$.

Vérifions l'unicité pour finir. Supposons que l'on ait aussi $A = U'R'$, avec R' positif et U' unitaire. Alors $A^*A = (R'^*U'^*)(U'R') = R'(U'^*U')R' = R'^2$. Grâce à l'unicité du 7) f), on obtient $R' = R$, et donc $A = U'R$. Il en résulte, puisque $R = AU^{-1}$ est inversible, que $U' = AR^{-1} = U$.

Exercice 28

1) Soit $(y_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'éléments de $U(K)$ convergeant vers $y \in H$. Pour chaque $n \geqslant 1$, il existe un (unique) $x_n \in K$ tel que $y_n = Ux_n$. Comme U est une isométrie, on a $\|x_n - x_p\| = \|U(x_n - x_p)\| = \|y_n - y_p\|$ pour tous $n, p \geqslant 1$. Comme $(y_n)_{n\geqslant 1}$ est en particulier une suite de Cauchy, il en est de même de $(x_n)_{n\geqslant 1}$. Or, K étant fermé dans l'espace complet H, est lui-même complet. Il en résulte que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ converge dans K, vers un élément $x \in K$. Alors $y_n = Ux_n$ tend vers Ux. Donc $y = Ux$, et ainsi $U(K)$ est fermé dans H.

2) Par récurrence, il résulte du 1) que $U^k(H)$ est fermé pour tout $k \geqslant 1$ (prenant $K = U^k(H)$, supposé fermé par hypothèse, on obtient la fermeture de $U^{k+1}(H) = U(K)$). Donc M est fermé comme intersection de fermés.

Remarquons ensuite que l'inclusion $U(H) \subseteq H$ entraîne l'inclusion $U^{k+1}(H) \subseteq U^k(H)$, pour tout $k \geqslant 1$, par récurrence. Donc $U(M) = \bigcap_{k\geqslant 1} U[U^k(H)] = \bigcap_{k\geqslant 1} U^{k+1}(H) = \bigcap_{k\geqslant 2} U^k(H) = \bigcap_{k\geqslant 1} U^k(H) = M$ (l'avant dernière égalité venant de ce que $U(H) \supseteq U^k(H)$, pour tout $k \geqslant 2$).

3) La restriction de U à M reste une isométrie. Comme on vient de voir que $U(M) = M$, cette restriction $U_{|M} \colon M \to M$ est donc surjective. Il résulte de l'Exercice 12 que $U_{|M}$ est unitaire.

4) • Soit $1 \leqslant h < k$. Prenons $y \in U^h(N)$ et $z \in U^k(N)$. Soit $x, w \in N$ tels que $y = U^h x$ et $z = U^k w$. On a $(y \mid z) = (U^h x \mid U^k w) = (x \mid (U^h)^* U^k w)$. Si l'on pose $v = U^{k-h}w$, on a $(U^h)^*Uv = v$, d'après le 3), puisque U^h est une isométrie. Donc $(y \mid z) = (x \mid v)$. Mais $(x \mid v) = 0$ car $x \in N = [U(H)]^\perp$ et $v = U^{k-h}w \in U(N)$ (en notant que $k - h \geqslant 1$). Donc $y \perp z$. Il en résulte que $U^h(N)$ et $U^k(N)$ sont orthogonaux.

• Soit maintenant $y \in U^h(N)$ et $u \in M$. En particulier, $u \in U^{h+1}(H)$; donc $u = U^{h+1}t$, avec $t \in H$. Alors $(y \mid u) = (U^h x \mid U^{h+1}t) = (x \mid (U^h)^*[U^h Ut]) = (x \mid Ut) = 0$, puisque $x \in N = [U(H)]^\perp$ et $Ut \in U(H)$. Donc $U^h(N)$ est orthogonal à M.

5) On a donc $M \subseteq [U^h(N)]^\perp$ pour tout $h \geqslant 0$ et par conséquent $M \subseteq \bigcap_{h\geqslant 0}[U^h(N)]^\perp = \big[\bigoplus_{h\geqslant 0} U^h(N)\big]^\perp = Z^\perp$.

Inversement, dans le calcul fait au 3), on a vu que $(Ux \mid Uy) = (x \mid y)$ pour tous $x, y \in H$; U conserve donc le produit scalaire, et, en particulier, l'orthogonalité. L'égalité $H = N \oplus_\perp U(H)$ entraîne donc que $U^h(H) = U^h(N) \oplus_\perp U^{h+1}(H)$ pour tout $h \geqslant 0$. Il en résulte que si $x \in [U^h(N)]^\perp$ pour $h \geqslant 0$, alors $x \in U^{h+1}(H)$. Donc $Z^\perp = \big[\bigoplus_{h\geqslant 0} U^h(N)\big]^\perp = \bigcap_{h\geqslant 0}[U^h(N)]^\perp \subseteq \bigcap_{h\geqslant 0} U^{h+1}(H) = M$.

Ainsi $M = Z^\perp$ et donc $H = M \oplus Z$.

6) Si $u = (u_n)_{n\geqslant 0} \in \ell_2(N)$, posons $z_n = U^n(u_n)$ pour tout $n \geqslant 0$. Alors $z = \sum_{n=0}^\infty z_n \in Z$ et on a une application linéaire $J\colon \ell_2(N) \to Z$. Comme U est une isométrie, U^n aussi ; donc $\|u_n\| = \|z_n\|$ pour tout $n \geqslant 0$ et $\|u\|_2^2 = \sum_{n=0}^\infty \|u_n\|^2 = \sum_{n=0}^\infty \|z_n\|^2 = \|z\|^2$, de sorte que J est une isométrie. Elle est surjective car si $z \in Z$, on a $z = \sum_{n=0}^\infty z_n$ avec $z_n \in U^n(N)$ pour tout $n \geqslant 0$; il existe donc $u_n \in N$ tel que $z_n = U^n(u_n)$. Comme tout-à-l'heure, on a $\|u_n\| = \|z_n\|$ pour tout $n \geqslant 0$; donc $u = (u_n)_{n\geqslant 0} \in \ell_2(N)$ et $z = J(u)$.

On a $U(z) = U\big(\sum_{n=0}^\infty z_n\big) = \sum_{n=0}^\infty U(z_n)$, avec $z_n \in U^n(N)$ pour tout $n \geqslant 0$. Alors $U(z_n) \in U^{n+1}(N)$. Donc U envoie Z dans lui-même et agit sur $\ell_2(N)$ comme le shift $S\colon \ell_2(N) \to \ell_2(N)$, défini par $S(u_0, u_1, u_2, \ldots) = (0, u_1, u_2, \ldots)$ (voir l'Exercice 12) ; plus précisément, $U = JSJ^{-1}$.

7) Si $U_{|E}$ est unitaire, c'est en particulier une bijection de E sur lui-même. Donc $U(E) = E$ et, par récurrence, $U^k(E) = E$ pour tout $k \geqslant 1$. Alors $E \subseteq \bigcap_{k\geqslant 1} U^k(H) = M$. Comme $E \subseteq Z = M^\perp$, ce n'est possible que si $E = \{0\}$.

8) Pour le shift S sur ℓ_2, $S^k(\ell_2) = \{(x_n)_{n\geqslant 1} \in \ell_2\,;\ x_1 = \cdots = x_k = 0$; donc $M = \bigcap_{k\geqslant 1} S^k(\ell_2) = \{0\}$. Il en résulte que $Z = M^\perp = \ell_2$. Ainsi S est complètement non-unitaire.

Exercice 29

Cette méthode, basé sur l'inégalité de Wirtinger, est due à Hurwitz (1904).

1) On a $\gamma'(s) = i\,\mathrm{e}^{2\pi i s}$, donc $|\gamma'(s)| = 1$ et $L = 1$. De plus $S = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im} \int_0^1 i\,\mathrm{e}^{2\pi i s}\frac{\mathrm{e}^{-2\pi i s}}{2\pi}\,ds = \frac{1}{4\pi}$.

2) On fait une intégration par parties :

$$\widehat{\gamma'}(n) = \int_0^1 \gamma'(s)\,\mathrm{e}^{-2\pi i n s}\,ds = \Big[\gamma(s)\,\mathrm{e}^{-2\pi i n s}\Big]_0^1 - \int_0^1 \gamma(s)\,[-2\pi i n\,\mathrm{e}^{-2\pi i n s}]\,ds\,;$$

le terme tout intégré est nul car $\gamma(0) = \gamma(1)$, et l'on obtient donc $\widehat{\gamma'}(n) = 2\pi i n\,\widehat{\gamma}(n)$.

3) En utilisant la *formule de Parseval*, on obtient :

$$S = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\,(\gamma' \mid \gamma)_2 = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\gamma'}(n)\,\overline{\widehat{\gamma}(n)}\Big) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} 2\pi i n\,|c_n|^2\Big) = \pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2|c_n|^2.$$

4) On a, par la *formule de Parseval*, en remarquant que $|\gamma'(s)| = |\gamma'(s)|^2$, puisque $|\gamma'(s)| = 1$:

$$1 = L = \int_0^1 |\gamma'(s)|^2\,ds = \|\gamma'\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{\gamma'}(n)|^2 = 4\pi^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2|c_n|^2.$$

5) On obtient donc $S = \pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} n\,|c_n|^2 \leqslant \pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2|c_n|^2 = \pi\,\frac{1}{4\pi^2} = \frac{1}{4\pi}$.

6) Comme $n^2 \geqslant n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, l'égalité est obtenue si et seulement si $n\,|c_n|^2 = n^2|c_n|^2$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, c'est-à-dire *ssi* $c_n = 0$ pour $n \geqslant 2$ et pour $n \leqslant -1$. On a donc $\gamma(s) = c_0 + |c_1|\,\mathrm{e}^{2\pi i s}$. Comme $1 = |\gamma'(s)| = 2\pi\,|c_1|$, on a finalement, en écrivant $c_1 = |c_1|\,\mathrm{e}^{2\pi i\theta}$, $\gamma(s) = c_0 + \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{e}^{2\pi i(s+\theta)}$. La courbe γ est donc le cercle de centre c_0 et de rayon $1/(2\pi)$, parcouru dans le sens positif.

Le fait que le cercle soit parcouru dans le sens positif n'est dû qu'au fait que la formule donnant la surface S n'est valable que dans ce cas ; il faut changer son signe lorsque la courbe est parcourue dans le sens négatif.

Scholie. La méthode est la même. On peut modifier f en 1 de façon à avoir $f(0) = f(1)$. On a alors :

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f'x)|^2\,dx &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f'}(n)|^2 = 4\pi^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2 |\widehat{f}(n)|^2 \\ &\geqslant 4\pi^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} |\widehat{f}(n)|^2 = 4\pi^2 \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|^2 - |\widehat{f}(0)|^2 \Big) \\ &= 4\pi^2 \left[\int_0^1 |f(x)|^2\,dx - \left| \int_0^1 f(x)\,dx \right|^2 \right].\end{aligned}$$

L'égalité est obtenue si et seulement si $\widehat{f}(n) = 0$ pour $|n| \geqslant 1$, c'est-à-dire lorsque $f(x) = c_0 + c_1\,\mathrm{e}^{2\pi i x} + c_{-1}\,\mathrm{e}^{-2\pi i x}$, $0 \leqslant x < 1$, avec $c_0, c_1, c_{-1} \in \mathbb{C}$.

Exercice 30

1) La série $\sum_{n\geqslant 1} (x \mid e_n)\,(e_n - f_n)$ converge car H est complet et qu'elle vérifie le critère de Cauchy ; en effet, $(*)$ appliqué avec $N+p$ au lieu de N et $a_1 = \cdots = a_{N-1} = 0$ et $a_n = (x \mid e_n)$ pour $N \leqslant n \leqslant N+p$ donne : $\left\| \sum_{n=N}^{N+p} (x \mid e_n)\,(e_n - f_n) \right\| \leqslant C^2 \sum_{n=N}^{N+p} |(x \mid e_n)|^2 \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$, uniformément en $p \in \mathbb{N}$, car $\sum_{n=1}^{\infty} |(x \mid e_n)|^2 = \|x\|^2 < +\infty$.

2) Il est clair que K est linéaire (car chaque application $x \mapsto (x \mid e_n)$ est linéaire). De plus, en faisant tendre N vers l'infini dans $(*)$ (avec $a_n = (x \mid e_n)$ pour tout $n \geqslant 1$), on obtient $\|K(x)\|^2 \leqslant C^2 \sum_{n=1}^{\infty} |(x \mid e_n)|^2 = \|x\|^2$. Donc K est continue et $\|K\| \leqslant C$.

3) Comme $x = \sum_{n=1}^{\infty} (x \mid e_n)\,e_n$, pour tout $x \in H$, on a $T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (x \mid e_n)\,f_n$. En particulier, $T(e_n) = f_n$.

Comme $\|I - T\| = \|K\| \leqslant C < 1$, T est inversible et d'inverse continu. En effet, comme $\|K\| \leqslant C < 1$, la série $\sum_{j=1}^{\infty} \|K\|^j$ converge ; comme $\mathcal{L}(H)$ est complet et que $\|K^j\| \leqslant \|K\|^j$, la série $U = \sum_{j=0}^{\infty} K^j$ converge dans $\mathcal{L}(H)$. Si l'on pose $U = \sum_{j=0}^{\infty} K^j$, on a $TU = (I-K)U = I$ et $UT = U(I-K) = I$.

4) On a $(f_k \mid g_l) = \big(f_k \mid U^*(e_l)\big) = \big(U(f_k) \mid e_l\big) = (e_k \mid e_l)$ car $e_k = T^{-1}(f_k) = U(f_k)$. Cela donne le résultat puisque $(e_n)_{n\geqslant 1}$ est orthonormée.

5) Pour tout $x \in H$, on a $U(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \big(U(x) \mid e_n\big)\,e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \big(x \mid U^*(e_n)\big)\,e_n = \sum_{n=1}^{\infty} (x \mid g_n)\,e_n$; d'où, puisque $U = T^{-1}$ et $T(e_n) = f_n$: $x = \sum_{n=1}^{\infty} (x \mid g_n)\,f_n$.

De même, $T^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \big(T^*(x) \mid e_n\big)\,e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \big(x \mid T(e_n)\big)\,e_n = \sum_{n=1}^{\infty} (x \mid f_n)\,e_n$; d'où, puisque $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^* = U^*$: $x = \sum_{n=1}^{\infty} (x \mid f_n)\,g_n$.

Il en résulte que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ et $(g_n)_{n\geqslant 1}$ sont totales ; en effet, si $(x \mid f_n) = 0$ pour tout $n \geqslant 1$, l'égalité $x = \sum_{n=1}^{\infty} (x \mid f_n)\,g_n$ entraîne $x = 0$; de même $(x \mid g_n) = 0$ pour tout $n \geqslant 1$ entraîne $x = 0$.

Exercice 31

1) a) Soit φ_n, $n \in \mathbb{Z}$, les formes linéaires définies par $\varphi_n(f) = (x \mid e_n)$; elles sont continues, et l'on a $H^2 = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}} \ker \varphi_n$; donc H^2 est un sous-espace vectoriel fermé de $L^2(0,1)$.

b) Par définition, tous les e_n, pour $n \in \mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$, sont orthogonaux à H^2 ; donc l'espace H^- qu'ils engendrent est contenu dans $(H^2)^\perp$. Inversement, soit $f \in (H^2)^\perp$. Comme $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de $L^2(0,1)$, on peut écrire $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e_n$, avec $c_n = \widehat{f}(n) = (f \mid e_n)$. Remarquons maintenant que $e_n \in H^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; donc $(f \mid e_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et ainsi $= \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}} c_n e_n \in H^-$.

c) H^2 étant un sous-espace vectoriel fermé, on a $H^2 = (H^2)^{\perp\perp} = (H^-)^{\perp}$, d'après le 1) b). Donc pour toute $f \in H^2$, on a $(f \mid e_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, et ainsi $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}}(f \mid e_n)\, e_n = \sum_{n=0}^{\infty}(f \mid e_n)\, e_n$. Par conséquent $(e_n)_{n\geqslant 0}$ est une base orthonormée de H^2.

2) Si f est à valeurs réelles, notons d'abord que l'on a $c_0 = \int_0^1 f(t)\, dt \in \mathbb{R}$. Ensuite, puisque $f \in H^2$, on peut écrire $f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e_n$, par le 2). Alors $f(t) = \overline{f(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{c_n}\, \mathrm{e}^{-2\pi int}$, c'est-à-dire que $f = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{c_n}\, e_{-n} = c_0\, e_0 + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}} \overline{c_n}\, e_n$. Donc $f - c_0\, e_0 \in H^- = (H^2)^{\perp}$. Mais $f - c_0\, e_0 \in H^2$. Il en résulte que $f - c_0\, e_0 = 0$, et donc $f = c_0\, e_0 = c_0 1\!\!1$ est constante.

On aurait aussi pu utiliser le fait que $\widehat{\overline{f}}(n) = \overline{\widehat{f}(-n)}$ pour toute $f \in L^1(0,1)$ et tout $n \in \mathbb{Z}$. Si f est à valeurs réelles, on a donc $\widehat{f}(n) = \overline{\widehat{f}(-n)}$ pour tout $n \in Z$. Mais, comme $f \in H^2$, $\widehat{f}(-n) = 0$ pour tout $n \geqslant 1$; on a donc aussi $\widehat{f}(n) = 0$ pour tout $n \geqslant 1$. Par conséquent $f = c_0\, e_0$ est constante.

3) a) On a vu au 1) c) que $(e_n)_{n\geqslant 0}$ est une base orthonormée de H^2 ; donc si $f \in H^2$, on a $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n)\, \mathrm{e}^{2\pi int}$, pour presque tout $t \in [0,1]$, et la formule de Parseval dit que $\sum_{n=0}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^2 = \|f\|_2^2 < +\infty$. Pour tout $z \in \mathbb{D}$, on a, en posant $c_n = \widehat{f}(n)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n z^n| \leqslant \Big(\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2\Big)^{1/2} \Big(\sum_{n=0}^{\infty} |z|^{2n}\Big)^{1/2} = \|f\|_2^2\, \frac{1}{(1-|z|^2)^{1/2}} < +\infty ;$$

on peut donc définir une fonction $F\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ en posant $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$. Elle est analytique, comme somme d'une série entière. Il résulte de l'Exercice 16 que :

$$\sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} |F(r\,\mathrm{e}^{it})|^2\, \frac{dt}{2\pi} = \|f\|_2^2.$$

b) Il résulte de l'Exercice 16 que $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 < +\infty$. On peut donc définir $f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e_n \in H^2$ et l'on a $\widehat{f}(n) = c_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4) a) Il est clair que V_A est un sous-espace vectoriel de H^2 : $0 \in V_A$ et si $f_1, f_2 \in V_A$ et $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$, alors $a_1 f_1 + a_2 f_2 = 0$ presque partout sur A (si N_1 et N_2 sont deux parties négligeables de A telles que $f_1(t) = 0$ pour $t \in A \setminus N_1$ et $f_2(t) = 0$ pour $t \in A \setminus N_2$, alors $N_1 \cup N_2$ est une partie négligeable de A et $a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) = 0$ pour $t \in A \setminus (N_1 \cup N_2)$) ; donc $a_1 f_1 + a_2 f_2 \in V_A$. Maintenant, si $f_n \in V_A$ et $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ dans $L^2(0,1)$, il existe une sous-suite $(f_{n_k})_{k\geqslant 1}$ convergeant presque partout vers f. Montrons que $f = 0$ presque partout sur A, ce qui prouvera que $f \in V_A$, et donc que V_A est fermé. Pour chaque $k \geqslant 1$, il existe une partie négligeable N_k de A telle que $f_{n_k}(t) = 0$ pour $t \in A \setminus N_k$. D'autre part, il existe une partie négligeable N de A telle que $f_{n_k}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(t)$ pour tout $t \in A \setminus N$. Alors $\widetilde{N} = N \cup \big(\bigcup_{k\geqslant 1} N_k\big)$ est une partie négligeable de A et $f(t) = 0$ pour $t \in A \setminus \widetilde{N}$. Donc $f \in V_A$.

b) Comme $f \in H^2$, on peut écrire $f = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e_k$. Alors $f\, e_n = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e_{k+n}$; en effet, notons d'abord que $f\, e_n \in L^2(0,1)$ car $|f\, e_n| = |f|$, puis que l'on a :

$$\begin{aligned}\Big\| \sum_{k=0}^{K} c_k e_{k+n} - f\, e_n \Big\|_2^2 &= \int_0^1 \Big| \sum_{k=0}^{K} c_k\, \mathrm{e}^{2pii(k+n)t} - f(t)\, \mathrm{e}^{2\pi int} \Big|^2 dt \\ &= \int_0^1 \Big| \sum_{k=0}^{K} c_k\, \mathrm{e}^{2piikt} - f(t) \Big|^2 dt = \Big\| \sum_{k=0}^{K} c_k e_k - f \Big\|_2^2 \xrightarrow[K\to\infty]{} 0.\end{aligned}$$

Donc $f\, e_n \in H^2$. Il est ensuite clair que si f est nulle presque partout sur A, alors $f\, e_n$ aussi. Donc $f\, e_n \in V_A$.

c) (*i*) Par définition $u \in V_A$ et $e_0 - u = e_0 - P_A(e_0) \perp V_A$; donc, puisque $u\, e_n \in V_A$, par le 3), on a $u\, e_n \perp e_0 - u$.

(*ii*) On a donc $(e_0 - u \mid u\, e_n) = 0$, c'est-à-dire $\int_0^1 \overline{(1 - u(t))}\, u(t)\, e_n(t)\, dt = 0$, ce qui donne $\int_0^1 |u(t)|^2 \mathrm{e}^{2\pi int}\, dt = \int_0^1 u(t)\, \mathrm{e}^{2\pi int}\, dt = (u \mid e_{-n})$. Comme $u \in H^2$, $(u \mid e_{-n}) = 0$ pour tout $n \geqslant 1$; donc $\int_0^1 |u(t)|^2\, \mathrm{e}^{2\pi int}\, dt = 0$ pour tout $n \geqslant 1$.

(*iii*) En prenant le conjugué, on a aussi $\int_0^1 |u(t)|^2\, \mathrm{e}^{-2\pi int}\, dt = 0$ pour tout $n \geqslant 1$. Il en résulte que la fonction $|u|^2 \in L^1(0,1)$ a tous ses coefficients de Fourier nuls, à l'exception peut-être de celui en 0 ; elle est donc constante (presque partout) : si $\varphi = |u|^2 - \widehat{|u|^2}(0)$, on a $\widehat{\varphi}(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, donc $\varphi = 0$ (Théorème II.4.13).

d) Comme A est de mesure > 0 et u est nulle presque partout sur A, u (et donc $|u|^2$) est nulle sur un ensemble de mesure > 0. Comme $|u|^2$ est presque partout constante, elle est nulle presque partout, et u aussi.

Puisque $u = P_A(e_0)$, la nullité de u signifie que $e_0 \perp V_A$.

e) (*i*) On a $c_0 = (f \mid e_0) = 0$, puisque $f \in V_A$ et $c_0 \perp V_A$. D'autre part, par le même raisonnement qu'au 3), on a $e_{-1}f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e_{n-1}$; donc, puisque $c_0 = 0$, $e_{-1}f = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1} e_k \in H^2$.

(*ii*) Alors, puisque $e_{-1}f$ s'annulle presque partout sur A (comme f), $e_{-1}f \in V_A$. Comme $e_0 \perp V_A$, on obtient $e_{-1}f \perp e_0$. Cela s'écrit : $0 = (e_{-1}f \mid e_0) = \int_0^1 f(t)\, \mathrm{e}^{-2\pi it}\, dt = (f \mid e_1)$, ce qui signifie que $f \perp e_1$.

f) Montrons alors par récurrence que $e_n \perp V_A$ pour tout $n \geqslant 0$, ce qui montrera que $V_A = \{0\}$ (puisqu'alors, pour toute $f \in V_A$, on a $c_n = (f \mid e_n) = 0$ pour tout $n \geqslant 0$ et donc $f = 0$). On a vu que c'est vrai pour $n = 0$. Supposons que $e_n \perp V_A$. Pour toute $f \in V_A$, on a vu que $e_{-1}f \in V_A$; donc $e_n \perp (e_{-1}f)$. Cela s'écrit : $0 = (e_{-1}f \mid e_n) = \int_0^1 f(t)\, \mathrm{e}^{-2\pi it}\, \mathrm{e}^{-2\pi int}\, dt = (f \mid e_{n+1})$. Ainsi $e_{n+1} \perp V_A$, et l'hypothèse de récurrence est vérifiée à l'ordre $(n+1)$.

Exercice 32

1) Par hypothèse $\int_\Omega \left[\int_\Omega |K(x,y)|\,|f(y)|\, d\mu(y)\right]^2 d\mu(x) \leqslant C^2\, \|f\|_2^2$; cela signifie que l'application $x \mapsto \left(\int_\Omega |K(x,y)|\,|f(y)|\, d\mu(y)\right)^2$ est intégrable ; elle est donc finie μ-presque partout et $\int_\Omega |K(x,y)|\,|f(y)|\, d\mu(y) < +\infty$ pour μ-presque tout $x \in \Omega$. On peut donc définir $(T_K f)(x) = \int_\Omega K(x,y)\, f(y)\, d\mu(y)$ pour μ-presque tout $x \in \Omega$. Si l'on pose $(T_K f)(x) = 0$ pour les autres valeurs de x, l'application $T_K f$ ainsi définie sur Ω est mesurable. En effet, le *Théorème de Fubini-Tonelli* nous dit que pour toute fonction mesurable positive g sur $\Omega \times \Omega$, la fonction $x \mapsto \int_\Omega g(x,y)\, d\mu(y)$ est mesurable, et, si l'on pose $h(x,y) = K(x,y)\, f(y)$, on peut appliquer ce résultat à $(\mathrm{Re}\, h)^+$, $(\mathrm{Re}\, h)^-$, $(\mathrm{Im}\, h)^+$ et $(\mathrm{Im}\, h)^-$. De plus, l'hypothèse implique alors aussi que $\int_\Omega |(T_K f)(x)|^2\, d\mu(x) \leqslant \int_\Omega \left[\int_\Omega |K(x,y)|\,|f(y)|\, d\mu(y)\right]^2 d\mu(x) \leqslant C^2\, \|f\|_2^2$, donc $T_k f \in L^2(\mu)$ et $\|T_K f\|_2 \leqslant C\, \|f\|_2$. On a alors une application $T_K \colon f \in L^2(\mu) \mapsto T_K f \in L^2(\mu)$, qui est clairement linéaire, et $\|T_K\| \leqslant C$.

2) Pour tous $f, g \in L^2(\mu)$, on a :

$$\begin{aligned}
(f \mid T_K^* g) &= (T_K f \mid g) = \int_\Omega \left[\int_\Omega K(x,y)\, f(y)\, d\mu(y)\right] \overline{g(x)}\, d\mu(x) \\
&\underset{\text{Fubini}}{=} \int_\Omega \left[\int_\Omega K(x,y)\, \overline{g(x)}\, d\mu(x)\right] f(y)\, d\mu(y) \\
&= \int_\Omega \left[\int_\Omega \overline{K^*(y,x)}\, \overline{g(x)}\, d\mu(x)\right] f(y)\, d\mu(y) \\
&= \int_\Omega \overline{(T_{K^*} g)(y)}\, f(y)\, d\mu(y) = (f \mid T_{K^*} g)\, ;
\end{aligned}$$

donc $T_K^* g = T_{K^*} g$ et $T_K^* = T_{K^*}$.

L'utilisation du Théorème de Fubini est licite car, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Big[\int_\Omega |K(x,y)\, f(y)|\, d\mu(y)\Big]\, |\overline{g(x)}|\, d\mu(x) \\ &\leqslant \Big(\int_\Omega \Big[\int_\Omega |K(x,y)\, f(y)|\, d\mu(y)\Big]^2 d\mu(x)\Big)^{1/2} \Big(\int_\Omega |g(x)|^2\, d\mu(x)\Big)^{1/2} \\ &\leqslant C\, \|f\|_2 \|g\|_2 < +\infty\,,\end{aligned}$$

où l'on a utilisé dans l'avant-dernière inégalité la condition donnée dans le 1).

3) Si $K \in L^2(\Omega\times\Omega, \mu\otimes\mu)$, on a, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\int_\Omega |K(x,y)|\,|f(y)|\, d\mu(y) \leqslant \Big[\int_\Omega |K(x,y)|^2\, d\mu(y)\Big]^{1/2} \Big[\int_\Omega |f(y)|^2\, d\mu(y)\Big]^{1/2},$$

puis :

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Big[\int_\Omega |K(x,y)|\,|f(y)|\, d\mu(y)\Big]^2 d\mu(x) &\leqslant \Big(\int_\Omega \Big[\int_\Omega |K(x,y)|^2\, d\mu(y)\Big]\, d\mu(x)\Big)\, \|f\|_2^2 \\ &= \Big(\int_{\Omega\times\Omega} |K(x,y)|^2\, d(\mu\otimes\mu)(x,y)\Big)\, \|f\|_2^2 \\ &= \|K\|_2^2\, \|f\|_2^2,\end{aligned}$$

en utilisant le Théorème de Fubini-Tonelli. Il résulte du 1) que K est un noyau borné sur $L^2(\mu)$, et que $\|T_K\| \leqslant \|K\|_2$.

Remarque. On comparera avec le 2) a) de l'Exercice 23.

4) a) On a, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned}\int_\Omega |K(x,y)|\,|f(y)|\, d\mu(y) &= \int_\Omega [|K(x,y)|^{1/2} w(y)^{1/2}]\, |K(x,y)|^{1/2}\, \frac{|f(y)|}{w(y)^{1/2}}\, d\mu(y) \\ &\leqslant \Big[\int_\Omega |K(x,y)|\, w(y)\, d\mu(y)\Big]^{1/2} \Big[\int_\Omega |K(x,y)|\, \frac{|f(y)|^2}{w(y)}\, d\mu(y)\Big]^{1/2} \\ &\leqslant_{(H_1)} C^{1/2} w(x)^{1/2} \Big[\int_\Omega |K(x,y)|\, \frac{|f(y)|^2}{w(y)}\, d\mu(y)\Big]^{1/2}.\end{aligned}$$

b) Alors :

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Big[\int_\Omega |K(x,y)|\,|f(y)|\, d\mu(y)\Big]^2 d\mu(x) \\ &\leqslant C \int_\Omega w(x) \Big[\int_\Omega |K(x,y)|\, \frac{|f(y)|^2}{w(y)}\, d\mu(y)\Big]\, d\mu(x) \\ &\underset{\text{Fubini-Tonelli}}{=} C \int_\Omega \Big[\int_\Omega |K(x,y)|\, w(x)\, d\mu(x)\Big]\, \frac{|f(y)|^2}{w(y)}\, d\mu(y) \\ &\leqslant_{(H_2)} C^2 \int_\Omega |f(y)|^2\, d\mu(y) = C^2\, \|f\|_2^2.\end{aligned}$$

Il résulte du 1) a) que K est un noyau borné sur $L^2(\mu)$, et que $\|T_K\| \leqslant C$.

Exercice 33

Posons $K(i,j) = \frac{1}{i+j}$ pour $i, j \geqslant 1$. Vérifions la condition (H_1) du test de Schur, avec $w(j) = 1/\sqrt{j}$. Comme la fonction $t \mapsto \frac{1}{(i+t)\sqrt{t}}$ est positive et décroissante, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{i+j}\,\frac{1}{\sqrt{j}} &\leqslant \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(i+t)\sqrt{t}} = 2\int_0^{+\infty} \frac{du}{i+u^2} = \frac{2}{\sqrt{i}}\Big[\arctan\frac{u}{i}\Big]_0^{+\infty} \\ &= \frac{2}{\sqrt{i}}\,\frac{\pi}{2} = \pi\,\frac{1}{\sqrt{i}}\,.\end{aligned}$$

La condition (H_2) s'obtient en échangeant i et j. Il en résulte que l'on peut définir, pour tout $x = (x_j)_{j\geqslant 1} \in \ell_2$,

$$(Hx)_i = \sum_{j=1}^{\infty} K(i,j)\, x_j = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{i+j}\, x_j\,,$$

que l'on obtient ainsi un élément $Hx \in \ell_2$ et que l'opérateur $H\colon \ell_2 \to \ell_2$ ainsi obtenu est continu et de norme $\|H\| \leqslant \pi$.

Remarque. On peut montrer que π est la meilleure constante.

Il peut être intéressant de "voir" explicitement les calculs générés dans la preuve du test de Schur. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{i+j}\,|x_j| &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(i+j)^{1/2}}\,\frac{1}{j^{1/4}}\,\frac{j^{1/4}|x_j|}{(i+j)^{1/2}} \\ &\leqslant \Big(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{i+j}\,\frac{1}{\sqrt{j}}\Big)^{1/2}\Big(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\sqrt{j}\,|x_j|^2}{i+j}\Big)^{1/2} \\ &\leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{i^{1/4}}\Big(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\sqrt{j}\,|x_j|^2}{i+j}\Big)^{1/2}\,;\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}\Big(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{i+j}\,|x_j|\Big)^2 &\leqslant \pi\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{i}}\Big(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\sqrt{j}\,|x_j|^2}{i+j}\Big) \\ &= \pi\sum_{j=1}^{\infty}\Big(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i+j}\,\frac{1}{\sqrt{i}}\Big)\sqrt{j}\,|x_j|^2 \\ &\leqslant \pi\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\pi}{\sqrt{j}}\,\sqrt{j}\,|x_j|^2 = \pi^2\|x\|_2^2\,.\end{aligned}$$

Cela prouve, d'abord que $\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{i+j}\,|x_j| < +\infty$ pour tout $i \geqslant 1$, ce qui permet de définir $(Hx)_i = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{i+j}\,x_j$, et ensuite que $\sum_{i=1}^{\infty}|(Hx)_i|^2 \leqslant \pi^2\|x\|_2^2 < +\infty$, c'est-à-dire que $Hx \in \ell_2$ et $\|Hx\|_2 \leqslant \pi\,\|x\|_2$.

Exercice 34

On notera que cet opérateur a déjà été considéré à l'Exercice 23 du Chapitre I.

1) Soit $T = \{(x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*\,;\ 0 < t \leqslant x\}$, et posons :

$$K(x,t) = \frac{1}{x}\,\mathbb{1}_{[0,x]}(t) = \frac{1}{x}\,\mathbb{1}_{t\leqslant x} = \frac{1}{x}\,\mathbb{1}_T(x,t)\,.$$

On obtient une fonction K mesurable positive sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$. Notons que $K \notin L^2(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*)$; en effet :

$$\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty}[K(x,t)]^2\,dt\right]dx = \int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2}\left[\int_0^{+\infty}\mathbb{1}_{[0,x]}(t)\,dt\right]dx$$
$$= \int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2}\left[\int_0^{x}dt\right]dx = \int_0^{+\infty}\frac{dx}{x} = +\infty\,.$$

Néanmoins, nous pouvons utiliser le test de Schur. Prenons $0 < \alpha < 1$ et effectuons ce test avec $w(t) = t^{-\alpha}$. Vérifions (H_1). On a :

$$\int_0^{+\infty} K(x,t)\,t^{-\alpha}\,dt = \frac{1}{x}\int_0^x t^{-\alpha}\,dt = \frac{1}{1-\alpha}\,x^{-\alpha}.$$

Pour (H_2) :

$$\int_0^{+\infty} K(x,t)\,x^{-\alpha}\,dx = \int_t^{+\infty}\frac{1}{x}\,x^{-\alpha}\,dx = \frac{1}{\alpha}\,t^{-\alpha}.$$

Le test de Schur est bien vérifié, avec $C_\alpha = \max\left(\frac{1}{1-\alpha},\frac{1}{\alpha}\right)$. On peut donc définir :

$$(Af)(x) = \int_0^{+\infty} K(x,t)\,f(t)\,dt = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$$

pour presque tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, et l'on obtient un opérateur borné $A\colon L^2(\mathbb{R}_+^*) \to L^2(\mathbb{R}_+^*)$ tel que $\|A\| \leqslant C_\alpha$.

Comme c'est vrai pour tout α tel que $0 < \alpha < 1$, on a $\|A\| \leqslant C$, avec $C = \inf_{0<\alpha<1} C_\alpha$. Mais il est clair que $C \leqslant 2$ (en prenant $\alpha = 1/2$). Donc $\|A\| \leqslant 2$.

2) Considérons, pour $0 < \beta < 1/2$, la fonction f_β définie par $f_\beta(t) = \mathbb{1}_{]0,1]}(t)\,t^{-\beta}$, $t > 0$. On a $\|f_\beta\|_2^2 = \int_0^1 t^{-\alpha}\,dt = \frac{1}{1-2\beta}$. D'autre part :

$$\text{pour } 0 < x \leqslant 1, \qquad (Af_\beta)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x t^{-\beta}\,dt = \frac{1}{x}\,\frac{1}{1-\beta}\,x^{1-\beta} = \frac{1}{1-\beta}\,x^{-\beta};$$
$$\text{pour } x > 1, \qquad (Af_\beta)(x) = \frac{1}{x}\int_0^1 t^{-\beta}\,dt = \frac{1}{x}\,\frac{1}{1-\beta},$$

de sorte que :

$$\|Af_\beta\|_2^2 = \frac{1}{(1-\beta)^2}\int_0^1 x^{-2\beta}\,dx + \frac{1}{(1-\beta)^2}\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2} = \frac{1}{(1-\beta)^2}\,\frac{1}{1-2\beta} + \frac{1}{(1-\beta)^2}$$
$$= \frac{2}{(1-\beta)(1-2\beta)}\,.$$

Par conséquent :

$$\|A\|^2 \geqslant \frac{\|Af_\beta\|_2^2}{\|f_\beta\|_2^2} = \frac{\frac{2}{(1-\beta)(1-2\beta)}}{\frac{1}{1-2\beta}} = \frac{2}{1-\beta}\xrightarrow[\beta\to 1/2]{} 4\,,$$

et donc $\|A\| \geqslant 2$, de sorte que finalement $\|A\| = 2$.

3) D'après le 2) de l'Exercice 32, l'opérateur adjoint A^* est donné par $A^* = T_{K^*}$, où $K^*(x,t) = \overline{K(t,x)} = \frac{1}{t}\,\mathbb{1}_{x\leqslant t} = \frac{1}{t}\,\mathbb{1}_{[x,+\infty[}(t)$, de sorte que $(A^*f)(x) = \int_x^{+\infty}\frac{f(t)}{t}\,dt$ pour

presque tout $x > 0$. Alors, pour presque tout $x > 0$:

$$\begin{aligned}
(A^*Af)(x) &= \int_x^{+\infty} \frac{(Af)(t)}{t}\,dt = \int_x^{+\infty} \frac{1}{t}\left[\frac{1}{t}\int_0^t f(u)\,du\right] dt \\
&= \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{t\geqslant x}\frac{1}{t^2}\left[\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{u\leqslant t} f(u)\,du\right] dt \\
&\underset{\text{Fubini}}{=} \int_0^{+\infty} f(u)\left[\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{t\geqslant x}\mathbb{1}_{u\leqslant t}\frac{dt}{t^2}\right] du \\
&= \int_0^{+\infty} f(u)\left[\int_u^{+\infty} \mathbb{1}_{t\geqslant x}\frac{dt}{t^2}\right] du \\
&= \int_0^{x} f(u)\left[\int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^2}\right] du + \int_x^{+\infty} f(u)\left[\int_u^{+\infty} \frac{dt}{t^2}\right] du \\
&= \int_0^{x} f(u)\,\frac{1}{x}\,du + \int_x^{+\infty} f(u)\,\frac{du}{u} \\
&= (Af)(x) + (A^*f)(x)\,.
\end{aligned}$$

L'utilisation du Théorème de Fubini est justifée car

$$\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty} |f(u)|\,\mathbb{1}_{t\geqslant x}\mathbb{1}_{u\leqslant t}\frac{1}{t^2}\,du\right] dt = [(A^*A)(|f|)](x) < +\infty$$

pour presque tout $x > 0$.

De même :

$$\begin{aligned}
(AA^*f)(x) &= \frac{1}{x}\int_0^x (A^*f)(t)\,dt = \frac{1}{x}\int_0^x\left[\int_t^{+\infty}\frac{f(u)}{u}\,du\right] dt \\
&= \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{t\leqslant x}\left[\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{u\geqslant t}\frac{f(u)}{u}\,du\right] dt \\
&= \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{f(u)}{u}\left[\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{t\leqslant x}\mathbb{1}_{u\geqslant t}\,dt\right] du \\
&= \frac{1}{x}\int_0^{x} \frac{f(u)}{u}\left[\int_0^{u} dt\right] du + \frac{1}{x}\int_x^{+\infty} \frac{f(u)}{u}\left[\int_0^{x} dt\right] du \\
&= \frac{1}{x}\int_0^{x} \frac{f(u)}{u}\,u\,du + \frac{1}{x}\int_x^{+\infty} \frac{f(u)}{u}\,x\,du \\
&= (Af)(x) + (A^*f)(x)\,.
\end{aligned}$$

Donc $A^*A = A + A^* = AA^*$. Il en résulte que, si $U = I - A$, on a $UU^* = (I-A)(I-A^*) = I - (A+A^*) + AA^* = I$ et $U^*U = (I-A^*)(I-A) = I - (A+A^*) + A^*A = I$; donc U est unitaire.

Remarque. Cette façon de montrer que A est unitaire a été donnée par P. Lax en 2008.

Exercice 35

1) Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de Cauchy dans $\mathscr{C}_b(Y)$. Cela signifie qu'elle est uniformément de Cauchy sur Y ; elle est donc uniformément convergente. Si f est sa limite, on sait que f est continue sur Y. Elle est de plus bornée car si on choisit $N \geqslant 1$ tel que $\|f - f_N\|_\infty \leqslant 1$, alors $|f(y)| \leqslant |f(y) - f_N(y)| + |f_N(y)| \leqslant \|f - f_N\|_\infty + \|f_N\|_\infty \leqslant 1 + \|f_N\|_\infty$ pour tout $y \in Y$. Donc $f \in \mathscr{C}_b(Y)$ et $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers f, pour la norme de $\mathscr{C}_b(Y)$.

2) a) La fonction $t \mapsto \max(|t|, 1)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas ; donc U est continue sur $\mathbb{R}$. La composée S_h avec la fonction continue h est donc continue sur Y. Comme $|U(t)| \leqslant |t|$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $|S_h(y)| \leqslant \|R_X(h)\|_X \big(|h(y)|/\|R_X(h)\|_X\big) \leqslant \|h\|_Y$ pour tout $y \in Y$, de sorte que $S_h \in \mathscr{C}_b(Y)$.

b) Si $x \in X$, on a $|h(x)|/\|R_X(h)\|_X \leqslant 1$; donc $U\big(h(x)/\|R_X(h)\|_X\big) = h(x)/\|R_X(h)\|_X$ et $S_h(x) = h(x)$.

c) Lorsque $|t| \leqslant 1$, on a $U(t) = t$ et lorsque $|t| \geqslant 1$, on a $U(t) = t/|t|$; donc $|U(t)| \leqslant 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Par conséquent, $|S_h(y)| \leqslant \|R_X(h)\|_X$ pour tout $y \in Y$ et $\|S_h\|_Y \leqslant \|R_X(h)\|_X$. D'autre part, comme X est compact, il existe $x_0 \in X$ tel que $\|R_X(h)\|_X = |[R_X(h)](x_0)| = |h(x_0)|$, qui est égal, par le b), à $|S_h(x_0)|$. Donc $\|S_h\|_Y = \|R_X(h)\|_X$.

3) a) On sait que la fonction $y \mapsto d(x, y)$ est (uniformément) continue sur Y ; donc f_x est continue sur Y, et elle est bornée, par 1.

b) L'image $\operatorname{im} R_X$ de R_X est clairement une sous-algèbre de $\mathscr{C}(X)$ contenant les constantes. De plus, si x et x' sont deux éléments distincts de X, on a $[R_X(f_x)](x) = f_x(x) = 0$ et $[R_X(f_x)](x') = f_x(x') = d(x, x') \neq 0$; donc $\operatorname{im} R_X$ sépare les points de X. Le *Théorème de Stone-Weierstrass* assure donc la densité de $\operatorname{im} R_X$ dans $\mathscr{C}(X)$.

4) a) Grâce à la densité de $\operatorname{im} R_X$ dans $\mathscr{C}(X)$, il existe une suite de fonctions $h_n \in \mathscr{C}_b(Y)$ telle que $\|R_X(h_n) - g\|_X \leqslant 2^{-(n+2)}\|g\|_X$, pour tout $n \geqslant 0$. Alors $\|R_X(h_n) - g\|_X \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et :

$$\begin{aligned}\|R_X(h_{n+1}) - R_X(h_n)\|_X &\leqslant \|R_X(h_{n+1}) - g\|_X + \|R_X(h_n) - g\|_X \\ &\leqslant 2^{-(n+3)}\|g\|_X + 2^{-(n+2)}\|g\|_X \leqslant 2^{-(n+1)}\|g\|_X.\end{aligned}$$

b) Par le a) et 2) c), on a :

$$\|S_{h_{n+1}-h_n}\|_Y = \|R_X(h_{n+1} - h_n)\|_X = \|R_X(h_{n+1}) - R_X(h_n)\|_X \leqslant 2^{-(n+1)}\|g\|_X ;$$

donc la série $\sum_{n\geqslant 0} \|S_{h_{n+1}-h_n}\|_Y$ converge. Comme $\mathscr{C}_b(Y)$ est un espace vectoriel normé complet, la série $\sum_{n=0}^{\infty} S_{h_{n+1}-h_n}$ converge dans $\mathscr{C}_b(Y)$.

c) Soit $h = \sum_{n=0}^{\infty} S_{h_{n+1}-h_n} + S_{h_0}$. Pour tout $x \in X$, on a, grâce à 2) b) :

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} S_{h_{n+1}-h_n}(x) + S_{h_0}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(h_{n+1} - h_n)(x) + h_0(x) = \lim_{n\to\infty} h_n(x)\,.$$

Mais, par le a), la suite $\big(R_X(h_n)\big)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur X vers g ; donc, pour tout $x \in X$, $\lim_{n\to\infty} h_n(x) = \lim_{n\to\infty}[R_X(h_n)](x) = g(x)$. Ainsi $R_X(h) = g$.

d) Pour tout $x \in X$, on a $-\|g\|_X \leqslant g(x) = h(x) \leqslant \|g\|_X$; donc si l'on pose $f = \max\big(-\|g\|_X, \min(h, \|g\|_X)\big)$, on a $f(x) = h(x) = g(x)$ pour tout $x \in X$, de sorte que, f étant clairement continue et bornée sur Y, l'on a $R_X(f) = g$. De plus, par construction $\|f\|_Y \leqslant \|g\|_X$. Comme, par ailleurs, $\|g\|_X = \|R_X(f)\|_X \leqslant \|f\|_Y$, on a bien $\|f\|_Y = \|g\|_X$.

XI.3. Exercices du Chapitre III

XI.3.1. Convolution

Exercice 1

1) On a :

$$(\mathbb{1}_{[0,1]} * \mathbb{1}_{[0,1]})(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0,1]}(x-t)\, \mathbb{1}_{[0,1]}(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[x-1,x]}(t)\, \mathbb{1}_{[0,1]}(t)\, dt = \lambda([x-1, x] \cap [0, 1])\,.$$

Comme $[x-1,x]\cap[0,1]$ est vide pour $x<0$ et pour $x>2$, égal à $[0,x]$ pour $0\leqslant x\leqslant 1$ et égal à $[x-1,1]$ pour $1\leqslant x\leqslant 2$, on obtient :

$$(\mathbb{1}_{[0,1]} * \mathbb{1}_{[0,1]})(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<0 \\ x & \text{si} \quad 0\leqslant x\leqslant 1 \\ 2-x & \text{si} \quad 1\leqslant x\leqslant 2 \\ 0 & \text{si} \quad x>2\,. \end{cases}$$

Notons que l'on a une fonction continue sur $\mathbb{R}$, comme on pouvait le prévoir, puisque $\mathbb{1}_{[0,1]}\in L^2(\mathbb{R})$, et l'on sait qu'alors $\mathbb{1}_{[0,1]} * \mathbb{1}_{[0,1]} \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R})$. Elle est de plus à support compact, ce que l'on pouvait aussi prévoir, puisque $\operatorname{supp}(\mathbb{1}_{[0,1]} * \mathbb{1}_{[0,1]}) \subseteq (\operatorname{supp}\mathbb{1}_{[0,1]}) + (\operatorname{supp}\mathbb{1}_{[0,1]}) = [0,1]+[0,1]=[0,2]$.

2) On a $f=\sum_{n\in\mathbb{Z}^*}|n|\,\mathbb{1}_{I_n}$ et donc $\int_{\mathbb{R}}|f|\,d\lambda = \sum_{n\in\mathbb{Z}^*}|n|\times\dfrac{1}{|n|^3}<+\infty$.

Pourtant $(f*f)(0)$ n'existe pas. En effet, pour $t\in I_n$, on a $-t\in I_{-n}$; donc $f(t)\,f(-t)=|n|\,|-n|=n^2$, et :

$$\int_{\mathbb{R}} f(-t)\,f(t)\,dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} n^2\times\frac{1}{|n|^3} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = +\infty.$$

Exercice 2

1) On a :

$$\begin{aligned}(p_\varepsilon * f)(t) &= \int_{\mathbb{R}}\frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}}\mathbb{1}_{[-\varepsilon,0]}(t-s)\,f(s)\,ds = \frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}}\mathbb{1}_{[t,t+\varepsilon]}(s)\,f(s)\,ds = \frac{1}{\varepsilon}\int_t^{t+\varepsilon} f(s)\,ds \\ &= \frac{1}{\varepsilon}\left[\int_0^{t+\varepsilon} f(s)\,ds - \int_0^t f(s)\,ds\right] = \frac{1}{\varepsilon}\,[F(t+\varepsilon)-F(t)]\,.\end{aligned}$$

2) Soit $p(s)=\mathbb{1}_{[-1,0]}(s)$; on a $0\leqslant p(s)\leqslant 1$ et $\int_{\mathbb{R}}p(s)\,ds=1$. Comme $p_\varepsilon(s)=\frac{1}{\varepsilon}\,p(\frac{s}{\varepsilon})$, $(p_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est une unité approchée (Théorème III.1.9). Il en résulte, puisque $f\in L^1(\mathbb{R})$, que $f*p_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{L^1(\mathbb{R})} f$; autrement dit, en utilisant le 1), $\Delta_\varepsilon f \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{L^1(\mathbb{R})} f$.

Remarque. On en déduit qu'il existe une suite de nombres positifs $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ telle que $\Delta_{\varepsilon_n} f \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ presque partout. Cela n'est *pas suffisant* pour en déduire que F est dérivable presque partout, et que sa dérivée est f. Le résultat est néanmoins vrai : c'est le *Théorème de différentiation de Lebesgue* (1904), mais c'est bien plus difficile à montrer.

Exercice 3

a) Soit $\varphi\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ bornée, continue en 0 et telle que $\varphi(0)=0$. On peut la supposer non identiquement nulle. Pour tout $\varepsilon>0$, on peut trouver un $\delta>0$ tel que $|\varphi(t)|\leqslant\varepsilon/(2M)$ pour $|t|\leqslant\delta$. D'autre part, par la condition (*iii*), on peut trouver un entier $N\geqslant 1$ tel que $\int_{|t|\geqslant\delta}|k_n(t)|\,dt\leqslant\varepsilon/(2\,\|\varphi\|_\infty)$, lorsque $n\geqslant N$. Alors, pour $n\geqslant N$:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}|k_n(t)\,\varphi(t)|\,dt &= \int_{|t|\geqslant\delta}|k_n(t)|\,|\varphi(t)|\,dt + \int_{|t|<\delta}|k_n(t)|\,|\varphi(t)|\,dt \\ &\leqslant \|\varphi\|_\infty\int_{|t|\geqslant\delta}|k_n(t)|\,dt + \frac{\varepsilon}{2M}\int_{|t|<\delta}|k_n(t)|\,dt \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2M}\,\|k_n\|_1\leqslant\varepsilon\,;\end{aligned}$$

donc $\int_{\mathbb{R}}|k_n(t)|\,|\varphi(t)|\,dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

b) Soit maintenant $g \in \mathscr{C}_b(\mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}$. Comme $\int_{\mathbb{R}} k_n(t)\,dt = 1$, on a $g * k_n(x) - g(x) = \int_{\mathbb{R}}[g(x-t) - g(x)]\,k_n(t)\,dt$. Posons $\varphi(t) = g(x-t) - g(x)$ pour $t \in \mathbb{R}$. La fonction φ est continue et bornée sur $\mathbb{R}$ et $\varphi(0) = 0$. Il résulte du a) que l'on a $|g * k_n(x) - g(x)| \leqslant \int_{\mathbb{R}} |g(x-t) - g(x)|\,k_n(t)|\,dt = \int_{\mathbb{R}} |\varphi(t)\,k_n(t)|\,dt \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

c) Soit maintenant $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leqslant p < \infty$. On va montrer que $\|f * k_n - f\|_p \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ de la même manière que dans le Théorème III.1.9. En utilisant comme ci-dessus le fait que $\int_{\mathbb{R}} k_n(t)\,dt = 1$, puis l'inégalité de Hölder (pour $p > 1$; pour $p = 1$, l'inégalité obtenue est évidente), on obtient (q étant l'exposant conjugué de p) :

$$\begin{aligned}
|(f * k_n)(x) - f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} [f(x-t) - f(x)]\,k_n(t)\,dt \right| \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f(x-t) - f(x)|\,|k_n(t)|\,dt \\
&\leqslant \left[\int_{\mathbb{R}} |f(x-t) - f(x)|^p\,[|k_n(t)|^{1/p}]^p \right]^{1/p} \left[\int_{\mathbb{R}} [|k_n(t)|^{1-\frac{1}{p}}]^q\,dt \right]^{1/q} \\
&= \left[\int_{\mathbb{R}} |f(x-t) - f(x)|^p\,k_n(t)\,dt \right]^{1/p} \left[\int_{\mathbb{R}} |k_n(t)|\,dt \right]^{1/q} \\
&\leqslant M^{1/q} \left[\int_{\mathbb{R}} |f(x-t) - f(x)|^p\,|k_n(t)|\,dt \right]^{1/p} ;
\end{aligned}$$

d'où, en utilisant le Théorème de Fubini-Tonelli :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |(f * k_n)(x) - f(x)|^p\,dx &\leqslant M^{p/q} \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} |f(x-t) - f(x)|^p\,|k_n(t)|\,dt \right] dx \\
&= M^{p/q} \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} |f(x-t) - f(x)|^p\,dx \right] |k_n(t)|\,dt \\
&= M^{p/q} \int_{\mathbb{R}} \|f_t - f\|_p^p\,|k_n(t)|\,dt = M^{p/q} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\,|k_n(t)|\,dt \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 ,
\end{aligned}$$

par le a), puisque la fonction φ définie par $\varphi(t) = \|f_t - f\|_p^p$ est continue (car $\tau_f \colon t \in \mathbb{R} \longmapsto f_t \in L^p(\mathbb{R})$ l'est, par le Théorème III.1.4), bornée (par $2^p \|f\|_p^p$) et $\varphi(0) = 0$.

On notera que, au passage, on a obtenu $\|f * k_n - f\|_p^p < +\infty$; donc $(f * k_n - f) \in L^p(\mathbb{R})$ et par conséquent $f * k_n \in L^p(\mathbb{R})$.

Exercice 4

1) En utilisant l'abus de notation habituel, on considérera que f est une fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Cela signifie que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un $\delta > 0$ tel que $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$ pour $|x - y| \leqslant \delta$. Soit alors $a, a' \in \mathbb{R}$ tels que $|a - a'| \leqslant \delta$; on a :

$$\|\tau_f(a) - \tau_f(a')\|_\infty = \operatorname*{sup\,ess}_{x\in\mathbb{R}} |f(x-a) - f(x-a')| \leqslant \varepsilon$$

car $|(x-a) - (x-a')| = |a - a'| \leqslant \delta$ (en fait, comme $\tau_f(a) - \tau_f(a')$ est continue et essentiellement bornée, elle est bornée et sa borne supérieure essentielle est égale à sa borne supérieure ; mais cela ne nous sert pas de le savoir). Par conséquent, τ_f est uniformément continue.

2) a) Soit $N = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 ;\ |f_t(x) - f(x)| \leqslant \|f_t - f\|_\infty\}$. Par définition de la norme supérieure essentielle, on a $\lambda(N_t) = 0$, $N_t = \{x \in \mathbb{R} ;\ (t,x) \in N\}$ étant la section en t de N. Cela signifie que $\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_N(t,x)\,dx = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Le Théorème de Fubini-Tonelli donne :

$$\int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_N(t,x)\,dt \right] dx = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_N(t,x)\,dx \right] dt = 0 ;$$

donc $\lambda(N^x) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_N(t,x)\,dt = 0$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$. Cela signifie que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ on a $|f_t(x) - f(x)| \leqslant \|f_t - f\|_\infty$ pour presque tout $t \in \mathbb{R}$.

b) Comme $\int_{\mathbb{R}} p_n(t)\,dt = 1$, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) - (f * p_n)(x) = \int_{\mathbb{R}} [f(x) - f(x-t)]\,p_n(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} [f(x) - f_t(x)]\,p_n(t)\,dt\,,$$

d'où $|f(x) - (f * p_n)(x)| \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f(x) - f_t(x)|\,p_n(t)\,dt$, puisque $p_n \geqslant 0$. Grâce au a), on en déduit que l'on a, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x) - (f * p_n)(x)| \leqslant \int_{\mathbb{R}} \|f - f_t\|_\infty\, p_n(t)\,dt$, d'où $\|f - f * p_n\|_\infty \leqslant \int_{\mathbb{R}} \|f - f_t\|_\infty\, p_n(t)\,dt$.

3) Notons d'abord que si τ_f est continue en 0, elle est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. En effet, si $t, t' \in \mathbb{R}$, on a $\|\tau_f(t) - \tau_f(t')\|_\infty = \|f_t - f_{t'}\|_\infty = \operatorname{sup\,ess}_{x\in\mathbb{R}} |f(x-t) - f(x-t')| = \operatorname{sup\,ess}_{u\in\mathbb{R}} |f(u - (t-t')) - f(u)| = \|f_{t-t'} - f\|_\infty$.

a) Pour $x, x' \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}(f * p_n)(x) - (f * p_n)(x') &= \int_{\mathbb{R}} [f(x-t) - f(x'-t)]\,p_n(t)\,dt \leqslant \int_{\mathbb{R}} \|f_{-x} - f_{-x'}\|_\infty\, p_n(t)\,dt \\ &= \|f_{-x} - f_{-x'}\|_\infty = \|\tau_f(-x) - \tau_f(-x')\|_\infty\,.\end{aligned}$$

La continuité uniforme de τ_f entraîne donc celle de $f * p_n$.

b) Si l'on pose $g(t) = \|f_t - f\|_\infty$, il résulte de la remarque du début du 3) que g est continue sur $\mathbb{R}$. Comme elle est bornée (par $2\|f\|_\infty$), on a $g \in \mathscr{C}_b(\mathbb{R})$, de sorte que $g * p_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} g(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En particulier, on a $\int_{\mathbb{R}} \|f - f_t\|_\infty\, p_n(t)\,dt = (g * p_n)(0) \xrightarrow[n\to\infty]{} g(0) = 0$. Par conséquent, $\|f - f * p_n\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. La suite $(f * p_n)_{n\geqslant 1}$ est en particulier de Cauchy dans $L^\infty(\mathbb{R})$. Mais comme les fonctions $f * p_n$ sont uniformément continues, cette suite est de Cauchy dans le sous-espace $\mathscr{U}\mathscr{C}(\mathbb{R})$ des fonctions uniformément continues sur $\mathbb{R}$, sur lequel la norme uniforme essentielle coïncide avec la norme uniforme. Cette suite de Cauchy converge donc uniformément vers une fonction uniformément continue h. Comme $\|f - f * p_n\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, on a $h = f$ presque partout.

Exercice 5

1) a) Fixons $x \in \mathbb{R}$ et $a \in A$. Puisque $f(u + a) = f(u)$ pour presque tout $u \in \mathbb{R}$, on a :

$$(g*f)(x+a) = \int_{\mathbb{R}} g(x+a-t)\,f(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} g(x-u)\,f(u+a)\,du = \int_{\mathbb{R}} g(x-u)\,f(u)\,du = (g*f)(x)\,.$$

b) Prenons $x = 0$. Comme $g \in L^1(\mathbb{R})$ et $f \in L^\infty(\mathbb{R})$, $g * f$ est continue sur $\mathbb{R}$. Comme A est dense dans $\mathbb{R}$, le a) entraîne que l'égalité $(g * f)(a) = (g * f)(0)$ vraie pour tout $a \in A$ est en fait vraie pour tout $a \in \mathbb{R}$; cela signifie que $g * f$ est constante.

2) Soit $(p_n)_{n\geqslant 1}$ une unité approchée dans $L^1(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{supp}(p_n) \subseteq [-A, A]$ pour tout $n \geqslant 1$. D'après le 1), on sait que $f * p_n$ est constante, disons égale à c_n, pour tout $n \geqslant 1$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $(f*p_n)(x) = \int_{-A}^{A} f(x-t)\,p_n(t)\,dt$. Soit $B > 0$, arbitraire. Si $|x| \leqslant B$, on a $-(A+B) \leqslant x-t \leqslant A+B$ pour tout $t \in [-A, A]$; donc si l'on pose $\widetilde{f} = f\,\mathbb{1}_{[-(A+B),A+B]}$, on a $(f * p_n)(x) = (\widetilde{f} * p_n)(x)$ pour $|x| \leqslant B$. Comme $\widetilde{f} \in L^1(\mathbb{R})$, on a $\|\widetilde{f} * p_n - \widetilde{f}\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, et il existe une sous-suite $(p_{n_k})_{k\geqslant 1}$ telle que $\widetilde{f} * p_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \widetilde{f}$ presque partout. En particulier, $(f * p_{n_k})(x) = (\widetilde{f} * p_{n_k})(x) \xrightarrow[k\to\infty]{} \widetilde{f}(x) = f(x)$ pour presque tout $x \in [-B, B]$. Il en résulte que la suite $(c_{n_k})_{k\geqslant 1}$ converge, disons vers $c = c(B)$, et que $f(x) = c$ pour presque tout $x \in [-B, B]$. Mais il est clair que si $f = c$ *p.p.* sur $[-B, B]$ et $f = c'$ *p.p.* sur $[-B', B']$ avec $B' > B$, on a $c' = c$; donc c ne dépend en fait pas de B. De plus, si $f = c$ *p.p.* sur $[-N, N]$ pour tout entier $N \geqslant 1$, alors $f = c$ *p.p.* sur $\mathbb{R}$ (la réunion d'une suite d'ensembles négligeables étant encore négligeable).

Pour finir, si on ne suppose plus f bornée, on peut la tronquer et considérer les fonctions $f_n = f\mathbb{1}_{\{|f|\leqslant n\}}$. Il est clair que l'on a $f_n(x+a) = f_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $a \in A$ (en séparant les cas $|f(x)| \leqslant n$ et $|f(x)| > n$). Comme les f_n sont bornées, elles sont constantes, égales à c_n, presque partout. Si $c_n = 0$ pour tout $n \geqslant 1$, on a $f = f_n = 0$ presque partout sur $\{|f| \leqslant n\}$; donc $f = 0$ presque partout sur $\mathbb{R} = \bigcup_{n\geqslant 1}\{|f| \leqslant n\}$. D'un autre côté, s'il existe $n_0 \geqslant 1$ tel que $c_{n_0} \neq 0$, alors f_{n_0} ne s'annule pas (en dehors d'un ensemble négligeable) ; donc $|f| \leqslant n_0$ *p.p.* et $f = f_{n_0}$ *p.p.*, de sorte que $f = c_{n_0}$ presque partout.

Exercice 6

1) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h}\right| &= \frac{1}{|h|}\left|\int_{\mathbb{R}} f(x+h-t)\,\varphi_n(t)\,dt - \int_{\mathbb{R}} f(x-t)\,\varphi_n(t)\,dt\right| \\
&= \frac{1}{|h|}\left|\int_{\mathbb{R}} f(u+h)\,\varphi_n(x-u)\,du - \int_{\mathbb{R}} f(u)\,\varphi_n(x-u)\,du\right| \\
&= \frac{1}{|h|}\left|\int_{\mathbb{R}} [f(u+h) - f(u)]\,\varphi_n(x-u)\,du\right| \\
&= \frac{1}{|h|}\left|\int_{-|x|-1/n}^{|x|+1/n} [f(u+h) - f(u)]\,\varphi_n(x-u)\,du\right| \\
&\leqslant \|\varphi_n\|_\infty \frac{1}{|h|}\int_{-|x|-1/n}^{|x|+1/n} |f(u+h) - f(u)|\,du \xrightarrow[h\to 0]{} 0\,;
\end{aligned}$$

donc f_n est dérivable en x et $f_n'(x) = 0$.

2) Il en résulte que chaque f_n est constante, et égale (presque partout) à, disons, c_n.

Comme $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ est une unité approchée, on a $\|f - f * \varphi_n\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, et il existe une sous-suite telle que $f_{n_k} = f * \varphi_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} f$ presque partout. Pour presque tout $t \in \mathbb{R}$, on a donc $c_{n_k} = f_{n_k}(t) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(t)$. Il en résulte que la suite $(c_{n_k})_{k\geqslant 1}$ converge et que, si c est sa limite, $f(t) = c$ pour presque tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 7

1) On a :

$$[T_\varphi(\tau_a f)](x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x-t)f(t-a)\,dt = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x-a-u)f(u)\,du = (\varphi * f)(x-a) = [\tau_a(Tf)](x).$$

2) a) L'application $g \in \mathscr{C}_b(\mathbb{R}) \mapsto g(0) \in \mathbb{C}$ est une forme linéaire continue sur $\mathscr{C}_b(\mathbb{R})$; la composée $f \in L^2(\mathbb{R}) \mapsto (Tf)(0) \in \mathbb{C}$ est donc une forme linéaire continue sur $L^2(\mathbb{R})$. Comme $L^2(\mathbb{R})$ est un espace de Hilbert, il existe $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ telle que $(Tf)(0) = (f \mid \psi) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\overline{\psi(y)}\,dy$. Si on pose $\varphi(y) = \overline{\psi(-y)}$, on a $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ et $(Tf)(0) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\varphi(-y)\,dy$.

b) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a, grâce à l'invariance par translation et le a) :

$$\begin{aligned}
(Tf)(a) = [\tau_{-a}(Tf)](0) = [T(\tau_{-a}f)](0) &= \int_{\mathbb{R}} (\tau_{-a}f)(y)\varphi(-y)\,dy = \int_{\mathbb{R}} f(y+a)\varphi(-y)\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(a-x)\varphi(x)\,dx = (\varphi * f)(a);
\end{aligned}$$

donc $T = T_\varphi$.

Exercice 8

1) La méthode est la même que pour $L^1(\mathbb{R})$. On a, en utilisant le Théorème de Fubini-Tonelli et la périodicité, pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}\int_n^{n+1}\left[\int_0^1 |f(x-t)\,g(t)|\,dt\right]dx &= \int_0^1\left[\int_n^{n+1}|f(x-t)|\,dx\right]|g(t)|\,dt\\ &= \int_0^1\left[\int_{n-t}^{n+1-t}|f(u)|\,du\right]|g(t)|\,dt\\ &= \int_0^1\left[\int_0^1|f(u)|\,du\right]|g(t)|\,dt = \|f\|_1\|g\|_1 < +\infty;\end{aligned}$$

le Théorème de Fubini dit alors que l'application $t \mapsto f(x-t)\,g(t)$ est intégrable sur $[0,1]$ pour presque tout $x \in [n, n+1]$ et que l'application définie presque partout sur $[n, n+1]$ par $(f*g)(x) = \int_0^1 f(x-t)\,g(t)\,dt$ est mesurable (*c'est le point difficile*) et intégrable sur $[n, n+1]$. $f*g$ est donc définie presque partout sur $\mathbb{R}$ (la réunion d'une suite d'ensembles négligeable est encore négligeable), et $\|f*g\|_1 = \int_0^1 \left|\int_0^1 f(x-t)\,g(t)\,dt\right| dx \leqslant \int_0^1 \left[\int_0^1 |f(x-t)\,g(t)|\,dt\right] dx \leqslant \|f\|_1\|g\|_1$.

2) Là aussi, on fait pareil que pour $L^1(\mathbb{R})$. Le Théorème de Fubini permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\widehat{f*g}(n) = \int_0^1 (f*g)(x)\,\mathrm{e}^{-2\pi i n x}\,dx &= \int_0^1\left[\int_0^1 f(x-t)\,g(t)\,dt\right]\mathrm{e}^{-2\pi i n x}\,dx\\ &= \int_0^1\left[\int_0^1 f(x-t)\,\mathrm{e}^{-2\pi i n(x-t)}\,dx\right]g(t)\,\mathrm{e}^{-2\pi i n t}\,dt\\ &= \int_0^1\left[\int_{-t}^{-t+1} f(u)\,\mathrm{e}^{-2\pi i n u}\,du\right]g(t)\,\mathrm{e}^{-2\pi i n t}\,dt\\ &= \int_0^1\left[\int_0^1 f(u)\,\mathrm{e}^{-2\pi i n u}\,du\right]g(t)\,\mathrm{e}^{-2\pi i n t}\,dt = \widehat{f}(n)\,\widehat{g}(n)\,,\end{aligned}$$

l'utilisation du Théorème de Fubini étant autorisée parce que :

$$\int_0^1\left[\int_0^1 |f(x-t)\,g(t)\,\mathrm{e}^{-2\pi i n x}|\,dt\right]dx = \int_0^1\left[\int_0^1 |f(x-t)\,g(t)|\,dt\right]dx \leqslant \|f\|_1\|g\|_1 < +\infty,$$

d'après le calcul fait au 1).

3) Cela a été fait pour $p=1$ au Corollaire II.4.17 ; pour les autres valeurs de p, la preuve est exactement la même.

4) De nouveau, la preuve est la même que dans le cas de $L^1(\mathbb{R})$. On commence par remarquer que si φ est continue sur $\mathbb{R}$, elle est uniformément continue sur $[0,1]$. Lorsqu'en plus φ est de période 1, cela entraîne la continuité uniforme de φ sur $\mathbb{R}$, et donc la continuité (uniforme) de la translation $\tau_\varphi \colon a \in \mathbb{R} \mapsto \tau_\varphi(a) = \varphi_a \in \mathscr{C}_1(\mathbb{R})$. Par densité des fonctions continues sur $\mathbb{T}$ dans $L^1(\mathbb{T})$ (Lemme II.4.16), on a la continuité de $\tau_f \colon a \in \mathbb{R} \mapsto \tau_f(a) = f_a \in L^1(\mathbb{T})$ pour toute $f \in L^1(\mathbb{T})$. La continuité de $f*g$ pour $f \in L^1(\mathbb{T})$ se montre alors comme dans le Théorème III.1.6 (voir la preuve du Théorème III.1.1).

5) a) En utilisant le fait que $\ln(1+|f|) \geqslant \ln 3 \geqslant 1$ lorsque $|f| \geqslant 2$, on a :

$$\int_{\mathbb{T}} |f|\,dm = \int_{\{|f|\leqslant 2\}} |f|\,dm + \int_{\{|f|>2\}} |f|\,dm \leqslant 2 + \int_{\mathbb{T}} |f|\,\ln(1+|f|)\,dm < +\infty\,;$$

donc $f \in L^1(\mathbb{T})$.

b) Pour $b>0$, on pose $u(a) = (a\ln a - a) + (e^b - 1) - ab$, on a $u'(a) = \ln a - b$; donc u a un minimum pour $a = \mathrm{e}^b$, qui vaut $u(\mathrm{e}^b) = (\mathrm{e}^b b - \mathrm{e}^b) + (\mathrm{e}^b - 1) - \mathrm{e}^b b = 0$.

Remarque. Cette inégalité est, comme celle $ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$, utilisée pour montrer l'inégalité de Hölder, un cas particulier de l'*inégalité de Young*. Celle-ci dit que, pour $a, b \geqslant 0$, on a $ab \leqslant \Phi(a) + \Psi(b)$ si les fonctions Φ et Ψ, dites *convexes conjuguées*, sont liées de la façon suivante : $\Phi(a) = \int_0^a \varphi(t)\,dt$, $\Psi(b) = \int_0^b \psi(t)\,dt$, avec $\varphi, \psi \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continues, strictement croissantes et $\psi = \varphi^{-1}$.

On a donc, pour tous $t, x \in \mathbb{R}$, en écrivant $|f(x-t)\,g(t)| = [A\,|f(x-t)|]\,[A^{-1}|g(t)|]$:

$$|f(x-t)\,g(t)| \leqslant A\,|f(x-t)|\,\ln[A\,|f(x-t)|] - A\,|f(x-t)| + \mathrm{e}^{A^{-1}|g(t)|} - 1$$

Or $A\,|f(x-t)|\,\ln[A\,|f(x-t)|] = (A\ln A)\,|f(x-t)| + A\,|f(x-t)|\,\ln|f(x-t)|$, et comme $a\ln a - a \leqslant a\ln a \leqslant a\ln(1+a)$, on obtient, en intégrant :

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f(x-t)\,g(t)|\,dt &\leqslant (A\ln A)\int_0^1 |f(x-t)|\,dt + A\int_0^1 |f(x-t)|\,\ln[1+|f(x-t)|]\,dt \\ &\qquad + \int_0^1 [\mathrm{e}^{A^{-1}|g(t)|} - 1]\,dt \\ &= (A\ln A)\int_0^1 |f(t)|\,dt + A\int_0^1 |f(t)|\,\ln[1+|f(t)|]\,dt \\ &\qquad + \int_0^1 [\mathrm{e}^{A^{-1}|g(t)|} - 1]\,dt < +\infty,\end{aligned}$$

d'après les hypothèses faites sur f et g et le a). Il en résulte que $(f*g)(x)$ existe et que $|(f*g)(x)| \leqslant (A\ln A)\int_0^1 |f(t)|\,dt + A\int_0^1 |f(t)|\,\ln[1+|f(t)|]\,dt + \int_0^1 [\mathrm{e}^{A^{-1}|g(t)|} - 1]\,dt$.

c) Notons que G n'est définie que presque partout (elle n'est pas définie sur $\mathbb{Z}$). On peut la prolonger si l'on veut, en posant $G(k) = 0$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Remarquons que G est positive et continue sur $]0,1[$. Si $k \in \mathbb{Z}$, on a $\mathrm{e}^{G(x)/A} = \frac{1}{|\sin(\pi x)|^{1/A}} \sim_{x\to k} \frac{1}{|\pi(x-k)|^{1/A}}$. Il en résulte que $\mathrm{e}^{G/A} \in L^1(\mathbb{T})$. Donc $f*G$ est définie partout sur $\mathbb{R}$, par le b).

Maintenant, si $f_n = f\,\mathbb{1}_{\{|f|\geqslant n\}}$, on a $|f_n| \leqslant |f|$, donc $\int_{\mathbb{T}} |f_n|\,\ln(1+|f_n|)\,dm < +\infty$, puisque $\leqslant \int_{\mathbb{T}} |f|\,\ln(1+|f|)\,dm < +\infty$, par hypothèse. Donc $f_n * G$ est partout définie. D'autre part, la fonction $f - f_n$ est bornée (par n). Comme $G \in L^1(\mathbb{T})$ (parce que $0 \leqslant A^{-1}G \leqslant \mathrm{e}^{A^{-1}G} - 1$, qui est inégrable), $h_n = (f - f_n) * G$ est continue sur $\mathbb{T}$, par le 4).

Maintenant, en utilisant le b), on a :

$$\begin{aligned}\|f*G - h_n\|_\infty &= \sup_{x\in\mathbb{R}} |(f*G)(x) - h_n(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |(f_n*G)(x)| \\ &\leqslant A\ln A\int_0^1 |f_n(t)|\,dt + A\int_0^1 |f_n(t)|\,\ln(1+|f_n(t)|)\,dt \\ &\qquad + \int_0^1 [\mathrm{e}^{A^{-1}G(t)} - 1]\,dt.\end{aligned}$$

Comme $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et que $|f_n| \leqslant |f|$, qui est intégrable, par le a), le Théorème de convergence dominée donne $\limsup_{n\to\infty} \|f*G - h_n\|_\infty \leqslant \int_0^1 [\mathrm{e}^{A^{-1}G(t)} - 1]\,dt$. Il ne reste plus qu'à faire tendre A vers l'infini. Comme, pour $A \geqslant A_0 > 1$, $0 \leqslant \mathrm{e}^{A^{-1}G} - 1 \leqslant \mathrm{e}^{A_0^{-1}G} - 1$, qui est intégrable, et que $[\mathrm{e}^{A^{-1}G(t)} - 1] \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0$, on obtient $\|f*G - h_n\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Puisque h_n est continue, $f*G$ aussi.

Exercice 9

1) Pour $r = 1$, on a $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 2$; comme $p, q \geqslant 1$, cela signifie que $p = q = 1$. Ce cas n'est rien d'autre que le Théorème III.1.7.

2) On note p^* l'exposant conjugué de p et on applique l'inégalité de Hölder pour le produit $|f(x-t)|\,|g(t)| = (|f(x-t)|\,|g(t)|^{1-(1/p^*)})\,|g(t)|^{1/p^*}$:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |f(x-t)|\,|g(t)|\,dt &\leqslant \left[\int_{\mathbb{R}} \left(|f(x-t)|\,|g(t)|^{1-(1/p^*)}\right)^p dt\right]^{1/p} \left[\int_{\mathbb{R}} (|g(t)|^{1/p^*})^{p^*}\,dt\right]^{1/p^*} \\ &= \left[\int_{\mathbb{R}} |f(x-t)|^p\,|g(t)|\,dt\right]^{1/p} \left[\int_{\mathbb{R}} |g(t)|\,dt\right]^{(p-1)/p}.\end{aligned}$$

On obtient alors, en utilisant le Théorème de Fubini-Tonelli :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} |f(x-t)|\,|g(t)|\,dt\right]^p dx &\leqslant \|g\|_1^{p-1} \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} |f(x-t)|^p\,|g(t)|\,dt\right] dx \\ &= \|g\|_1^{p-1} \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} |f(x-t)|^p\,dx\right] |g(t)|\,dt \\ &= \|g\|_1^{p-1} \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} |f(x-t)|^p\,dx\right] |g(t)|\,dt \\ &= \|g\|_1^{p-1} \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} |f(u)|^p\,du\right] |g(t)|\,dt \\ &= \|g\|_1^{p-1} \|f\|_p^p\,\|g\|_1 = \|g\|_1^p \|f\|_p^p < +\infty.\end{aligned}$$

Il en résulte que $\left[\int_{\mathbb{R}} |f(x-t)|\,|g(t)|\,dt\right]^p < +\infty$, et donc $\int_{\mathbb{R}} |f(x-t)|\,|g(t)|\,dt < +\infty$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)\,g(t)\,dt$ existe pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.

Lorsque f et g sont positives, le Théorème de Fubini-Tonelli dit que $f * g$ est mesurable. En décomposant f et g en parties réelles et imaginaires, puis celles-ci en parties positives et négatives, on obtient la mesurabilité de $f * g$. Alors :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |(f * g)(x)|p\,dx = \int_{\mathbb{R}} \left|\int_{\mathbb{R}} f(x-t)\,g(t)\,dt\right| dx &\leqslant \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} |f(x-t)|\,|g(t)|\,dt\right]^p dx \\ &\leqslant \|g\|_1^p \|f\|_p^p < +\infty,\end{aligned}$$

de sorte que $f * g \in L^p(\mathbb{R})$ et $\|f * g\|_p \leqslant \|f\|_p\,\|g\|_1$.

3) a) Notons r^* l'exposant conjugué de r, et appliquons l'inégalité de Hölder au produit $|f(x-t)\,g(t)| = \left(|f(x-t)|^{\frac{p}{r}}\,|g(t)|^{\frac{q}{r}}\right).\left(|f(x-t)|^{1-\frac{p}{r}}\,|g(t)|^{1-\frac{q}{r}}\right)$:

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x-t)\,g(t)|\,dt \leqslant \left[\int_{\mathbb{R}} |f(x-t)|^p\,|g(t)|^q\,dt\right]^{1/r} \left[\int_{\mathbb{R}} |f(x-t)|^{r^*(1-\frac{p}{r})}\,|g(t)|^{r^*(1-\frac{q}{r})}\,dt\right]^{1/r^*},$$

d'où le résultat puisque $r^*(1 - \frac{p}{r}) = \frac{r}{r-1}\,\frac{r-p}{r} = \frac{r-p}{r-1}$ et de même $r^*(1 - \frac{p}{r}) = \frac{r-q}{r-1}$.

b) Notons d'abord que, puisque $q > 1$, on a $\frac{1}{p} = (1 - \frac{1}{q}) + \frac{1}{r} > \frac{1}{r}$, de sorte que $r > p$. Ensuite, puisque $p > 1$, on a $pr > r$, et donc $s = \frac{pr-p}{r-p} > 1$. Son exposant conjugué est $s^* = \frac{s}{s-1} = \frac{p(r-1)}{r(p-1)} = \frac{p^*}{r^*}$. Mais $\frac{1}{p^*} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q} - \frac{1}{r} = \frac{r-q}{qr}$; donc $s^* = \frac{qr}{r-q}\,\frac{r-1}{r} = q\,\frac{r-q}{r-1}$.

c) Il résulte alors de l'inégalité de Hölder que :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |f(x-t)|^{\frac{r-p}{r-1}} |g(t)|^{\frac{r-q}{r-1}}\, dt &= \int_{\mathbb{R}} |f(x-t)|^{p/s} |g(t)|^{q/s^*}\, dt \\ &\leqslant \left[\int_{\mathbb{R}} |f(x-t)|^p\, dt\right]^{1/s} \left[\int_{\mathbb{R}} |g(t)|^q\, dt\right]^{1/s^*} \\ &= \left[\int_{\mathbb{R}} |f(u)|^p\, du\right]^{1/s} \left[\int_{\mathbb{R}} |g(t)|^q\, dt\right]^{1/s^*} = \|f\|_p^{p/s} \|g\|_q^{q/s^*}.\end{aligned}$$

Par conséquent, en utilisant le Théorème de Fubini-Tonelli :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} |f(x-t)\, g(t)|\, dt\right]^r dx &\leqslant \|f\|_p^{p(r-1)/s} \|g\|_q^{q(r-1)/s^*} \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} |f(x-t)|^p |g(t)|^q\, dt\right] dx \\ &= \|f\|_p^{r-p} \|g\|_q^{r-q} \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} |f(x-t)|^p\, dx\right] |g(t)|^q\, dt \\ &= \|f\|_p^{r-p} \|g\|_q^{r-q} \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} |f(u)|^p\, du\right] |g(t)|^q\, dt \\ &= \|f\|_p^{r-p} \|g\|_q^{r-q} \|f\|_p^p \|g\|_q^q = \|f\|_p^r \|g\|_q^r < +\infty.\end{aligned}$$

Comme au 2), on en déduit que $(f * g)(x)$ existe pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, que la fonction $f * g$, prolongée par 0, est mesurable, puis que $f * g \in L^r(\mathbb{R})$ et $\|f * g\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$.

4) Posons, pour $\lambda > 0$, $f_\lambda(x) = f(x/\lambda)$ et $g_\lambda(x) = g(x/\lambda)$. On a $\int_{\mathbb{R}} |f_\lambda(x)|^p\, dx = \lambda \int_{\mathbb{R}} |f(u)|^p\, du$, donc $\|f_\lambda\|_p = \lambda^{1/p} \|f\|_p$. De même $\|g_\lambda\|_q = \lambda^{1/q} \|g\|_q$. Par ailleurs,

$$(f_\lambda * g_\lambda)(x) = \int_{\mathbb{R}} f\Big(\frac{x-t}{\lambda}\Big)\, g\Big(\frac{t}{\lambda}\Big)\, dt = \lambda \int_{\mathbb{R}} f\Big(\frac{x}{\lambda} - u\Big)\, g(u)\, du = \lambda\, (f * g)_\lambda(x)\,;$$

donc $\|f_\lambda * g_\lambda\|_r = \lambda(\lambda^{1/r} \|f * g\|_r) = \lambda^{1+(1/r)} \|f * g\|_r$. Par conséquent, l'inégalité $\|f_\lambda * g_\lambda\|_r \leqslant \|f_\lambda\|_p \|g_\lambda\|_q$ s'écrit $\lambda^{1+(1/r)} \|f * g\|_r \leqslant \lambda^{(1/p)+(1/q)} \|f\|_p \|g\|_q$. Ceci n'est possible pour tout $\lambda > 0$ que si $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, comme cela se voit en faisant tendre λ, d'une part vers 0 et, d'autre part, vers $+\infty$ (on prend f et g telles que $\|f\|_p > 0$, $\|g\|_q > 0$ et $\|f * g\|_r > 0$; par exemple $f = g = \mathbb{1}_{[0,1]}$: voir l'Exercice 1).

Exercice 10

1) a) On pose $u = \mathrm{e}^x$ et l'on obtient $\int_{\mathbb{R}} h(x)\, dx = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\, du = 1$. D'autre part, $h(x) = \exp(x - \mathrm{e}^x)$; donc $0 \leqslant h(x) \leqslant 1$ car $x \leqslant \mathrm{e}^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b) $(f * h)(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$ car $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $h \in L^\infty(\mathbb{R})$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $h(t) = \mathrm{e}^t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\mathrm{e}^t)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\, \mathrm{e}^{(k+1)t}$; donc

$$\begin{aligned}(f * h)(x) = (h * f)(x) &= \int_{\mathbb{R}} h(x-u)\, f(u)\, du = \int_{\mathbb{R}} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\, \mathrm{e}^{(k+1)(x-u)}\right] f(u)\, du \\ &= \int_0^{+\infty} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\, \mathrm{e}^{(k+1)(x-u)}\right] f(u)\, du,\end{aligned}$$

car $f(u)$ est nulle pour $u < 0$. Comme :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{(-1)^k}{k!}\, \mathrm{e}^{(k+1)(x-u)}\right| |f(u)| = \mathrm{e}^{x-u} \exp(\mathrm{e}^{x-u})\, |f(u)| \leqslant \mathrm{e}^x \exp(\mathrm{e}^x)\, |f(u)|$$

pour tout $u \geqslant 0$, l'intégrabilité de f permet d'utiliser le Théorème de convergence dominée, et on obtient $(f * h)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^k}{k!} \int_0^{+\infty} f(u)\, \mathrm{e}^{-(k+1)u}\, du\right] \mathrm{e}^{(k+1)x}$.

c) Si l'on suppose $\int_0^{+\infty} f(u)\, \mathrm{e}^{-lu}\, du = 0$ pour tout $l \in \mathbb{N}^*$, la formule précédente montre que $(f * h)(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire que $f * h = 0$.

On a $(f * h_{1/n}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)\, n\, h(nt)\, dt = \int_{\mathbb{R}} f\big(x - \frac{u}{n}\big)\, h(u)\, du = (f_n * h)(nx)$, avec $f_n(u) = f(u/n)$. Comme f_n vérifie les mêmes hypothèses que f : elle est nulle sur $]-\infty, 0[$, intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et $\int_0^{+\infty} f_n(u)\, \mathrm{e}^{-lu}\, du = \int_0^{+\infty} f(v)\, \mathrm{e}^{-lnv}\, n\, dv = 0$ pour tout $l \in \mathbb{N}^*$, on a $f * h_{1/n} = 0$.

Comme h vérifie les conditions du Théorème III.1.9, $(h_{1/n})_{n \geqslant 1}$ est une unité approchée et donc $\|f * h_{1/n} - f\|_{L^1(\mathbb{R})} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Comme $f * h_{1/n} = 0$, on obtient $\|f\|_{L^1(\mathbb{R})} = 0$, c'est-à-dire $f = 0$ presque partout.

2) a) Notons d'abord que $(\mathscr{L}f)(z)$ est bien défini pour $\operatorname{Re} z \geqslant 0$ car alors $|f(t)\, \mathrm{e}^{-zt}| = \mathrm{e}^{-(\operatorname{Re} z)\, t} |f(t)| \leqslant |f(t)|$ pour tout $t \geqslant 0$. Posons $\varphi(t, z) = f(t)\, \mathrm{e}^{-zt}$; pour tout $a > 0$, on a $|\partial_2 \varphi(t, z)| = t\, |f(t)|\, \mathrm{e}^{-zt} \leqslant t\, |f(t)|\, \mathrm{e}^{-at} \leqslant \frac{1}{a\,\mathrm{e}}\, |f(t)|$ pour $|\operatorname{Re} z| \geqslant a$ et tout $t \geqslant 0$. Comme $z \mapsto \varphi(t, z)$ est holomorphe dans $\mathbb{C}$, le Théorème de dérivation sous le signe intégral dit que $\mathscr{L}f\colon z \mapsto \mathscr{L}f(z) = \int_0^{+\infty} \varphi(t, z)\, dt$ est holomorphe dans $\bigcup_{a>0} \{z \in \mathbb{C}\,;\ \operatorname{Re} z \geqslant a\} = \Pi_+$.

Remarque. Il existe une version du Théorème de dérivation sous le signe intégral pour les fonctions holomorphes, dans laquelle il suffit de majorer la fonction $|\varphi|$ elle-même, au lieu de sa dérivée $|\partial_2 \varphi|$; mais dans la pratique, on ne gagne souvent pas grand chose à l'utiliser (voir cependant l'Exercice 29).

b) On a $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ car $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. D'autre part, pour $t < 0$ on a $g(t) = 0$, donc $f(x-t)\, g(t) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors que pour $t \geqslant 0$, on a $x - t < 0$ pour tout $x < 0$, de sorte que $f(x-t) = 0$ et donc $f(x-t)\, g(t) = 0$. Ainsi $(f * g)(x) = 0$ pour $x < 0$ et donc $f * g \in L^1(\mathbb{R}_+)$. De plus, puisque $f(x-t) = 0$ si $x - t < 0$, on a $(f * g)(x) = \int_0^x f(x-t)\, g(t)\, dt$ pour $x \geqslant 0$.

En utilisant le Théorème de Fubini, ce que l'on justifiera après, on a, pour $\operatorname{Re} z \geqslant 0$:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}(f * g)(z) = \int_0^{+\infty} (f * g)(x)\, \mathrm{e}^{-zx}\, dx &= \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} f(x-t)\, g(t)\, dt\right] \mathrm{e}^{-zx}\, dx \\
&= \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} f(x-t)\, \mathrm{e}^{-z(x-t)}\, dx\right] g(t)\, \mathrm{e}^{-zt}\, dt \\
&= \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} f(u)\, \mathrm{e}^{-zu}\, du\right] g(t)\, \mathrm{e}^{-zt}\, dt = [(\mathscr{L}f)(z)]\, [(\mathscr{L}g)(z)]\,.
\end{aligned}$$

On pouvait utiliser le Théorème de Fubini car, par le Théorème de Fubini-Tonelli, on a (puisque $|\mathrm{e}^{-zx}| = \mathrm{e}^{-(\operatorname{Re} z)\, x} \leqslant 1$ pour $x \geqslant 0$) :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} |f(x-t)\, g(t)\, \mathrm{e}^{-zx}|\, dt\right] dx &= \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} |f(x-t)\, g(t)|\, dt\right] dx \\
&= \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} |f(x-t)|\, dx\right] |g(t)|\, dt \\
&= \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} |f(u)|\, du\right] |g(t)|\, dt \\
&= \|f\|_1\, \|g\|_1 < +\infty\,.
\end{aligned}$$

3) Si $f * g = 0$, on a $(\mathscr{L}f)(\mathscr{L}g) = \mathscr{L}(f * g) = 0$. Si $\mathscr{L}g = 0$, on a en particulier $(\mathscr{L}g)(l) = \int_0^{+\infty} g(u)\, \mathrm{e}^{-lu}\, du = 0$ pour tout $l \in \mathbb{N}^*$; donc $g = 0$, par le 1) c). Si $\mathscr{L}g \neq 0$, l'ensemble Z_g de ses zéros est discret (puisque $\mathscr{L}g$ est holomorphe dans l'ouvert connexe Π_+). Comme $\mathscr{L}f$ s'annule sur l'ensemble discret Z_g, elle est nulle partout, par continuité. Alors, de même que ci-dessus, le 1) c) entraîne que $f = 0$.

XI.3.2. Transformation de Fourier

Exercice 11

1) Il suffit de montrer que f possède une limite quand $|x|$ tend vers l'infini, car l'intégrabilité de f forcera alors cette limite à être nulle (si elle ne l'était pas sa valeur absolue $|L|$ serait > 0, et on aurait $|f(x)| \geqslant |L|/2$ pour $|x|$ assez grand, d'où $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,dx = +\infty$). Or, f' étant continue, le *Théorème fondamental du Calcul Intégral* nous dit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt$, et il résulte du Théorème de convergence dominée, puisque $f' \in L^1(\mathbb{R})$, que $\int_0^x f'(t)\,dt \xrightarrow[x\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} f'(t)\,dt$. De même $\int_0^x f'(t)\,dt \xrightarrow[x\to-\infty]{} \int_0^{-\infty} f'(t)\,dt = -\int_{\mathbb{R}_-} f'(t)\,dt$.

Il suffit ensuite d'intégrer par parties :

$$\widehat{(f')}(y) = \int_{\mathbb{R}} f'(x)\,\mathrm{e}^{-2\pi ixy}\,dx = \big[f(x)\,\mathrm{e}^{-2\pi ixy}\big]_{x=-\infty}^{x=+\infty} - 2\pi iy \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{e}^{-2\pi ixy}\,dx\,,$$

d'où le résultat puisque $|f(x)\,\mathrm{e}^{-2\pi ixy}| = |f(x)| \xrightarrow[|x|\to+\infty]{} 0$.

2) Il suffit d'utiliser le Théorème de dérivation sous le signe intégral. On pose $\varphi(x,y) = f(x)\,\mathrm{e}^{-2\pi ixy}$. Comme $\partial_2\varphi(x,y) = -2\pi ix\,\varphi(x,y)$, on a $|\partial_2\varphi(x,y)| = 2\pi g(x)$, et g est intégrable par hypothèse. Donc $\widehat{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\widehat{f})'(y) = \int_{\mathbb{R}} \partial_2\varphi(x,y)\,dx = -2\pi i\widehat{g}(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

Exercice 12

1) Il suffit décrire la continuité de g en 1 : prenant $\varepsilon = 1/2$, par exemple, il existe $a > 0$ (que l'on peut prendre < 1) tel que $|g(x) - g(1)| \leqslant 1/2$ pour $|x-1| \leqslant a$. Comme $g(1) = 1$, on obtient $g(x) \geqslant g(1) - 1/2 = 1/2$ pour $x \in [1-a, 1+a]$.

2) Si la transformée de Fourier de $\mathbb{1}_{[-1,1]}$ était intégrable, elle serait, par le *Théorème d'inversion* (Théorème III.2.6), presque partout égale à une fonction continue g. Mais ce n'est pas le cas, par le 1). En effet, si ça l'était, on devrait avoir $g(x) = 1$ presque partout sur $[-1,1]$, donc partout sur $[-1,1]$ par la continuité de g. En particulier on aurait $g(1) = 1$. Ensuite, par le 1), la fonction $\mathbb{1}_{[-1,1]}$ devrait ne pas s'annuler presque partout sur un intervalle $[1-a, 1+a]$ avec $a > 0$, ce qui n'est pas le cas (elle s'annule partout sur $[1,+\infty[$).

Une autre façon de raisonner est de dire que g devrait être presque partout égale à 1 sur $[-1,1]$ et presque partout égale à 0 sur $]1,+\infty[$. La continuité de g donnerait $g(x) = 1$ pour tout $x \in [-1,1]$ et $g(x) = 0$ pour tout $x > 1$; mais cela contredirait la continuité de g en 1.

Exercice 13

1) On a $\widehat{\mathbb{1}_{[-a,a]}}(0) = \int_{-a}^{a} dx = 2a$ et, pour $y \neq 0$:

$$\widehat{\mathbb{1}_{[-a,a]}}(y) = \int_{-a}^{a} \mathrm{e}^{-2\pi ixy}\,dx = \left[\frac{\mathrm{e}^{-2\pi ixy}}{-2\pi iy}\right]_{x=-a}^{x=a} = \frac{\mathrm{e}^{-2\pi iay} - \mathrm{e}^{2\pi iay}}{-2\pi iy} = \frac{\sin(2\pi ay)}{\pi y}\,\cdot$$

2) Considérons la fonction $f = \mathbb{1}_{[-a,a]} * \mathbb{1}_{[-a,a]}$. Étant la convolée de deux fonctions de $L^1(\mathbb{R})$, c'est une fonction de $L^1(\mathbb{R})$, et sa transformée de Fourier est $\widehat{f}(y) = \big[\widehat{\mathbb{1}_{[-a,a]}}(y)\big]^2 = \big(\frac{\sin(2\pi ay)}{\pi y}\big)^2$, pour $y \neq 0$. Cette fonction étant intégrable sur $\mathbb{R}$, on a $f(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(y)\,\mathrm{e}^{2\pi ixy}\,dy$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, par le Théorème d'inversion. Mais $\mathbb{1}_{[-a,a]} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$; donc $f = \mathbb{1}_{[-a,a]} * \mathbb{1}_{[-a,a]}$ est continue sur $\mathbb{R}$. L'égalité précédente a donc lieu pour *tout* $x \in \mathbb{R}$. En particulier, on a $f(0) = \int_{\mathbb{R}} \big(\frac{\sin(2\pi ay)}{\pi y}\big)^2\,dy$. Mais $f(0) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[-a,a]}(0-t)\mathbb{1}_{[-a,a]}(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[-a,a]}(t)\mathbb{1}_{[-a,a]}(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[-a,a]}(t)\,dt = 2a$, et $\int_{\mathbb{R}} \big(\frac{\sin(2\pi ay)}{\pi y}\big)^2\,dy = \frac{2a}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \big(\frac{\sin t}{t}\big)^2\,dt$. Donc, finalement, on obtient : $\int_{\mathbb{R}} \big(\frac{\sin t}{t}\big)^2\,dt = \pi$.

Exercice 14

1) Comme $\mathbb{1}_{[-\lambda,\lambda]} \in L^1(\mathbb{R})$, on a (voir Exerice 13 ci-dessus) :

$$\widehat{\mathbb{1}_{[-\lambda,\lambda]}}(y) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[-\lambda,\lambda]}(x)\, \mathrm{e}^{-2\pi ixy}\, dx = \int_{-\lambda}^{\lambda} \mathrm{e}^{-2\pi ixy}\, dx = \begin{cases} 2\lambda & \text{si } y = 0\,; \\ \dfrac{\sin(2\pi\lambda y)}{\pi y} & \text{si } y \neq 0\,. \end{cases}$$

2) La fonction f est dans $L^2(\mathbb{R})$ car elle est continue sur $\mathbb{R}$ et $|f(x)|^2 \leqslant C_\lambda/x^2$. Il est bien connu que $f \notin L^1(\mathbb{R})$.

Soit $g = \frac{1}{2\lambda}\, \mathbb{1}_{[-\lambda,\lambda]}$; on a $g \in L^1(\mathbb{R})$ et le 1) dit que f est la transformée de Fourier de g. Comme g est paire, f est aussi la co-transformée de Fourier de g. La transformation de Fourier-Plancherel $\mathscr{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ est un isomorphisme de $L^2(\mathbb{R})$ sur lui-même, et elle coïncide avec la transformation de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$; l'isomorphisme inverse $\mathscr{F}^{-1}$ coïncidant avec la co-transformation de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Comme $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, on a donc $f = \mathscr{F}^{-1} g$, et par conséquent $\mathscr{F} f = g$, *i.e.* $\mathscr{F} f = \frac{1}{2\lambda}\, \mathbb{1}_{[-\lambda,\lambda]}$.

Remarque. D'après la Proposition III.2.13, la transformée de Fourier-Plancherel $\mathscr{F} f$ de f est la limite, dans $L^2(\mathbb{R})$, de $\varphi_A(y) = \int_{-A}^{A} \frac{\sin(2\pi\lambda x)}{2\pi\lambda x}\, \mathrm{e}^{-2\pi ixy}\, dx$, lorsque A tend vers $+\infty$. Grâce à la parité, on a aussi $\varphi_A(y) = \int_{-A}^{A} \frac{\sin(2\pi\lambda x)}{2\pi\lambda x}\, \mathrm{e}^{2\pi ixy}\, dx = \int_{-A}^{A} \widehat{g}(x)\, \mathrm{e}^{2\pi ixy}\, dx$. Comme $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, sa transformée de Fourier-Plancherel coïncide avec sa transformée de Fourier. On a donc $\varphi_A(y) = \int_{-A}^{A} (\mathscr{F} g)(x)\, \mathrm{e}^{2\pi ixy}\, dx$. Ainsi $\varphi_A(y)$ est égal au $\psi_A(y)$ de la Proposition III.2.14, associé à g. Or cette proposition nous dit que $\lim_{A\to\infty} \|\psi_A - g\|_2 = 0$. On retrouve donc que $\mathscr{F} f = g = \frac{1}{2\lambda}\, \mathbb{1}_{[-\lambda,\lambda]}$. Notons que, ponctuellement, on a, par le Corollaire III.2.15, pour presque tout $y \in \mathbb{R}$, $\lim_{A\to+\infty} \int_{-A}^{A} \frac{\sin(2\pi\lambda x)}{2\pi\lambda x}\, \mathrm{e}^{2\pi ixy}\, dx = \frac{1}{2\lambda}\, \mathbb{1}_{[-\lambda,\lambda]}(y)$, ou encore, puisque l'intégrale généralisée converge, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(2\pi\lambda x)}{2\pi\lambda x}\, \mathrm{e}^{2\pi ixy}\, dx = \frac{1}{2\lambda}\, \mathbb{1}_{[-\lambda,\lambda]}(y)$.

Exercice 15

1) Remarquons d'abord que l'on ne peut pas prolonger f et f_α en 0 par continuité : elle tendent vers 1 quand x tend vers 0 par valeurs positives, et vers -1 quand x tend vers 0 par valeurs négatives. Néanmoins, elles sont définies presque partout sur $\mathbb{R}$. Prolongeons-les par 0 en 0. Elles sont alors mesurables, car continues par morceaux et $|f_\alpha(x)| \leqslant |f(x)| \leqslant 1$. Donc $\int_{\mathbb{R}} |f_\alpha(x)|^2\, dx \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\, dx \leqslant \int_{-1}^{1} dx + \int_{\{|x|\geqslant 1\}} \frac{dx}{x^2} = 4 < +\infty$, d'où $f, f_\alpha \in L^2(\mathbb{R})$.

On a $\|f - f_\alpha\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} (1 - \mathrm{e}^{-\alpha|x|})^2 \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx$. Comme $(1 - \mathrm{e}^{-\alpha|x|})^2 \frac{\sin^2 x}{x^2} \xrightarrow[\alpha\to 0]{} 0$ pour tout $x \neq 0$ et $0 \leqslant (1 - \mathrm{e}^{-\alpha|x|})^2 \frac{\sin^2 x}{x^2} \leqslant \frac{\sin^2 x}{x^2} = [f(x)]^2$ pour tout $x \neq 0$, le Théorème de convergence dominée, avec le fait que f^2 est intégrable, donne $\|f - f_\alpha\|_2^2 \xrightarrow[\alpha\to 0]{} 0$.

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|f_\alpha(x)| \leqslant \mathrm{e}^{-\alpha|x|}$; donc $f_\alpha \in L^1(\mathbb{R})$. Sa transformée de Fourier est $\widehat{f_\alpha}(y) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{|x|}\, \mathrm{e}^{-\alpha|x|} \mathrm{e}^{-2\pi ixy}\, dx$. Pour calculer $\frac{d}{d\alpha}\big[\widehat{f_\alpha}(y)\big]$, on va utiliser le Théorème de dérivation sous le signe intégral. Posons $\varphi(x,\alpha) = f_\alpha(x)\, \mathrm{e}^{-2\pi ixy}$. Pour $x \neq 0$, $\varphi(x,\alpha) = \frac{\sin x}{|x|}\, \mathrm{e}^{-\alpha|x|} \mathrm{e}^{-2\pi ixy}$ et $\partial_2\varphi(x,\alpha) = -(\sin x)\, \mathrm{e}^{-\alpha|x|} \mathrm{e}^{-2\pi ixy}$; donc $|\partial_2\varphi(x,\alpha)| \leqslant \mathrm{e}^{-\alpha|x|} \leqslant \mathrm{e}^{-\alpha_0|x|}$ pour tout $\alpha \geqslant \alpha_0 > 0$. Il en résulte que $\widehat{f_\alpha}(y)$ est dérivable par rapport à α sur $\mathbb{R}_+^* = \bigcup_{\alpha_0>0} [\alpha_0, +\infty[$, et que :

$$\frac{d}{d\alpha}\big[\widehat{f_\alpha}(y)\big] = -\int_{\mathbb{R}} (\sin x)\, \mathrm{e}^{-\alpha|x|} \mathrm{e}^{-2\pi ixy}\, dx = -\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}}{2i}\, \mathrm{e}^{-\alpha|x|} \mathrm{e}^{-2\pi ixy}\, dx\,.$$

Maintenant,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{ix}\, \mathrm{e}^{-\alpha|x|} \mathrm{e}^{-2\pi ixy}\, dx &= \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{x[\alpha + i(1-2\pi y)]}\, dx + \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{x[-\alpha + i(1-2\pi y)]}\, dx \\ &= \frac{1}{\alpha + i(1-2\pi y)} - \frac{1}{-\alpha + i(1-2\pi y)} = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + (1-2\pi y)^2}\,,\end{aligned}$$

et :

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-ix}\,\mathrm{e}^{-\alpha|x|}\mathrm{e}^{-2\pi ixy}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{x[\alpha+i(-1-2\pi y)]}\,dx + \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{x[-\alpha+i(-1-2\pi y)]}\,dx$$
$$= \frac{1}{\alpha+i(-1-2\pi y)} - \frac{1}{-\alpha+i(-1-2\pi y)} = \frac{2\,\alpha}{\alpha^2+(1+2\pi y)^2}\,;$$

donc :

$$\frac{d}{d\alpha}\big[\widehat{f_\alpha}(y)\big] = -\frac{1}{2i}\left[\frac{2\,\alpha}{\alpha^2+(1-2\pi y)^2} - \frac{2\,\alpha}{\alpha^2+(1+2\pi y)^2}\right].$$

Il en résulte que $\widehat{f_\alpha}(y) = \frac{i}{2}\ln\frac{\alpha^2+(1-2\pi y)^2}{\alpha^2+(1+2\pi y)^2} + C_\alpha$.

Pour déterminer C_α, on utilise le fait que $\widehat{f_\alpha}(y) \xrightarrow[|y|\to+\infty]{} 0$; on obtient $C_\alpha = 0$. Ainsi $\widehat{f_\alpha}(y) = \frac{i}{2}\ln\frac{\alpha^2+(1-2\pi y)^2}{\alpha^2+(1+2\pi y)^2}$, pour tout $y \in \mathbb{R}$.

3) Comme la transformée de Fourier-Plancherel est une isométrie, on a $\|\mathscr{F}f - \widehat{f_\alpha}\|_2 = \|\mathscr{F}(f - f_\alpha)\|_2 = \|f - f_\alpha\|_2 \xrightarrow[\alpha\to 0]{} 0$; il existe donc une suite de nombres $\alpha_k > 0$ tendant vers 0 telle que $\widehat{f_{\alpha_k}} \xrightarrow[k\to\infty]{} \mathscr{F}f$ presque partout. Il en résulte que $(\mathscr{F}f)(y) = i\,\ln\big|\frac{1-2\pi y}{1+2\pi y}\big|$ pour presque tout $y \in \mathbb{R}$.

Exercice 16

1) f étant continue et bornée, on a $(f * p_a)(y) \xrightarrow[a\to 0]{} f(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$, puisque $(p_a)_{a>0}$ est une unité approchée ; le résultat découle donc du Lemme III.2.8.

2) Pour toute suite $(a_n)_n$ décroissant vers 0, la suite $\big(\widehat{f}(x)P(a_n x)\big)_n$ croît vers $\widehat{f}(x)$; le *Théorème de convergence monotone* donne donc :

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\!\uparrow \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x)P(a_n x)\,dx = f(0)\,,$$

et donc $\widehat{f}$ est intégrable.

Variante.

1) On a :

$$\widehat{g_n}(v) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-|u|/n}\mathrm{e}^{-2\pi iuv}\,du = \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{u/n}\mathrm{e}^{-2\pi iuv}\,du + \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u/n}\mathrm{e}^{-2\pi iuv}\,du$$
$$= \frac{1}{\frac{1}{n} - 2\pi iv} - \frac{1}{-\frac{1}{n} - 2\pi iv} = \frac{2n}{1+4\pi^2n^2v^2}\,.$$

2) a) Par le Lemme III.2.12, on a $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\widehat{g_n}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(y)\,g_n(y)\,dy$; donc

$$\left|\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(y)\,g_n(y)\,dy\right| \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f(x)\,\widehat{g_n}(x)|\,dx \leqslant \|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}} |\widehat{g_n}(x)|\,dx = \|f\|_\infty$$

car $\int_{\mathbb{R}} \frac{2n}{1+4\pi^2n^2x^2}\,dx = \frac{1}{\pi}\big[\arctan(2\pi nx)\big]_{-\infty}^{+\infty} = 1$.

b) Comme g_n est positive, on peut utiliser, si l'on suppose aussi $\widehat{f}$ positive, le lemme de Fatou pour l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(y)\,g_n(y)\,dy$; cela donne, puisque $g_n(u) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ pour tout $u \in \mathbb{R}$

$$0 \leqslant \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(y)\,dy \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(y)\,g_n(y)\,dy \leqslant \|f\|_\infty\,,$$

en utilisant le a). Donc $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ et $\|\widehat{f}\|_1 \leqslant \|f\|_\infty$.

Exercice 17

1) Soit $\varphi_0 = \mathbb{1}_{[-1,0]}$ et $\psi_0 = \mathbb{1}_{[1,2]}$. On a $\widehat{\varphi}_0(y) = \int_{-1}^{0} \mathrm{e}^{-2\pi ixy}\, dx = -\frac{1}{2\pi iy}\,(1-\mathrm{e}^{2\pi iy}) = \mathrm{e}^{\pi iy}\frac{\sin(\pi y)}{\pi y}$ et $\widehat{\psi}_0(y) = \int_1^2 \mathrm{e}^{-2\pi ixy}\, dx = -\frac{1}{2\pi iy}\,(\mathrm{e}^{-4\pi iy} - \mathrm{e}^{-2\pi iy}) = \mathrm{e}^{3\pi iy}\frac{\sin(\pi y)}{\pi y}$, pour $y \neq 0$. Alors $\widehat{\varphi}(y) = [\widehat{\varphi}_0(y)]^2 = \mathrm{e}^{2\pi iy}\big(\frac{\sin(\pi y)}{\pi y}\big)^2$ et $\widehat{\psi}(y) = [\widehat{\psi}_0(y)]^2 = \mathrm{e}^{6\pi iy}\big(\frac{\sin(\pi y)}{\pi y}\big)^2$ pour $y \neq 0$. Comme la fonction $y \mapsto \big(\frac{\sin(\pi y)}{\pi y}\big)^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, $\widehat{\varphi}$ et $\widehat{\psi}$ le sont aussi. Soit $f(y) = \widehat{\varphi}(-y)$ et $g(y) = \widehat{\psi}(-y)$. Le *Théorème d'inversion* nous dit que $\varphi = \widehat{f}$ et $\psi = \widehat{g}$.

2) Comme $\operatorname{supp}\varphi \subseteq \operatorname{supp}\varphi_0 + \operatorname{supp}\varphi_0 = [-1,0]+[-1,0] = [-2,0]$ et $\operatorname{supp}\psi \subseteq \operatorname{supp}\psi_0 + \operatorname{supp}\psi_0 = [1,2]+[1,2] = [2,4]$, on a $\varphi\psi = 0$. Mais alors $\widehat{(f*g)}(y) = \widehat{f}(y)\,\widehat{g}(y) = \widehat{\varphi}(-y)\,\widehat{\psi}(-y) = 0$, pour tout $y \in \mathbb{R}$. Par injectivité de la transformation de Fourier, on obtient $f * g = 0$.

Exercice 18

1) On a, pour $f \in L^1(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}[(\mathscr{F}(\tau_\alpha f)](y) &= \int_{\mathbb{R}} (\tau_\alpha f)(x)\,\mathrm{e}^{-2\pi ixy}\, dx = \int_{\mathbb{R}} f(x-\alpha)\,\mathrm{e}^{-2\pi ixy}\, dx = \int_{\mathbb{R}} f(t)\,\mathrm{e}^{-2\pi i(t+\alpha)}\, dt \\ &= \mathrm{e}^{-2\pi i\alpha y}\widehat{f}(y)\,.\end{aligned}$$

2) Si $f \in L^2(\mathbb{R})$, il existe des fonctions $f_n \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ telle que $\|f - f_n\|_{L^2(\mathbb{R})} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Pour tout $n \geqslant 1$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $\mathscr{F}(\tau_\alpha f_n) = (\mathscr{F} f_n)\, e_{-\alpha}$. Comme les applications $\mathscr{F}\colon L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, $\tau_\alpha\colon L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ et $m_\alpha\colon g \in L^2(\mathbb{R}) \mapsto g\, e_{-\alpha} \in L^2(\mathbb{R})$ sont continues (ce sont des isométries), on obtient $\mathscr{F}(\tau_\alpha f) = (\mathscr{F} f)\, e_{-\alpha}$.

Exercice 19

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\frac{(-2\pi ixy)^n}{n!} = \mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{e}^{-2\pi ixy} = h(x)$. Si la série converge dans $L^2(\mathbb{R})$, sa limite ℓ doit être presque partout égale à h. En effet, si l'on pose $\sigma_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\frac{(-2\pi iyx)^n}{n!}$, une sous-suite de $\big(\sigma_N(x)\big)_{N\geqslant 0}$ doit converger presque partout vers ℓ. Montrons que c'est bien le cas. Notons d'abord que $h \in L^2(\mathbb{R})$ car h est continue et $|h(x)| = \mathrm{e}^{-x^2/2}$. D'autre part, on a $\|\sigma_N - h\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |\sigma_N(x) - h(x)|^2\, dx$. Or, pour $N \geqslant 0$:

$$|\sigma_N(x) - h(x)|^2 = \Big|\sum_{n=N+1}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\frac{(-2\pi ixy)^n}{n!}\Big|^2 \leqslant \mathrm{e}^{-x^2}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2\pi|x|\,|y|)^n}{n!}\Big)^2 = \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{e}^{4\pi|x|\,|y|},$$

qui est intégrable sur $\mathbb{R}$: elle est continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{e}^{4\pi|x|\,|y|} = \mathrm{e}^{-|x|(|x|-4\pi|y|} \leqslant \mathrm{e}^{-|x|}$ dès que $|x| \geqslant 1 + 4\pi|y|$. Le Théorème de convergence dominée permet donc de dire que $\|\sigma_N - h\|_2^2 \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$.

2) g le produit de deux fonctions de $L^2(\mathbb{R})$; l'inégalité de Cauchy-Schwarz montre que ce produit est dans $L^1(\mathbb{R})$.

3) Si f est orthogonale à toutes les fonctions $x^n\mathrm{e}^{-x^2/2}$, $n \in \mathbb{N}$, elle est orthogonale à toutes les σ_N, $N \geqslant 0$; donc, par continuité du produit scalaire, $(h \mid f) = \lim_{N\to\infty}(\sigma_N \mid f) = 0$. Si g est la fonction définie au 2), cela s'écrit $0 = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{e}^{-2\pi ixy}\overline{f(x)}\, dx = \int_{\mathbb{R}} g(x)\,\mathrm{e}^{-2\pi ixy}\, dx = \widehat{g}(y)$. Ceci étant vrai pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a $\widehat{g} = 0$. L'injectivité de la transformation de Fourier donne $g = 0$ (presque partout). Mais $f(x) = \mathrm{e}^{x^2/2}\overline{g(x)}$, et donc $f = 0$ presque partout (puisque $\mathrm{e}^{x^2/2} \neq 0$).

Exercice 20

La suite $(g_n)_{n\geqslant 1}$ étant bornée, posons $M = \sup_{n\geqslant 1} \|g_n\|_1$.

Supposons que $\widehat{g_n}(y) \xrightarrow[n\to\infty]{} \widehat{g}(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. Pour toute $f \in L^1(\mathbb{R})$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} f(y)\,\widehat{g_n}(y)\,dy \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{\mathbb{R}} f(y)\,\widehat{g}(y)\,dy\,,$$

par le Théorème de convergence dominée, car, pour tout $n \geqslant 1$, $|f(y)\,\widehat{g_n}(y)| \leqslant \|g_n\|_1 |f(y)| \leqslant M\,\|f\|_1$, qui est intégrable. On sait (Lemme III.2.12) que pour toutes $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, on a $\int_{\mathbb{R}} f(y)\,\widehat{g}(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x)\,g(x)\,dx$. Il en résulte que

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x)\,g_n(x)\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x)\,g(x)\,dx\,.$$

Mais on sait que $\mathscr{F}[L^1(\mathbb{R})]$ est dense dans $\mathscr{C}_0(\mathbb{R})$. Donc pour toute $h \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R})$, il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\|h - \widehat{f}\|_\infty \leqslant \varepsilon$. On a :

$$\left| \int_{\mathbb{R}} h(x)\,[g_n(x) - g(x)]\,dx \right| \leqslant \int_{\mathbb{R}} |h(x) - \widehat{f}(x)|\,|g_n(x) - g(x)|\,dx + \left| \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x)\,[g_n(x) - g(x)]\,dx \right|;$$

Comme :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |h(x) - \widehat{f}(x)|\,|g_n(x) - g(x)|\,dx &\leqslant \|h - \widehat{f}\|_\infty \|g_n - g\|_1 \leqslant \|h - \widehat{f}\|_\infty (\|g_n\|_1 + \|g\|_1) \\ &\leqslant \varepsilon\,(M + \|g\|_1)\,, \end{aligned}$$

on obtient $\limsup_{n\to\infty} \left| \int_{\mathbb{R}} h(x)\,[g_n(x) - g(x)]\,dx \right| \leqslant \varepsilon\,(M + \|g\|_1)$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que $\left| \int_{\mathbb{R}} h(x)\,[g_n(x) - g(x)]\,dx \right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, c'est-à-dire que :

$$\int_{\mathbb{R}} h(x)\,g_n(x)\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{\mathbb{R}} h(x)\,g(x)\,dx\,.$$

Exercice 21

1) D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $\|uv\|_1 \leqslant \|u\|_2 \|v\|_2$; comme l'application $B\colon (u,v) \in L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R}) \mapsto uv \in L^1(\mathbb{R})$ est bilinéaire, cela prouve qu'elle est continue (voir le 1) de l'Exercice 14 du Chapitre IV), comme cela se voit facilement : $\|uv - u_0v_0\|_1 \leqslant \|u(v - v_0)\|_1 + \|(u - u_0)v_0\|_1 \leqslant \|u\|_2 \|v - v_0\|_2 + \|u - u_0\|_2 \|v_0\|_2 \leqslant (\|u_0\|_2 + \delta)\,\delta + \delta\,\|v_0\|_2 \leqslant \varepsilon$ si $\|u - u_0\|_2 \leqslant \delta$ et $\|v - v_0\|_2 \leqslant \delta$, avec $\delta > 0$ assez petit.

2) a) La transformation de Fourier-Plancherel envoie $L^2(\mathbb{R})$ dans lui-même ; donc $\mathscr{F}f$ et $\mathscr{F}g$ sont dans $L^2(\mathbb{R})$ puisque $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Alors $(\mathscr{F}f) * (\mathscr{F}g) \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R})$ par le Théorème III.1.1.

b) Comme $A(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$ (Proposition III.2.11), il existe des fonctions $f_n, g_n \in A(\mathbb{R})$ telles que $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^2(\mathbb{R})} f$ et $g_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^2(\mathbb{R})} g$. Comme la transformation de Fourier-Plancherel est continue sur $L^2(\mathbb{R})$, on a alors $\widehat{f_n} = \mathscr{F}f_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^2(\mathbb{R})} \mathscr{F}f$ et $\widehat{g_n} = \mathscr{F}g_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^2(\mathbb{R})} \mathscr{F}g$. Mais, pour tous $u, v \in L^2(\mathbb{R})$, on a (par l'inégalité de Cauchy-Schwarz) $\|u*v\|_\infty \leqslant \|u\|_2 \|v\|_2$. Comme l'application $C\colon (u,v) \in L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R}) \mapsto u * v \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R})$ est bilinéaire, cela prouve, comme au 1), qu'elle est continue. Donc $\widehat{f_n} * \widehat{g_n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{C}_0(\mathbb{R})} (\mathscr{F}f) * (\mathscr{F}g)$. D'autre part, par le 1), $f_n g_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^1(\mathbb{R})} fg$. La continuité de la transformation de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$ donne alors

$\widehat{f_n g_n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{C}_0(\mathbb{R})} \widehat{fg}$. Il ne nous reste plus qu'à montrer que $\widehat{uv} = \widehat{u} * \widehat{v}$ pour tous $u, v \in A(\mathbb{R})$ pour obtenir $\widehat{fg} = (\mathscr{F}f) * (\mathscr{F}g)$.

Nous utiliserons pour cela le *Théorème d'inversion.* Notons d'abord que, puisque $A(\mathbb{R}) \subseteq L^2(\mathbb{R})$, on a $uv \in L^1(\mathbb{R})$ pour tous $u, v \in A(\mathbb{R})$. On peut alors écrire, pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\widehat{\widehat{u} * \widehat{v}}(x) = \widehat{\widehat{u}}(x)\,\widehat{\widehat{v}}(x) = u(-x)\,v(-x) = (uv)(-x) = \widehat{\widehat{uv}}(x)$; donc $\widehat{\widehat{u} * \widehat{v}} = \widehat{\widehat{uv}}$, d'où, par *injectivité de la transformation de Fourier*, $\widehat{u} * \widehat{v} = \widehat{uv}$.

Exercice 22

1) La linéarité est évidente et la continuité vient de l'inégalité, évidente elle aussi, $\|uv\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}} u^2 v^2\, d\lambda\right)^{1/2} \leqslant \|u\|_\infty \|v\|_2$.

2) D'après le Théorème de convergence dominée, on a $\lim_{a\to+\infty} \|g - g_a\|_2 = 0$; donc :

$$\|f * g - f * g_a\|_2 = \|f * (g - g_a)\|_2 \leqslant \|f\|_1 \|g - g_a\|_2 \xrightarrow[a\to+\infty]{} 0\,.$$

La continuité (et la linéarité) de la transformation de Fourier-Plancherel sur $L^2(\mathbb{R})$ donne alors $\|\mathscr{F}(f * g) - \mathscr{F}(f * g_a)\|_2 = \|\mathscr{F}(f * g - f * g_a)\|_2 \xrightarrow[a\to+\infty]{} 0$.

Mais f et g_a sont dans $L^1(\mathbb{R})$; donc $\mathscr{F}(f * g_a) = \widehat{f * g_a} = \widehat{f}\,\widehat{g}_a$. Comme on sait que $\|\mathscr{F}g - \mathscr{F}g_a\|_2 \xrightarrow[a\to+\infty]{} 0$ (Proposition III.2.13), la continuité de M_u, avec $u = \mathscr{F}f = \widehat{f} \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R}) \subseteq L^\infty(\mathbb{R})$, donne, puisque $\mathscr{F}g \in L^2(\mathbb{R})$, pour la norme de $L^2(\mathbb{R})$:

$$(\mathscr{F}f)\,(\mathscr{F}g) = M_u(\mathscr{F}g) = \lim_{a\to+\infty} M_u(\mathscr{F}g_a) = \lim_{a\to+\infty} (\mathscr{F}f)\,(\mathscr{F}g_a) = \lim_{a\to+\infty} \mathscr{F}(f * g_a) = \mathscr{F}(f * g)\,.$$

Exercice 23

On notera tout d'abord que pour toute $\Phi \in L^2(\mathbb{R})$, on a $\Gamma(\xi) < +\infty$ pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$. En effet :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \Gamma(\xi)\, d\xi &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left[\int_0^1 |\widehat{\Phi}(\xi + n)|^2\, d\xi\right] = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left[\int_n^{n+1} |\widehat{\Phi}(\zeta)|^2\, d\zeta\right] \\ &= \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\Phi}(\zeta)|^2\, d\zeta = \int_{\mathbb{R}} |\Phi(t)|^2\, dt < +\infty\,;\end{aligned}$$

donc $\Gamma(\xi) < +\infty$ pour presque tout $\xi \in [0, 1]$, et par conséquent pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$, en utilisant la périodicité de Γ (et le fait que la réunion d'une famille dénombrable de parties négligeables est encore négligeable).

1) Pour toute $f \in L^2(\mathbb{R})$, $\widehat{f} = \mathscr{F}f \in L^2(\mathbb{R})$. Comme $\Gamma \geqslant a$ *p.p.*, on a $\frac{|\widehat{f}|^2}{\Gamma} \leqslant \frac{1}{a}|\widehat{f}|^2$ *p.p.* ; donc $\frac{\widehat{f}}{\sqrt{\Gamma}} \in L^2(\mathbb{R})$. La transformation de Fourier-Plancherel envoyant $L^2(\mathbb{R})$ sur lui-même, il existe une fonction $Jf \in L^2(\mathbb{R})$ telle que $\widehat{Jf} = \frac{\widehat{f}}{\sqrt{\Gamma}}$. On voit facilement, puisque $\mathscr{F}$ est linéaire bijective, que J est linéaire. C'est un isomorphisme de $L^2(\mathbb{R})$ sur son image car la transformation de Fourier-Plancherel est isométrique. En effet, $\|Jf\|_2 = \|\widehat{Jf}\|_2 = \left\|\frac{\widehat{f}}{\sqrt{\Gamma}}\right\|_2$, d'où $\frac{1}{\sqrt{b}}\|\widehat{f}\|_2 \leqslant \|Jf\|_2 \leqslant \frac{1}{\sqrt{a}}\|\widehat{f}\|_2$, et donc $\frac{1}{\sqrt{b}}\|f\|_2 \leqslant \|Jf\|_2 \leqslant \frac{1}{\sqrt{a}}\|f\|_2$, puisque $\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2$. Il reste à voir que J est surjective. Soit $g \in L^2(\mathbb{R})$. Comme $\widehat{g} \in L^2(\mathbb{R})$ et que $\sqrt{\Gamma} \leqslant \sqrt{b}$, on a $\sqrt{\Gamma}\,\widehat{g} \in L^2(\mathbb{R})$. Soit $f = \mathscr{F}^{-1}(\sqrt{\Gamma}\,\widehat{g})$. On a $\widehat{f} = \sqrt{\Gamma}\,\widehat{g}$, c'est-à-dire $\widehat{g} = \widehat{Jf}$, d'où $g = Jf$.

2) On sait que la transformation de Fourier-Plancherel conserve le produit scalaire ; on a donc $(J\Phi_n \mid J\Phi_k) = (\widehat{J\Phi_n} \mid \widehat{J\Phi_k})$; par conséquent :

$$(J\Phi_n \mid J\Phi_k) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\widehat{\Phi_n}(\xi)}{\sqrt{\Gamma(\xi)}}\, \overline{\frac{\widehat{\Phi_k}(\xi)}{\sqrt{\Gamma(\xi)}}}\, d\xi\,.$$

Mais (voir l'Exercice 18), on a $\widehat{\Phi_n}(\xi) = \mathrm{e}^{-2\pi i n\xi}\widehat{\Phi_n}(\xi)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$; donc :

$$(J\Phi_n \mid J\Phi_k) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2\pi i(n-k)\xi} \frac{|\widehat{\Phi}(\xi)|^2}{\Gamma(\xi)}\, d\xi\,.$$

On obtient, en utilisant le fait que Γ est de période 1 (et $\mathrm{e}^{-2\pi i(n-k)l} = 1$) :

$$\begin{aligned}
(J\Phi_n \mid J\Phi_k) &= \sum_{l\in\mathbb{Z}} \int_l^{l+1} \mathrm{e}^{-2\pi i(n-k)\xi} \frac{|\widehat{\Phi}(\xi)|^2}{\Gamma(\xi)}\, d\xi = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \int_0^1 \mathrm{e}^{-2\pi i(n-k)\zeta} \frac{|\widehat{\Phi}(\zeta+l)|^2}{\Gamma(\zeta)}\, d\zeta \\
&= \int_0^1 \mathrm{e}^{-2\pi i(n-k)\zeta} \frac{1}{\Gamma(\zeta)} \Big(\sum_{l\in\mathbb{Z}} |\widehat{\Phi}(\zeta+l)|^2\Big)\, d\zeta \\
&= \int_0^1 \mathrm{e}^{-2\pi i(n-k)\zeta}\, d\xi = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k \neq n \\ 1 & \text{si} \quad k = n\,. \end{cases}
\end{aligned}$$

On a pu intervertir la sommation et l'intégration car :

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}} \left| \mathrm{e}^{-2\pi i(n-k)\zeta} \frac{|\widehat{\Phi}(\zeta+l)|^2}{\Gamma(\zeta)} \right| = \frac{1}{\Gamma(\zeta)} \sum_{l\in\mathbb{Z}} |\widehat{\Phi}(\zeta+l)|^2 = 1\,,$$

qui est intégrable sur $[0,1]$.

Exercice 24

1) a) On a :

$$\int_0^1 \sum_{m\in\mathbb{Z}} |f(t+m)|\, dt = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \int_0^1 |f(t+m)|\, dt = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \int_m^{m+1} |f(u)|\, du = \int_{\mathbb{R}} |f(u)|\, du < +\infty\,;$$

donc la fonction $G\colon t \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{m\in\mathbb{Z}} |f(t+m)|$ est intégrable sur $[0,1]$. Par périodicité, elle est intégrable sur tout intervalle $[k, k+1]$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Elle est donc finie presque partout sur chacun de ces intervalles. La réunion d'une famille dénombrable de parties négligeables étant encore négligeable, cette fonction est finie presque partout sur $\mathbb{R}$. Cela signifie que la série $\sum_{m\in\mathbb{Z}} f(\,\cdot\, + m)$ est presque partout absolument convergente, et donc convergente presque partout. Il en résulte que l'on peut définir $F(t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} f(t+m)$ pour presque tout $t \in \mathbb{R}$. On obtient (en prolongeant F par 0 là où elle n'était pas définie) une fonction mesurable telle que :

$$\int_0^1 |F(t)|\, dt = \int_0^1 \left| \sum_{m\in\mathbb{Z}} f(t+m) \right| dt \leqslant \int_0^1 \sum_{m\in\mathbb{Z}} |f(t+m)|\, dt = \int_{\mathbb{R}} |f(u)|\, du < +\infty\,,$$

c'est-à-dire que F est intégrable sur $[0,1]$.

b) Les coefficients de Fourier de F valent :

$$\begin{aligned}
\widehat{F}(n) &= \int_0^1 \Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}} f(t+m)\Big) \mathrm{e}^{2\pi i n t}\, dt = \int_0^1 \Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}} f(t+m)\, \mathrm{e}^{2\pi i n(t+m)}\Big)\, dt \\
&\underset{(*)}{=} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \int_0^1 f(t+m)\, \mathrm{e}^{2\pi i n(t+m)}\, dt = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \int_m^{m+1} f(u)\, \mathrm{e}^{2\pi i n u}\, du \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(u)\, \mathrm{e}^{2\pi i n u}\, du = \widehat{f}(n)\,.
\end{aligned}$$

L'égalité $(*)$ est justifiée par l'utilisation du Théorème de convergence dominée puisque l'on a $\left|\sum_{m\in\mathbb{Z}} f(t+m)\,\mathrm{e}^{2\pi in(t+m)}\right| \leqslant \sum_{m\in\mathbb{Z}} |f(t+m)| = G(t)$, qui est intégrable sur $[0,1]$.

Maintenant, la condition $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)| < +\infty$ entraîne la convergence normale de la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)\,\mathrm{e}^{2\pi int}$. Sa somme S est donc de période 1, continue sur $\mathbb{R}$ et ses coefficients de Fourier valent $\widehat{S}(n) = \widehat{f}(n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Grâce à l'*injectivité de la transformation de Fourier* sur $L^1(0,1)$ (Théorème II.4.13), on obtient l'égalité $F = S$ presque partout, c'est-à-dire que $F(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)\,\mathrm{e}^{2\pi int}$ pour presque tout $t \in \mathbb{R}$.

2) a) De même, puisque $\widehat{f} \in L^1(R)$, on a :

$$\int_0^1 \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(s+n)|\Big)\,ds = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^1 |\widehat{f}(s+n)|\,ds = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_n^{n+1} |\widehat{f}(u)|\,du = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(u)|\,du < +\infty\,;$$

donc $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(s+n)| < +\infty$ pour presque tout $s \in \mathbb{R}$.

b) Remarquons maintenant que si l'on pose $f_s(t) = f(t)\,\mathrm{e}^{-2\pi ist}$, alors $f_s \in L^1(\mathbb{R})$ et $\widehat{f_s}(y) = \widehat{f}(s+y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. D'après le 1), appliqué à f_s au lieu de f, on obtient, pour tout $s \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(s+n)| < +\infty$, et donc pour presque tout $s \in \mathbb{R}$, l'égalité :

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} f(t+m)\,\mathrm{e}^{-2\pi is(t+m)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(s+n)\,\mathrm{e}^{2\pi int},$$

pour presque tout $t \in \mathbb{R}$. Il résulte du Théorème de Fubini (ou plutôt de la définition de la mesure-produit) que cette égalité a lieu pour presque tout $(s,t) \in \mathbb{R}^2$. En effet, si N est l'ensemble des $(s,t) \in \mathbb{R}^2$ pour lesquels légalité n'a pas lieu, on a $\lambda(N_s) = 0$ pour presque tout $s \in \mathbb{R}$; mais alors $\lambda_2(N) = \int_{\mathbb{R}} \lambda(N_s)\,ds = 0$.

c) Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)| < +\infty$, on est dans les conditions du a). Si de plus f est continue et la série $\sum_{m\in\mathbb{Z}} f(\,\cdot\,+m)$ converge uniformément sur $[0,1]$, alors la fonction F introduite au a) est continue sur $[0,1]$ (donc sur $\mathbb{R}$, par périodicité). D'autre part, la condition $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)| < +\infty$ entraîne la convergence normale sur $\mathbb{R}$ de la série des fonctions continues $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)\,\mathrm{e}^{2\pi int}$; sa somme est donc continue sur $\mathbb{R}$. L'égalité presque partout montrée au a) est donc valable partout. Pour $t = 0$, on obtient $\sum_{m\in\mathbb{Z}} f(m) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)$.

3) Pour $s > 0$, considérons la fonction intégrable et continue $\varphi_s(x) = \mathrm{e}^{-\pi sx^2}$. On sait que $\widehat{\varphi_1}(y) = \mathrm{e}^{-\pi y^2}$; donc $\widehat{\varphi_s}(y) = \frac{1}{\sqrt{s}}\,\mathrm{e}^{-\pi y^2/s}$. En particulier $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi_s}(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\sqrt{s}}\,\mathrm{e}^{-\pi n^2/s} < +\infty$, et la formule de Poisson, sous la forme du 2) c), appliquée à φ_s donne $\sum_{m\in\mathbb{Z}} \varphi_s(m) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi_s}(n)$, c'est-à-dire $\theta(s) = \frac{1}{\sqrt{s}}\,\theta\big(\frac{1}{s}\big)$.

Notons que si l'on pose $\Theta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\pi n^2 s}$, alors cette relation s'écrit sous la forme $\Theta(s) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,s^{-1/2} + s^{-1/2}\Theta(1/s)$, qui donne l'équivalence $\Theta(s) \sim \frac{1}{2}\,s^{-1/2}$ au voisinage de 0 (il est facile de voir que $\Theta(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$, soit en utilisant le Théorème de convergence monotone, soit en majorant simplement : $0 \leqslant \Theta(t) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\pi nt} = \frac{\mathrm{e}^{-\pi t}}{1-\mathrm{e}^{-\pi t}}$).

Remarque. Outre son intérêt théorique (la fonction thêta est très importante, notamment en Théorie des nombres ; en particulier, elle est reliée à la fonction ζ de Riemann : par exemple un changement de variable simple donne $\zeta(s)\,\Gamma(s/2)\,\pi^{-s/2} = \int_0^{+\infty} \Theta(u)\,u^{s/2-1}\,du$), on voit aussi dans cette question un intérêt pratique très important de la formule de Poisson : elle permet de remplacer une suite convergeant lentement, comme $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-\pi sn^2}$ lorsque $s > 0$ est petit, par une série très rapidement convergente, comme ici $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-\pi n^2/s}$.

4) On va utiliser la formule de Poisson pour $f(u) = f_t(u) = \mathrm{e}^{-t\,|u|}$. Il est clair que $f \in L^1(\mathbb{R})$ et l'on voit facilement que $\widehat{f}(v) = \frac{2t}{t^2+4\pi^2v^2}$. En particulier $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)| < +\infty$.

D'autre part, f est continue et $|f(u+m)| \leqslant \mathrm{e}^{-t(|m|-|u|)} = \mathrm{e}^{t\,|u|}\mathrm{e}^{-tm} \leqslant \mathrm{e}^{t}\mathrm{e}^{-tm}$ pour tout $u \in [0,1]$; donc la série $\sum_{m\in\mathbb{Z}} f(\,\cdot+m)$ converge uniformément sur $[0,1]$. Les conditions du 2) c) sont donc vérifiées, et l'on a $\sum_{m\in\mathbb{Z}} f(m) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)$, ce qui donne $\sum_{m\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-|m|\,t} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{2t}{t^2+4\pi^2n^2}$, d'où $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2t^2}{t^2+4\pi^2n^2} = \frac{t}{2}\,\frac{\mathrm{e}^t+1}{\mathrm{e}^t-1} - 1$.

5) Supposons d'abord K borné, de sorte que $\mathbb{1}_K$ est intégrable. Par conséquent $f = \mathbb{1}_K * \mathbb{1}_K$ est intégrable. D'autre part, $\mathbb{1}_K \in L^1(\mathbb{R}^d)\cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$; donc $f = \mathbb{1}_K * \mathbb{1}_K$ est continue sur $\mathbb{R}^d$. Notons que $f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_K(s-t)\,\mathbb{1}_K(t)\,dt = \lambda_d[(x-K)\cap K]$. Comme $[0,1]^d + K$ est borné, on a $([0,1]^d+m-K)\cap K = \emptyset$ pour $|m|$ assez grand, disons $|m| \geqslant m_0$; donc $f(x+m) = 0$ pour $|m| \geqslant m_0$, pour tout $x \in [0,1]^d$. La convergence uniforme sur $[0,1]^d$ de la série $\sum_{m\in\mathbb{Z}^d} f(\,\cdot+m)$ est donc triviale. D'autre part, on a $\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} |\widehat{f}(n)| < +\infty$. En effet, soit M un entier tel que $K \subseteq [-M,M]^d$. On a $\widehat{f}(n) = [\widehat{\mathbb{1}_K}(n)]^2 = \big[\int_{[-M,M]^d} \mathbb{1}_K(x)\,\mathrm{e}^{-2\pi i(n|x)}\,dx\big]^2 = \big[(2M)^d\widehat{\mathbb{1}_K}(n)\big]^2$, où cette fois-ci $\widehat{\mathbb{1}_K}(n)$ est le coefficient de Fourier en n de la fonction $\mathbb{1}_K$ dans l'espace $L^2([-M,M]^d, \lambda_d/(2M)^d)$. La formule de Parseval nous dit que :

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} |\widehat{f}(n)| &= (2M)^{2d}\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} |\widehat{\mathbb{1}_K}(n)|^2 = (2M)^{2d}\|\mathbb{1}_K\|^2_{L^2([-M,M]^d,\lambda_d/(2M)^d)}\\ &= (2M)^{2d}\frac{\lambda_d(K)}{(2M)^d} = (2M)^d\lambda_d(K) < +\infty.\end{aligned}$$

La formule de Poisson du 1) c), nous donne alors $\sum_{m\in\mathbb{Z}^d} f(m) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \widehat{f}(n)$.

Mais $f(m) = \lambda_d\big((m-K)\cap K\big) = 0$ pour $m \neq 0$. En effet, si $(m-K)\cap K \neq \emptyset$, il existe $t,u \in K$ tels que $t = m-u$; alors $\frac{m}{2} = \frac{t+u}{2} \in K$, car K est convexe. Par hypothèse, on a donc $m = 0$. Au membre de gauche, on a donc juste $f(0) = \lambda_d\big((-K)\cap K\big) = \lambda(K)$, car K est symétrique par rapport à 0.

Pour le membre de droite, remarquons que $\widehat{\mathbb{1}_K}(n) \in \mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}^d$. En effet :

$$\overline{\widehat{\mathbb{1}_K}(n)} = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_K(x)\,\mathrm{e}^{2\pi i(n|x)}\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_K(-u)\,\mathrm{e}^{-2\pi i(n|u)}\,du = \widehat{\mathbb{1}_{(-K)}}(n) = \widehat{\mathbb{1}_K}(n)\,,$$

parce que K est symétrique par rapport à 0. On obtient donc $\widehat{f}(n) = [\widehat{\mathbb{1}_K}(n)]^2 \geqslant 0$, de sorte que $\lambda_d(K) \geqslant [\widehat{f}(0)]^2 = [\widehat{\mathbb{1}_K}(0)]^2 = [\lambda_d(K)]^2$, et ainsi $\lambda_d(K) \leqslant 1$.

Pour finir, si l'on ne suppose plus K borné, on sait que

$$\lambda_d(K) = \sup\{\lambda_d(H)\,;\ H \subseteq K \text{ et } H \text{ compact}\}.$$

Pour tout compact $H \subseteq K$, l'enveloppe convexe de $\widetilde{H} = H \cup (-H)$ est encore compacte, convexe, contenue dans K, et est symétrique par rapport à 0. Comme K ne contient aucun point non nul à coordonnées demi-entières, $\widetilde{H}$ non plus. Il résulte de ce qui précède que $\lambda_d(\widetilde{H}) \leqslant 1$. *A fortiori* $\lambda_d(H) \leqslant 1$, et donc $\lambda_d(K) \leqslant 1$.

Exercice 25

I. 1) On a $(\tau_\alpha\varphi) * f = \varphi * (\tau_\alpha f)$ car, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$:

$$[(\tau_\alpha\varphi) * f](x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x-t-\alpha)\,f(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x-u)\,f(u-\alpha)\,du = [\varphi * (\tau_\alpha f)](x)\,.$$

Soit $f \in E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Prenons une unité approchée $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$. On a $\varphi_n * (\tau_\alpha f) \xrightarrow[n\to\infty]{} \tau_\alpha f$. Mais, comme E est un idéal, $\varphi_n * (\tau_\alpha f) = (\tau_\alpha\varphi_n) * f \in E$; donc, puisque E est fermé, $\tau_\alpha f \in E$.

2) Il suffit de le montrer lorsque u est continue à support compact. En effet, une fois que cela sera fait, comme pour tout $u \in L^1(\mathbb{R})$ on peut trouver, pour tout $\varepsilon > 0$, $v \in \mathscr{K}(\mathbb{R})$ telle

que $\|u-v\|_1 \leqslant \varepsilon$, il existera un entier $N \geqslant 1$ tel que $\|V_N - \mathbb{1}_{(a,b)} * v\|_1 \leqslant \varepsilon$ pour $n \geqslant N$ (où $V_N = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tau_{\alpha_{N,k}} v$). On aura alors $\|U_N - \mathbb{1}_{(a,b)} * u\|_1 \leqslant \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \|\tau_{\alpha_{N,k}} u - \tau_{\alpha_{N,k}} v\|_1 + \|\mathbb{1}_{(a,b)}\|_1 \|u-v\|_1 = \|u-v\|_1 + (b-a)\,\|u-v\|_1 \leqslant (1+b-a)\,\varepsilon$; donc $U_N \xrightarrow[N\to\infty]{L^1(\mathbb{R})} \mathbb{1}_{(a,b)} * u$.

Supposons u continue et à support dans $[A,B]$. Notons que si l'on pose $\widetilde{u}_t = u(t-x)$, alors $U_N(t) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} u(t-\alpha_{N,k}) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \widetilde{u}_t(\alpha_{N,k})$ est une somme de Riemann pour $\widetilde{u}_t$ sur l'intervalle $[a,b]$; elle converge donc, puisque $\widetilde{u}_t$ est continue vers l'intégrale de Riemann $\int_a^b \widetilde{u}_t(x)\,dx = \int_a^b u(t-x)\,dx = (\mathbb{1}_{(a,b)} * u)(t)$. Reste à montrer qu'il y a convergence pour la norme $\|\,.\,\|_1$. On utilise pour cela le Théorème de convergence dominée. Remarquons que $\alpha_{N,k} \in [a,b]$; alors, comme $\operatorname{supp} u \subseteq [A,B]$, $u(t-\alpha_{N,k}) = 0$ pour $t \notin [A-b, B-a]$. Donc $|U_N(t)| \leqslant \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \|u\|_\infty \mathbb{1}_{(A-b,B-a)} = \|u\|_\infty \mathbb{1}_{(A-b,B-a)}$, qui est intégrable sur $\mathbb{R}$; on peut donc utiliser le Théorème de convergence dominée et l'on obtient $U_N \xrightarrow[N\to\infty]{L^1(\mathbb{R})} \mathbb{1}_{(a,b)} * u$.

3) a) Il suffit de le faire pour toute $\varphi = \mathbb{1}_{(a,b)}$, fonction indicatrice d'un intervalle borné de $\mathbb{R}$, puisque toute fonction en escalier est combinaison linéaire de telles fonctions. Mais, par le 2), $\mathbb{1}_{(a,b)} * f = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tau_{\alpha_{N,k}} f$; donc $\mathbb{1}_{(a,b)} * f \in E$ puisque $\tau_{\alpha_{N,k}} f \in E$ et que E est fermé.

b) Soit $f \in E$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $u \in \mathscr{K}(\mathbb{R})$ telle que $\|g-u\|_1 \leqslant \varepsilon$. Comme u est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, il existe φ en escalier (et nulle en dehors du support de u) telle que $\|u-\varphi\|_\infty \leqslant \varepsilon/[1+\lambda(\operatorname{supp} u)]$. Alors $\|u-\varphi\|_1 \leqslant \lambda(\operatorname{supp} u)\,\|u-\varphi\|_\infty \leqslant \varepsilon$. Donc $\|f*g - f*\varphi\|_1 \leqslant \|f\|_1\|g-\varphi\|_1 \leqslant 2\varepsilon\,\|f\|_\infty$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on a trouvé une fonction $f*\varphi$, qui est dans E, par le a), et telle que $\|f*g - f*\varphi\|_1 \leqslant C_f\,\varepsilon$. Cela prouve que $f*g$ est dans l'adhérence de E. Comme E est fermé, on a par conséquent $f*g \in E$, ce qui prouve que E est un idéal de $L^1(\mathbb{R})$.

II. 1) Pour l'égalité, voir l'Exercice 18. Il en résulte que $g\,e_\alpha \in F$ pour toute $g \in F$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

2) Par définition, $Pv \in F$. On a donc, en utilisant le 1), $(Pv)\,e_\alpha \in F$. Comme $(u-Pu) \in F^\perp$, on a $(u-Pu) \perp (Pv)\,e_\alpha$.

3) Cette relation signifie que $\int_\mathbb{R} (u-Pu)(x)\,\overline{(Pv)(x)\,\mathrm{e}^{-2\pi i\alpha x}}\,dx = 0$, c'est-à-dire, en posant $w = (u-Pu)\,\overline{Pv}$, que $\widehat{w}(\alpha) = 0$ (noter que $w \in L^1(\mathbb{R})$, comme produit de deux fonctions de $L^2(\mathbb{R})$). Comme c'est vrai pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'injectivité de la transformation de Fourier donne $w = 0$.

4) Le fait que $w = 0$ s'écrit : $u\,\overline{Pv} = (Pu)\,\overline{(Pv)}$. Mais, en échangeant u et v, on a aussi : $v\,\overline{Pu} = (Pv)\,\overline{(Pu)}$, soit $\overline{v}\,(Pu) = \overline{(Pv)}\,(Pu)$. On obtient donc $u\,\overline{(Pv)} = \overline{v}\,(Pu)$.

5) Notons que la forme particulière de v_0 n'est pas importante ; on a juste besoin de savoir que $v_0 \in L^2(\mathbb{R})$ et que $v_0(y) \neq 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}$, de façon à pouvoir définir φ. La relation du 4) s'écrit : $Pu = \varphi u$. Comme P est une projection, on a $P^2 = P$; donc $\varphi u = P(u) = P^2(u) = P(\varphi u) = \varphi^2 u$. C'est vrai pour tout $u \in L^2(\mathbb{R})$, et en particulier pour $u = v_0$. Comme v_0 ne s'annule pas, on obtient $\varphi = \varphi^2$. Par conséquent, $\varphi(y) = 0$ ou 1, pour presque tout $y \in \mathbb{R}$.

6) Soit $B = \{y \in \mathbb{R}\,;\ \varphi(y) = 0\}$; c'est un borélien (car φ est mesurable) et $\varphi = \mathbb{1}_{B^c}$ presque partout. Alors $Pu = \mathbb{1}_{B^c} u$ (en tant que fonctions de $L^2(\mathbb{R})$). Il en résulte que l'on a $F = \{g \in L^2(\mathbb{R})\,;\ g(y) = 0 \text{ pour presque tout } y \in B\}$, et cela équivaut à dire que $E = \{f \in L^2(\mathbb{R})\,;\ \mathscr{F} f = 0 \text{ presque partout sur } B\}$.

Exercice 26

1) On sait que $\|f_1 * f_2\|_1 \leqslant \|f_1\|_1 \|f_2\|_1$ pour toutes $f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{R})$; donc, par récurrence, $\|f^{*n}\|_1 \leqslant \|f\|_1^n$ pour tout $n \geqslant 1$. Comme $\|f\|_1 < 1$, la série géométrique $\sum_{n\geqslant 1} \|f\|_1^n$ converge. Il en résulte que $\sum_{n=1}^\infty \|f^{*n}\|_1 < +\infty$. Puisque $L^1(\mathbb{R})$ est complet, la série $\sum_{n\geqslant 1} f^{*n}$ converge (voir l'Exercice 9 du Chapitre I). Soit $g = -\sum_{n=1}^\infty f^{*n}$. L'application $u \in L^1(\mathbb{R}) \mapsto f * u \in$

$L^1(\mathbb{R})$ étant linéaire et continue (en vertu de l'inégalité $\|f * u\|_1 \leqslant \|f\|_1\|u\|_1$), on obtient $f * g = -\sum_{n=1}^{\infty} f * f^{*n} = -\sum_{n=1}^{\infty} f^{*(n+1)} = -\sum_{k=2}^{\infty} f^{*k} = f + g$.

2) Supposons que $h \in L^1(\mathbb{R})$ vérifie $f * h = f + h$. En prenant les transformées de Fourier, on obtient $\widehat{f}\,\widehat{h} = \widehat{f} + \widehat{h}$, donc $\widehat{h} = \frac{\widehat{f}}{\widehat{f}-1}$ (on notera que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $|\widehat{f}(y)| \leqslant \|f\|_1 < 1$; donc le quotient est bien défini). D'autre part, la transformation de Fourier étant linéaire continue, on a $\widehat{g} = -\sum_{n=1}^{\infty} (\widehat{f})^n = -\frac{\widehat{f}}{1-\widehat{f}}$. Donc $\widehat{h} = \widehat{g}$ et l'injectivité de la transformation de Fourier entraîne $h = g$.

3) a) L'égalité $f * g = f + g$ donne $\chi(f)\,\chi(g) = \chi(f) + \chi(g)$. Si l'on avait $\chi(f) = 1$, on aurait $1 + \chi(g) = \chi(g)$, ce qui n'est pas possible. Donc $\chi(f) \neq 1$.

b) Si $|\lambda| \geqslant 1$, la fonction $f_\lambda = f/\lambda$ est, comme f, de norme < 1 : $\|f_\lambda\|_1 = \|f\|_1/|\lambda| < 1/|\lambda| \leqslant 1$; on peut donc lui appliquer le résultat obtenu pour f : $\chi(f_\lambda) \neq 1$. Mais $\chi(f_\lambda) = \chi(f)/\lambda$; on obtient donc $\chi(f) \neq \lambda$.

4) Il résulte du 3) que $|\chi(f)| < 1$ pour toute $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\|f\|_1 < 1$. Alors $\sup_{\|f\|_1<1} |\chi(f)| \leqslant 1$, ce qui prouve que χ est continue et $\|\chi\| \leqslant 1$.

Exercice 27

1) a) Comme $\lambda(B) < +\infty$, la fonction $\varphi = \mathbb{1}_B$ est intégrable. Comme elle est aussi bornée, et qu'il en est de même de $\check{\varphi}$, on a $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ et $\check{\varphi} \in L^\infty(\mathbb{R})$, ce qui implique que $\varphi * \check{\varphi}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (Théorème III.1.6).

Il en résulte que $U = \{x \in \mathbb{R}\,;\ (\check{\varphi} * \varphi)(x) > 0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. Comme

$$(\check{\varphi} * \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_B(t-x)\,\mathbb{1}_B(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{B\cap(B+x)}(t)\,dt = \lambda\big(B \cap (B+x)\big)\,,$$

on a, d'une part, $(\check{\varphi} * \varphi)(0) = \lambda(B) > 0$ et donc $0 \in U$, de sorte que U est un voisinage de 0. D'autre part, si $x \in U$, on a $\lambda\big(B \cap (B+x)\big) > 0$, et donc, en particulier, $B \cap (B+x) \neq \emptyset$. Mais dire que $t \in B \cap (B+x)$ signifie que $t \in B$ et qu'il existe $u \in B$ tel que $t = u + x$; donc $x = t - u$, avec $t, u \in B$, et ainsi $x \in V$. On a donc $U \subseteq V$, et par conséquent V est un voisinage de 0.

b) On a $B = \bigcup_{n\geqslant 1}(B\cap[-n,n])$ et donc $+\infty = \lambda(B) = \lim\!\uparrow_{n\to\infty} \lambda(B\cap[-n,n])$, de sorte que pour n assez grand, on a $\lambda(B \cap [-n,n]) > 0$. Si n est un tel entier et $B_n = B \cap [-n,n]$, on a donc $0 < \lambda(B_n) < +\infty$. Par le a), l'ensemble $V_n = \{t - u\,;\ t, u \in B_n\}$ est un voisinage de 0. Mais comme $B_n \subseteq B$, on a $V_n \subseteq V$, et ainsi V est aussi un voisinage de 0.

2) G étant un sous-groupe de $\mathbb{R}$, on a $\{t-u\,; t,u \in G\} = G$. Si l'on suppose G mesurable et $\lambda(G) > 0$, le 1) montre que G est un voisinage de 0. Mais alors G est ouvert car si U est un ouvert contenant 0 et tel que $U \subseteq G$, on a $G = \bigcup_{x\in G}(U + x)$. Mais tout sous-groupe ouvert est aussi fermé car $\mathbb{R} \setminus G = \bigcup_{x\in\mathbb{R}\setminus G}(G + x)$ est ouvert. Comme $\mathbb{R}$ est connexe, on a donc $G = \mathbb{R}$. On aurait aussi pu dire plus simplement que si $[-\varepsilon,\varepsilon] \subseteq G$, alors $\mathbb{R} = \bigcup_{n\geqslant 1}[-n\varepsilon, n\varepsilon] = \bigcup_{n\geqslant 1} n\,[-\varepsilon,\varepsilon] \subseteq \bigcup_{n\geqslant 1} n\,G \subseteq G$.

Remarque. Si G est un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$ non réduit à $\{0\}$, alors soit $G = \alpha\mathbb{Z}$ pour un $\alpha > 0$, soit G est dense dans $\mathbb{R}$. En effet, si on note $G_+ = \{x \in G\,;\ x > 0\}$ et $\alpha = \inf G_+$, alors :

- Si $\alpha > 0$, alors $G = \alpha\mathbb{Z}$. En effet, on a d'abord $\alpha \in G$ car si ce n'était pas le cas, il existerait une suite strictement décroissante d'éléments $x_n \in G_+$ convergeant vers α ; on aurait, pour $n > k$, $0 < x_n - x_k < \alpha$, et on aurait une contradiction puisque $x_n - x_k \in G_+$. Alors $\alpha\mathbb{Z} \subseteq G$. On a égalité car si $x \in G_+$, et si n est la partie entière de x/α, on a $n \leqslant x/\alpha < n+1$, d'où $0 \leqslant x - n\alpha < \alpha$; comme $x - n\alpha \in G$, ce n'est possible que si $x - n\alpha = 0$, et on a donc $x \in \alpha\mathbb{Z}$.

- Si $\alpha = 0$, alors G est dense dans $\mathbb{R}$. En effet, soit $]a,b[$ un intervalle non vide de $\mathbb{R}$. Posons $\varepsilon = b - a$. Il existe $x_\varepsilon \in G_+$ tel que $0 < x_\varepsilon < \varepsilon$. Soit n la partie entière de b/x_ε ; on a

$n \leqslant b/x_\varepsilon \leqslant n+1$. Comme $(n+1)x_\varepsilon - b > 0$, il existe $x \in G_+$ tel que $0 < x < (n+1)x_\varepsilon - b$. Alors $a = b - \varepsilon < b - x_\varepsilon < x + nx_\varepsilon < nx_\varepsilon \leqslant b$, ce qui prouve que $G \cap]a, b[\neq \emptyset$ puisque $x + nx_\varepsilon \in G$.

3) Il est facile de voir que G est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ (notons que les limites de $(\mathrm{e}^{2\pi i a_n x})_{n\geqslant 1}$ ne sont pas nulles car elles sont de module 1). Par ailleurs, la suite $(\mathrm{e}^{2\pi i a_n x})_{n\geqslant 1}$ possède une limite si et seulement si elle est de Cauchy. Or cela s'écrit :

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists n \geqslant 1) \quad (\forall k, l \geqslant n) \qquad |\mathrm{e}^{2\pi i a_k x} - \mathrm{e}^{2\pi i a_l x}| \leqslant \varepsilon\,,$$

et on peut se contenter de prendre $\varepsilon = 1/m$. Donc :

$$G = \bigcap_{m\geqslant 1} \bigcup_{n\geqslant 1} \bigcap_{k,l\geqslant n} C_{m,k,l}.$$

Comme les ensembles $C_{m,k,l}$ sont mesurables (parce que la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{2\pi i a_k x} - \mathrm{e}^{2\pi i a_l x}$ est mesurable, puisque continue), G est aussi mesurable.

Maintenant, on a $A \subseteq G$ et $\lambda(A) > 0$, par hypothèse ; il en résulte que $\lambda(G) > 0$. On déduit du 2) que $G = \mathbb{R}$.

4) a) On sait que la transformée de Fourier d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ vérifie $\widehat{f}(y) \xrightarrow[|y|\to\infty]{} 0$. On a donc, en particulier, puisque l'on a supposé que $|a_{n_k}| \xrightarrow[k\to\infty]{} +\infty$,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, \mathrm{e}^{2\pi i a_{n_k} x}\, dx = \widehat{f}(-a_{n_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

b) On obtient $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, g(x)\, dx = 0$ par le Théorème de convergence dominée puisque $|f(x)\, \mathrm{e}^{2\pi i a_{n_k} x}| = |f(x)|$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

c) Ce n'est pas possible parce que, en prenant $f(x) = \overline{g(x)}\, \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$, cela donnerait $\int_0^1 |g(x)|^2\, dx = 0$ et donc $g(x) = 0$ pour presque tout $x \in [0,1]$, ce qui est faux : $|g(x)| = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

5) Il résulte du 4) que la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée. Si α et β en sont deux valeurs d'adhérence, on aura

$$g(x) = \mathrm{e}^{2\pi i \alpha x} = \mathrm{e}^{2\pi i \beta x} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

En dérivant, on obtient $2\pi i \alpha\, \mathrm{e}^{2\pi i \alpha x} = 2\pi i \beta\, \mathrm{e}^{2\pi i \beta x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ce qui donne $\alpha = \beta$, en prenant $x = 0$. La suite bornée $(a_n)_{n\geqslant 1}$ n'ayant qu'une seule valeur d'adhérence, elle est donc convergente.

Exercice 28

1) a) Pour $|x| \leqslant a$, on a $|f(x)\, \mathrm{e}^{-2\pi i z x}| = |f(x)|\, \mathrm{e}^{-2\pi [\mathrm{Re}\,(iz)]\, x} = |f(x)|\, \mathrm{e}^{2\pi (\mathrm{Im}\, z)\, x} \leqslant |f(x)|\, \mathrm{e}^{2\pi\, |\mathrm{Im}\, z|\, a}$; donc :

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)\, \mathrm{e}^{-2\pi i z x}|\, dx = \int_{-a}^{a} |f(x)\, \mathrm{e}^{-2\pi i z x}|\, dx \leqslant \mathrm{e}^{2\pi a\, |\mathrm{Im}\, z|} \int_{-a}^{a} |f(x)|\, dx \leqslant \mathrm{e}^{2\pi a\, |\mathrm{Im}\, z|} (2a)^{1/2} \|f\|_2\,,$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Cela prouve que $F(z)$ existe pour tout $z \in \mathbb{C}$ et que $|F(z)| \leqslant (2a)^{1/2} \|f\|_2\, \mathrm{e}^{2\pi a\, |\mathrm{Im}\, z|}$.

b) Posons $\Phi(x,z) = f(x)\, \mathrm{e}^{-2\pi i z x}$; on a $\partial_2 \Phi(x,z) = -2\pi i x f(x)\, \mathrm{e}^{-2\pi i z x}$. Pour tout $B > 0$, on a donc $|\partial_2 \Phi(x,z)| = 2\pi |x f(x)|\, \mathrm{e}^{2\pi (\mathrm{Im}\, z) x} \leqslant 2\pi |x f(x)|\, \mathrm{e}^{2\pi B a}$ pour $|\mathrm{Im}\, z| \leqslant B$ et $|x| \leqslant a$. Comme $\int_{\mathbb{R}} |x f(x)|\, dx = \int_{-a}^{a} |x f(x)|\, dx \leqslant \big(\int_{-a}^{a} x^2\, dx\big)^{1/2} \big(\int_{-a}^{a} |f(x)|^2\, dx\big)^{1/2} = (2a^3/3)^{1/2} \|f\|_2 < +\infty$, le Théorème de dérivation sous le signe intégral dit que F est holomorphe dans la bande $|\mathrm{Im}\, z| < B$. Comme c'est vrai pour tout $B > 0$, F est holomorphe dans $\mathbb{C}$.

c) Il suffit de remarquer que $F_{|\mathbb{R}} = \mathscr{F} f$ et que $\mathscr{F} f \in L^2(\mathbb{R})$ pour toute $f \in L^2(\mathbb{R})$.

2) a) Puisque G est holomorphe dans $\mathbb{C}$, $G_{|\mathbb{R}}$ est en particulier continue, donc mesurable, sur $\mathbb{R}$. De plus, il résulte de l'hypothèse faite sur G que $|G(x)| \leqslant \frac{C}{1+x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par conséquent $G_{|\mathbb{R}} \in L^1(\mathbb{R})$.

b) L'application $z \mapsto G(z)\,\mathrm{e}^{2\pi i x z}$ est holomorphe dans $\mathbb{C}$. Le Théorème de Cauchy dit que son intégrale le long de tout lacet est nulle. Considérons le lacet formé des côtés du rectangle de sommets $-R$, R, $R+ib$, $-R+ib$, avec $R>0$, parcouru une fois dans le sens positif. On a :

$$\int_{-R}^{R} G(t)\,\mathrm{e}^{2\pi i t x}\,dt + i\int_0^b G(R+it)\,\mathrm{e}^{2\pi i x(R+it)}\,dt \\ - \int_{-R}^{R} G(t+ib)\,\mathrm{e}^{2\pi i x(t+ib)}\,dt - i\int_0^b G(-R+it)\,\mathrm{e}^{2\pi i x(-R+it)}\,dt = 0\,.$$

L'intégrale sur les côtés verticaux $[R, R+ib]$ et $[-R+ib, -R]$ tend vers 0 quand R tend vers l'infini. En effet, si $z = R+it$, avec $0 \leqslant t \leqslant b$, on a :

$$|G(R+it)\,\mathrm{e}^{2\pi i x(R+it)}| = |G(R+it)|\,\mathrm{e}^{-2\pi x t} \leqslant C\,\frac{\mathrm{e}^{2\pi a|t|}}{1+R^2+t^2}\,\mathrm{e}^{2\pi|x|b} \leqslant C\,\frac{\mathrm{e}^{2\pi ab}}{1+R^2}\,\mathrm{e}^{2\pi|x|b}\,;$$

alors $\left|\int_{[R,R+ib]} G(z)\,\mathrm{e}^{2\pi i x z}\,dz\right| \leqslant Cb\,\frac{\mathrm{e}^{2\pi(a+|x|)b}}{1+R^2} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$. De même sur l'autre côté vertical. Il en résulte que :

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}} G(t)\,\mathrm{e}^{2\pi i t x}\,dt = \int_{\mathbb{R}} G(t+ib)\,\mathrm{e}^{2\pi i x(t+ib)}\,dt\,.$$

c) On a alors $|g(x)| \leqslant C\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{2\pi ab}}{1+t^2+b^2}\,\mathrm{e}^{-2\pi x b}\,dt \leqslant C\,\mathrm{e}^{-2\pi(x-a)b}\int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{1+t^2} = C\,\pi\,\mathrm{e}^{-2\pi(x-a)b}$. Or, lorsque $x > a$, $\mathrm{e}^{-2\pi(x-a)b} \xrightarrow[b\to+\infty]{} 0$; donc $g(x) = 0$. Lorsque $x < -a$, on a cette fois $\mathrm{e}^{-2\pi(x-a)b} \xrightarrow[b\to-\infty]{} 0$, et donc aussi $g(x) = 0$.

d) Par hypothèse, $G_{|\mathbb{R}} \in L^2(\mathbb{R})$; donc $g = \mathscr{F}^{-1}(G_{|\mathbb{R}}) \in L^2(\mathbb{R})$. Comme elle est nulle pour $|x| > a$, on a $g \in L^2([-a,a])$.

3) a) (*i*) Comme $\varphi \in L^2([-\varepsilon,\varepsilon])$, le 1) b) dit que $|F_\varphi(z)| \leqslant C(\varphi)\,\mathrm{e}^{2\pi\varepsilon\,|\mathrm{Im}\,z|}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Lorsque $|z| \leqslant 1$, on a $1+|z|^2 \leqslant 2$; donc $|F_\varphi(z)| \leqslant 2\,C(\varphi)\,\frac{\mathrm{e}^{2\pi\varepsilon\,|\mathrm{Im}\,z|}}{1+|z|^2}$. Pour $|z| \geqslant 1$, on intègre deux fois par parties ; on obtient, puisque $\varphi(-\varepsilon) = \varphi(\varepsilon) = 0$ et $\varphi'(-\varepsilon) = \varphi'(\varepsilon) = 0$:

$$F_\varphi(z) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi(x)\,\mathrm{e}^{-2\pi i z x}\,dx = -\frac{1}{4\pi^2 z^2}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi''(x)\,\mathrm{e}^{-2\pi i z x}\,dx = -\frac{1}{4\pi^2 z^2}\,F_{\varphi''}(z)\,.$$

Or, comme $|z| \geqslant 1$, on a $1+|z|^2 \leqslant 2\,|z|^2$; donc, en utilisant le 1) b), puisque $\varphi'' \in L^2([-\varepsilon,\varepsilon])$:

$$|F_\varphi(z)| \leqslant \frac{1}{4\pi^2}\,\frac{2}{1+|z|^2}\,C(\varphi'')\,\mathrm{e}^{2\pi\varepsilon\,|\mathrm{Im}\,z|}\,.$$

On obtient donc $|F_\varphi(z)| \leqslant C_\varphi\,\frac{\mathrm{e}^{2\pi\varepsilon\,|\mathrm{Im}\,z|}}{1+|z|^2}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

(*ii*) On a alors $|G(z)| = |H(z)|\,|F_\varphi(z)| \leqslant C\,C_\varphi\,\frac{\mathrm{e}^{2\pi(a+\varepsilon)\,|\mathrm{Im}\,z|}}{1+|z|^2}$. Par ailleurs, on a $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$; donc, par l'Exercice 22 (et l'Exercice 9), $f * \varphi \in L^2(\mathbb{R})$ et $\mathscr{F}(f*\varphi) = (\mathscr{F}f)\,(\mathscr{F}\varphi)$. Comme $\mathscr{F}f = H_{|\mathbb{R}}$ et $\mathscr{F}\varphi = (F_\varphi)_{|\mathbb{R}}$, on a $G_{|\mathbb{R}} = \mathscr{F}(f*\varphi)$, et donc $G_{|\mathbb{R}} \in L^2(\mathbb{R})$ (puisque $f*\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ entraîne $\mathscr{F}(f*\varphi) \in L^2(\mathbb{R})$). Ainsi G vérifie bien les hypothèses du 2), avec $a+\varepsilon$ au lieu de a.

(*iii*) Il résulte du 2) que $f*\varphi = \mathscr{F}^{-1}(G_{|\mathbb{R}}) = g \in L^2([-a-\varepsilon, a+\varepsilon])$.

b) Soit $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une unité approchée telle que $\varphi_\varepsilon \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ et $\operatorname{supp}\varphi_\varepsilon \subseteq [-\varepsilon,\varepsilon]$. On a $f * \varphi_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{L^2(\mathbb{R})} f$. Il existe donc une suite décroissante de nombres strictement positifs $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ tendant vers 0 telle que $f * \varphi_{\varepsilon_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ presque partout. Soit $N \geqslant 1$. Pour tout $n \geqslant N$, $f * \varphi_{\varepsilon_n}$ s'annule pour $|x| > a + \varepsilon_n$, donc pour $|x| > a + \varepsilon_N$; il en résulte que $f(x) = 0$ pour presque tout x tel que $|x| > a + \varepsilon_N$. Comme c'est vrai pour tout $N \geqslant 1$, on obtient finalement $f(x) = 0$ pour presque tout x tel que $|x| > a$. Par conséquent $f \in L^2([-a,a])$.

Exercice 29

1) a) Il suffit de montrer que $L^2(w)$ contient tous les monômes m_n, où $m_n(t) = t^n$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\int_{\mathbb{R}} t^{2n}\mathrm{e}^{-t^2}\,dt < +\infty$ (car, par exemple $t^2(t^{2n}\mathrm{e}^{-t^2}) \xrightarrow[|t|\to+\infty]{} 0$) ; donc $m_n \in L^2(w)$.

b) Posons $\varphi(t,z) = \mathrm{e}^{-2\pi itz}f(t)\,w(t)$. Soit $B \geqslant 0$.

On a $|\varphi(t,z)| = \mathrm{e}^{-2\pi t(\operatorname{Im} z)}|f(t)|\,w(t) \leqslant \mathrm{e}^{2\pi B|t|}|f(t)|\,w(t)$ pour $|\operatorname{Im} z| \leqslant B$. Or, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{2\pi B|t|}|f(t)|\,w(t)\,dt &\leqslant \bigg(\int_{\mathbb{R}} \big(\mathrm{e}^{2\pi Bt}\,[w(t)]^{1/2}\big)^2\,dt\bigg)^{1/2}\bigg(\int_{\mathbb{R}} \big(|f(t)|\,[w(t)]^{1/2}\big)^2\,dt\bigg)^{1/2}\\ &= \bigg(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{4\pi B|t|}\,\mathrm{e}^{-t^2}\,dt\bigg)^{1/2}\|f\|_{L^2(w)} < +\infty \qquad (*)\end{aligned}$$

(car $4\pi B\,|t| - t^2 \leqslant -t^2/2$ pour $|t|$ assez grand). La version holomorphe du Théorème de dérivation sous le signe intégral peut alors être utilisé pour obtenir l'holomorphie de F sur la bande $\{z \in \mathbb{C}\,;\ |\operatorname{Im} z| < B\}$, et donc sur $\mathbb{C}$, puisque c'est vrai pour tout $B > 0$. De plus, ce théorème permet de dériver indéfiniment sous le signe intégral ; on obtient donc $F^{(n)}(z) = \int_{\mathbb{R}}(-2\pi it)^n\,\mathrm{e}^{-2\pi itz}f(t)\,\mathrm{e}^{-t^2}\,dt$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $n \in \mathbb{N}$; en particulier $F^{(n)}(0) = (-2\pi i)^n\int_{\mathbb{R}} t^n f(t)\,\mathrm{e}^{-t^2}\,dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) Il suffit de montrer que si $f \in L^2(w)$ est orthogonale à tous les polynômes, alors $f = 0$. Or lorsque c'est le cas, on a en particulier $(f \mid m_n)_{L^2(w)} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et cela signifie que $F^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Mais, F étant entière, on a $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{F^{(n)}(0)}{n!}\,z^n$ pour tout $z \in \mathbb{C}$; on obtient par conséquent $F \equiv 0$.

Remarquons maintenant que l'inégalité $(*)$ montre que $fw \in L^1(\mathbb{R})$. On peut alors écrire $F(x) = (\widehat{fw})(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a donc $\widehat{fw} = 0$. L'injectivité de la transformation de Fourier entraîne alors que $fw = 0$. Il en résulte que $f = 0$ presque partout, puisque w ne s'annule pas.

Remarque. Une autre preuve est proposée dans l'Exercice 19.

2) a) On le montre par récurrence. Pour $n = 0$, c'est évidemment vrai, avec $H_0(t) = 1$. Supposons que, pour $n \geqslant 0$, on ait $w^{(n)}(t) = (-1)^n H_n(t)\,w(t)$, H_n étant un polynôme de degré n et de coefficient dominant 2^n. Alors $w^{(n+1)}(t) = (-1)^n[H_n'(t) - 2tH_n(t)]\,\mathrm{e}^{-t^2}$. Comme H_n' est un polynôme réel de degré $n-1$ (si $n \geqslant 1$; pour $n = 0$, $H_0' = 0$) et $tH_n(t)$ est un polynôme réel de degré $n+1$, on obtient que $H_{n+1}(t) = 2tH_n(t) - H_n'(t)$ est un polynôme réel de degré $n+1$ et que son coefficient dominant est $2 \times 2^n = 2^{n+1}$. Comme $w^{(n+1)}(t) = (-1)^{n+1}H_{n+1}(t)\,w(t)$, cela termine la récurrence.

b) Pour tous entiers $n, k \geqslant 1$, on a, en intégrant par parties :

$$\int_{\mathbb{R}} t^k w^{(n)}(t)\,dt = \big[t^k w^{(n-1)}(t)\big]_{-\infty}^{+\infty} - k\int_{\mathbb{R}} t^{k-1}w^{(n-1)}(t)\,dt = -k\int_{\mathbb{R}} t^{k-1}w^{(n-1)}(t)\,dt\,,$$

car $t^k w^{(n-1)}(t) = (-1)^{n-1} t^{k-1} H_{n-1}(t)\,\mathrm{e}^{-t^2} \xrightarrow[|t|\to+\infty]{} 0$ (puisque $t^{k-1}H_{n-1}(t)$ est un polynôme). Par récurrence, on obtient, pour $k \leqslant n$:

$$\int_{\mathbb{R}} t^k w^{(n)}(t)\,dt = (-1)^k k! \int_{\mathbb{R}} w^{(n-k)}(t)\,dt\,. \qquad (**)$$

On obtient, pour $k < n$, $\int_{\mathbb{R}} w^{(n-k)}(t)\,dt = \left[w^{(n-k+1)}(t)\right]_{-\infty}^{+\infty} = 0$ parce que $w^{(n-k+1)}(t) = (-1)^{n-k+1} H_{n-k+1}\,\mathrm{e}^{-t^2} \xrightarrow[|t|\to+\infty]{} 0$. Comme H_k est combinaison linéaire de $1, t, \ldots, t^k$, il en résulte que $\int_{\mathbb{R}} H_k(t)\,w^{(n)}(t)\,dt = 0$ pour $k < n$. Cela signifie que $\int_{\mathbb{R}} H_k(t)\,H_n(t)\,w(t)\,dt = 0$, ou, autrement dit, que H_k est orthogonal à H_n dans $L^2(w)$ pour $k < n$.

Par ailleurs, l'égalité $(**)$ pour $k = n$ donne :

$$\int_{\mathbb{R}} t^n w^{(n)}(t)\,dt = (-1)^n n! \int_{\mathbb{R}} w(t)\,dt = (-1)^n n! \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t^2}\,dt = (-1)^n n! \sqrt{\pi}.$$

Remarquons maintenant que, puisque les polynômes H_k sont de degré k, ils sont linéairement indépendants. Il en résulte que l'espace engendré par $H_0, \ldots, H_{n-1}$ est égal à l'espace des polynômes de degré $\leqslant n-1$. Ainsi $H_n = 2^n t^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_{n,k} H_k$. Comme on a vu que H_n est orthogonal à H_k pour $k \leqslant n-1$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\|H_n\|^2_{L^2(w)} &= \int_{\mathbb{R}} H_n(t)\,H_n(t)\,w(t)\,dt \\
&= 2^n \int_{\mathbb{R}} t^n H_n(t)\,w(t)\,dt + \sum_{k=0}^{n-1} a_{n,k} \int_{\mathbb{R}} H_k(t)\,H_n(t)\,w(t)\,dt \\
&= \sqrt{\pi}\,2^n n!
\end{aligned}$$

(car $t^n H_n(t)\,w(t) = (-1)^n t^n w^{(n)}(t)$).

c) Il résulte du b) que la suite $\big((\sqrt{\pi}\,2^n n!)^{-1/2} H_n\big)_{n\geqslant 0}$ est orthonormée de $L^2(w)$. Pour montrer que c'en est une base orthonormée, il faut montrer qu'elle est totale dans $L^2(w)$. Mais, comme on l'a dit au b), cette suite engendre l'espace de tous les polynômes. Il résulte donc du 1) c) que la suite $\big((\sqrt{\pi}\,2^n n!)^{-1/2} H_n\big)_{n\geqslant 0}$ est totale.

3) La fonction w étant holomorphe dans $\mathbb{C}$, elle est égale à son développement de Taylor en tout $t \in \mathbb{C}$, avec un rayon de convergence infini ; pour tout $t \in \mathbb{C}$ et tout $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$w(t-z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^{(n)}(t)}{n!}(-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(t)\,\mathrm{e}^{-t^2} \frac{z^n}{n!}\,;$$

d'où $\sum_{n=0}^{\infty} H_n(t)\,\frac{z^n}{n!} = w(t-z)\,\mathrm{e}^{t^2} = \mathrm{e}^{-(t-z)^2}\,\mathrm{e}^{t^2} = \mathrm{e}^{2tz-z^2}$.

4) C'est une autre formulation du 2) c) ; en effet, pour toutes fonctions $f, g \in L^2(w)$, on a $(f \mid g)_{L^2(w)} = \int_{\mathbb{R}} f(t)\,\overline{g(t)}\,w(t)\,dt = (fw^{1/2} \mid gw^{1/2})_{L^2(\mathbb{R})}$.

5) a) On va utiliser le Théorème de convergence dominée pour intervertir l'ordre de la sommation et de l'intégration. La fonction $z \mapsto G(t,z) = \mathrm{e}^{2tz-z^2}$ étant holomorphe dans $\mathbb{C}$, son développement en série entière converge normalement sur tout compact. En particulier, il converge normalement sur tout cercle de centre 0 et de rayon $r > 0$. On obtient, pour tout $n \geqslant 0$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G(t, r\,\mathrm{e}^{i\theta})\,\mathrm{e}^{-in\theta}\,d\theta = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{H_k(t)}{k!}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r^k \mathrm{e}^{i(k-n)\theta}\,d\theta = \frac{H_n(t)}{n!}\,r^n\,;$$

d'où :

$$\frac{|H_n(t)|}{n!}\, r^n \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |G(t, r\,\mathrm{e}^{i\theta})|\, d\theta \leqslant \sup_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi} |G(t, r\,\mathrm{e}^{i\theta})|$$

(ce sont les *inégalités de Cauchy*). Comme $|G(t, r\,\mathrm{e}^{i\theta})| = |\mathrm{e}^{2tr\mathrm{e}^{i\theta} - r^2\mathrm{e}^{2i\theta}}| \leqslant \mathrm{e}^{2|t|r+r^2}$, on obtient $\frac{|H_n(t)|}{n!}\, r^n \leqslant \mathrm{e}^{2|t|r+r^2}$.

Pour tout $z \in \mathbb{R}$, prenons un $r > |z|$; on a, pour tout $N \geqslant 0$:

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=0}^{N} H_n(t)\,\frac{z^n}{n!}\,\mathrm{e}^{-2\pi itx}\,\mathrm{e}^{-t^2/2}\right| &\leqslant \mathrm{e}^{-t^2/2}\sum_{n=0}^{\infty} |H_n(t)|\,\frac{|z|^n}{n!}\\
&\leqslant \mathrm{e}^{-t^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{2|t|r+r^2}\left(\frac{|z|}{r}\right)^n = \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}+2|t|r+r^2}\,\frac{r}{r-|z|},
\end{aligned}$$

fonction qui est intégrable par rapport à t. On peut donc utiliser le Théorème de convergence dominée, et l'on obtient :

$$\begin{aligned}
\Phi(x,z) &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2\pi itx}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} H_n(t)\,\frac{z^n}{n!}\Big)\,\mathrm{e}^{-t^2/2}\,dt\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_{\mathbb{R}} H_n(t)\,\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{e}^{-2\pi itx}\,dt\right]\frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\widehat{\theta_n}(x)\,\frac{z^n}{n!}\,.
\end{aligned}$$

b) On fait le changement de variable $u = (t-2z)/\sqrt{2\pi}$; on obtient :

$$\begin{aligned}
\Phi(x,z) &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2\pi itx}\,\mathrm{e}^{2tz-z^2}\,\mathrm{e}^{-t^2/2}\,dt = \mathrm{e}^{z^2}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-2\pi itx}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(t-2z)^2}\,dt\\
&= \sqrt{2\pi}\,\mathrm{e}^{z^2}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-2\pi i(\sqrt{2\pi}\,u+2z)x}\,\mathrm{e}^{-\pi u^2}\,du\\
&= \sqrt{2\pi}\,\mathrm{e}^{z^2}\,\mathrm{e}^{-4\pi izx}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-2\pi iu(\sqrt{2\pi}\,x)}f_0(u)\,du = \sqrt{2\pi}\,\mathrm{e}^{z^2}\,\mathrm{e}^{-4\pi izx}\widehat{f_0}(\sqrt{2\pi}\,x),
\end{aligned}$$

où $f_0(x) = \mathrm{e}^{-\pi x^2}$. Or on a vu dans le cours (égalité (III.1)), que $\widehat{f_0}(y) = f_0(y) = \mathrm{e}^{-\pi y^2}$; on obtient donc $\Phi(x,z) = \sqrt{2\pi}\,\mathrm{e}^{z^2}\,\mathrm{e}^{-4\pi izx}\,\mathrm{e}^{-2\pi^2x^2} = \sqrt{2\pi}\,\mathrm{e}^{-2\pi^2x^2}\,G(2\pi x, -iz)$.

6) Comme

$$\mathrm{e}^{-2\pi^2x^2}\,G(2\pi x,-iz) = \mathrm{e}^{-2\pi^2x^2}\sum_{n=0}^{\infty}H_n(2\pi x)\,\frac{(-iz)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n\theta_n(2\pi x)\,\frac{z^n}{n!}\,,$$

il résulte du 5) que, pour tout $z \in \mathbb{R}$, on a $\sum_{n=0}^{\infty}\widehat{\theta_n}(x)\,\frac{z^n}{n!} = \sqrt{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n\theta_n(2\pi x)\,\frac{z^n}{n!}$. L'unicité du développement en série entière entraîne que, pour tout $n \geqslant 0$, on a $\widehat{\theta_n}(x) = (-i)^n\sqrt{2\pi}\,\theta_n(2\pi x)$.

Posons $v_n(x) = \theta_n(\sqrt{2\pi}\,x)$. On a $\widehat{v_n}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\widehat{\theta_n}(y/\sqrt{2\pi})$. On obtient par conséquent : $\widehat{v_n}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\widehat{\theta_n}(\sqrt{2\pi}\,y) = (-i)^n v_n(y)$, de sorte que v_n est un vecteur propre de $\mathscr{F}$ pour la valeur propre $(-i)^n$. Pour finir, posons $u_n = (\sqrt{\pi}\,2^n n!)^{-1/2}v_n$. On a $u_n(t) = h_n(\sqrt{2\pi}\,t)$; donc la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$ (le changement de variable $t \mapsto \sqrt{2\pi}\,t$ n'altérant en rien le caractère orthonormal, ni la totalité), et u_n est, comme v_n, un vecteur propre de $\mathscr{F}$ pour la valeur propre $(-i)^n$.

Comme $\{(-i)^n\,;\ n \geqslant 0\} = \{1, -1, i, -i\}$, $\mathscr{F}$ possède donc les quatre valeurs propres $1, -1, i, -i$. Il n'y en a pas d'autres puisque l'on a une base hilbertienne formée de vecteurs propres associés.

On pouvait savoir *a priori* que seules ces valeurs pouvaient être des valeurs propres. En effet, on sait, par le Théorème d'inversion, que pour $f \in A(\mathbb{R})$, on a $[\mathscr{F}(\mathscr{F}f)](x) = f(-x)$, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$; donc $(\mathscr{F}^4 f)(x) = f(x)$. Par densité de $A(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$, on obtient $\mathscr{F}^4 = \mathrm{Id}_{L^2(\mathbb{R})}$. Alors toute valeur propre λ de $\mathscr{F}$ doit vérifier $\lambda^4 = 1$.

Exercice 30

1) On sait (équation (III.1) du cours) que si $f_0(t) = \mathrm{e}^{-\pi t^2}$, alors $\widehat{f_0}(u) = f_0(u)$. Donc :

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\alpha x^2}\, \mathrm{e}^{i\lambda x}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\pi t^2}\, \mathrm{e}^{-2\pi i(-\lambda/2\sqrt{\pi\alpha})t}\, dt = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, \mathrm{e}^{-\lambda^2/4\alpha}.$$

2) a) Soit $A > 0$. Pour $|x| \leqslant A$, on a :

$$\mathrm{e}^{-\alpha(x-2\pi n)^2} = \mathrm{e}^{-\alpha x^2}\, \mathrm{e}^{-4\pi^2\alpha n^2 + 4\pi\alpha x n} \leqslant \mathrm{e}^{-4\pi^2\alpha n^2 + 4\pi\alpha A n} \leqslant \mathrm{e}^{-2\pi^2\alpha n^2}$$

pour $n \geqslant 2A/\pi$; donc la série converge normalement sur $[-A, A]$. En particulier, elle converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Posons $\psi_n(x) = \mathrm{e}^{-\alpha(x-2\pi n)^2}$. On a $\psi_n'(x) = -2\alpha(x - 2\pi n)\,\mathrm{e}^{-\alpha(x-2\pi n)^2}$. Alors, pour $|x| \leqslant A$, on a $|\psi_n'(x)| \leqslant 2\alpha(A + 2\pi n)\,\mathrm{e}^{-2\pi^2\alpha n^2}$ pour $n \geqslant 2A/\pi$. Il en résulte que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \psi_n'$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{R}$. Par conséquent, φ_α est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$.

La périodicité de φ_α est claire : $\varphi_\alpha(x+2\pi) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha(x+2\pi-2\pi n)^2} = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha(x-2\pi k)^2}$, en posant $k = n - 1$.

b) Grâce à la convergence normale sur tout compact, on a, pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}\widehat{\varphi_\alpha}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(x)\,\mathrm{e}^{-ikx}\, dx = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\alpha(x-2\pi)^2}\,\mathrm{e}^{-ikx}\, dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-n}^{-n+2\pi} \mathrm{e}^{-\alpha u^2}\,\mathrm{e}^{-iku}\, du = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\alpha u^2}\,\mathrm{e}^{-iku}\, du = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}}\,\mathrm{e}^{-k^2/4\alpha},\end{aligned}$$

en utilisant le 1).

3) a) La fonction φ_α étant continûment dérivable, le *Théorème de Jordan-Dirichlet* (ou plutôt, dans ce cas, le Théorème de Dirichlet) dit que $\varphi_\alpha(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{\varphi_\alpha}\,(k)\,\mathrm{e}^{ikx}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Prenant $\alpha = 1/4t$, cela donne :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(x-2\pi n)^2}{4t}} = \sqrt{\frac{t}{\pi}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-k^2 t}\,\mathrm{e}^{ikx},$$

soit $G_t(x) = \sqrt{\dfrac{\pi}{t}}\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(x-2\pi n)^2}{4t}}$.

Notons que l'on aurait pu utiliser la formule sommatoire de Poisson (Exercice 24). On remarquera aussi le lien entre le noyau G_t et la fonction θ de Jacobi.

b) L'espace $L^1(\mathbb{T})$ s'identifie à l'espace $L^1(0, 2\pi)$, muni de la mesure de Lebesgue normalisée $du/2\pi$.

Soit d'abord $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue de période 2π. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, en utilisant la convergence normale sur tout compact de la série définissant $\varphi_{1/4t}$, et la périodicité de g :

$$\begin{aligned}(g * G_t)(x) &= \int_0^{2\pi} g(x-u)\,G_t(u)\,\frac{du}{2\pi} = \int_0^{2\pi} g(x-u)\left[\sqrt{\frac{\pi}{t}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(u-2\pi n)^2}{4t}}\right]\frac{du}{2\pi} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\int_0^{2\pi} g(x-u)\,\mathrm{e}^{-\frac{(u-2\pi n)^2}{4t}}\,du\right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-2\pi n}^{-2\pi n+2\pi} g(x-v-2\pi n)\,\mathrm{e}^{-\frac{v^2}{4t}}\,dv\right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-2\pi n}^{-2\pi n+2\pi} g(x-v)\,\mathrm{e}^{-\frac{v^2}{4t}}\,dv\right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x-v)\,\mathrm{e}^{-\frac{v^2}{4t}}\,dv \xrightarrow[t\to 0]{} g(x)\,,\end{aligned}$$

car g est continue et bornée sur $\mathbb{R}$, et que si l'on pose $p(v) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\,\mathrm{e}^{-v^2/4}$, alors p satisfait les conditions du Théorème III.1.9 et, avec les notations de ce théorème, $p_{\sqrt{t}}(v) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\,\mathrm{e}^{-\frac{v^2}{4t}}$; donc $(p_{\sqrt{t}})_{t>0}$ est une unité approchée pour la convolution des fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

De plus, on $|g * G_t(x)| \leqslant \|g\|_\infty \int_0^{2\pi} G_t(u)\,du = \|g\|_\infty$. En effet, $G_t = \sqrt{\frac{\pi}{t}}\,\varphi_{1/4t}$; donc $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G_t(u)\,du = \sqrt{\frac{\pi}{t}}\,\widehat{\varphi_{1/4t}}(0) = 1$, par le 2) b). La fonction constante $\|g\|_\infty \mathbb{1}$ étant intégrable sur $[0,2\pi]$, le Théorème de convergence dominée dit que $\|g * G_t - g\|_{L^1(0,2\pi)} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$.

Pour terminer, si $g \in L^1(\mathbb{T}) = L^1(0,2\pi)$, il existe, pour tout $\varepsilon > 0$ une fonction continue $g_\varepsilon \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de période 2π telle que $\|g - g_\varepsilon\|_{L^1(0,2\pi)} \leqslant \varepsilon$. Soit $t_\varepsilon > 0$ tel que, pour $0 < t \leqslant t_\varepsilon$, on ait $\|g_\varepsilon * G_t - g_\varepsilon\|_{L^1(0,2\pi)} \leqslant \varepsilon$. Alors, pour $0 < t \leqslant t_\varepsilon$, on a (en utilisant le 1) de l'Exercice 8), $\|g * G_t - g\|_1 \leqslant \|g - g_\varepsilon\|_1 \|G_t\|_1 + \|g - g_\varepsilon\|_1 \leqslant \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. En effet, G_t est positive par le a) ; donc $\|G_t\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G_t(u)\,du = 1$, comme on l'a vu juste au-dessus.

Remarque. L'utilisation de cette fonction G_t, et de ce qui s'appellera plus tard la convolution avec G_t, pour la résolution de l'équation de la chaleur a été faite pour la première fois par Poisson.

4) a) Pour tout $t > 0$, on a $|\widehat{f}(n)\,\mathrm{e}^{-n^2 t}\,\mathrm{e}^{inx}| \leqslant \|f\|_1 \mathrm{e}^{-tn^2}$, la série est absolument convergente.

Par définition de G_t, on a $\widehat{G_t}(n) = \mathrm{e}^{-n^2 t}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

D'autre part, si on pose $(\tau_x G_t)(u) = G_t(u-x)$, on a, puisque G_t est 2π-périodique :

$$\widehat{\tau_x G_t}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G_t(u-x)\,\mathrm{e}^{-inu}\,du = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G_t(v)\,\mathrm{e}^{-in(v+x)}\,du = \mathrm{e}^{-inx}\,\widehat{G_t}(n)\,.$$

Donc $u(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n)\,\overline{\widehat{\tau_x G_t}(n)}$ Par la formule de Parseval, on obtient :

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(u)\,\overline{(\tau_x G_t)(u)}\,du = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(u)\,\overline{G_t(u-x)}\,du\,,$$

d'où $u(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(u)\,G_t(x-u)\,du$. En posant $v = x - u$ et en utilisant la périodicité, on a aussi $u(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-v)\,G_t(v)\,dv$.

b) • Pour tout $a > 0$, on a $|\widehat{f}(n)\,\mathrm{e}^{-n^2 t}\,\mathrm{e}^{inx}| \leqslant \|f\|_1 \mathrm{e}^{-an^2}$; la série définissant u est donc normalement convergente sur $[a, +\infty[\times\mathbb{R}$. Il en résulte que u est continue sur $]0, +\infty[\times\mathbb{R}$.

D'autre part, il résulte du 3) b) que $u(t,x) \xrightarrow[t\to 0]{} f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Mais, en fait, comme $(f * G_t)(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-v)\,\mathrm{e}^{-\frac{v^2}{4t}}\,dv$, il résulte du Théorème III.1.9 qu'il y a convergence uniforme pour $x \in \mathbb{R}$, parce que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ (elle l'est sur $[0,2\pi]$ et est 2π-périodique). Il en résulte que u est continue sur $[0,+\infty[\times\mathbb{R}$. Pour cela, il suffit de montrer que u est continue en $(0,x_0)$ pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$. Rappelons que par définition $u(0,x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donnons-nous un $\varepsilon > 0$ arbitraire. La continuité de f permet de trouver un $\delta > 0$ tel que $|f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$ pour $|x - x_0| \leqslant \delta$. D'autre part, la convergence uniforme de $u(t,x)$ vers $f(x)$ quand t tend vers 0 donne un $t_\varepsilon > 0$ tel que $|u(t,x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$ pour $0 < t \leqslant t_\varepsilon$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors, pour $|x - x_0| \leqslant \delta$ et $0 < t \leqslant t_\varepsilon$, on a $|u(t,x) - u(0,x_0)| = |u(t,x) - f(x_0)| \leqslant |u(t,x) - f(x)| + |f(x) - f(x_0)| \leqslant 2\varepsilon$.

• Pour tout $a > 0$, on a les majorations $|\widehat{f}(n)\,(-n^2\,\mathrm{e}^{-n^2t})\,\mathrm{e}^{inx}| \leqslant \|f\|_1(n^2\,\mathrm{e}^{-an^2})$ et $|\widehat{f}(n)\,\mathrm{e}^{-n^2t})\,(in\,\mathrm{e}^{inx})| \leqslant \|f\|_1(n\,\mathrm{e}^{-an^2})$ par des séries convergentes ; donc u est continûment différentiable (elle a des dérivées partielles continues) sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ et l'on a :

$$\partial_1 u(t,x) = -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2 \widehat{f}(n)\,\mathrm{e}^{-n^2t}\,\mathrm{e}^{inx} \quad \text{et} \quad \partial_2 u(t,x) = i\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n\widehat{f}(n)\,\mathrm{e}^{-n^2t}\,\mathrm{e}^{inx}\,.$$

De même, pour tout $a > 0$, on a les majorations $|\widehat{f}(n)\,(n^4\,\mathrm{e}^{-n^2t})\,\mathrm{e}^{inx}| \leqslant \|f\|_1(n^4\,\mathrm{e}^{-an^2})$, $|\widehat{f}(n)\,(n^2\,\mathrm{e}^{-n^2t})\,(in\mathrm{e}^{inx})| \leqslant \|f\|_1(n^3\,\mathrm{e}^{-an^2})$ et $|\widehat{f}(n)\,\mathrm{e}^{-n^2t}\,(-n^2\mathrm{e}^{inx})| \leqslant \|f\|_1(n^2\,\mathrm{e}^{-an^2})$; donc u a des dérivées partielles secondes continues, de sorte qu'elle est deux fois continûment différentiable sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ et l'on a :

$$\partial_2^2 u(t,x) = -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2 \widehat{f}(n)\,\mathrm{e}^{-n^2t}\,\mathrm{e}^{inx} = \partial_1 u(t,x)\,.$$

5) a) La fonction v étant continûment dérivable sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$, la fonction E est continûment dérivable pour $t > 0$, et on peut dériver sous le signe intégral :

$$E'(t) = 2\int_0^{2\pi} [\partial_1 v(t,x)]\,v(t,x)\,dx\,.$$

Comme v vérifie l'équation de la chaleur, on a $\partial_1 v(t,x) = \partial_2^2 v(t,x)$; donc :

$$E'(t) = 2\int_0^{2\pi} [\partial_2^2 v(t,x)]\,v(t,x)\,dx\,.$$

En intégrant par parties, on obtient :

$$E'(t) = 2\left[[\partial_2 v(t,x)]\,v(t,x)\right]_0^{2\pi} - 2\int_0^{2\pi} [\partial_1 v(t,x)]^2\,dx\,.$$

Par périodicité, le terme tout intégré est nul ; donc $E'(t) = -2\int_0^{2\pi}[\partial_1 v(t,x)]^2\,dx \leqslant 0$. Il en résulte que E est décroissante sur $[0,+\infty[$.

b) Si $v(0,x) = 0$ pour tout $x \in [0,2\pi]$, on a $E(0) = 0$. Comme E est décroissante et positive, cela exige que $E(t) = 0$ pour tout $t \geqslant 0$. Ainsi, pour tout $t \geqslant 0$, $\int_0^{2\pi}[v(t,x)]^2\,dx = 0$. La fonction $x \mapsto [v(t,x)]^2$ étant continue et positive, cela entraîne que $v(t,x) = 0$ pour tout $x \in [0,2\pi]$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, par périodicité. Comme c'est vrai pour tout $t \geqslant 0$, on obtient que v est identiquement nulle.

c) Considérons deux solutions u_1 et u_2 du problème de la chaleur associé à f. Alors $v = u_1 - u_2$ vérifie les conditions (i) et (iii), et $v(0,x) = u_1(0,x) - u_2(0,x) = f(x) - f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par le b), $v = 0$, et donc $u_1 = u_2$.

XI.4. Exercices du Chapitre IV

Exercice 1

Posons $\Omega' = X \setminus \overline{\Omega}$ et $\Omega'_n = \Omega' \cup \Omega_n$. Les Ω_n étant ouverts dans l'ouvert Ω sont ouverts dans X. Comme Ω' est lui-même ouvert dans X, les Ω'_n sont aussi ouverts dans X. De plus, pour les adhérences dans X, on a $\overline{\Omega'_n} = \overline{\Omega'} \cup \overline{\Omega_n}$. Comme Ω_n est dense dans Ω, son adhérence dans X contient Ω, et donc $\overline{\Omega}$. Par ailleurs, $\overline{\Omega'}$ contient $\Omega' = X \setminus \overline{\Omega}$; donc $\overline{\Omega'_n} \supseteq (X \setminus \overline{\Omega}) \cup \overline{\Omega} = X$, c'est-à-dire que Ω'_n est dense dans X. Comme X est un espace de Baire, $\bigcap_{n\geqslant 1} \Omega'_n$ est dense dans X. Cela entraîne que $\Omega \cap \big(\bigcap_{n\geqslant 1} \Omega'_n\big)$ est dense dans Ω. Comme $\Omega \cap \big(\bigcap_{n\geqslant 1} \Omega'_n\big) = \bigcap_{n\geqslant 1} \Omega_n$, car $\Omega \cap (X \setminus \overline{\Omega}) = \emptyset$, on en déduit que Ω est un espace de Baire.

Exercice 2

1) D n'est pas continue car la convergence uniforme d'une suite de fonctions continûment dérivables (vers une fonction continûment dérivable) n'entraîne pas la convergence uniforme des dérivées (vers la dérivée de la limite). Par exemple, si $f_n(x) = x^n(1-x)$, alors $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers 0 sur $[0,1]$, mais $f'_n\big(\frac{n-1}{n+1}\big) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1/\mathrm{e}^2$.

2) Par contre le graphe de D est fermé, grâce au classique théorème de Weierstrass disant que si une suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ de fonctions continûment dérivables converge simplement (sur un intervalle) vers une fonction f et si la suite $(f'_n)_{n\geqslant 1}$ des dérivées converge uniformément (sur cet intervalle) vers une fonction g, alors f est continûment dérivable et $f' = g$. En particulier, si $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers $f \in \mathscr{C}^1([0,1])$ et $\big(D(f_n)\big)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers $g \in \mathscr{C}([0,1])$, alors $g = D(f)$.

3) Cela ne contredit pas le Théorème du graphe fermé parce que $\mathscr{C}^1([0,1])$ n'est pas complet pour la norme uniforme (ce qu'il est facile de voir – en fait ce qui précède montre la non complétude).

Exercice 3

Utilisons le *Théorème du graphe fermé*. Si $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ et $Tx_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$, on a, pour tout $z \in H$:
$$(z \mid y) = \lim_{n\to\infty} (z \mid Tx_n) = \lim_{n\to\infty} (Tz \mid x_n) = (Tz \mid x) = (z \mid Tx)\,;$$
donc $y = Tx$.

Exercice 4

Dire que $(e_n)_{n\geqslant 1}$ est une base algébrique de E signifie que $E = \bigcup_{n\geqslant 1} F_n$. Le sous-espace F_n étant de dimension finie, il est fermé. Comme E est complet, le Théorème de Baire assure qu'au moins un des F_n est d'intérieur non vide. Mais le seul sous-espace F d'intérieur non vide est E lui-même (si la boule de centre x_0 et de rayon $r > 0$ est contenue dans F, celle de centre 0 et de rayon r et aussi contenue dans F, par translation; par homothétie, tout vecteur de E est dans F). Donc $E = F_N$ pour un certain $N \geqslant 1$ et $\dim E = N$, contrairement à l'hypothèse.

Exercice 5

1) Pour tout $\mathbf{x} \in c_0$, on a $|\Phi_N(\mathbf{x})| \leqslant \big(\sum_{n=1}^N |a_n|\big) \|\mathbf{x}\|_\infty$; donc Φ_N est continue et $\|\Phi_N\| \leqslant \sum_{n=1}^N |a_n|$.

2) Pour tout $\mathbf{x} \in c_0$, on a, par hypothèse, $\Phi_N(\mathbf{x}) \xrightarrow[N\to\infty]{} L_{\mathbf{x}}$; le *Théorème de Banach-Steinhaus* (et son Corollaire IV.2.2) dit que $\sup_{N\geqslant 1} \|\Phi_N\| = K < +\infty$.

Pour tout $n \geqslant 1$, choisissons ε_n tel que $|\varepsilon_n| = 1$ et $\varepsilon_n a_n = |a_n|$ et considérons le vecteur $\mathbf{x}_n = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, 0, 0, \ldots)$. On a $\mathbf{x}_n \in c_0$ et $\|\mathbf{x}_n\|_\infty = 1$; donc $\sum_{n=1}^N |a_n| = \sum_{n=1}^N \varepsilon_n\, a_n = \Phi_N(\mathbf{x}_n) \leqslant \|\Phi_N\| \leqslant K$. Comme c'est vrai pour tout $N \geqslant 1$, il en résulte que $\sum_{n=1}^\infty |a_n| \leqslant K < +\infty$, c'est-à-dire que $\mathbf{a} \in \ell_1$.

Exercice 6

Il s'agit d'une application directe du *Théorème de Banach-Steinhaus*. Posons, pour tout $t \in K$, $\Lambda_t(x) = (Lx)(t)$. Alors $\Lambda_t \colon X \to \mathbb{K}$ est une forme linéaire continue et, pour tout $x \in X$, on a $\sup_{t\in K} |\Lambda_t(x)| = \sup_{t\in K} |(Lx)(t)| = \|Lx\|_\infty < +\infty$. On obtient donc, par le Théorème de Banach-Steinhaus, $\sup_{t\in K} \|\Lambda_t\| = C < +\infty$. Mais $\sup_{t\in K} \|\Lambda_t\| = \sup_{t\in K} \sup_{\|x\|\leqslant 1} |(Lx)(t)| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \sup_{t\in K} |(Lx)(t)| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|Lx\|_\infty$. Par conséquent $\sup_{\|x\|\leqslant 1} \|Lx\|_\infty = C < +\infty$, ce qui signifie que L est continue (et $\|L\| = C$).

Exercice 7

1) a) Écrivons $(Tz_n + Th \mid h) = \big(T(z_n+h) \mid z_n+h\big) - \big(T(z_n+h) \mid z_n\big)$. Par hypothèse, on a $\big(T(z_n+h) \mid z_n+h\big) \geqslant 0$ pour tout $n \geqslant 1$. D'autre part, $T(z_n+h) = Tz_n + Th \xrightarrow[n\to\infty]{} l + Th$; donc $\sup_{n\geqslant 1} \|T(z_n+h)\| = C < +\infty$; par conséquent $\big|\big(T(z_n+h) \mid z_n\big)\big| \leqslant \|T(z_n+h)\|\,\|z_n\| \leqslant C\,\|z_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Il en résulte que $(l \mid h) + (Th \mid h) = \lim_{n\to\infty}(Tz_n + Th \mid h) \geqslant 0$.

b) En remplaçant h par εh, avec $\varepsilon > 0$, on obtient $\varepsilon\,(l \mid h) + \varepsilon^2 (Th \mid h) \geqslant 0$. En divisant par ε, il vient $(l \mid h) + \varepsilon\,(Th \mid h) \geqslant 0$, d'où $(l \mid h) \geqslant 0$, en faisant tendre ε vers 0. Maintenant, en remplaçant h par $-h$, on a aussi $-(l \mid h) \geqslant 0$. Par conséquent $(l \mid h) = 0$. Comme c'est vrai pour tout $h \in H$, on obtient $l = 0$.

2) Il résulte du 1) que si $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ et $Tx_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$, alors, en prenant $z_n = x_n - x$, on a $y - Tx = 0$, soit $y = Tx$. Cela signifie que le graphe de T est fermé. Il résulte du *Théorème du graphe fermé* que T est continue.

Exercice 8

Cela résulte du *Théorème du graphe fermé*. En effet, supposons que l'on ait $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} f$ et $\varphi f_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} g$. On peut extraire une sous-suite $(f_{n_k})_{k\geqslant 1}$ qui converge presque partout vers f. Alors $\varphi f_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \varphi f$ presque partout. Comme $\varphi f_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} g$, on a *a fortiori* $\varphi f_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{L^2} g$. On peut alors extraire une sous-suite $(\varphi f_{n_{k_j}})_{j\geqslant 1}$ de $(\varphi f_{n_k})_{k\geqslant 1}$ qui converge presque partout vers g. Il en résulte que $g = \varphi f$ presque partout. Cela montre que le graphe de M_φ est fermé.

Exercice 9

1) On va utiliser le *Théorème du graphe fermé*. Par hypothèse, il existe une injection $j \colon f \in L^2(m) \mapsto j(f) = f \in L^1(m)$. Soit $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} f$ telles que $f_n = j(f_n) \xrightarrow[n\to\infty]{L^1} g$. Il existe alors une sous-suite $(f_{n_k})_{k\geqslant 1}$ convergeant presque partout vers f. Mais on a encore $f_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{L^1} g$; par conséquent, cette sous-suite a elle-même une sous-suite $(f_{n_{k_j}})_{j\geqslant 1}$ qui converge presque partout vers g. Il en résulte que $f = g$ presque partout. Autrement dit, $g = j(f)$. Le graphe de j est donc fermé, de sorte que j est continue. On a ainsi $\|f\|_{L^1} \leqslant C\,\|f\|_{L^2}$ pour toute $f \in L^2(m)$, avec $C = \|j\|$.

2) La mesure m étant σ-finie, il existe une suite croissante de parties mesurables S_n, de mesure finie, telles que $S = \bigcup_{n\geqslant 1} S_n$. Alors $\mathbb{1}_{S_n} \in L^2(m)$ et $m(S_n) = \|\mathbb{1}_{S_n}\|_{L^1} \leqslant C\,\|\mathbb{1}_{S_n}\|_{L^2} = \sqrt{m(S_n)}$; d'où $m(S_n) \leqslant C^2$. Alors $m(S) = \lim\!\uparrow_{n\to\infty} m(S_n) \leqslant C^2$ et la mesure m est finie.

Exercice 10

1) Le sous-espace X étant fermé dans $L^2(0,1)$, il est complet. Par hypothèse, on a une injection $j \colon f \in X \mapsto j(f) = f \in L^\infty(0,1)$. On va utiliser le *Théorème du graphe fermé* pour montrer que j est continue. Soit $f_n \in X$, $n \geqslant 1$, telles que $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} f$ et $j(f_n) = f_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^\infty} g$. Par définition de la norme essentielle uniforme, il existe, pour chaque $n \geqslant 1$, une partie négligeable $\mathcal{N}_n$ de $[0,1]$ telle que $|f_n(t) - g(t)| \leqslant \|f_n - g\|_\infty$ pour tout $t \in [0,1] \setminus \mathcal{N}_n$.

Soit $\mathcal{N} = \bigcup_{n\geqslant 1} \mathcal{N}_n$; c'est une partie négligeable et $|f_n(t) - g(t)| \leqslant \|f_n - g\|_\infty$ pour tout $n \geqslant 1$ et tout $t \in [0,1] \setminus \mathcal{N}$. Donc $f_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} g(t)$ pour tout $t \in [0,1] \setminus \mathcal{N}$. Par ailleurs, comme $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} f$, il existe une sous-suite $(f_{n_k})_{k\geqslant 1}$ convergeant presque partout vers f. Cela signifie que l'on a une partie négligeable $\mathcal{N}_0$ de $[0,1]$ telle que $f_{n_k}(t) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(t)$ pour tout $t \in [0,1] \setminus \mathcal{N}_0$. Il en résulte que $f(t) = g(t)$ pour tout $t \in [0,1] \setminus (\mathcal{N} \cup \mathcal{N}_0)$, et donc pour presque tout $t \in [0,1]$. Autrement dit, $g = j(f)$, et le graphe de j est fermé. L'injection j est donc continue et $\|f\|_\infty \leqslant C\,\|f\|_2$ pour toute $f \in X$, avec $C = \|j\|$.

2) a) Pour chaque $x \in \mathbb{C}^n$, on a $\|F_x\|_\infty \leqslant C\,\|F_x\|_2$. La suite $(f_1, \ldots, f_n)$ étant orthonormée, on a $\|F_x\|_2^2 = \sum_{j=1}^n |x_j|^2 = \|x\|_2^2$. Par définition de la norme supérieure essentielle, il existe donc une partie négligeable N_x de $[0,1]$ telle que $|F_x(t)| \leqslant C\,\|x\|_2$ pour tout $t \in [0,1] \setminus N_x$. Soit $N = \bigcup_{x\in D} N_x$. Comme D est dénombrable, N est négligeable, et l'on a $|F_x(t)| \leqslant C\,\|x\|_2$ pour tout $x \in D$ et tout $t \in [0,1] \setminus N$.

b) Maintenant, comme D est dense dans $\mathbb{C}^n$, pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, il existe une suite d'éléments $x^{(k)} \in D$ telle que $x^{(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} x$. Pour tout $t \in [0,1]$, on a alors $F_{x^{(k)}}(t) \xrightarrow[k\to\infty]{} F_x(t)$. Puisque $\|x^{(k)}\|_2 \xrightarrow[k\to\infty]{} \|x\|_2$, on obtient $|F_x(t)| \leqslant C\,\|x\|_2$ pour tout $t \in [0,1] \setminus N$.

3) Pour chaque $t \in [0,1] \setminus N$, choisissons, pour tout $j = 1, \ldots, n$, $x_j = |f_j(t)|^2/f_j(t)$ si $f_j(t) \neq 0$ et $x_j = 0$ si $f_j(t) = 0$. On a alors $|F_x(t)| = \sum_{j=1}^n |f_j(t)|^2 \leqslant C\,\|x\|_2$ et $\|x\|_2^2 = \sum_{j=1}^n |x_j|^2 = \sum_{j=1}^n |f_j(t)|^2$. On obtient donc $\sum_{j=1}^n |f_j(t)|^2 \leqslant C^2$.

4) Puisque N est négligeable, on obtient, en intégrant, $\sum_{j=1}^n \int_0^1 |f_j(t)|^2\,dt \leqslant C^2$. Mais les f_j sont de norme 1 ; on obtient par conséquent $n \leqslant C^2$. Ainsi le nombre de termes de toute suite de vecteurs orthonormés dans X est borné par C^2. Cela exige que X soit de dimension finie $\leqslant n \leqslant C^2$.[1]

Exercice 11

1) Soit $f_n \in X$ tels que $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f \in X$ et $Tf \xrightarrow[n\to\infty]{} g \in \mathscr{C}([0,1])$. Cela signifie que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers f et que $f_n' = Tf_n$ converge uniformément vers g. D'après un théorème classique de Weierstrass, il en résulte que f est continûment dérivable et que $g = f'$. Cela montre que le graphe de T est fermé.

2) Puisque X (fermé dans un espace complet) et $\mathscr{C}([0,1])$ sont des espaces de Banach, le *Théorème du graphe fermé* dit que l'application linéaire T est continue. Soit $N \geqslant 1$ un entier tel que $\|T\| < N$. Puisque $\|Tf\|_\infty \leqslant \|T\|\,\|f\|_\infty$ pour toute $f \in X$, on a bien $\|f'\|_\infty < N$ pour toute $f \in X$ telle que $\|f\|_\infty \leqslant 1$.

3) a) Si $S(f) = 0$, on a $f(x_0) = f(x_1) = \cdots = f(x_N) = 0$. Soit $t \in [0,1]$ tel que $|f(t)| = 1$. Il existe un $j \in \{0, \ldots, N-1\}$ tel que $x_j < t < x_{j+1}$ (t ne peut être l'un des x_i). D'après le *Théorème des accroissements finis*, il existe un ξ entre t et x_{j+1} tel que $f(x_{j+1}) - f(t) = (x_{j+1} - t)\,f'(\xi)$. Alors :

$$1 = |f(t)| = |f(x_{j+1} - f(t)| = (x_{j+1} - t)\,|f'(\xi)| \leqslant (x_{j+1} - t)\,\|f'\|_\infty \leqslant \frac{1}{N}\,\|f'\|_\infty < 1\,,$$

ce qui n'est pas possible.

b) S étant clairement linéaire, il résulte du a), par homogénéité, que, pour toute $f \neq 0$, on a $S(f) \neq 0$. Autrement dit, S est injective. Par conséquent $\dim X \leqslant N + 1$.

1. La preuve originelle de Grothendieck était différente : voir les remarques dans le corrigé de l'Exercice 30 du Chapitre VIII.

Exercice 12

On utilise le *Théorème de l'application ouverte* : si T est surjective, il existe $c > 0$ tel que, pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $y = Tx$ et $\|x\| \leqslant (1/c)\,\|y\|$. Alors :

$$\|T^*\psi\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |(T^*\psi)(x)| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |\psi(Tx)| \geqslant \sup_{\|y\|\leqslant c} |\psi(y)| = c \sup_{\|z\|\leqslant 1} |\psi(z)| = c\,\|\psi\|\,.$$

Cela prouve que T^* est un isomorphisme entre F^* et $T^*(F^*)$ (voir l'Exercice 10 du Chapitre I).

Exercice 13

1) S'il existait un isomorphisme T entre ℓ_∞ et un sous-espace (fermé) de H, on devrait avoir des constantes $0 < c < C < +\infty$ telles que $c\,\|x\|_\infty \leqslant \|Tx\| \leqslant C\,\|x\|_\infty$ pour tout $x \in \ell_\infty$. On aurait, grâce à l'identité du parallélogramme généralisée :

$$c^2\sum_{k=1}^{n}\|e_k\|_\infty^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n}\|T(e_k)\|^2 = \frac{1}{2^n}\sum_{\varepsilon_k=\pm 1}\Big\|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k T(e_k)\Big\|^2 \leqslant C^2\frac{1}{2^n}\sum_{\varepsilon_k=\pm 1}\Big\|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k e_k\Big\|_\infty^2\,;$$

mais $\|e_k\|_\infty = 1$ et $\big\|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k e_k\big\|_\infty = \max_{1\leqslant k\leqslant n}|\varepsilon_k| = 1$; on aurait donc $c^2 n \leqslant C^2$, ce qui n'est pas possible dès que n est assez grand.

2) Soit $T\colon H \to \ell_1$ une application linéaire continue surjective. Par le *Théorème de l'application ouverte*, il existe $c > 0$ tel que, pour tout $y \in \ell_1$, il existe $x \in H$ tel que $y = Tx$ et $\|x\| \leqslant (1/c)\,\|y\|$. Considérons les vecteurs e_k, comme dans le 1), mais vus cette fois-ci comme éléments de ℓ_1. Pour chaque $k \geqslant 1$, il existe $x_k \in H$ tel que $Tx_k = e_k$ et $\|x_k\| \leqslant (1/c)\,\|e_k\|_1 = 1/c$. Par l'identité du parallélogramme, on a, puisque $\big\|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k e_k\big\|_1 = n$:

$$n^2 = \frac{1}{2^n}\sum_{\varepsilon_k=\pm 1}\Big\|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k e_k\Big\|_1^2 \leqslant \frac{1}{2^n}\sum_{\varepsilon_k=\pm 1}\|T\|^2\Big\|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k x_k\Big\|^2 = \|T\|^2\sum_{k=1}^{n}\|x_k\|^2 \leqslant n\,\frac{\|T\|^2}{c^2}\,,$$

soit $n\,c^2 \leqslant \|T\|^2$, ce qui n'est pas possible dès que n est assez grand.

Remarque. On peut aussi déduire le 2) du 1). S'il existait une application linéaire surjective T de H sur ℓ_1, son adjoint T^* serait, d'après l'Exercice 12 un isomorphisme de $\ell_\infty = (\ell_1)^*$ sur $T^*(\ell_\infty) \subseteq H^*$; or ce n'est pas possible, en vertu du 1) (rappelons que H^* est (anti)-isomorphe à H et donc peut-être muni d'une structure d'espace de Hilbert (si φ_x et φ_y sont les formes linéaires associées à des éléments x et y de H par les formules $\varphi_x(z) = (z \mid x)$ et $\varphi_y(z) = (z \mid y)$, on pose $(\varphi_x \mid \varphi_y) = \overline{(x \mid y)}$).

Exercice 14

1) • Si $\|\mathcal{B}(x,y)\| \leqslant M\,\|x\|\,\|y\|$ pour tous $x \in X$, $y \in Y$, on a, grâce à la bilinéarité : $\|\mathcal{B}(x,y) - \mathcal{B}(x_0,y_0)\| \leqslant \|\mathcal{B}(x,y) - \mathcal{B}(x_0,y)\| + \|\mathcal{B}(x_0,y) - \mathcal{B}(x_0,y_0)\| = \|\mathcal{B}(x - x_0,y)\| + \|\mathcal{B}(x_0,y-y_0)\| \leqslant M\,\|x-x_0\|\,\|y\|+M\,\|x_0\|\,\|y-y_0\| \leqslant M\,\|x-x_0\|\,(\|y_0\|+1)+M\,\|x_0\|\,\|y-y_0\|$, si $\|y - y_0\| \leqslant 1$. D'où la continuité de $\mathcal{B}$.

• Supposons $\mathcal{B}$ continue. La continuité en $(0,0)$ donne un nombre $M > 0$ tel que $\|\mathcal{B}(x,y)\| \leqslant M$ si $\|x\| \leqslant 1$ et $\|y\| \leqslant 1$. Alors, pour tous $x \in X$, $y \in Y$, on a $\big\|\mathcal{B}\big(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}\big)\big\| \leqslant M$, d'où, par homogénéité, $\|\mathcal{B}(x,y)\| \leqslant M\,\|x\|\,\|y\|$.

2) Soit B_Y la boule unité de Y. Par hypothèse, les formes linéaires continues $\mathcal{B}^y\colon X \to Z$ sont telles que $\sup_{y\in B_Y}|\mathcal{B}^y(x)| = \sup_{y\in B_Y}|\mathcal{B}(x,y)| = \sup_{y\in B_Y}|\mathcal{B}_x(y)| = \|\mathcal{B}_x\| < +\infty$, pour tout $x \in X$. Le *Théorème de Banach-Steinhaus* dit qu'alors il existe une constante $M < \infty$ telle que $|\mathcal{B}^y(x)| \leqslant M$ pour tous $x \in B_X$ et tous $y \in B_Y$. Par homogénéité, on obtient $|\mathcal{B}(x,y)| \leqslant M\,\|x\|\,\|y\|$ pour tous $x \in X$ et tous $y \in Y$, c'est-à-dire, par le 1), la continuité de $\mathcal{B}$.

3) Il est clair que $\mathcal{B}$ est bilinéaire. Soit $y \in Y$. Pour chaque $x \in X$, on a $\lim_{n\to\infty}(\mathcal{B}^y)_n(x) = \lim_{n\to\infty}\mathcal{B}_n(x,y) = \mathcal{B}(x,y) = \mathcal{B}^y(x)$; le *Théorème de Banach-Steinhaus* dit que $\mathcal{B}^y$ est continue. De même, pour chaque $x \in X$, $\mathcal{B}_x$ est continue. Donc $\mathcal{B}$ est séparément continue. Il résulte du 2) que $\mathcal{B}$ est continue.

Exercice 15

1) C'est immédiat :

$$\begin{aligned}(S_n f)(x) &= \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)\,\mathrm{e}^{2\pi i k x} = \sum_{k=-n}^{n}\left[\int_0^1 f(t)\,\mathrm{e}^{-2\pi i k t}\,dt\right]\mathrm{e}^{2\pi i k x}\\ &= \int_0^1\left[\sum_{k=-n}^{n}\mathrm{e}^{2\pi i k(x-t)}\right] f(t)\,dt = \int_0^1 D_n(x-t)\,f(t)\,dt = (D_n * f)(x)\,.\end{aligned}$$

2) On a alors $|\sigma_n^x(f)| = |(S_n f)(x)| \leqslant \|D_n\|_1\|f\|_\infty$; donc la forme linéaire σ_n^x est continue et $\|\sigma_n^x\| \leqslant \|D_n\|_1$. Pour voir qu'il y a égalité, rappelons que $D_n(t) = \frac{\sin(2n+1)\pi t}{\sin \pi t}$ pour $0 < t < 1$; donc $D_n(t)$ s'annule en $t_{n,k} = \frac{k}{2n+1}$ pour $k = 1,\ldots,2n$ et garde un signe constant $(-1)^k$ sur les intervalles $]t_{n,k}, t_{n,k+1}[$ pour $k = 0,1,\ldots,2n$. Pour tout $j \geqslant 1$, posons $\varepsilon_{n,j} = \frac{1}{2^j+3n}$ et considérons la fonction continue $f_j\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de période 1 définie sur $[0,1[$ par :

$$f_j(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant t_{n,1} - \varepsilon_{n,j}\\ (-1)^k & \text{si } t_{n,k} + \varepsilon_{n,j} \leqslant t \leqslant t_{n,k+1} - \varepsilon_{n,j}\,,\ 1 \leqslant k \leqslant 2n-1\\ 1 & \text{si } t_{n,2n} + \varepsilon_{n,j} \leqslant t < 1\\ \text{affine} & \text{sur chaque intervalle restant de } [0,1[.\end{cases}$$

(on pourrait prendre $f_j = \frac{D_n}{|D_n|+2^{-j}}$).

On a $|f_j(t)| \leqslant 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$; donc $|D_n(x-t)\,f_j(t)| \leqslant |D_n(x-t)|$. D'autre part, $D_n(x-t)\,f_j(t) \xrightarrow[j\to\infty]{} |D_n(x-t)|$ pour tout $t \in [0,1]$. Comme la fonction $t \mapsto D_n(x-t)$ est continue sur $[0,1]$, elle y est intégrable; le Théorème de convergence dominée implique donc que :

$$\begin{aligned}\|\sigma_n^x\| \geqslant |\sigma_n^x(f_j)| &= \int_0^1 D_n(x-t)\,f_j(t)\,dt\\ &\xrightarrow[j\to\infty]{} \int_0^1 |D_n(x-t)|\,dt = \int_{x-1}^{x} |D_n(u)|\,du = \int_0^1 |D_n(u)|\,du\,,\end{aligned}$$

grâce à la préiodicité. Donc $\|\sigma_n^x\| \geqslant \|D_n\|_1$, d'où l'égalité.

3) On renvoie au 4) a) de l'Exercice 20 pour le calcul de l'inégalité $\|D_n\|_1 \geqslant \frac{4}{\pi^2}\log n$. Grâce au 2), cela montre que $\|\sigma_n^x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

4) Si la série de Fourier de f convergeait en x pour toute $f \in \mathscr{C}_\sim$, cela signifierait que la suite $(\sigma_n^x f)_{n\geqslant 0}$ converge pour toute $f \in \mathscr{C}_\sim$. Comme les σ_n^x sont des formes linéaires continues, on aurait $\sup_{n\geqslant 0}\|\sigma_n^x\| < +\infty$, par un corollaire du *Théorème de Banach-Steinhaus.* Comme on a vu au 3) que ce n'est pas le cas, il en résulte l'existence d'au moins une fonction de $\mathscr{C}_\sim$ dont la série de Fourier diverge au point x.

5) a) Reprenons la preuve du Théorème de Banach-Steinhaus, et posons :

$$\Phi_n = \{u \in E\,;\ \|T_i(u)\| \leqslant n\,, \forall i \in I\}\,.$$

Comme les T_i sont continues, $\Phi_n = \bigcap_{i\in I} T_i^{-1}[B_F(0,n)]$ est fermé pour tout $n \geqslant 1$.

On a deux cas.

(i) Soit il existe un $N \geqslant 1$ pour lequel Φ_N est d'intérieur non vide. La preuve du Théorème de Banach-Steinhaus montre alors que $\sup_{i\in I} \|T_i\| < +\infty$. Rappelons-la. Il existe $u_0 \in \Phi_N$ et $r_0 > 0$ tels que $B_E(u_0, r_0) \subseteq \Phi_N$. Alors, pour tout $u \in E$ de norme 1, $\widetilde{u} = u_0 + r_0 u \in \Phi_N$; ainsi, pour tout $i \in I$, on a $\|T_i(\widetilde{u})\| \leqslant N$, et donc $\|T_i(u)\| \leqslant \frac{1}{r_0} (\|T_i(u_0)\| + N) \leqslant \frac{2N}{r_0}$. Il en résulte que $\|T_i\| \leqslant 2N/r_0$ pour tout $i \in I$.

(ii) Soit Φ_n est d'intérieur vide pour tout $n \geqslant 1$. Cela signifie que les ouverts $\Omega_n = \Phi_n^c$ sont denses dans E. Par le *Théorème de Baire*, $G = \bigcap_{n\geqslant 1} \Omega_n$ est encore dense dans E. Par ailleurs, si $u \in G$, on a $u \in \Phi_n^c$ pour tout $n \geqslant 1$, c'est-à-dire qu'il existe $i \in I$ tel que $\|T_i(u)\| > n$, ou encore que $\sup_{i\in I} \|T_i(u)\| > n$. Comme c'est vrai pour tout $n \geqslant 1$, on obtient $\sup_{i\in I} \|T_i(u)\| = +\infty$, pour tout $u \in G$.

b) D'après la question 3), on n'est pas dans la première possibilité de l'alternative ; il existe donc un ensemble dense G_x, intersection dénombrable d'ouverts denses, pour lequel on a $\sup_{n\geqslant 0} |(S_n f)(x)| = \sup_{n\geqslant 0} |\sigma_n^x(f)| = +\infty$ pour toute $f \in G_x$; en particulier, pour toute $f \in G_x$, la suite $\big((S_n f)(x)\big)_{n\geqslant 0}$ ne converge pas, ce qui signifie que la série de Fourier de f ne converge pas en x.

c) Soit $\mathcal{D}$ une partie dénombrable dense de $[0,1]$ (par exemple $\mathcal{D} = \mathbb{Q} \cap [0,1]$) et $G = \bigcap_{x\in\mathcal{D}} G_x$. Chaque G_x étant intersection dénombrable d'ouverts denses, G est lui aussi intersection dénombrable d'ouverts denses. Il est donc dense, par le Théorème de Baire. De plus, la série de Fourier de f diverge en tout $x \in \mathcal{D}$, pour toute $f \in G$.

6) Comme au 1), on a $(S_n f)(x) = (D_n * f)(x)$ pour tout $x \in [0,1]$, et (voir l'Exercice 8 du Chapitre III), on a $\|S_n f\|_1 \leqslant \|D_n\|_1 \|f\|_1$. L'application linéaire $S_n \colon L^1 \to L^1$ est donc continue et de norme $\|S_n\| \leqslant \|D_n\|_1$. Mais, si F_j est le noyau de Fejér d'ordre j, on a $\|F_j\|_1 = 1$ et (*cf.* Exercice 8 du Chapitre III, 3)) $D_n * F_j \xrightarrow[j\to\infty]{L^1(0,1)} D_n$; par conséquent $\|D_n\|_1 \leqslant \liminf_{j\to\infty} \|D_n * F_j\|_1$. Comme $D_n * F_j = S_n(F_j)$, on a $\|S_n\| \geqslant \|S_n(F_j)\|_1$ pour tout $j \geqslant 0$, d'où $\|D_n\|_1 \leqslant \|S_n\|$.

Comme ci-dessus, puisque $\|D_n\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, il existe, par le 5) a), un ensemble G, intersection dénombrable d'ouverts denses, qui est dense dans $L^1(0,1)$ et tel que $\sup_{n\geqslant 1} \|S_n f\|_1 = +\infty$ pour toute $f \in G$. En particulier, la série de Fourier de toute fonction $f \in G$ diverge pour la norme de $L^1(0,1)$.

Remarque. Kolmogorov a construit en 1926 une fonction $f \in L^1(0,1)$ dont la série de Fourier diverge *partout*. Par contre, en généralisant le résultat de Carleson, Hunt a montré que la série de Fourier de toute $f \in L^p(0,1)$, avec $p > 1$ (et $p < \infty$), converge presque partout vers f (une autre preuve a été donnée par Fefferman en 1973 ; cette preuve est basée sur l'inégalité suivante, d'apparence anodine : si on se donne une fonction mesurable $N \colon [0,1] \to \mathbb{R}$, et que l'on pose $(Tf)(x) = \int_0^1 e^{iN(x)y} f(x-y)\, \frac{dy}{y}$, $x \in [0,1]$, alors, pour $1 \leqslant r < 2$, on a $\|Tf\|_r \leqslant C_r \|f\|_2$ pour toute $f \in L^2(0,1)$, la constante $C_r > 0$ *ne dépendant pas* de N. La preuve de cette inégalité est *très* compliquée).

Exercice 16

1) F_n est fermé car $f^{(n)}$ est continue. Par hypothèse, $\mathbb{C} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Par le *Théorème de Baire* ($\mathbb{C}$ est un espace métrique complet !), il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que F_p soit d'intérieur non vide.

2) Il existe donc $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r > 0$ tels que $D(z_0, r) \subseteq F_p$. Cela signifie que $f^{(p)}(z) = 0$ pour tout $z \in D(z_0, r)$. Comme $f^{(p)}$ est holomorphe dans $\mathbb{C}$, le principe des zéros isolés entraîne la nullité de $f^{(p)}$ sur $\mathbb{C}$. Il en résulte que f est un polynôme de degré $\leqslant p - 1$.

Exercice 17

1) a) Dire que f est continue en x s'écrit :

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists r > 0) \qquad u, v \in B_{ouv}(x, r) \Longrightarrow d\big(f(u), f(v)\big) \leqslant \varepsilon\,. \tag{C}$$

En effet, avec $v = x$, c'est la définition habituelle de la continuité en x. Inversement, si f est continue en x, il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, un $r > 0$ tel que $d\big(f(u), f(x)\big) \leqslant \varepsilon/2$ pour tout $u \in B_{ouv}(x,r)$; alors, si $u, v \in B_{ouv}(x,r)$, on a $d\big(f(u), f(v)\big) \leqslant d\big(f(u), f(x)\big) + d\big(f(v), f(x)\big) \leqslant \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. De façon équivalente, (C) s'écrit :

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists r > 0) \qquad \sup\{d\big(f(u), f(v)\big)\,;\ u, v \in B_{ouv}(x,r)\} \leqslant \varepsilon\,; \tag{C'}$$

donc $\omega_f(x) = \inf_{r>0} \sup\{d\big(f(u), f(v)\big)\,;\ u, v \in B_{ouv}(x,r)\} \leqslant \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, et ainsi $\omega_f(x) = 0$. Inversement, si $\omega_f(x) = 0$, on a $\omega_f(x) < \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$; il existe donc $r > 0$ tel que $\sup\{d\big(f(u), f(v)\big)\,;\ u, v \in B_{ouv}(x,r)\} < \varepsilon$; en particulier (C') a lieu et f est continue en x.

Le fait que O_ε soit ouvert résulte de ce que ω_f est *semi-continue supérieurement* ; mais on va le montrer directement. Soit $x_0 \in O_\varepsilon$. Soit ε' tel que $\omega_f(x_0) < \varepsilon' < \varepsilon$; par définition de la borne inférieure, il existe $r > 0$ tel que $\sup_{u,v \in B_{ouv}(x_0,r)} d\big(f(u), f(v)\big) < \varepsilon'$. Montrons que $B_{ouv}(x_0, r/2) \subseteq O_\varepsilon$, ce qui prouvera que O_ε est ouvert. Soit $x \in B_{ouv}(x_0, r/2)$. L'inégalité triangulaire montre que $B_{ouv}(x, r/2) \subseteq B_{ouv}(x_0, r)$; donc pour tous $u, v \in B_{ouv}(x, r/2)$, on a $d\big(f(u), f(v)\big) < \varepsilon'$, de sorte que $\omega_f(x) \leqslant \varepsilon' < \varepsilon$, *i.e.* $x \in O_\varepsilon$.

b) Il suffit de remarquer que :

$$C(f) = \{x \in X\,;\ \omega_f(x) = 0\} = \{x \in X\,;\ \omega_f(x) < 1/p\,, \forall p \geqslant 1\} = \bigcap_{p \geqslant 1} O_p\,.$$

2) a) Pour chaque $m \geqslant n$, $X_{n,m} = \{x \in X\,;\ d\big(f_n(x), f_m(x)\big) \leq \varepsilon\}$ est fermé dans X, comme image réciproque du fermé $[0, \varepsilon]$ de $\mathbb{R}$ par l'application continue :

$$x \in X \mapsto \big(f_n(x), f_m(x)\big) \in Y \times Y \overset{d}{\mapsto} d\big(f_n(x), f_m(x)\big) \in \mathbb{R}\,;$$

donc $X_n = \bigcap_{m \geqslant n} X_{n,m}$ est aussi fermé dans X, et $F_n = X \cap B_R$ est fermé dans B_R.

b) Soit $x \in B_R$. Comme la suite $\big(f_n(x)\big)_{n \geqslant 1}$ converge, elle est de Cauchy ; ainsi, pour le $\varepsilon > 0$ donné dans l'énoncé, il existe $N \geqslant 1$ tel que $d\big(f_n(x), f_m(x)\big) < \varepsilon$ pour tous $m \geqslant n \geqslant N$. Cela signifie que $x \in F_n$ pour $n \geqslant N$. Par conséquent, $x \in \bigcap_{k \geqslant 1} F_k$. Il en résulte que $B_R = \bigcap_{k \geqslant 1} F_k$. La boule B_R étant un ouvert de l'espace de Baire (car métrique complet) X est lui-même un espace de Baire (Exercice 1). Il existe donc $n_0 \geqslant 1$ tel que F_{n_0} soit d'intérieur non vide (intérieur pris *a priori* dans B_R ; mais comme B_R est ouvert dans X, cet intérieur est le même que celui pris dans X).

c) Il en résulte qu'il existe une boule ouverte (non vide), de centre $x_1 \in B_R$, contenue dans F_{n_0} ; quitte à diminuer le rayon, on a aussi une boule fermée $B(x_1, r)$, avec $r > 0$, contenue dans F_{n_0}. Elle est en particulier contenue dans B_R et pour tout $x \in B(x_1, r)$, on a, par définition de F_{n_0} : $d\big(f_{n_0}(x), f_m(x)\big) \leqslant \varepsilon$ pour $m \geqslant n_0$. En faisant tendre m vers l'infini, on obtient $d\big(f_{n_0}(x), f(x)\big) \leqslant \varepsilon$.

d) • Comme f_{n_0} est continue en x_1, il existe $s > 0$, que l'on peut prendre $\leqslant r$, tel que $d\big(f_{n_0}(y), f_{n_0}(x)\big) < \varepsilon$ pour $x \in B(x_1, s)$. Alors, comme $B(x_1, s) \subseteq B(x_1, r)$, on a $d\big(f_{n_0}(x), f(x)\big) < \varepsilon$ pour tout $x \in B(x_1, s)$; d'où :

$$d\big(f(x), f(x_1)\big) \leqslant d\big(f(x), f_{n_0}(x)\big) + d\big(f_{n_0}(x), f_{n_0}(x_1)\big) + d\big(f_{n_0}(x), f(x_1)\big) < 3\,\varepsilon$$

(noter que $x_1 \in B(x_1, s)$).

• Alors, pour tous $u, v \in B_{ouv}(x_1, s)$, on a :

$$d\big(f(u), f(v)\big) \leqslant d\big(f(u), f(x_1)\big) + d\big(f(v), f(x_1)\big) < 3\,\varepsilon + 3\,\varepsilon = 6\,\varepsilon.$$

• En prenant la borne supérieure pour $u, v \in B_{ouv}(x_1, s)$, on obtient $\omega_f(x_1) \leqslant 6\,\varepsilon < 7\varepsilon$.

• Ainsi $x_1 \in O_{7\varepsilon}$; comme il est dans B_R, par construction, on obtient $B_R \cap O_{7\varepsilon} \neq \emptyset$.

3) Soit Ω un ouvert non vide de X. Il existe $x_0 \in X$ et $R > 0$ tel que $B_R = B_{ouv}(x_0, R) \subseteq \Omega$. En appliquant le résultat du 2) avec $\varepsilon = \delta/7$, on obtient $B_R \cap O_\delta \neq \emptyset$. *A fortiori*, $\Omega \cap O_\delta \neq \emptyset$. Ceci étant vrai pour tout ouvert non vide Ω de X, cela signifie que O_δ est dense dans X.

4) Alors, puisque $C(f) = \bigcap_{p \geqslant 1} O_{1/p}$, par le 1) b), $C(f)$ est une intersection dénombrable d'ouverts (par le 1) a)) denses (par le 3)) dans X. Comme X est métrique complet, le *Théorème de Baire* dit que $C(f)$ est dense dans X.

Remarque. Notons que si F est un fermé non vide de X, c'est aussi un espace métrique complet. On peut donc appliquer le résultat de cet exercice à F au lieu de X ; en particulier, la restriction de f à F possède au moins un point de continuité (il y en a même un sous-ensemble dense).

Remarque. Ce que l'on appelle le *Théorème de Baire* (Théorème IV.1.1) n'était en fait pour lui qu'un lemme lui permettant de montrer le résultat de cet exercice. Il reviendra à Banach, et à son école, de montrer la puissance de ce théorème à travers les conséquences qu'il en tirera (Théorème de Banach-Steinhaus, Théorème de l'application ouverte, Théorème des isomorphismes, Théorème du graphe fermé, ...). Il faut toutefois noter que le résultat de cet exercice n'est que la *partie facile* du résulat complet de Baire ; la partie difficile étant la réciproque : si la restriction de $f\colon X \to Y$ à tout fermé non vide $F \subseteq X$ a un point de continuité, alors f est la limite simple d'une suite de fonctions continues.

5) On peut supposer l'intervalle I ouvert (cela ne retire qu'au plus deux points). Pour pouvoir définir proprement la suite $(f_n)_{n \geqslant 1}$, on doit prendre quelques précautions.

Il existe deux suites de réels, $(a_N)_{N \geqslant 1}$ décroisante et $(b_N)_{N \geqslant 1}$ croissante, telles que $I = \bigcup_{N \geqslant 1}]a_N, b_N[$. Soit $(\varepsilon_N)_{N \geqslant 1}$ une suite décroissante tendant vers 0. Considérons l'intervalle $J_N =]a_N + \varepsilon_N, b_N - \varepsilon_N[$. Pour $x \in \overline{J_N}$, on peut définir, pour $n \geqslant N$, $f_n(x) = \frac{f(x+\varepsilon_n) - f(x)}{\varepsilon_n}$. Les fonctions f_n sont continues sur $\overline{J_N}$ (car f l'est), et on a $f_n(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} f'(x)$ pour tout $x \in \overline{J_N}$. Comme $\overline{J_N}$ est un espace métrique complet, le 4) nous apprend que l'ensemble des points de continuité de f' dans $\overline{J_N}$ est dense dans $\overline{J_N}$. L'ensemble $C_N(f')$ des points de continuité de f' dans J_N est donc dense dans J_N. Comme les J_N sont ouverts dans I, les points de continuité de f' dans J_N sont des points de continuité de f' dans I. Comme $I = \bigcup_{N \geqslant 1} J_N$, on a donc $C(f') = \bigcup_{N \geqslant 1} C_N(f')$, et la densité de $C_N(f')$ dans J_N entraîne celle de $C(f')$ dans I.

Exercice 18

1) Montrons que $\mathcal{F}_\lambda = \mathcal{U}_\lambda^c$ est fermé. Soit $f_k \in \mathcal{F}_\lambda$ telles que $\|f_k - f\|_\infty \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$. Comme $f_k \in \mathcal{F}_\lambda$, il existe $x_k \in [0,1]$ tel que $|f_k(y) - f_k(x_k)| \leqslant \lambda\, |y - x_k|$ pour tout $y \in [0,1]$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer la suite $(x_k)_{k \geqslant 1}$ convergente. Soit $x = \lim_{k \to \infty} x_k$. On a, pour tout $y \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}|f(y) - f(x)| &\leqslant |f(y) - f_k(y)| + |f_k(y) - f_k(x_k)| + |f_k(x_k) - f_k(x)| \\ &\leqslant \|f - f_k\|_\infty + \lambda\, |y - x_k| + \lambda\, |x_k - x| \,;\end{aligned}$$

donc, en faisant tendre k vers l'infini, $|f(y) - f(x)| \leqslant \lambda\, |y - x|$, de sorte que $f \in \mathcal{F}_\lambda$.

2) Soit N un entier tel que $\varepsilon N > \mu$, et prenons $\phi(x) = \varepsilon \sin(2\pi N x)$. On a $\|\phi\|_\infty = \varepsilon$. D'autre part, la fonction ϕ prend toutes les valeurs comprises entre -1 et 1 dans tout intervalle de longueur $1/N$; donc, pour tout $x \in [0,1]$, il existe $y \in [0,1]$ tel que $|y - x| \leqslant 1/N$ et $|\sin(2\pi N y) - \sin(2\pi N x)| \geqslant 1$ (si $\sin(2\pi N x) \geqslant 0$, on prend y tel que $\sin(2\pi N y) = -1$, et si $\sin(2\pi N x) < 0$, on prend y tel que $\sin(2\pi N y) = 1$). Alors :

$$|\phi(y) - \phi(x)| \geqslant \varepsilon \geqslant \varepsilon N\, |y - x| > \mu\, |y - x| \,;$$

donc $\phi \in \mathcal{U}_\mu$.

3) Pour tout $x \in [0,1]$, soit $y \in [0,1]$ tel que $|\varphi(y) - \varphi(x)| > \mu\, |y - x|$; alors :

$$\begin{aligned} |[f(y) + \varphi(y)] - [f(x) + \varphi(x)]| &\geqslant |\varphi(y) - \varphi(x)| - |f(y) - f(x)| \\ &> \mu\,|y-x| - K\,|y-x| = (\mu - K)\,|y-x| \,; \end{aligned}$$

donc $f + \varphi \in \mathcal{U}_{\mu-K}$.

4) Soit $\lambda > 0$. Soit $g \in \mathscr{C}([0,1])$ et $\varepsilon > 0$. Il existe un polynôme p tel que $\|g - p\|_\infty \leqslant \varepsilon/2$. Le polynôme p étant continûment dérivable est lipschitzien sur $[0,1]$; soit K sa constante de lipschitzanité. Grâce au 2), on peut trouver une fonction ϕ telle que $\phi \in \mathcal{U}_{\lambda+K}$ et $\|\phi\|_\infty \leqslant \varepsilon/2$. Alors, grâce au 3), $p + \phi \in \mathcal{U}_\lambda$ et $\|g - (p+\phi)\|_\infty \leqslant \|g - p\|_\infty + \|\phi\|_\infty \leqslant \varepsilon$. Ainsi donc $\mathcal{U}_\lambda$ est dense dans $\mathscr{C}([0,1])$.

5) Les ouverts $\mathcal{U}_\lambda$ étant denses, le *Théorème de Baire* donne assure que $\bigcap_{n\geqslant 1} \mathcal{U}_n$ est dense dans $\mathscr{C}([0,1])$. Mais si $f \in \bigcap_{n\geqslant 1} \mathcal{U}_n$, f n'est dérivable en aucun $x \in [0,1]$. En effet, on a $\sup_{y\neq x} \left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| > n$ pour tout $n \geqslant 1$ et tout $x \in [0,1]$. Or si f était dérivable en x, on pourrait trouver, pour tout $\varepsilon > 0$ un $\delta > 0$ tel que $\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| \leqslant |f'(x)| + \varepsilon$ pour $|y - x| \leqslant \delta$. Comme pour $|y - x| > \delta$ on a $\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| \leqslant \frac{2\,\|f\|_\infty}{\delta}$, on obtiendrait $\sup_{y\neq x} \left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| < +\infty$.

Exercice 19

A. 1) Si $\|T\| \leqslant 1$, on a $\|T^n\| \leqslant \|T\|^n \leqslant 1$ pour tout $n \geqslant 0$, et donc $\|T^n x\| \leqslant \|x\|$, de sorte que $O(x,T) \subseteq B(0, \|x\|)$ ne peut être dense dans X (sauf si $X = \{0\}$! - ce que l'on avait implicitement exclu).

2) Si $x, Tx, T^2x, \ldots$ ne sont pas linéairement indépendants, c'est qu'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $x, Tx, \ldots, T^n x$ ne le sont pas. Soit N le plus petit entier $n \geqslant 1$ de cette sorte. Alors $x, Tx, \ldots, T^{N-1}x$ sont linéairement indépendants, alors que $x, Tx, \ldots, T^N x$ ne le soient pas ; donc $T^N x$ est combinaison linéaire de $x, Tx, \ldots, T^{N-1}x$. Si X_N est le sous-espace engendré par $x, Tx, \ldots, T^{N-1}x$, on obtient par récurrence que $T^n x \in X_N$ pour tout $n \geqslant N$: si $T^n x \in X_N$, alors $T^n x = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k T^k x$; d'où $T^{n+1} x = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k T^{k+1} x + \alpha_{N-1} T^N x \in X_N$. Par conséquent, $O(x,T) \subseteq X_N$ et ne peut être dense dans X, puisque X est de dimension infinie.

3) a) Par le même raisonnement qu'au 2), on obtient l'indépendance linéaire des vecteurs $x, Tx, \ldots, T^{d-1}x$; ils forment donc une base de X, puisque X est de dimension d.

b) Puisque $O(x,T)$ est dense dans X, il existe une suite strictement croissante d'entiers $(n_k)_{k\geqslant 1}$ telle que $T^{n_k} x \xrightarrow[k\to\infty]{} \alpha x$. Alors, pour tout $j \leqslant d-1$,

$$T^{n_k}(T^j x) = T^j(T^{n_k} x) \xrightarrow[k\to\infty]{} \alpha T^j x\,.$$

Comme $\{x, Tx, \ldots, T^{d-1}x\}$ est une base de X, il en résulte que $T^{n_k} z \xrightarrow[k\to\infty]{} \alpha z$ pour tout $z \in X$.

c) Soit $\beta \in \mathbb{R}_+$ et $\alpha = \beta^{1/d}$. Il résulte de la continuité du déterminant que l'on a dét$\,(T^{n_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{}$ dét$\,(\alpha Id_X) = \alpha^d$. Si on pose $a =$ dét$\,(T)$, on a donc $a^{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \alpha^d = \beta$. Cela montre que $\{a^n\,;\ n \geqslant 0\}$ est dense dans $\mathbb{R}_+$.

d) Comme le résultat du c) est évidemment faux, c'est que T n'a aucun vecteur hypercyclique. Par conséquent, il n'existe aucun opérateur hypercyclique sur X.

4) a) Puisque X est séparable, il existe une partie dénombrable $\Delta = \{x_n\,;\ n \geqslant\}$ qui est dense dans X. Considérons les boules ouvertes $B^\circ(x_n, 1/k)$ pour $n, k \geqslant 1$. Elles forment une famille dénombrable $(B_i)_{i\in I}$. Pour tout ouvert non vide $V \subseteq X$, il existe $a \in V$ et $r > 0$ tels que $B^\circ(a,r) \subseteq V$. Soit $k \geqslant 1$ tel que $2/k \leqslant r$. Par densité de Δ, il existe $n \geqslant 1$ tel que $\|x_n - a\| \leqslant 1/k$; alors $B^\circ(x_n, 1/k) \subseteq B^\circ(a,r) \subseteq V$.

b) Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\{x \in X\,;\ \ T^n x \in B_i\} = (T^n)^{-1}(B_i)$ est ouvert, par la continuité de T^n. Donc $G_i = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (T^n)^{-1}(B_i)$ est ouvert.

Par définition, $x \in HC(T)$ si et seulement si tout ouvert non vide V de X rencontre $O(x,T)$; en d'autres termes : pour tout ouvert non vide V, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $T^n x \in V$. En particulier, en prenant $V = B_i$, $x \in HC(T)$ entraîne que pour tout $i \in I$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $T^n x \in B_i$. Cela signifie que $x \in \bigcap_{i \in I} G_i$. Inversement, si $x \in \bigcap_{i\in I} G_i$, soit V un ouvert non vide de X. Par le a), il existe $i_0 \in I$ tel que $B_{i_0} \subseteq V$. Comme $x \in G_{i_0}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $T^n x \in B_{i_0}$, et *a fortiori* $T^n x \in V$.

5) a) Par hypothèse, $S^n(v) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ puisque $v \in Z$; donc $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u$. D'autre part, $T^n(x_n) = T^n(u) + T^n[S^n(v)]$. Bien que T et S ne commutent pas (en général), on a néanmoins $T^n S^n = Id_X$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; c'est clair par récurrence : si $T^n S^n = Id_X$, alors $T^{n+1}S^{n+1} = T(T^n S^n)S = T(Id_X)S = TS = Id_X$. Il en résulte que $T^n(x_n) = T^n(u) + v$, et donc que $T^n(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} v$, puisque $T^n(u) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, vu que $u \in Z$.

b) Soit U et V deux ouverts non vides de X. Comme Z est dense dans X, on a $U \cap Z \neq \emptyset$ et $V \cap Z \neq \emptyset$; choisissons $u \in U\cap Z$ et $v \in V \cap Z$, et formons $x_n = u + S^n v$ comme au a). Comme U est ouvert et $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u$, il existe $n_1 \geqslant 0$ tel que $x_n \in U$ pour $n \geqslant n_1$. D'autre part, comme V est ouvert et $T^n(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} v$, il existe $n_2 \geqslant 0$ tel que $T^n(x_n) \in V$ pour $n \geqslant n_2$. Alors, en prenant un entier $n \geqslant \max(n_1, n_2)$, on a $x = x_n \in U$ et $T^n x \in V$.

c) Soit U un ouvert non vide de X. Considérons la famille $(B_i)_{i\in I}$ de boules ouvertes du 4). Pour tout $i \in I$, en utilisant le b) pour $V = B_i$, on trouve $x \in U$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $T^n x \in B_i$; cela signifie que $x \in U \cap G_i$. En particulier $U \cap G_i \neq \emptyset$. Or on a vu au 4) b) que les ensembles G_i sont ouverts dans X ; donc les $U \cap G_i$ sont ouverts dans U. Comme U est un ouvert non vide de l'espace de Baire X, U est lui-même un espace de Baire (Exercice 1) ; par conséquent (puisque I est dénombrable), $\bigcap_{i\in I}(U \cap G_i) \neq \emptyset$. Mais on a vu au 4) b) que $HC(T) = \bigcap_{i\in I} G_i$; on obtient donc $U \cap HC(T) \neq \emptyset$. Ceci étant valable pour tout ouvert non vide U de X, cela signifie que $HC(T)$ est dense dans X, c'est-à-dire que T est hypercyclique.

Remarque. On a en fait montré dans c) que si T est tel que pour tout couple (U, V) d'ouverts non vides de X, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$, alors T est hypercyclique. La réciproque est vraie. En effet, pour tout entier p, on a $O(T^p x, T) = O(x, T) \setminus \{x, Tx, \ldots, T^{p-1}x\}$; donc si $x \in HC(T)$, $O(T^p x, T)$ est dense dans X. Alors, si T est hypercyclique, on peut trouver, pour tout couple (U, V) d'ouverts non vides de X, $x \in U \cap HC(T)$, puis $n \geqslant p$ tel que $T^n x \in V$. Cette équivalence est due à Birkhoff (1922).

B. 1) Dans tous les cas, $\|Bx\|_X \leqslant \|x\|_X$; donc B est continu et de norme $\leqslant 1$. en fait $\|B\|_X = 1$ car $B(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1$ et $\|\mathbf{e}_2\|_X = \|\mathbf{e}_1\|_X = 1$.

2) Il suffit de prendre pour $\widetilde{B}$ le shift défini par $\widetilde{B}(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$.

3) Prenons $S = \frac{1}{\lambda}\widetilde{B}$. Il est clair que la condition de Kitai (P_1) du **A.** 5) est vérifiée. D'autre part, si $\mathbf{x} = (x_n)_{n\geqslant 1} \in c_{00}$, avec $x_n = 0$ pour $n \geqslant N+1$, alors $(\lambda B)^k(\mathbf{x}) = (\lambda^k x_{k+1}, \lambda^k x_{k+2}, \ldots)$; donc $T^N(\mathbf{x}) = (\lambda B)^N(\mathbf{x}) = 0$. Comme $\|S^k(\mathbf{x})\|_X = \frac{1}{|\lambda|^k}\|\mathbf{x}\|_X \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, la condition (P_2) est aussi vérifiée. Le critère de Kitai montre donc que λB est hypercyclique.

Exercice 20

1) Comme $\lim_{m\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^m a_k\, e_k \right\| = \|x\|$, on a $\|x\| \leqslant |||x||| < +\infty$. Il est alors facile de voir que $|||\,.\,|||$ est une norme sur X, et elle est plus fine que $\|\,.\,\|$ par l'inégalité précédente.

2) a) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r_\varepsilon \geqslant 1$ tel que $|||x^{(r)} - x^{(r')}||| \leqslant \varepsilon$ pour $r, r' \geqslant r_\varepsilon$; donc :

$$r, r' \geqslant r_\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \left\| \sum_{j=1}^m \big(a_j^{(r)} - a_j^{(r')}\big)\, e_j \right\| \leqslant \varepsilon\,, \qquad \forall m \geqslant 1\,. \tag{$*$}$$

Comme, pour tout $k \geqslant 1$:

$$\left(a_k^{(r)} - a_k^{(r')}\right) e_k = \sum_{j=1}^{k} \left(a_j^{(r)} - a_j^{(r')}\right) e_j - \sum_{j=1}^{k-1} \left(a_j^{(r)} - a_j^{(r')}\right) e_j$$

(en convenant que la dernière somme est nulle pour $k = 1$), on obtient, en utilisant l'inégalité triangulaire :

$$r, r' \geqslant r_\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \left|a_k^{(r)} - a_k^{(r')}\right| \leqslant 2\,\varepsilon/\|e_k\|\,.$$

La suite $\left(a_k^{(r)}\right)_{r\geqslant 1}$ est donc de Cauchy dans $\mathbb{K}$, et par conséquent converge, pour tout $k \geqslant 1$.

b) En utilisant l'inégalité triangulaire, $(*)$ donne :

$$r, r' \geqslant r_\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \left\|\sum_{k=m}^{n} \left(a_k^{(r)} - a_k^{(r')}\right) e_k\right\| \leqslant 2\,\varepsilon\,, \qquad \forall n \geqslant m\,.$$

En faisant tendre r' vers l'infini, cela donne :

$$r \geqslant r_\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \left\|\sum_{k=m}^{n} \left(a_k^{(r)} - a_k\right) e_k\right\| \leqslant 2\,\varepsilon\,, \qquad \forall n \geqslant m\,.$$

Par ailleurs, comme la série $\sum_{k\geqslant 1} a_k^{(r_\varepsilon)} e_k$ converge dans $(X, \|\,.\,\|)$, il existe $m_\varepsilon \geqslant 1$ tel que :

$$n \geqslant m \geqslant m_\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \left\|\sum_{k=m}^{n} a_k^{(r_\varepsilon)} e_k\right\| \leqslant \varepsilon\,.$$

On obtient alors, pour $n \geqslant m \geqslant m_\varepsilon$:

$$\left\|\sum_{k=m}^{n} a_k e_k\right\| \leqslant \left\|\sum_{k=m}^{n} \left(a_k - a_k^{(r_\varepsilon)}\right) e_k\right\| + \left\|\sum_{k=m}^{n} a_k^{(r_\varepsilon)} e_k\right\| \leqslant 2\,\varepsilon + \varepsilon = 3\,\varepsilon\,.$$

Les sommes partielles de la série $\sum_{k\geqslant 1} a_k e_k$ sont donc de Cauchy dans $(X, \|\,.\,\|)$, et par conséquent, cette série converge dans $(X, \|\,.\,\|)$.

c) Posons $x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, e_k$ (la convergence étant pour la norme $\|\,.\,\|$). Il reste à voir que $x = \lim_{r\to\infty} x^{(r)}$ pour la norme $|||\,.\,|||$. Mais, en utilisant $(*)$:

$$r, r' \geqslant r_\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \left\|\sum_{k=1}^{m} \left(a_k^{(r)} - a_k^{(r')}\right) e_k\right\| \leqslant \varepsilon\,, \qquad \forall m \geqslant 1\,,$$

on obtient, en faisant tendre r' vers l'infini :

$$r \geqslant r_\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \left\|\sum_{k=1}^{m} \left(a_k^{(r)} - a_k\right) e_k\right\| \leqslant \varepsilon\,, \qquad \forall m \geqslant 1\,,$$

c'est-à-dire que $|||x^{(r)} - x||| \leqslant \varepsilon$ pour $r \geqslant r_\varepsilon$. Donc $|||x^{(r)} - x||| \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$.

3) On a deux normes complètes sur X dont l'une est plus fine que l'autre. Il résulte du *Théorème des isomorphismes de Banach* (et du Corollaire IV.3.3) que ces deux normes sont *équivalentes* ; il existe donc $K < +\infty$ telle que $|||x||| \leqslant K\,\|x\|$ pour tout $x \in X$. Cela signifie que $\sup_{n\geqslant 1} \|P_n(x)\| \leqslant K\,\|x\|$ pour tout $x \in X$, et par conséquent toutes les projections P_n sont continues sur X et $\sup_{n\geqslant 1} \|P_n\| \leqslant K$.

4) a) On a :

$$\|D_n\|_1 = \int_0^1 \left|\frac{\sin(2n+1)\pi t}{\sin \pi t}\right| dt = 2\int_0^{1/2} \left|\frac{\sin(2n+1)\pi t}{\sin \pi t}\right| dt$$
$$\geqslant 2\int_0^{1/2} \left|\frac{\sin(2n+1)\pi t}{\pi t}\right| dt\,.$$

En posant $u = (2n+1)t$, on obtient :

$$\|D_n\| \geqslant \frac{2}{\pi}\int_0^{n+\frac{1}{2}} \left|\frac{\sin \pi u}{u}\right| du \geqslant \frac{2}{\pi}\int_0^{n} \left|\frac{\sin \pi u}{u}\right| du$$
$$= \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1} \left|\frac{\sin \pi s}{s}\right| ds = \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1 \frac{\sin \pi s}{s+k}\, ds \geqslant \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\int_0^1 \sin \pi s\, ds$$
$$\geqslant 4\pi^2 \log n\,.$$

b) Considérons le système trigonométrique $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, où $e_n(t) = \mathrm{e}^{2\pi i n t}$, et ordonnons $\mathbb{Z}$ en une suite $(n_k)_{k\geqslant 1}$ de la façon suivante : $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$ (c'est-à-dire $n_1 = 0, n_{2j} = j$ et $n_{2j+1} = -j$ pour $j \geqslant 1$) . Comme $\widehat{f}(n) \xrightarrow[|n|\to\infty]{} 0$, la convergence de la série de Fourier $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)\, e_n$ (pour laquelle on utilise la convergence des sommes partielles symétriques) est équivalente à la convergence de la série $\sum_{k\geqslant 1} \widehat{f}(n_k)\, e_{n_k}$. La convergence de la série de Fourier de f vers f pour toute $f \in L^1(0,1)$ serait donc équivalente au fait que $(e_{n_k})_{k\geqslant 1}$ est une base de Schauder de $L^1(0,1)$. En effet, si $f = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, e_{n_k}$, on a, pour tout $j \in \mathbb{Z}$, lorsque $l \geqslant j$:

$$|\widehat{f}(n_j) - a_j| = \left|\int_0^1 \left[f(t) - \sum_{k=1}^{l} a_k\, \mathrm{e}^{2\pi i n_k t}\right] \mathrm{e}^{-2\pi n_j t}\, dt\right| \leqslant \int_0^1 \left|f(t) - \sum_{k=1}^{l} a_k\, \mathrm{e}^{2\pi i n_k t}\right| dt$$
$$= \left\|f - \sum_{k=1}^{l} a_k\, e_{n_k}\right\|_1 \xrightarrow[l\to\infty]{} 0\,;$$

donc $a_j = \widehat{f}(n_j)$; il y a donc unicité de l'écriture.

Il résulterait donc du 3) que les projections P_k associées à cette base devraient être uniformément bornées. En particulier, si l'on pose $S_n(f) = \sum_{j=-n}^{n} \widehat{f}(j)\, e_j$, comme $S_n = P_{2n+1}$, on devrait avoir $\sup_{n\geqslant 1} \|S_n\| < +\infty$. Mais (voir l'Exercice 8 du Chapitre III), on a $S_n(f) = D_n * f$; donc $\|S_n\| = \|D_n\|_1$. En effet, comme $\|D_n * f\|_1 \leqslant \|D_n\|_1 \|f\|_1$, on a $\|S_n\| \leqslant \|D_n\|_1$; mais, d'autre part, on sait (voir le 3) de l'Exercice 8 du Chapitre III) que, si F_j est le noyau de Fejér d'ordre j, on a $\|F_j\|_1 = 1$ et $D_n * F_j \xrightarrow[j\to\infty]{} D_n$ pour la norme L^1 ; donc $\|D_n\|_1 \leqslant \liminf_{j\to\infty} \|D_n * F_j\|_1 \leqslant \|S_n\|$. Mais ce n'est pas possible car $\|D_n\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

XI.5. Exercices du Chapitre V

Exercice 1

Pour toute mesure positive bornée μ, on a $|\mu| = \mu$ puisque $|\mu|$ est la plus petite mesure positive majorant μ ; on a donc $\|\mu\| = |\mu|(S) = \mu(S)$.

Inversement, supposons que l'on ait $|\mu|(S) = \mu(S)$. Alors, pour toute partie mesurable A, on a :

$$\mu(S) = \mu(A)+\mu(A^c) = |\mu(A)+\mu(A^c)| \leqslant |\mu(A)|+|\mu(A^c)| \leqslant |\mu|(A)+|\mu|(A^c) = |\mu|(S) = \mu(S)\,;$$

donc $\mu(A) + \mu(A^c) = |\mu(A)| + |\mu(A^c)|$, ce qui n'est possible que si $\mu(A)$ et $\mu(A^c)$ sont réels positifs. Donc μ est une mesure positive.

Exercice 2

Si $m(A) = 0$, alors $\mathbb{1}_A$ est négligeable ; en tant qu'élément de $L^\infty(m)$, on a donc $\mathbb{1}_A = 0$; par conséquent $\mu(A) = \Phi(\mathbb{1}_A) = \Phi(0) = 0$. La mesure μ est donc absolument continue par rapport à m et le *Théorème de Radon-Nikodým* dit qu'il existe $g \in L^1(m)$ telle que $\mu = g.m$, c'est-à-dire que pour toute partie mesurable $A \in \mathscr{T}$ on a :

$$\Phi(\mathbb{1}_A) = \mu(A) = \int_A g\, dm = \int_S \mathbb{1}_A g\, dm\,.$$

Par linéarité, on obtient $\Phi(f) = \int_S fg\, dm$ pour toute fonction étagée f. Ensuite, pour toute $f \in L^\infty(m)$ positive, il existe une suite de fonctions étagées positives f_n telles que $0 \leqslant f_n \leqslant f$ et convergeant uniformément vers f : si N est un entier $> \|f\|_\infty$, on divise l'intervalle $[0, N[$ en sous-intervalles contigus d'extrémités $c_j < c_{j+1}$, $0 \leqslant j \leqslant J$, de longueur $1/2^n$; on pose $f_n(x) = \sum_{j=0}^J c_j \mathbb{1}_{\{c_j \leqslant f < c_{j+1}\}}$ et l'on a $\|f_n - f\|_\infty \leqslant 1/2^n$. La convergence uniforme entraîne que $\Phi(f) = \lim_{n\to\infty} \Phi(f_n)$. Alors, puisque $|f_n g| \leqslant \|f\|_\infty |g|$, qui est m-intégrable, le Théorème de convergence dominée dit que :

$$\int_S fg\, dm = \lim_{n\to\infty} \int_S f_n g\, dm = \lim_{n\to\infty} \Phi(f_n) = \Phi(f)\,.$$

Finalement, cela reste vrai pour toute $f \in L^\infty(m)$ réelle, en écrivant $f = f^+ - f^-$, puis pour toute $f \in L^\infty(m)$ complexe, en prenant les parties réelle et imaginaire.

Exercice 3

1) Cela résulte directement du Théorème V.3.8 puisque la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ est σ-finie.

2) En utilisant le 1), le Théorème de Fubini donne :

$$\begin{aligned}\chi(f * g) = \int_{\mathbb{R}} (f * g)(x)\, \beta(x)\, dx &= \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(x-t)\, g(t)\, dt\right] \beta(x)\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(x-t)\, \beta(x)\, dx\right] g(t)\, dt\,,\end{aligned}$$

ce qui est justifié car :

$$\int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} |f(x-t)\, \beta(x)\, g(t)|\, dx\right] dt \leqslant \|\beta\|_\infty \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} |f(x-t)|\, dx\right] |g(t)|\, dt = \|\beta\|_\infty \|f\|_1 \|g\|_1\,.$$

Comme :

$$\chi(f * g) = \chi(f)\chi(g) = \left[\int_{\mathbb{R}} f(x)\, \beta(x)\, dx\right] \left[\int_{\mathbb{R}} g(t)\, \beta(t)\, dt\right],$$

on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(x-t)\, \beta(x)\, dx\right] g(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}} \left[\beta(t) \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \beta(x)\, dx\right] g(t)\, dt\,. \qquad (*)$$

La fonction définie par $\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)\, \beta(x)\, dx$ est mesurable, par le Théorème de Fubini (en fait $\varphi = \check{f} * \beta$, où $\check{f}(x) = f(-x)$), et $|\varphi(t)| \leqslant \|\beta\|_\infty \|f\|_1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$; donc $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R})$. D'autre part, si on pose $\psi(t) = \beta(t) \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \beta(x)\, dx$, on a aussi $\psi \in L^\infty(\mathbb{R})$. D'après $(*)$, u et v définissent la même forme linéaire continue sur $L^1(\mathbb{R})$. Donc $\varphi = \psi$ presque partout.

3) En posant $u = x - t$, on a $\int_{\mathbb{R}} f(x-t)\,\beta(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(u)\,\beta(u+t)\,du$. Le 2) nous dit alors que l'on a $\int_{\mathbb{R}} f(u)\,\beta(u+t)\,dt = \beta(t) \int_{\mathbb{R}} f(u)\,\beta(u)\,du$ pour presque tout $t \in \mathbb{R}$. Ceci étant vrai pour toute $f \in L^1(\mathbb{R})$, il en résulte que, pour presque tout $t \in \mathbb{R}$, les fonctions définies par $u \mapsto \beta(u+t)$ et $u \mapsto \beta(t)\,\beta(u)$, qui sont dans $L^\infty(\mathbb{R})$, définissent la même forme linéaire continue sur $L^1(\mathbb{R})$. Donc, pour presque tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\beta(u+t) = \beta(t)\,\beta(u)$ pour presque tout $u \in \mathbb{R}$.

3) Comme χ n'est pas nulle, il existe $f_0 \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\chi(f_0) \neq 0$. Il résulte du 2) que l'on a $\check{f}_0 * \beta = \chi(f_0)\,\beta$ presque partout. Comme $\check{f}_0 \in L^1(\mathbb{R})$ et $\beta \in L^\infty(\mathbb{R})$, leur produit de convolution est continu. Comme $\chi(f_0) \neq 0$, il en résulte que β est presque partout égale à un fonction continue.

5) Ayant supposé β continue, on a donc $\beta(u+t) = \beta(t)\,\beta(u)$ pour tous $u, t \in \mathbb{R}$. Ainsi β est un homomorphime continu du groupe $(\mathbb{R}, +)$ dans le groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$. Par conséquent, il existe $A \in \mathbb{C}$ tel que $\beta(t) = \mathrm{e}^{At}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Comme $|\beta(t)| = \mathrm{e}^{(\mathrm{Re}\,A)t}$, le fait que β soit bornée entraîne que la partie réelle de A est nulle. Il existe donc $y \in \mathbb{R}$ tel que $A = -2\pi i y$. On obtient ainsi $\chi(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\beta(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{e}^{-2\pi i x y}\,dx = \widehat{f}(y)$.

Exercice 4

1) a) Si $\|\mathbb{1}_{A_n} - f\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, il existe une *sous-suite* telle que $\mathbb{1}_{A_{n_k}} \xrightarrow[k\to\infty]{} f$ *presque partout.* Comme les fonctions $\mathbb{1}_{A_{n_k}}$ ne prennent que les valeurs 0 et 1, f ne prend, presque partout, que les valeurs 0 et 1.

b) Il en résulte que (l'image de) $\mathscr{B}$or est fermée dans $L^1(0,1)$ car, si l'on pose $A = \{x \in [0,1]\,;\ f(x) = 1\}$, on a $f = \mathbb{1}_A$ presque partout. Comme $L^1(0,1)$ est complet, il en est de même de $(\mathscr{B}\text{or}, d)$.

2) La propriété d'absolue continuité de l'intégrale s'écrit :

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists \delta > 0) \qquad \lambda(A) \leqslant \delta \quad \Longrightarrow \quad \int_A |f|\,d\lambda \leqslant \varepsilon\,.$$

Comme $d(A,B) = \lambda(A \Delta B)$, l'inégalité

$$\left| \int_A f(x)\,dx - \int_B f(x)\,dx \right| \leqslant \int_{A \setminus A\cap B} |f(x)|\,dx + \int_{B\setminus A\cap B} |f(x)|\,dx = \int_{A\Delta B} |f(x)|\,dx$$

donne $d(A,B) \leqslant \delta \Rightarrow |T_f(A) - T_f(B)| \leqslant \varepsilon$, ce qui est l'uniforme continuité de T_f.

3) a) On a $F_N = \bigcap_{n,p\geqslant N} T_{f_n - f_p}^{-1}([0,\varepsilon])$. Comme les fonctions $T_{f_n - f_p}$ sont continues, par le 2), les ensembles $T_{f_n - f_p}^{-1}([0,\varepsilon])$ sont fermés ; donc F_N est fermé, comme intersection de fermés.

b) Puisque la limite $\nu(A) = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)\,dx$ existe, la suite $\big(\int_A f_n(x)\,dx\big)_{n\geqslant 1}$ est en particulier une suite de Cauchy, de sorte que, pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$(\exists N = N_A \geqslant 1) \quad (\forall n, p \geqslant N) \qquad \left| \int_A f_n(x)\,dx - \int_A f_p(x)\,dx \right| \leqslant \varepsilon\,;$$

en d'autres termes, on a $A \in F_N$. Comme la limite existe pour tout $A \in \mathscr{B}$or, on obtient :

$$\bigcup_{N\geqslant 1} F_N = \mathscr{B}\text{or}\,.$$

Mais on a vu au 1) que $\mathscr{B}$or est un espace métrique complet ; le *Théorème de Baire* nous dit qu'il existe un $N_0 \geqslant 1$ tel que $\overset{\circ}{F}_{N_0} \neq \emptyset$. Cela signifie qu'il existe un $A_0 \in \mathscr{B}$or et un $r > 0$ tel que la boule de centre A_0 et de rayon r soit contenue dans F_{N_0} ; cela s'exprime par :

$$d(A, A_0) = \lambda(A \Delta A_0) \leqslant r \quad \Longrightarrow \quad \left| \int_A [f_n(x) - f_p(x)]\,dx \right| \leqslant \varepsilon\,, \quad \forall n, p \geqslant N_0\,.$$

c) On a $(A_0 \cup B)\Delta A_0 = [(A_0 \cup B) \cup A_0] \setminus [(A_0 \cup B) \cap A_0] = (A_0 \cup B) \setminus A_0 = B \setminus (A_0 \cap B) \subseteq B$; donc si $\lambda(B) \leqslant r$, on a *a fortiori* $\lambda\big((A_0 \cup B)\Delta A_0\big) \leqslant r$ et donc, par le a), $\big| \int_{A_0 \cup B} [f_n(x) - f_p(x)]\, dx\big| \leqslant \varepsilon$, pour tous $n, p \geqslant N_0$. De même, on a $(A_0 \cap B^c)\Delta A_0 = [(A_0 \cap B^c) \cup A_0] \setminus [(A_0 \cap B^c) \cap A_0] = A_0 \setminus (A_0 \cap B^c) = A_0 \cap B \subseteq B$; donc, par le a) encore, on a $\big| \int_{A_0 \cap B^c} [f_n(x) - f_p(x)]\, dx\big| \leqslant \varepsilon$, pour tous $n, p \geqslant N_0$.

Maintenant, comme $B = (A_0 \cup B) \setminus (A_0 \cap B^c)$, on obtient, pour $n, p \geqslant N_0$:

$$\begin{aligned}\left| \int_B [f_n(x) - f_p(x)]\, dx\right| &= \left| \int_{A_0 \cup B} [f_n(x) - f_p(x)]\, dx - \int_{A_0 \cap B^c} [f_n(x) - f_p(x)]\, dx\right| \\ &\leqslant \int_{A_0 \cup B} |f_n(x) - f_p(x)|\, dx + \int_{A_0 \cap B^c} |f_n(x) - f_p(x)|\, dx \\ &\leqslant \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon\,.\end{aligned}$$

Finalement, si $\lambda(B) \leqslant r$, on a $\lambda(B \cap \{f_n \leqslant f_p\}) \leqslant \lambda(B) \leqslant r$ et $\lambda(B \cap \{f_n > f_p\}) \leqslant \lambda(B) \leqslant r$; donc $\big| \int_{B \cap \{f_n > f_p\}} [f_n(x) - f_p(x)]\, dx\big| \leqslant 2\varepsilon$ et $\big| \int_{B \cap \{f_n \leqslant f_p\}} [f_n(x) - f_p(x)]\, dx\big| \leqslant 2\varepsilon$, de sorte que :

$$\begin{aligned}\int_B |f_n(x) - f_p(x)|\, dx &= \int_{B \cap \{f_n > f_p\}} [f_n(x) - f_p(x)]\, dx - \int_{B \cap \{f_n \leqslant f_p\}} [f_n(x) - f_p(x)]\, dx \\ &\leqslant \left| \int_{B \cap \{f_n > f_p\}} [f_n(x) - f_p(x)]\, dx\right| + \left| \int_{B \cap \{f_n \leqslant f_p\}} [f_n(x) - f_p(x)]\, dx\right| \\ &\leqslant 2\varepsilon + 2\varepsilon = 4\varepsilon\,.\end{aligned}$$

4) L'absolue continuité de l'intégrale de f_{N_0} nous donne un $r_0 > 0$ tel que $\int_B |f_{N_0}(x)|\, dx \leqslant \varepsilon$ si $\lambda(B) \leqslant r_0$. Prenons $\delta = \min(r, r_0)$; on a alors, pour $\lambda(B) \leqslant \delta$:

$$\int_B |f_n(x)|\, dx \leqslant \int_B |f_n(x) - f_{N_0}(x)|\, dx + \int_B |f_{N_0}(x)|\, dx \leqslant 4\varepsilon + \varepsilon = 5\varepsilon\,,$$

pour tout $n \geqslant N_0$.

5) a) On a bien sûr $\nu(\emptyset) = 0$ et il est clair aussi que ν est finiment additive car si $A \cap B = \emptyset$, on a :

$$\nu(A \cup B) = \lim_{n \to \infty} \int_{A \cup B} f_n(x)\, dx = \lim_{n \to \infty} \left[\int_A f_n(x)\, dx + \int_A f_n(x)\, dx\right] = \nu(A) + \nu(B)\,.$$

Maintenant, le 4) nous donne une convergence uniforme. En effet, soit une suite de parties $A_k \in \mathscr{B}or$ deux-à-deux disjointes, on choisit $K \geqslant 1$ tel que $\lambda\big(\bigcup_{k > K} A_k\big) \leqslant \delta$; par le 4), on a alors $\big| \int_{\bigcup_{k > K} A_k} f_n(x)\, dx\big| \leqslant 5\varepsilon$ pour tout $n \geqslant N_0$. Cela entraîne que $\big|\nu\big(\bigcup_{k > K} A_k\big)\big| = \lim_{n \to \infty} \big| \int_{\bigcup_{k > K} A_k} f_n(x)\, dx\big| \leqslant 5\varepsilon$. Par conséquent :

$$\begin{aligned}\left|\nu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) - [\nu(A_1) + \cdots + \nu(A_K)]\right| &= \left|\nu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) - \nu\Big(\bigcup_{k=1}^{K} A_k\Big)\right| = \left|\nu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \setminus \bigcup_{k=1}^{K} A_k\Big)\right| \\ &= \left|\nu\Big(\bigcup_{k > K} A_k\Big)\right| \leqslant 5\varepsilon\,,\end{aligned}$$

Comme c'est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient :

$$\nu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \lim_{K \to \infty} [\nu(A_1) + \cdots + \nu(A_K)] = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(A_k)\,.$$

Ainsi ν est une mesure réelle sur $[0,1]$.

Elle est absolument continue par rapport à λ. En effet, soit B un borélien tel que $\lambda(B) = 0$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on a, avec le $\delta > 0$ du 4), $|\nu(B)| = \lim_{n\to\infty} \left| \int_B f_n(x)\,dx \right| \leqslant \limsup_{n\to\infty} \int_B |f_n(x)|\,dx \leqslant 5\,\varepsilon$, ce qui entraîne $\nu(B) = 0$.

b) En vertu de l'absolue continuité de ν, le *Théorème de Radon-Nikodým* dit qu'il existe une fonction intégrable f telle que $\nu = f.\lambda$; cela signifie que $\int_A f(x)\,dx = \nu(A) = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)\,dx$ pour tout borélien A de $[0,1]$.

Exercice 5

1) a) Si $\mu = f.\lambda$ et $\nu = g.\lambda$, avec $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, on a, pour tout borélien $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}(\mu * \nu)(A) &= \iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(x+y) f(x) g(y)\,dx\,dy \\ &= \iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(u) f(u-v) g(v)\,du\,dv \\ &= \int_A \left(\int_{\mathbb{R}} f(u-v) g(v)\,dv \right) du = \int_A (f*g)(u)\,du\,.\end{aligned}$$

Pour la deuxième égalité, on a fait le changement de variable $(u,v) = (x+y, y)$, dont le jacobien vaut 1, et pour la troisième égalité, on a utilisé le Théorème de Fubini, ce qui était possible car :

$$\iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(u) |f(u-v)|\,|g(v)|\,du\,dv \leqslant \iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} |f(u-v)|\,|g(v)|\,du\,dv = \|f\|_1 \|g\|_1 < +\infty$$

(en utilisant le Théorème de Fubini-Tonelli). Donc $\mu * \nu$ a pour densité $f * g$.

b) Si $\mu \ll \lambda$, il existe, par le Théorème de Radon-Nikodým, $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\mu = f.\lambda$. Le même calcul qu'au a) montre qu'alors $\mu * \nu$ possède la densité :

$$u \longmapsto \int_{\mathbb{R}} f(u-v)\,d\nu(v)\,.$$

2) Soit $\mu = h.|\mu|$ et $\nu = k.|\nu|$ les décompositions polaires de μ et ν. Comme $|h| = 1$ $|\mu|$-*p.p.* et $|k| = 1$ $|\nu|$-*p.p.*, on a, pour tout borélien A de $\mathbb{R}$:

$$|(\mu * \nu)(A)| \leqslant \iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(x+y)\,d|\mu|(x)\,d|\nu|(y) = (|\mu| * |\nu|)(A)\,.$$

Comme $|\mu * \nu|$ est la plus petite mesure positive m telle que $|(\mu * \nu)(A)| \leqslant m(A)$ pour tout borélien A, il résulte du a) que $|\mu * \nu| \leqslant |\mu| * |\nu|$.

c) La continuité de l'application $(\mu, \nu) \mapsto \mu * \nu$ résulte alors de l'inégalité habituelle :

$$\|\mu * \nu - \mu_0 * \nu_0\| = \|\mu * (\nu - \nu_0) + (\mu - \mu_0) * \nu_0\| \leqslant \|\mu\|\,\|\nu - \nu_0\| + \|\mu - \mu_0\|\,\|\nu_0\|\,,$$

dont le terme de droite est $\leqslant (\|\mu_0\| + \varepsilon)\,\|\nu - \nu_0\| + \|\mu - \mu_0\|\,\|\nu_0\|$ si $\|\mu - \mu_0\| \leqslant \varepsilon$.

3) Soit $\mu_j \in F_n$ telles que $\mu_j \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \mu$. Par le 2) c), on a $\mu_j^{*n} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \mu^{*n}$.

Soit A un borélien tel que $\lambda(A) = 0$. Comme $\mu_j^{*n} \ll \lambda$, on a $\mu_j^{*n}(A) = 0$. Alors, comme :

$$|\mu_j^{*n}(A) - \mu^{*n}(A)| \leqslant |\mu_j^{*n} - \mu^{*n}|(\mathbb{R}) = \|\mu_j^{*n} - \mu^{*n}\| \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0\,,$$

on a $\mu^{*n}(A) = 0$. Donc $\mu^{*n} \ll \lambda$. Par conséquent F_n est fermé.

4) Si $0 \leqslant k \leqslant n$, alors $2n - k \geqslant n$ et donc $\nu^{*(2n-k)} \ll \lambda$, par le 1) b), puisque $\nu \in F_n$; il en résulte que $\mu^{*k} * \nu^{*(2n-k)} \ll \lambda$, par le 1) b) de nouveau. De même, si $n \leqslant n \leqslant 2n$, alors $\mu^{*k} \ll \lambda$ et $\mu^{*k} * \nu^{*(2n-k)} \ll \lambda$.

Alors :

$$(\mu-\nu)^{*(2n)} = \sum_{k=0}^{2n}(-1)^{2n-k}\mathrm{C}_{2n}^{k}\mu^{*k} * \nu^{*(2n-k)} \ll \lambda\,,$$

et donc $\mu - \nu \in F_{2n}$.

5) X étant fermé dans l'espace métrique complet $\mathscr{M}(\mathbb{R})$ est lui-même complet. Par hypothèse, on a :

$$X = \bigcup_{n\geqslant 1}(X\cap F_n)\,.$$

Comme les $X \cap F_n$ sont fermés dans X, le *Théorème de Baire* dit qu'il existe un $N \geqslant 1$ tel que F_N soit d'intérieur non vide : il existe $\mu_0 \in X$ et $R > 0$ tels que $B(\mu_0, r) \subseteq F_N$. Mais alors F_{2N} contient $B(0,r)$; en effet, si $\|\mu\| \leqslant r$, on a $\mu + \mu_0 \in B(\mu_0, r) \subseteq F_N$; et, comme $\mu_0 \in F_N$, on a $\mu = (\mu + \mu_0) - \mu_0 \in F_{2N}$, par 4).

Comme il est clair que $\nu \ll \lambda$ entraîne $a\nu \ll \lambda$ pour tout $a \in \mathbb{C}$, on a $B(0, ar) = a\,B(0,r) \subseteq F_{2N}$ pour tout $a > 0$, et donc $F_{2N} = X$. Ainsi $\mu^{*(2N)} \ll \lambda$ pour toute $\mu \in X$.

Exercice 6

1) a) Comme h est impaire, $\widehat{h}(0) = \int_{-1/2}^{1/2} h(t)\,dt = 0$. Pour $n \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\widehat{h}(n) &= \int_{-1/2}^{1/2} h(t)\,\mathrm{e}^{-2\pi int}\,dt = \int_0^{1/2} h(t)\,\mathrm{e}^{-2\pi int}\,dt - \int_0^{1/2} h(t)\,\mathrm{e}^{2\pi int}\,dt \\
&= -2i\int_0^{1/2} h(t)\,\sin(2\pi nt)\,dt \\
&= -2i\left[\int_0^{1/4} t\,\sin(2\pi nt)\,dt + \int_{1/4}^{1/2}\Big(\frac{1}{2}-t\Big)\,\sin(2\pi nt)\,dt\right] \\
&= -2i\left[\int_0^{1/4} t\,\sin(2\pi nt)\,dt + \int_0^{1/4} u\,(-1)^{n+1}\sin(2\pi inu)\,du\right] \\
&= -2i\left[1+(-1)^{n+1}\right]\int_0^{1/4} t\,\sin(2\pi nt)\,dt\,.
\end{aligned}$$

Comme $\int_0^{1/4} t\,\sin(2\pi nt)\,dt = \frac{1}{8\pi n}\,\cos\left(n\,\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{4\pi^2 n^2}\,\sin\left(n\,\frac{\pi}{2}\right)$ (en intégrant par parties), on obtient :

- si $n = 2k$ est pair, $\widehat{h}(2k) = 0$;
- si $n = 2k+1$ est impair, puisque $\cos(2k+1)\,\frac{\pi}{2} = 0$:

$$\widehat{h}(2k+1) = -2i \times 2 \times \frac{1}{4\pi^2(2k+1)^2}\,(-1)^k = \frac{(-1)^{k+1}i}{\pi^2(2k+1)^2}\,.$$

b) La mesure ν est bornée car :

$$|\nu|(\mathbb{R}) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n|\,\delta_n(\mathbb{R}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n| = \sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_{2k+1}| = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{\pi^2(2k+1)^2} < +\infty\,.$$

D'autre part, h étant continue et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, le *Théorème de Dirichlet* dit que $h(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\,\mathrm{e}^{2\pi int}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Comme

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\,\mathrm{e}^{2\pi int} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\bigg(\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{2\pi ixt}\,d\delta_n(x)\bigg) = \int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{2\pi ixt}\,d\nu(x),$$

on obtient bien $h(t) = \int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{2\pi ixt}\,d\nu(x)$.

2) a) Utilisons la décomposition polaire de μ : il existe une fonction u mesurable sur $\mathbb{R}$ telle que $|u| = 1$ et $\mu = u.|\mu|$. Ainsi $f(t) = \int_{-1/4}^{1/4} \mathrm{e}^{-2\pi it\theta}\, u(\theta)\, d|\mu|(\theta)$. On a, pour $|\theta| \leqslant 1/4$:

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\left[\mathrm{e}^{-2\pi it\theta} u(\theta)\right]\right| = \left| -2\pi i\theta\, \mathrm{e}^{-2\pi it\theta} u(\theta)\right| \leqslant 2\pi\, |\theta\, u(\theta)| \leqslant \frac{\pi}{2} \cdot$$

Comme $|\mu|$ est bornée, les fonctions constantes sont $|\mu|$-intégrables et on peut utiliser le Théorème de dérivation sous le signe intégral ; f est donc dérivable et :

$$\begin{aligned} f'(t) &= -2\pi i \int_{-1/4}^{1/4} \theta\, \mathrm{e}^{-2\pi it\theta} u(\theta)\, d|\mu|(\theta) = -2\pi i \int_{-1/4}^{1/4} h(\theta)\, \mathrm{e}^{-2\pi it\theta} u(\theta)\, d|\mu|(\theta) \\ &= -2\pi i \int_{-1/4}^{1/4} \left[\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{2\pi ix\theta}\, d\nu(x)\right] \mathrm{e}^{-2\pi it\theta} u(\theta)\, d|\mu|(\theta) \\ &= -2\pi i \int_{-1/4}^{1/4} \left[\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{2\pi ix\theta}\, v(x)\, d|\nu|(x)\right] \mathrm{e}^{-2\pi it\theta} u(\theta)\, d|\mu|(\theta)\,, \end{aligned}$$

où $\nu = v.|\nu|$ est la décomposition polaire de ν. Comme les mesures positives $|\mu|$ et $|\nu|$ sont bornées, ainsi que les fonctions que l'on intègre, on a :

$$\begin{aligned} &\int_{-1/4}^{1/4} \int_{\mathbb{R}} \left|\mathrm{e}^{2\pi i\theta x} \mathrm{e}^{-2\pi it\theta} v(x)\, u(\theta)\right| d|\nu|(x)\, d|\mu|(\theta) \\ &\qquad = \int_{-1/4}^{1/4} \int_{\mathbb{R}} d|\nu|(x)\, d|\mu|(\theta) = |\nu|(\mathbb{R})\, |\mu|([-1/4, 1/4]) < +\infty\,. \end{aligned}$$

On peut donc utiliser le Théorème de Fubini, et l'on obtient :

$$f'(t) = -2\pi i \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{-1/4}^{1/4} \mathrm{e}^{-2\pi i(t-x)\theta} u(\theta)\, d|\mu|(\theta)\right] v(x)\, d|\nu(x) = -2\pi i \int_{\mathbb{R}} f(t-x)\, d\nu(x)\,.$$

b) Pour $\mu_0 = \frac{1}{2i}\,(\delta_{1/4} - \delta_{-1/4})$, on a :

$$f_0(t) = \int_{-1/4}^{1/4} \mathrm{e}^{-2\pi it\theta}\, d\mu_0(\theta) = \frac{1}{2i}\left[\mathrm{e}^{-it\pi/2} - \mathrm{e}^{it\pi/2}\right] = -\sin\frac{\pi}{2}\,t\,;$$

alors, en utilisant le 1) :

$$\begin{aligned} -2\pi i \int_{\mathbb{R}} f_0(t-x)\, d\nu(x) &= -2\pi i \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^{k+1} i}{\pi^2(2k+1)^2}\left[-\sin\frac{\pi}{2}\left(t-(2k+1)\right)\right] \\ &= -\frac{2}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^{k+1}}{\pi^2(2k+1)^2}\,(-1)^{k+1}\cos\frac{\pi}{2}\,t = -\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}\,t\right)\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\pi^2(2k+1)^2}\cdot \end{aligned}$$

Comme $f_0'(t) = -\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}\,t$, on obtient, en utilisant le a) (en prenant $t = 0$, par exemple), que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{4}\cdot$

c) On obtient donc :

$$\begin{aligned} |f'(t)| &= \left| -2\pi i \int_{\mathbb{R}} f(t-x)\, d\nu(x)\right| \leqslant 2\pi\, \|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}} d|\nu|(x) = 2\pi\, \|f\|_\infty \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n| \\ &= 2\pi\, \|f\|_\infty \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\pi^2(2k+1)^2} = \frac{2}{\pi}\, \|f\|_\infty \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{2}{\pi}\, \|f\|_\infty \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi}{2}\, \|f\|_\infty\,. \end{aligned}$$

Exercice 7

1) a) Soit F l'adhérence de $\mathscr{P}$ dans $L^1(|\mu|)$. C'est un sous-espace vectoriel fermé et si $\mathscr{P}$ n'est pas dense dans $L^1(|\mu|)$, on a $F \neq L^1(|\mu|)$. Le *Théorème de Hahn-Banach* (voir Théorème VI.2.7 du Chapitre VI) dit alors qu'il existe une forme linéaire continue non nulle Φ sur $L^1(|\mu|)$ s'annulant sur F (donc sur $\mathscr{P}$). La mesure positive $|\mu|$ étant bornée, il existe, par le Théorème V.3.8, $\varphi \in L^\infty(|\mu|)$ telle que $\Phi(f) = \int_{\mathbb{T}} f\varphi\, d|\mu|$ pour toute $f \in L^1(|\mu|)$. La forme Φ n'étant pas nulle, φ non plus, et l'on a, puisque Φ s'annule sur $\mathscr{P}$, $\int_{\mathbb{T}} P\varphi\, d|\mu| = 0$ pour tout $P \in \mathscr{P}$.

b) Comme $\mathscr{P}$ est dense dans $\mathscr{C}(\mathbb{T})$, il existe, pour toute $f \in \mathscr{C}(\mathbb{T})$ une suite de polynômes trigonométriques P_n telle que $\|P_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Mais alors, puisque $\int_{\mathbb{T}} P_n\varphi\, d|\mu| = 0$ pour tout $n \geqslant 1$:

$$\left|\int_{\mathbb{T}} f\varphi\, d|\mu|\right| = \left|\int_{\mathbb{T}} (f - P_n)\, \varphi\, d|\mu|\right| \leqslant \|\mu\|\, \|\varphi\|_{L^\infty(|\mu|)} \|f - P_n\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,;$$

donc $\int_{\mathbb{T}} f\varphi\, d|\mu| = 0$.

c) Comme $|\mu|$ est une mesure positive bornée, on a $L^\infty(|\mu|) \subseteq L^1(|\mu|)$; donc $\varphi \in L^1(|\mu|)$. Par densité de $\mathscr{C}(\mathbb{T})$ dans $L^1(|\mu|)$, il existe des $f_n \in \mathscr{C}(\mathbb{T})$ telles que :

$$\int_{\mathbb{T}} |\overline{\varphi} - f_n|\, d|\mu| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Mais, comme $\int_{\mathbb{T}} f_n\varphi\, d|\mu| = 0$ pour tout $n \geqslant 1$, on obtient :

$$\int_{\mathbb{T}} |\varphi|^2\, d|\mu| = \int_{\mathbb{T}} (\overline{\varphi} - f_n)\, \varphi\, d|\mu| \leqslant \|\varphi\|_{L^\infty(|\mu|)} \|\overline{\varphi} - f_n\|_{L^1(|\mu|)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,;$$

donc $\varphi = 0$ $|\mu|$-presque partout, ce qui contredit le choix de φ. Il en résulte que $\mathscr{P}$ est dense dans $L^1(|\mu|)$.

2) Pour tout polynôme trigonométrique P s'écrivant $P(t) = \sum_{|k|\leqslant K} a_k e^{2\pi ikt}$, on a :

$$\int_{\mathbb{T}} P(t)\, e^{-2\pi int}\, d\mu(t) = \sum_{|k|\leqslant K} a_k \left[\int_{\mathbb{T}} e^{-2\pi i(n-k)t}\, d\mu(t)\right] = \sum_{|k|\leqslant K} a_k\, \widehat{\mu}(n-k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\,,$$

car, par l'hypothèse $\widehat{\mu}(l) \xrightarrow[l\to+\infty]{} 0$.

Maintenant, pour toute $f \in L^1(|\mu|)$, il existe, par le 1), pour tout $\varepsilon > 0$, un polynôme trigonométrique P tel que $\|f - P\|_{L^1(|\mu|)} \leqslant \varepsilon$. Alors :

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{T}} f(t)\, e^{-2\pi int}\, d\mu(t)\right| &\leqslant \left|\int_{\mathbb{T}} [f(t) - P(t)]\, e^{-2\pi int}\, d\mu(t)\right| + \left|\int_{\mathbb{T}} P(t)\, e^{-2\pi int}\, d\mu(t)\right| \\ &\leqslant \int_{\mathbb{T}} |f(t) - P(t)|\, d|\mu|(t) + \left|\int_{\mathbb{T}} P(t)\, e^{-2\pi int}\, d\mu(t)\right|\,;\end{aligned}$$

donc $\limsup_{n\to+\infty} \left|\int_{\mathbb{T}} f(t)\, e^{-2\pi int}\, d\mu(t)\right| \leqslant \varepsilon$. Comme c'est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient $\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{T}} f(t)\, e^{-2\pi int}\, d\mu(t) = 0$.

3) Soit $\mu = h.|\mu|$ la décomposition polaire de μ. Comme $|h| = 1$ $|\mu|$-presque partout, on a, d'une part, $|\mu| = \overline{h}.\mu$, et, d'autre part, $\overline{h} \in L^\infty(|\mu|) \subseteq L^1(|\mu|)$. Il résulte alors du 2) que :

$$\widehat{|\mu|}(n) = \int_{\mathbb{T}} e^{-2\pi int}\, d|\mu|(t) = \int_{\mathbb{T}} e^{-2\pi int}\, \overline{h(t)}\, d\mu(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\,.$$

4) Il résulte du 3) que $|\mu|$ vérifie la même hypothèse que μ ; on peut donc lui appliquer le résulat du 2) : $\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{T}} f(t)\, e^{-2\pi int}\, d|\mu|(t) = 0$ pour toute $f \in L^1(|\mu|)$. En prenant le

conjugué de cette intégrale, avec $f(t) = \overline{g(t)}$, on obtient, puisque $|\mu|$ est une mesure positive, $\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{T}} g(t)\, \mathrm{e}^{2\pi int}\, d|\mu|(t) = 0$ pour toute $g \in L^1(|\mu|)$. En particulier, avec $g = h$, la partie polaire de μ, on a :

$$\widehat{\mu}(-n) = \int_{\mathbb{T}} \mathrm{e}^{2\pi int}\, d\mu(t) = \int_{\mathbb{T}} \mathrm{e}^{2\pi int} h(t)\, d|\mu|(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\,;$$

en d'autres termes, $\lim_{n\to-\infty} \widehat{\mu}(n) = 0$.

Exercice 8

1) On a :

$$\sum_{|n|\leqslant p} \widehat{\mu}(n)\, \mathrm{e}^{2\pi int} = \sum_{|n|\leqslant p} \left[\int_{\mathbb{T}} \mathrm{e}^{-2\pi ins}\, d\mu(s)\right] \mathrm{e}^{2\pi int} = \int_{\mathbb{T}} \Big(\sum_{|n|\leqslant p} \mathrm{e}^{2\pi in(t-s)}\Big)\, d\mu(s)$$
$$= \int_{\mathbb{T}} D_p(t-s)\, d\mu(s)\,,$$

où $D_p(s) = \sum_{|n|\leqslant p} \mathrm{e}^{2\pi ins}$ est le *noyau de Dirichlet* d'ordre p. On sait que $D_p(0) = 2p+1$ et que pour $0 < s < 1$, on a $D_p(s) = \frac{\sin(2p+1)\pi s}{\sin \pi s}$; donc $\frac{1}{2p+1}\, D_n(t-s) \xrightarrow[p\to\infty]{} \mathbb{I}_{\{t\}}(s)$. Comme $\frac{1}{2p+1}\, |D_n(t-s)| \leqslant 1$ et que la mesure μ est bornée, le Théorème de convergence dominée dit que :

$$\frac{1}{2p+1} \int_{\mathbb{T}} D_p(t-s)\, d\mu(s) \xrightarrow[p\to\infty]{} \int_{\mathbb{T}} \mathbb{I}_{\{t\}}(s)\, d\mu(s) = \mu(\{t\})\,.$$

2) On utilise le Théorème de Fubini (ce qui est loisible car la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-2\pi inx}$ est bornée, donc $(\mu\otimes\nu)$-intégrable) :

$$\widehat{\mu * \nu}(n) = \int_{\mathbb{T}} \mathrm{e}^{-2\pi inx}\, d(\mu*\nu)(x) = \int_{\mathbb{T}\times\mathbb{T}} \mathrm{e}^{-2\pi in(s+t)}\, d(\mu\otimes\nu)(s,t)$$
$$= \left[\int_{\mathbb{T}} \mathrm{e}^{-2\pi ins}\, d\mu(s)\right] \left[\int_{\mathbb{T}} \mathrm{e}^{-2\pi int}\, d\nu(t)\right] = \widehat{\mu}(n)\, \widehat{\nu}(n)\,.$$

3) a) Considérons $A_n = \{a \in \mathbb{T}\,;\ |\mu(\{a\})| \geqslant 1/n\}$. Pour toute partie finie F de A_n, on a $1/n \leqslant |\mu(\{a\})| \leqslant |\mu|(\{a\})$ pour tout $a \in F$; donc

$$(\operatorname{card} F) \leqslant n \sum_{a\in F} |\mu|(\{a\}) = n\, |\mu|(F) \leqslant n\, |\mu|(\mathbb{T})\,;$$

il en résulte que A_n est fini (et $(\operatorname{card} A_n) \leqslant n\, |\mu|(\mathbb{T})$). Alors $A = \bigcup_{n\geqslant 1} A_n$ est dénombrable.

b) On a :

$$\widehat{\widetilde{\mu}}(n) = \int_{\mathbb{T}} \mathrm{e}^{-2\pi int}\, d\overline{\mu}(-t) = \int_{\mathbb{T}} \mathrm{e}^{2\pi ins}\, d\overline{\mu}(s) = \overline{\int_{\mathbb{T}} \mathrm{e}^{-2\pi ins}\, d\mu(s)} = \overline{\widehat{\mu}(n)}\,;$$

donc $\widehat{\mu * \widetilde{\mu}}(n) = \widehat{\mu}(n)\, \widehat{\widetilde{\mu}}(n) = |\widehat{\mu}(n)|^2$. D'autre part, en utilisant le Théorème de Fubini (ce qui est possible car la fonction $\mathbb{I}_{\{0\}}$ est bornée donc $(\mu\otimes\widetilde{\mu})$-intégrable) :

$$\mu * \widetilde{\mu}(\{0\}) = \int_{\mathbb{T}\times\mathbb{T}} \mathbb{I}_{\{0\}}(u+v)\, d(\mu\otimes\widetilde{\mu})(u,v) = \int_{\mathbb{T}} \left[\int_{\mathbb{T}} \mathbb{I}_{\{0\}}(u+v)\, d\widetilde{\mu}(v)\right] d\mu(u)$$
$$= \int_{\mathbb{T}} \overline{\mu(\{u\})}\, d\mu(u) = \int_{A} \overline{\mu(\{u\})}\, d\mu(u)$$
$$= \sum_{u\in A} \overline{\mu(\{u\})}\, \mu(\{u\}) = \sum_{u\in A} |\mu(\{u\})|^2 = \sum_{u\in\mathbb{T}} |\mu(\{u\})|^2$$

On obtient donc, en remplaçant dans le 1) μ par $\mu * \widetilde{\mu}$, et en y prenant $t = 0$:

$$\lim_{p\to\infty} \frac{1}{2p+1} \sum_{|n|\leqslant p} |\widehat{\mu}(n)|^2 = \sum_{t\in\mathbb{T}} |\mu(\{t\})|^2.$$

Exercice 9

1) Il suffit de montrer que δ_x est extrémal (cela entraîne que $-\delta_x$ l'est aussi). Supposons qu'il ne le soit pas. Il existe alors deux mesures μ et ν de norme 1 (voir le 3) de l'Exercice 24 du Chapitre I), distinctes de δ_x, telles que $\delta_x = (\mu + \nu)/2$.

Montrons qu'il existe un compact $K_0 \subseteq K$ tel que $x \notin K_0$ et $|\mu(K_0)| > 0$. Si ce n'était pas le cas, on aurait $|\mu|(L) = 0$ pour tout compact L ne contenant pas x ; on aurait donc $|\mu|[K \setminus B_{ouv}(x, 1/n)] = 0$ pour tout $n \geqslant 1$. Une réunion dénombrable d'ensembles négligeables l'étant encore, il en résulterait que $|\mu|(K \setminus \{x\}) = |\mu|\big(\bigcup_{n\geqslant 1}[K \setminus B_{ouv}(x, 1/n)]\big) = 0$, ce qui signifie que μ serait portée par $\{x\}$. On aurait donc $\mu = a\delta_x$, avec $a = \pm 1$ car $\|\mu\| = 1$. Il en résulterait que $\nu = b\delta_x$, avec $b = \pm 1$. La seule possibilité est $a = b = 1$, c'est-à-dire $\mu = \nu = \delta_x$, contrairement à l'hypothèse.

Soit alors $f \in \mathscr{C}(K)$, de norme $\|f\|_\infty = 1$, telle que $f(x) = 1$ et s'annulant sur K_0 (par exemple, $f(t) = \frac{\operatorname{dist}(t, K_0)}{d(t,x) + \operatorname{dist}(t, K_0)}$). On a :

$$1 = |f(x)| = \left| \int_K f\, d\delta_x \right| \leqslant \frac{1}{2}\left[\int_K |f|\, d|\mu| + \int_K |f|\, d|\nu| \right].$$

Or $\int_K |f|\, d|\nu| \leqslant \|f\|_\infty \|\nu\| = 1$; donc $\int_K |f|\, d|\mu| \geqslant 1$. D'autre part :

$$\int_K |f|\, d|\mu| = \int_{K\setminus K_0} |f|\, d|\mu| \leqslant \|f\|_\infty |\mu|(K \setminus K_0) = 1 - |\mu|(K_0) < 1.$$

On obtient une contradiction ; donc δ_x est extrémal.

Remarque. On peut en fait se passer de la métrisabilité de K, en remplaçant $\mathscr{M}(K)$ par son sous-espace $\mathscr{M}_r(K)$, formé des mesures *régulières* sur K. La régularité nous dit que $|\mu|(K\setminus\{x\}) = \sup\{|\mu|(L) ;\ L \subseteq K\setminus\{x\},\ L \text{ compact}\}$; d'où l'existence d'un compact $K_0 \subseteq K$ tel que $x \notin K_0$ et $|\mu(K_0)| > 0$ si μ n'est pas portée par $\{x\}$. D'autre part, l'existence de $f \in \mathscr{C}(K)$, de norme $\|f\|_\infty = 1$, telle que $f(x) = 1$ et s'annulant sur K_0, résulte du fait que tout espace compact est *complètement régulier* (ce qui n'est pas facile à montrer toutefois).

2) Comme μ est de norme 1, on a $|\mu|(A) \in [0, 1]$ pour tout borélien A. S'il existe un borélien A_0 tel que $0 < |\mu|(A_0) < 1$, on peut définit deux mesures μ_1 et μ_2 en posant $\mu_1(B) = \mu(B \cap A_0)/|\mu|(A_0)$ et $\mu_2(B) = \mu(B \cap A_0^c)/|\mu|(A_0^c)$ pour tout borélien B. Comme $|\mu_1(B)| \leqslant |\mu|(B \cap A_0)/|\mu|(A_0)$ pour tout borélien B, on a $|\mu_1|(B) \leqslant |\mu|(B \cap A_0)/|\mu|(A_0)$ (car $|\mu_1|$ est la plus petite mesure positive majorant μ_1). Donc $\|\mu_1\| \leqslant 1$. De même, $\|\mu_2\| \leqslant 1$. Comme, en posant $a = |\mu|(A_0)$, on a $\mu = a\mu_1 + (1-a)\mu_2$, il en résulte que μ n'est pas extrémale.

Donc $|\mu|(A) = 0$ ou 1 pour tout borélien A.

Comme K est compact, on peut le recouvrir par un nombre fini de boules fermées de rayon 1. Comme $|\mu|(K) = 1$, ces boules ne peuvent pas toutes être $|\mu|$-négligeables ; donc l'une de ces boules, notons-la B_1, doit être de mesure > 0. Mais alors, on doit avoir $|\mu|(B_1) = 1$. Maintenant, B_1 est aussi compacte, et peut donc être recouverte par un nombre fini de boules de rayon $1/2$ et l'une d'elles, notée B_2, doit donc vérifier $|\mu|(B_1 \cap B_2) = 1$. En itérant, on obtient une suite de boules fermées B_n de rayon $1/n$ telle que $|\mu|(B_1 \cap \ldots \cap B_n) = 1$ pour tout $n \geqslant 1$. Comme K est compact, il existe $x \in K$ tel que $\bigcap_{n\geqslant 0}(B_1 \cap \ldots \cap B_n) = \{x\}$. De plus, puisque la mesure positive $|\mu|$ est finie, $|\mu|(\{x\}) = \lim\downarrow_{n\to\infty} |\mu|(B_1 \cap \ldots \cap B_n) = 1$.

Ainsi donc μ est portée par $\{x\}$ (car $|\mu(\{x\}^c)| \leqslant |\mu|(\{x\}^c) = 0$) , de sorte que $\mu = a\delta_x$, avec $a \in \mathbb{R}$. Comme $\|\mu\| = 1$, on a forcément $a = \pm 1$, et donc $\mu = \pm\delta_x$.

Exercice 10

1) a) ν est une mesure réelle sur $(\Omega, \mathfrak{B})$ car si $(A_n)_{n\geqslant 1}$ est une famille dénombrable de parties mesurables (*événements*) deux-à-deux disjointes. Alors $\mathbb{1}_{\bigcup_{n\geqslant 1} A_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_n}$, de sorte que, par le Théorème de convergence dominée, on obtient :

$$\nu_X\Big(\bigcup_{n\geqslant 1} A_n\Big) = \int_\Omega \Big(\mathbb{1}_{\bigcup_{n\geqslant 1} A_n}\Big) X\, d\mathbb{P} = \int_\Omega \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_n}\Big) X\, d\mathbb{P}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \Big[\int_\Omega \mathbb{1}_{A_n} X\, d\mathbb{P}\Big] = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_X(A_n),$$

puisque, pour tout $N \geqslant 1$, on a $\big|\sum_{n=1}^{N} \mathbb{1}_{A_n} X\big| = \mathbb{1}_{\bigcup_{n=1}^{N} A_n}|X| \leqslant |X|$, qui est intégrable.

b) La mesure ν_X étant visiblement absolument continue par rapport à la mesure finie $\mathbb{P}$ (ou, pour être plus exact, par rapport à la mesure induite $\mathbb{P}_{|\mathfrak{B}}$ par $\mathbb{P}$ sur $\mathfrak{B}$) : $\mathbb{P}(B) = 0 \Rightarrow \nu_X(B) = 0$, il existe, par le *Théorème de Radon-Nikodým*, une unique variable aléatoire $Y \in L^1(\Omega, \mathfrak{B}, \mathbb{P})$ telle que $\int_B X\, d\mathbb{P} = \int_B Y\, d\mathbb{P}$ pour tout $B \in \mathfrak{B}$.

c) Il est clair, d'après l'unicité dans la définition de l'espérance conditionnelle, que $\mathbb{E}^{\mathfrak{B}}$ est linéaire. Montrons qu'elle est positive.

La *v.a.r.* $\mathbb{E}^{\mathfrak{B}}(X)$ étant $\mathfrak{B}$-mesurable, l'ensemble $B = \{\omega \in \Omega;\ [\mathbb{E}^{\mathfrak{B}}(X)](\omega) < 0\}$ est dans $\mathfrak{B}$; on a donc $\int_B X\, d\mathbb{P} = \int_B \mathbb{E}^{\mathfrak{B}}(X)\, d\mathbb{P}$. Mais $\int_B X\, d\mathbb{P} \geqslant 0$ car $X \geqslant 0$, alors que $\int_\Omega \mathbb{1}_B \mathbb{E}^{\mathfrak{B}}(X)\, d\mathbb{P} \leqslant 0$. Donc $\int_\Omega \mathbb{1}_B \mathbb{E}^{\mathfrak{B}}(X)\, d\mathbb{P} = \int_B \mathbb{E}^{\mathfrak{B}}(X)\, d\mathbb{P} = 0$, et, comme $\mathbb{1}_B \mathbb{E}^{\mathfrak{B}}(X) \leqslant 0$, on obtient $\mathbb{1}_B \mathbb{E}^{\mathfrak{B}}(X) = 0$ $\mathbb{P}$-presque partout (*presque sûrement*). Comme $X(\omega) < 0$ pour $\omega \in B$, on obtient $\mathbb{1}_B = 0$ presque sûrement, c'est-à-dire $\mathbb{P}(B) = 0$. Vu la définition de B, cela signifie que $\mathbb{E}^{\mathfrak{B}}(X) \geqslant 0$ presque sûrement.

d) $\mathbb{E}^{\mathfrak{B}}$ étant linéaire positive, on a $\mathbb{E}^{\mathfrak{B}}(X_1) \leqslant \mathbb{E}^{\mathfrak{B}}(X_2)$ si $X_1 \leqslant X_2$. Comme $|X| \pm X \geqslant 0$, on obtient $\mathbb{E}^{\mathfrak{B}}(|X|) \pm \mathbb{E}^{\mathfrak{B}}(X) = \mathbb{E}^{\mathfrak{B}}(|X| \pm X) \geqslant 0$; d'où $|\mathbb{E}^{\mathfrak{B}}(X)| \leqslant \mathbb{E}^{\mathfrak{B}}(|X|)$.

e) Il suffit de montrer que, pour toute $X \in L^1(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et toute $Z \in L^\infty(\Omega, \mathfrak{B}, \mathbb{P})$, on a :

$$\int_\Omega Z\, \mathbb{E}^{\mathfrak{B}}(X)\, d\mathbb{P} = \int_\Omega ZX\, d\mathbb{P} ;$$

en effet, en remplaçant dans cette égalité Z par $Z\mathbb{1}_B$, avec $B \in \mathfrak{B}$, qui est encore $\mathfrak{B}$-mesurable, on aura :

$$\int_B ZX\, d\mathbb{P} = \int_B Z\, \mathbb{E}^{\mathfrak{B}}(X)\, d\mathbb{P}.$$

Comme $Z\, \mathbb{E}^{\mathscr{B}}(X)$ est $\mathscr{B}$-mesurable, la définition (et l'unicité) de $\mathbb{E}^{\mathscr{B}}(ZX)$ donnera, comme on le veut, $\mathbb{E}^{\mathfrak{B}}(ZX) = Z\, \mathbb{E}^{\mathfrak{B}}(X)$.

Or l'égalité $\int_\Omega ZX\, d\mathbb{P} = \int_\Omega Z\, \mathbb{E}^{\mathfrak{B}}(X)\, d\mathbb{P}$ est vérifiée, par définition, pour les $Z = \mathbb{1}_B$, avec $B \in \mathfrak{B}$; elle est donc aussi valable pour les *v.a.r.* étagées $\mathfrak{B}$-mesurables. Par convergence dominée, puisque $X \in L^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$, elle est ensuite valable pour toutes les Z $\mathfrak{B}$-mesurables bornées.

2) a) Pour $p = 1$, cela résulte de la définition. Pour $p = \infty$, remarquons d'abord que l'on a $\mathbb{E}^{\mathfrak{B}}(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$; alors, comme $|X| \leqslant \|X\|_\infty \mathbb{1}$, on obtient $|\mathbb{E}^{\mathfrak{B}}(X)| \leqslant \mathbb{E}^{\mathfrak{B}}(|X|) \leqslant \mathbb{E}^{\mathfrak{B}}(\|X\|_\infty \mathbb{1}) = \|X\|_\infty \mathbb{E}^{\mathfrak{B}}(\mathbb{1}) = \|X\|_\infty \mathbb{1}$.

Pour $1 < p < \infty$, on va montrer que si $X \in L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$, alors $|\mathbb{E}^{\mathfrak{B}}(X)|^p \leqslant \mathbb{E}^{\mathfrak{B}}(|X|^p)$, ce qui entraîne clairement que $\mathbb{E}^{\mathfrak{B}}(X) \in L^p(\Omega, \mathfrak{B}, \mathbb{P})$.

Pour toute $Z \in L^\infty(\Omega, \mathfrak{B}, \mathbb{P})$ et tout $B \in \mathfrak{B}$, on a, grâce au 1) e) :

$$\int_\Omega |Z\mathbb{1}_B \mathbb{E}^{\mathfrak{B}}(X)|\, d\mathbb{P} = \int_\Omega |\mathbb{E}^{\mathfrak{B}}(Z\mathbb{1}_B X)|\, d\mathbb{P} \leqslant \int_\Omega \mathbb{E}^{\mathfrak{B}}(|Z\mathbb{1}_B X|)\, d\mathbb{P}$$
$$= \int_\Omega |Z\mathbb{1}_B X|\, d\mathbb{P} \leqslant \|Z\|_q \|\mathbb{1}_B X\|_p < +\infty\,,$$

q étant l'exposant conjugué de p ($\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$). Comme $L^\infty(\Omega, \mathfrak{B}, \mathbb{P})$ est dense dans $L^q(\Omega, \mathfrak{B}, \mathbb{P})$, cela signifie que l'application $Z \mapsto \int_\Omega Z\mathbb{1}_B \mathbb{E}^{\mathfrak{B}}(X)\, d\mathbb{P}$ est une forme linéaire continue sur $L^q(\Omega, \mathfrak{B}, \mathbb{P})$, de norme $\leqslant \|\mathbb{1}_B X\|_p$. Il en résulte que $\mathbb{1}_B \mathbb{E}^{\mathfrak{B}}(X) \in L^p(\Omega, \mathfrak{B}, \mathbb{P})$, et que l'on a $\|\mathbb{1}_B \mathbb{E}^{\mathfrak{B}}(X)\|_p \leqslant \|\mathbb{1}_B X\|_p$. Cela s'écrit aussi :

$$\int_B |\mathbb{E}^{\mathfrak{B}}(X)|^p\, d\mathbb{P} \leqslant \int_B |X|^p\, d\mathbb{P} = \int_B \mathbb{E}^{\mathfrak{B}}(|X|^p)\, d\mathbb{P}.$$

Mais, puisque c'est vrai pour tout $B \in \mathfrak{B}$, cela entraîne que $|\mathbb{E}^{\mathfrak{B}}(X)|^p \leqslant \mathbb{E}^{\mathfrak{B}}(|X|^p)$.

b) Bien sûr, toute variable aléatoire $\mathfrak{B}$-mesurable est $\mathfrak{A}$-mesurable ; on a donc :

$$\mathscr{L}^p(\Omega, \mathfrak{B}, \mathbb{P}_{|\mathfrak{B}}) \subseteq \mathscr{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})\,.$$

Néanmoins (*comme on disait de Gaston Julia*), si X est une variable aléatoire $\mathfrak{B}$-mesurable et si X' est une variable aléatoire ($\mathfrak{A}$-mesurable), qui est presque sûrement égale à X : $\mathbb{P}(X' \neq X) = 0$, alors il n'y a aucune raison que X' soit elle aussi $\mathfrak{B}$-mesurable (sauf si la tribu $\mathfrak{B}$ est $\mathbb{P}$-complète). On doit donc distinguer :

- la classe d'équivalence $\mathbb{P}$-*p.s.* sur $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ de X,

et :

- sa classe d'équivalence $\mathbb{P}_{|\mathfrak{B}}$-*p.s.* sur $(\Omega, \mathfrak{B}, \mathbb{P}_{|\mathfrak{B}})$,

la première étant en général strictement plus grande que la seconde. En d'autres termes, bien que, pour les espaces de *fonctions*, on ait $\mathscr{L}^p(\Omega, \mathfrak{B}, \mathbb{P}_{|\mathfrak{B}}) \subseteq \mathscr{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$, l'espace des *classes* de fonctions $\mathfrak{B}$-mesurables $L^p(\Omega, \mathfrak{B}, \mathbb{P}_{|\mathfrak{B}})$ n'est par contre *pas* contenu dans l'espace des classes de fonctions $\mathfrak{A}$-mesurables $L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$. Toutefois, l'application qui à la $\mathbb{P}_{|\mathfrak{B}}$-classe de X fait correspondre sa $\mathbb{P}$-classe est injective (la première est contenue dans la seconde), et définit une *isométrie* $J\colon L^p(\Omega, \mathfrak{B}, \mathbb{P}_{|\mathfrak{B}}) \to L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$. Par cette isométrie, on peut donc *identifier* isométriquement $L^p(\Omega, \mathfrak{B}, \mathbb{P}_{|\mathfrak{B}})$ à un sous-espace (fermé) de $L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$.

c) On a déjà vu que $\mathbb{E}^{\mathfrak{B}}$ est une application envoyant $L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ dans $L^p(\Omega, \mathfrak{B}, \mathbb{P})$. D'après la définition, il est clair que $\mathbb{E}^{\mathfrak{B}}(Z) = Z$ pour toute $Z \in L^1(\Omega, \mathfrak{B}, \mathbb{P})$; donc $\mathbb{E}^{\mathfrak{B}}$ est une projection de $L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ sur $L^p(\Omega, \mathfrak{B}, \mathbb{P})$. Elle est continue et de norme $\leqslant 1$ car l'inégalité $|\mathbb{E}^{\mathfrak{B}}(X)|^p \leqslant \mathbb{E}^{\mathfrak{B}}(|X|^p)$ montrée au a) pour $1 < p < \infty$ et au 1) d) pour $p = 1$, entraîne, en intégrant, que $\|\mathbb{E}^{\mathfrak{B}}(X)\|_p \leqslant \|X\|_p$; en effet, en prenant $B = \Omega$ dans la définition de l'espérance conditionnelle, on a $\int_\Omega \mathbb{E}^{\mathfrak{B}}(U)\, d\mathbb{P} = \int_\Omega U\, d\mathbb{P}$ pour toute $U \in L^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$. Pour $p = \infty$, on a vu au a) que $|\mathbb{E}^{\mathfrak{B}}(X)| \leqslant \|X\|_\infty \mathbb{1}$, ce qui donne $\|\mathbb{E}^{\mathfrak{B}}(X)\|_\infty \leqslant \|X\|_\infty$.

Pour finir, on a $\|\mathbb{E}^{\mathfrak{B}}\| = 1$ car $\mathbb{E}^{\mathfrak{B}}(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$.

d) Pour $p = 2$, on doit vérifier que $X - \mathbb{E}^{\mathfrak{B}}(X) \perp Z$ pour toute $Z \in L^2(\Omega, \mathfrak{B}, \mathbb{P})$. Mais, par le 1) e), on a :

$$\int_\Omega [X - \mathbb{E}^{\mathfrak{B}}(X)]\, Z\, d\mathbb{P} = \int_\Omega XZ\, d\mathbb{P} - \int_\Omega \mathbb{E}^{\mathfrak{B}}(X) Z\, d\mathbb{P} = 0$$

pour toute $Z \in L^\infty(\Omega, \mathfrak{B}, \mathbb{P})$. Par densité, cela reste vrai pour toute $Z \in L^2(\Omega, \mathfrak{B}, \mathbb{P})$.

3) Les *v.a.r.* $\mathfrak{B}$-mesurables sont celles qui sont *constantes sur chaque* B_n. Si a_n désigne cette constante, on a $\mathbb{E}^{\mathfrak{B}}(X) = \sum_{n=1}^\infty a_n\, \mathbb{1}_{B_n}$; donc :

$$\int_{B_n} X\, d\mathbb{P} = \int_{B_n} \mathbb{E}^{\mathfrak{B}}(X)\, d\mathbb{P} = \int_{B_n} a_n\, d\mathbb{P} = a_n \mathbb{P}(B_n)\,,$$

de sorte que $\mathbb{E}^{\mathscr{B}}(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{\mathbb{P}(B_n)} \int_{B_n} X \, d\mathbb{P}\Big) \mathbb{1}_{B_n}$.

Si $Z = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, \mathbb{1}_{B_n} \in L^p(\Omega, \mathfrak{B}, \mathbb{P})$, on a, puisque les B_n sont deux-à-deux disjoints :

$$\|Z\|_p^p = \int_\Omega \Big| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, \mathbb{1}_{B_n} \Big|^p d\mathbb{P} = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \, \mathbb{P}(B_n) \,,$$

pour $1 \leqslant p < \infty$, et $\|Z\|_\infty = \sup_{n \geqslant 1} |a_n|$ pour $p = \infty$. On peut définir $J \colon \ell_p \to L^p(\Omega, \mathfrak{B}, \mathbb{P})$ par $J\big((a_n)_{n\geqslant 1}\big) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n [\mathbb{P}(B_n)]^{-1/p} \mathbb{1}_{B_n}$ pour $1 \leqslant p < \infty$ et $J\big((a_n)_{n\geqslant 1}\big) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathbb{1}_{B_n}$ pour $p = \infty$. On obtient un isomorphisme isométrique de ℓ_p sur $L^p(\Omega, \mathfrak{B}, \mathbb{P})$, qui est complémenté dans $L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ par une projection de norme 1.

4) a) Dire que ν est nulle sur $\mathfrak{B}_\infty$ équivaut à dire que $\nu^+ = \nu^-$ sur $\mathfrak{B}_\infty$. Par hypothèse, $\mathfrak{B}_\infty$ engendre $\mathfrak{A}$. De plus, $\mathfrak{B}_\infty$ est stable par intersection finie : si $B_1, \ldots, B_n \in \mathfrak{B}_\infty$, il existe $N \geqslant 1$ tel que $B_1, \ldots, B_n \in \mathfrak{B}_N$; comme $\mathfrak{B}_N$ est une tribu, $B_1 \cap \ldots \cap B_n \in \mathfrak{B}_N$, d'où $B_1 \cap \ldots \cap B_n \in \mathfrak{B}_\infty$. Les mesures positives ν^+ et ν^- étant bornées et égales sur $\mathfrak{B}_\infty$, le *Théorème d'unicité des mesures* affirme que $\nu^+ = \nu^-$ sur $\mathfrak{A}$; donc $\nu = 0$.

D'après le Corollaire VI.2.9 du Chapitre VI, il s'agit de montrer que toute forme linéaire continue sur $L^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ qui s'annule sur V est nulle partout. Une telle forme linéaire est donnée par une fonction $\varphi \in L^\infty(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$, et puisqu'elle s'annule sur V, on a $\int_\Omega \varphi \, \mathbb{1}_A \, d\mathbb{P} = 0$ pour tout $A \in \mathfrak{B}_n$, pour tout $n \geqslant 1$. Cela signifie que la mesure $\nu = \varphi.\mathbb{P}$ de densité φ par rapport à $\mathbb{P}$ est nulle sur $\mathfrak{B}_\infty$. D'après la première partie de la question, on obtient $\nu = 0$, c'est-à-dire $\varphi = 0$. Ainsi V est bien dense dans $L^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$.

b) Pour tout $\varepsilon > 0$, la densité de V dans $L^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ permet de trouver $n_0 \geqslant 1$ et $Z \in L^1(\Omega, \mathfrak{B}_{n_0}, \mathbb{P})$ tels que $\|X - Z\|_1 \leqslant \varepsilon/2$. Notons que pour $n \geqslant n_0$, on a $\mathbb{E}^{\mathfrak{B}_n}(Z) = Z$ car Z est $\mathfrak{B}_{n_0}$-mesurable, donc $\mathfrak{B}_n$-mesurable, puisque $\mathfrak{B}_{n_0} \subseteq \mathfrak{B}_n$. Alors, pour $n \geqslant n_0$, on a, puisque $\mathbb{E}^{\mathfrak{B}_n}$ est linéaire continue, de norme 1 :

$$\|\mathbb{E}^{\mathfrak{B}_n}(X) - X\|_1 \leqslant \|\mathbb{E}^{\mathfrak{B}_n}(X) - \mathbb{E}^{\mathfrak{B}_n}(Z)\|_1 + \|Z - X\|_1 \leqslant 2\,\|Z - X\|_1 \leqslant \varepsilon \,,$$

ce qui prouve que $\|\mathbb{E}^{\mathfrak{B}_n}(X) - X\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

XI.6. Exercices du Chapitre VI

Exercice 1

1) Si φ est une forme linéaire continue, son noyau $\ker\varphi = \varphi^{-1}(\{0\})$ est évidemment fermé.

Inversement, supposons que le noyau de la forme linéaire φ soit fermé. Si $\varphi = 0$, elle est continue. Sinon, son noyau est un hyperplan de E ; il existe donc $u_0 \in E$ tel que $E = (\ker\varphi) \oplus \mathbb{K}\,u_0$. Comme $\varphi(u_0) \neq 0$, on peut supposer, en multipliant u_0 par une constante non nulle, que $\varphi(u_0) = 1$. De plus, φ étant linéaire, il suffit de montrer qu'elle est continue en 0. Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite convergeant vers 0. On peut écrire $x_n = v_n + a_n u_0$, avec $v_n \in \ker\varphi$ et $a_n \in \mathbb{K}$, et l'on a $\varphi(x_n) = a_n$. Il suffit donc de montrer que $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Supposons que cela ne soit pas le cas ; il existe alors $\varepsilon_0 > 0$ et une sous-suite $(a_{n_k})_{k\geqslant 1}$ tels que $|a_{n_k}| \geqslant \varepsilon_0$ pour tout $k \geqslant 1$. Posons $y_k = a_{n_k}^{-1} x_{n_k}$; on a $\|y_k\| = \frac{1}{|a_{n_k}|}\,\|x_{n_k}\| \leqslant \frac{1}{\varepsilon_0}\,\|x_{n_k}\| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$. Donc $a_{n_k}^{-1} v_{n_k} = y_k - u_0 \xrightarrow[k\to\infty]{} -u_0$; mais cela contredit le fait que $\ker\varphi$ soit fermé car $a_{n_k}^{-1} v_{n_k} \in \ker\varphi$, alors que $-u_0 \notin \ker\varphi$.

Variante. Puisque $\ker\varphi$ est fermé, l'espace quotient (voir Chapitre I, Exercice 15) peut être muni de la norme induite et l'on a la forme linéaire induite $\widetilde{\varphi} \colon E/\ker\varphi \to \mathbb{K}$; agissant sur un espace normé de dimension finie (il est de dimension 1, si $\varphi \neq 0$), elle est continue (c'est même évident dans ce cas). Donc $\varphi = \widetilde{\varphi} \circ q$ est continue ($q\colon E \to E/\ker\varphi$ étant la surjection canonique).

2) a) La forme linéaire φ n'étant pas nulle, son noyau n'est pas l'espace tout entier. Il existe donc $a \in E$ tel que $a \notin \ker\varphi$. Par le Corollaire VI.3.7, il existe une forme linéaire continue $\psi \in E^*$ s'annulant sur $H = \ker\varphi$ et telle que $\psi(a) = 1$ (ψ n'est donc pas nulle).

b) La forme linéaire ψ n'étant pas nulle , son noyau est un hyperplan de E ; or deux hyperplans contenus l'un dans l'autre sont forcément égaux. Il en résulte qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $\varphi = \lambda\psi$, et par conséquent φ est continue.

3) Si φ n'est pas continue, son noyau n'est pas fermé, par le 2). Son adhérence est donc un sous-espace vectoriel contenant strictement l'hyperplan $\ker\varphi$: c'est E tout entier, et donc $\ker\varphi$ est dense dans E.

Exercice 2

1) Soit $(x_1, \lambda_1), (x_2, \lambda_2) \in C_f$, et $0 \leqslant t \leqslant 1$. Comme f est convexe, on a :

$$f\big(tx_1 + (1-t)x_2\big) \leqslant tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \leqslant t\lambda_1 + (1-t)\lambda_2 \leqslant t\,\|f\|_\infty + (1-t)\,\|f\|_\infty = \|f\|_\infty\,;$$

donc $t\,(x_1, \lambda_1) + (1-t)\,(x_2, \lambda_2) \in C_f$, et ainsi C_f est convexe. D'autre part, il est clair, grâce à la continuité de f, que C_f est fermé dans le compact $K \times [-\|f\|_\infty, \|f\|_\infty]$; donc est lui-même compact. On montre de même que Γ_g est convexe et compact ; mais on peut aussi remarquer que $-g$ est convexe et que $(y, \mu) \in \Gamma_g$ si et seulement si $(y, -\mu) \in C_{-g}$; Γ_g est donc l'image de C_{-g} par la symétrie $(x, \lambda) \in X \times \mathbb{R} \mapsto (x, -\lambda) \in X \times \mathbb{R}$.

2) Les ensembles convexes compacts C_f et Γ_g sont disjoints, par hypothèse ; la *forme géométrique du Théorème de Hahn-Banach* (Théorème VI.3.1) donne donc une forme linéaire continue $\Psi\colon X \times \mathbb{R}$ telle que $\sup_{(y,\mu)\in\Gamma_g} \Psi\,(y, \mu) < \inf_{(x,\lambda)\in C_f} \Psi\,(x, \lambda)$. Il existe donc $c \in \mathbb{R}$ tel que $\Psi\,(y, \mu) < c < \Psi\,(x, \lambda)$ pour tous $(y, \mu) \in \Gamma_g$ et $(x, \lambda) \in C_f$. Posant $z^*(x) = \Psi\,(x, 0)$ et $a = \Psi\,(0, 1)$, on a donc une forme linéaire continue $z^*\colon X \to \mathbb{R}$ et un $a \in \mathbb{R}$ tels que $z^*(y) + \mu a < c < z^*(x) + \lambda a$ pour tous $(y, \mu) \in \Gamma_g$ et $(x, \lambda) \in C_f$. En particulier, en prenant $y = x$, $\mu = g\,(x)$ et $\lambda = f\,(x)$, on obtient $z^*(x) + ag\,(x) < c < z^*(x) + af\,(x)$ pour tout $x \in K$.

3) Les inégalités $z^*(y) + \mu a < c < z^*(x) + \lambda a$ étant valables pour tous les $(y, \mu) \in \Gamma_g$ et $(x, \lambda) \in C_f$, on peut prendre $y = x$, $\mu = -\|g\|_\infty$ et $\lambda = \|f\|_\infty$; on obtient $-a\,\|g\|_\infty < a\,\|f\|_\infty$, ce qui n'est possible que si $a > 0$.

Les inégalités $z^*(x) + ag\,(x) < c < z^*(x) + af\,(x)$ équivalent alors à $g\,(x) < \frac{c}{a} - \frac{1}{a}\,z^*(x) < f(x)$; donc si l'on pose $\varphi\,(x) = \frac{c}{a} - \frac{1}{a}\,z^*(x)$, on obtient une forme affine continue $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ telle que $g\,(x) < \varphi(x) < f\,(x)$ pour tout $x \in K$.

Exercice 3

1) Pour tous $x, y \in C$ et $0 \leqslant t \leqslant 1$, on a, pour tout $i \in I$, on a, puisque φ_i est affine, $\varphi_i[tx + (1-t)y] = t\,\varphi\,(x) + (1-t)\,\varphi\,(y)$; on obtient donc :

$$u[tx + (1-t)y] = \sup_{i\in I} \varphi_i[tx + (1-t)y] \leqslant t \sup_{i\in I} \varphi\,(x) + (1-t) \sup_{i\in I} \varphi\,(y) = tu(x) + (1-t)u(y)\,,$$

d'où la convexité de u.

2) a) L'ensemble K est convexe car si $(x, a), (y, b) \in K$, on a, grâce à la convexité de u, $u[tx + (1-t)y] \leqslant tu(x) + (1-t)u(y) \leqslant ta + (1-t)b$ pour $0 \leqslant t \leqslant 1$; par conséquent $t(x, a) + (1-t)\,(y, b) \in K$.

D'autre part, si $(x_n, a_n) \in K$ et $(x_n, a_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (x, a)$, on a $u(x_n) \leqslant a_n$ pour tout $n \geqslant 1$, et la continuité de u entraîne que $u(x) \leqslant a$, c'est-à-dire que $(x, a) \in K$. Il en résulte que K est fermé dans $C \times \mathbb{R}$.

b) Pour $r < u(x_0)$, on a $(x_0, r) \notin K$. Comme C est fermé dans X, K est convexe et fermé dans $X \times \mathbb{R}$; la *forme géométrique du Théorème de Hahn-Banach* (Théorème VI.3.1) donne donc une forme linéaire continue $\Psi \colon X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\Psi(x, a) \leqslant \Psi(x_0, r)$ pour tout $(x, a) \in K$. Posons $x^*(x) = \Psi(x, 0)$ pour $x \in X$, et $\lambda = \Psi(0, 1)$; on obtient une forme linéaire continue $x^* \colon X \to \mathbb{R}$ et un $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $x^*(x) + \lambda\, a < x^*(x_0) + \lambda\, r$ pour tout $(x, a) \in K$. En particulier, avec $a = u(x)$, on obtient $x^*(x) + \lambda\, u(x) < x^*(x_0) + \lambda\, r$ pour tout $x \in C$.

Avec $x = x_0$, cette inégalité donne $\lambda u(x_0) < \lambda r$. Comme $r < u(x_0)$, cela entraîne que $\lambda < 0$. Alors, si l'on pose $\varphi_{x_0,r}(x) = -\frac{1}{\lambda}\, x^*(x) + \big[\frac{1}{\lambda}\, x^*(x_0) + r\big]$, on a une forme affine continue $\varphi_{x_0,r} \colon X \to \mathbb{R}$ telle que $\varphi_{x_0,r}(x_0) = r$ et $\varphi_{x_0,r}(x) < u(x)$ pour tout $x \in C$.

c) Si l'on note $(\varphi_i)_{i \in I}$ la famille $(\varphi_{x_0,r})_{(x_0,r) \in (C \times \mathbb{R}) \setminus K}$, on a $\varphi_i \leqslant u$ pour tout $i \in I$; donc $\sup_{i \in I} \varphi_i \leqslant u$. D'autre part, pour tout $x_0 \in C$, on a $\varphi_{x_0,r}(x_0) = r$ pour tout $r < u(x_0)$; donc $\sup_{i \in I} \varphi_i(x_0) \geqslant r$ pour tout $r < u(x_0)$, de sorte que $\sup_{i \in I} \varphi_i(x_0) = u(x_0)$.

Exercice 4

1) a) Δ et G sont convexes compacts, comme images du compact convexe K par les applications affines continues $x \in X \mapsto (x, x) \in X \times X$ et $x \in K \mapsto \big(x, f(x)\big) \in X \times X$ (elles sont continues car leurs composantes le sont).

b) Il suffit de poser $\varphi_1(u) = \Phi(u, v)$ et $\varphi_2(v) = \Phi(0, v)$.

2) a) Dire que f ne possède pas de point fixe équivaut à dire que $\Delta \cap G = \emptyset$. Comme ce sont des convexes compacts, le Théorème de Hahn-Banach, sous la forme du Théorème VI.3.8, fournit une forme linéaire continue Φ sur $X \times X$ telle que $\sup_{u \in K} \Phi(u, u) < \inf_{v \in K} \Phi\big(v, f(v)\big)$. Si l'on choisit α et β tels que $\sup_{u \in K} \Phi(u, u) < \alpha < \beta < \inf_{v \in K} \Phi\big(v, f(v)\big)$, on obtient, en utilisant le 1) b), deux formes linéaires continues $\varphi_1, \varphi_2 \in X^*$ telles que $\varphi_1(u) + \varphi_2(u) \leqslant \alpha < \beta \leqslant \varphi_1(v) + \varphi_2[f(v)]$ pour tous $u, v \in K$.

b) On a donc $\varphi_2[f(x)] + \varphi_1(x) \geqslant \beta$ et $\varphi_2(x) + \varphi_1(x) \leqslant \alpha$ pour tout $x \in K$. En soustrayant membre à membre, il vient $\varphi_2[f(x)] - \varphi_2(x) \geqslant \beta - \alpha$. Par itération, on obtient $\varphi_2[f^n(x)] - \varphi_2(x) \geqslant n\,(\beta - \alpha)$ pour tout $x \in K$ et tout $n \geqslant 1$.

c) On obtient une contradiction car $f^n(x) \in K$ pour tout $x \in K$ et tout $n \geqslant 1$; donc $\sup_{x \in K, n \geqslant 1} \varphi_2[f^n(x)] \leqslant \sup_{y \in K} \varphi_2(y) < +\infty$, en vertu de la compacité de K, alors que $n(\beta - \alpha) \xrightarrow[n \to \infty]{} +\infty$.

3) Soit K_i l'ensemble des points fixes de f_i. Il résulte du 2) que $K_i \neq \emptyset$. Il s'agit de montrer que $\bigcap_{i \in I} K_i \neq \emptyset$. Comme K_i est l'image réciproque de $\{0\}$ par l'application affine continue $x \in K \mapsto f_i(x) - x \in X$, K_i est fermé (et convexe). K étant compact, il suffit donc de montrer que $\bigcap_{i \in J} K_i \neq \emptyset$ pour toute partie finie J de I. Mais pour tous $i, j \in I$, f_i et f_j commutent ; donc $f_j(K_i) \subseteq K_i$, de sorte que $f_{j\,|K_i} \colon K_i \to K_i$. Il résulte du 2) (puisque K_i est compact et convexe) que $f_{j\,|K_i}$ possède un point fixe ; autrement dit, $K_j \cap K_i \neq \emptyset$. En itérant, on obtient $\bigcap_{i \in J} K_i \neq \emptyset$ pour toute partie finie J de I.

Exercice 5

$(i) \Rightarrow (ii)$. Définissons $u \colon E \to \mathbb{K}^n$ par $u(x) = \big(\varphi_k(x)\big)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ pour $x \in E$. Munissons $\mathbb{K}^n$ de la norme $\|\,.\,\|_\infty$. Dire que l'on n'a pas (ii) signifie qu'il existe un $\varepsilon > 0$ pour lequel, pour tout $x \in B_E$, on peut trouver un $k \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $|\varphi_k(x) - \alpha_k| \geqslant \varepsilon$; en d'autres termes que $\|u(x) - \alpha\|_\infty \geqslant \varepsilon$. Cela signifie que $\alpha \notin \overline{u(B_E)}$. Or $\overline{u(B_E)}$ est un convexe fermé de $\mathbb{K}^n$; le Théorème de Hahn-Banach nous dit qu'il existe $\beta \in \mathbb{K}^n$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\mathrm{Re}\,\langle u(x), \beta\rangle \leqslant a < \mathrm{Re}\,\langle \alpha, \beta\rangle\,, \quad \forall x \in B_E\,.$$

Pour tout $x \in B_E$, choisissons $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{e}^{i\theta}\langle u(x), \beta\rangle = |\langle u(x), \beta\rangle|$. On a alors $|\langle u(x), \beta\rangle| = \mathrm{e}^{i\theta}\langle u(x), \beta\rangle = \langle u(\mathrm{e}^{i\theta} x), \beta\rangle \in \mathbb{R}$, il vient $|\langle u(x), \beta\rangle| \leqslant a$. Comme $\mathrm{Re}\,\langle \alpha, \beta\rangle \leqslant |\langle \alpha, \beta\rangle|$, il vient :

$$|\langle u(x), \beta\rangle| \leqslant a < |\langle \alpha, \beta\rangle|\,, \quad \forall x \in B_E\,,$$

c'est-à-dire :

$$\Big|\sum_{k=1}^n \beta_k\varphi_k(x)\Big| \leqslant a < |\langle\alpha,\beta\rangle|\,, \quad \forall x\in B_E\,,$$

et (i) n'est pas réalisé.
$(ii)\Rightarrow(i)$. Soit $\varepsilon>0$ et soit $x_\varepsilon\in B_E$ donné par l'assertion (ii). Pour tous $\beta_1,\ldots,\beta_n\in\mathbb{K}$, on a $\big|\sum_{k=1}^n\beta_k\varphi_k(x_\varepsilon)-\sum_{k=1}^n\beta_k\alpha_k\big|\leqslant\sum_{k=1}^n|\beta_k|\,|\varphi_k(x_\varepsilon)-\alpha_k|\leqslant\varepsilon\sum_{k=1}^n|\beta_k|$; d'où $\big|\sum_{k=1}^n\beta_k\alpha_k\big|\leqslant\big\|\sum_{k=1}^n\beta_k\varphi_k\big\|\,\|x_\varepsilon\|+\varepsilon\sum_{k=1}^n|\beta_k|$. Comme $\|x_\varepsilon\|\leqslant 1$, on obtient (i), en faisant tendre $\varepsilon>0$ vers 0.

Exercice 6

1) Notons d'abord que, l'hypothèse $\sum_{n=1}^\infty|\varphi(x_n)|<+\infty$ signifie que $\big(\varphi(x_n)\big)_{n\geqslant1}\in\ell_1$, pour toute $\varphi\in X^*$, et donc que l'application T est bien définie. Elle est clairement linéaire.

Comme X^* et ℓ_1 sont des espaces de Banach, nous pouvons utiliser le *Théorème du graphe fermé* pour montrer sa continuité. Il s'agit de montrer que si $\varphi_k\xrightarrow[k\to\infty]{}\varphi$ dans X^* et $T(\varphi_k)\xrightarrow[k\to\infty]{}y=(y_n)_{n\geqslant1}$ dans ℓ_1, alors $y=T(\varphi)$. Mais dire que $T(\varphi_k)\xrightarrow[k\to\infty]{}y$ signifie que $\sum_{n=1}^\infty|\varphi_k(x_n)-y_n|\xrightarrow[k\to\infty]{}0$. Or, pour tout $n\geqslant1$, on a :

$$|\varphi_k(x_n)-y_n|\leqslant\sum_{l=1}^\infty|\varphi_k(x_l)-y_l|\xrightarrow[k\to\infty]{}0,$$

par hypothèse ; donc $\varphi_k(x_n)\xrightarrow[k\to\infty]{}y_n$. D'autre part,

$$|\varphi_k(x_n)-\varphi(x_n)|\leqslant\|x_n\|\,\|\varphi_k-\varphi\|_{X^*}\xrightarrow[k\to\infty]{}0,$$

aussi par hypothèse. Il en résulte que $\varphi(x_n)=y_n$. Cela signifie, comme attendu, que $y=T(\varphi)$.

2) L'inégalité $\sum_{n=1}^\infty|\varphi(x_n)|\leqslant C\,\|\varphi\|_{X^*}$ s'écrit aussi $\|T(\varphi)\|_{\ell_1}\leqslant C\,\|\varphi\|_{X^*}$, pour toute $\varphi\in X^*$. Ce n'est donc rien d'autre que la continuité de T, prouvée au 2) (et $C=\|T\|$ convient, pour $T\neq0$).

3) Soit $\varphi\in X^*$. Pour tout $N\geqslant1$, on a :

$$\Big|\varphi\Big(\sum_{n=1}^N t_nx_n\Big)\Big|=\Big|\sum_{n=1}^N t_n\varphi(x_n)\Big|\leqslant\sum_{n=1}^N|t_n|\,|\varphi(x_n)|\leqslant\|\mathbf{t}\|_\infty\sum_{n=1}^\infty|\varphi(x_n)|\leqslant C\,\|\mathbf{t}\|_\infty\|\varphi\|_{X^*}\,.$$

Comme c'est vrai pour toute $\varphi\in X^*$, on obtient (par le Corollaire VI.2.5) :

$$\Big\|\sum_{n=1}^N t_nx_n\Big\|=\sup_{\varphi\in B_{X^*}}\Big|\varphi\Big(\sum_{n=1}^N t_nx_n\Big)\Big|\leqslant C\,\|\mathbf{t}\|_\infty\,.$$

Exercice 7

1) Pour $\|\psi\|\leqslant1$ et $\|x\|\leqslant1$, on a, pour tout $y\in Y$: $|(\psi\circ B_x)(y)|=|\psi[B(x,y)]|\leqslant\|\psi\|\,\|B(x,y)\|=\|\psi\|\,\|B^y(x)\|\leqslant\|\psi\|\,\|B^y\|\,\|x\|\leqslant\|B^y\|$. Le *Théorème de Banach-Steinhaus* dit qu'alors $\sup_{\|\psi\|\leqslant1,\|x\|\leqslant1}|\psi\circ B_x|=M<+\infty$.

2) Cela signifie que $|\psi[B(x,y)]|\leqslant M\,\|y\|$ pour $\|\psi\|\leqslant1$ et $\|x\|\leqslant1$. Par homogénéité, cela donne $|\psi[B(x,y)]|\leqslant M\,\|x\|\,\|y\|$ pour $\|\psi\|\leqslant1$; le *Théorème de Hahn-Banach* donne alors $\|B(x,y)\|\leqslant M\,\|x\|\,\|y\|$, ce qui prouve que B est continue, par le a).

Exercice 8

1) a) Soit $\psi \in Y^*$ telle que $T^*\psi = 0$. Pour tout $x \in X$, on a alors $\psi(Tx) = (T^*\psi)(x) = 0$. Ainsi ψ s'annule sur $T(X)$. Comme $T(X)$ est dense dans Y, on obtient $\psi = 0$, d'où l'injectivité de T^*.

b) Pour toute $\psi \in Y^*$ s'annulant sur $T(X)$, on a $(T^*\psi)(x) = \psi(Tx) = 0$, pour tout $x \in X$, c'est-à-dire $T^*\psi = 0$; comme T^* est injective, on doit avoir $\psi = 0$. Il résulte du Corollaire VI.2.9 que $T(X)$ est dense dans Y.

Variante. Si $T(X)$ n'est pas dense, il existe $y_0 \in Y$ tel que $y_0 \notin \overline{T(X)}$. Le *Théorème de Hahn-Banach* dit qu'il existe alors une forme linéaire continue $\psi_0 \in Y^*$ qui s'annule sur $T(X)$ et telle que $\psi_0(y_0) = 1$. Mais alors, φ_0 n'est pas nulle, bien que, pour tout $x \in X$, on ait $(T^*\psi_0)(x) = \psi_0(Tx) = 0$, c'est-à-dire, $T^*\psi_0 = 0$. T^* n'est donc pas injectif.

2) Il suffit de prendre l'injection canonique $J\colon L^2(0,1) \to L^1(0,1)$ ou $j\colon \ell_1 \to \ell_2$. Elles sont continues, de norme 1, pas surjectives, et $J^*\colon L^\infty(0,1) \to L^2(0,1)$, $j^*\colon \ell_2 \to \ell_\infty$ sont les injections canoniques :

$$\langle J^*g, f\rangle = \langle g, Jf\rangle = \langle g, f\rangle = \textstyle\int_0^1 g(x)\, f(x)\, dx$$
$$\langle j^*[(y_n)_{n\geqslant 1}], (x_n)_{n\geqslant 1}\rangle = \langle (y_n)_{n\geqslant 1}, j[(x_n)_{n\geqslant 1}]\rangle = \textstyle\sum_{n=1}^\infty y_n x_n\,,$$

qui sont bien sûr injectives.

3) *Voir l'Exercice 12 du Chapitre IV.*

Exercice 9

1) Le fait que N soit une semi-norme sur X est évident : comme chaque prolongement $\widetilde{f}$ est linéaire, on a $|\widetilde{f}(x+y)| \leqslant |\widetilde{f}(x)| + |\widetilde{f}(y)|$ et $|\widetilde{f}(ax)| = |a|\,|\widetilde{f}(x)|$ pour tous $x, y \in X$ et $a \in \mathbb{R}$; donc, en prenant la borne supérieure sur toutes les formes linéaires continues $f\colon Y_0 \to \mathbb{R}$ telles que $\|f\|_{Y_1^*} \leqslant 1$ et les prolongements $\widetilde{f}$ tels que $\|\widetilde{f}\| = \|f\|_{Y_0^*}$, on obtient $N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$ et $N(ax) = |a|\, N(x)$.

Pour toute forme linéaire continue $f\colon Y_0 \to \mathbb{R}$, on a :

$$\|f\|_{Y_0^*} = \sup_{\|y\|\leqslant 1} |f(y)| \leqslant \sup_{\|y\|_1\leqslant M} |f(y)| = M\, \|f\|_{Y_1^*}\,;$$

donc, puisque $|\widetilde{f}(x)| \leqslant \|\widetilde{f}\|\,\|x\| \leqslant \|f\|_{Y_0^*}\,\|x\|$, on a $N(x) \leqslant M\,\|x\|$.

2) Il est clair que $\|\,.\,\|_2$ est une semi-norme sur X (comme maximum de deux semi-normes); de plus $m\,\|x\| \leqslant \|x\|_2$, donc $\|x\|_2 = 0$ entraîne $\|x\| = 0$ et donc $x = 0$. Ainsi $\|\,.\,\|_2$ est une norme sur X. Elle est équivalente à $\|\,.\,\|$ puisque $N(x) \leqslant M\,\|x\|$ et $m\,\|x\| \leqslant M\,\|x\|$ entraînent que $m\,\|x\| \leqslant \|x\|_2 \leqslant M\,\|x\|$.

Pour $y \in Y$, on a $\|y\|_1 = \sup_{\,f\|_{Y_1^*}\leqslant 1} |f(y)|$, d'après le Théorème de Hahn-Banach. Comme, pour $y \in Y$, $\widetilde{f}(y) = f(y)$, on obtient $N(y) = \|y\|_1$, et donc $\|y\|_2 = \|y\|_1$ puisque $m\,\|y\| \leqslant \|y\|_1$.

Exercice 10

1) D'abord, comme $0 \in M$, on a $\mathrm{dist}\,(\mathbb{1}, M) \leqslant \|\mathbb{1}\|_\infty = 1$. Pour l'inégalité inverse, soit $\mathbf{x} \in \ell_\infty$. Si $(\mathbf{x} - \widetilde{\mathbf{x}})(n) \geqslant 0$ pour tout $n \geqslant 1$, alors $x_n \geqslant x_{n+1}$ pour tout $n \geqslant 1$; la suite $\mathbf{x} = (x_n)_{n\geqslant 1}$ est donc décroissante et, comme elle est bornée, elle converge. Il en résulte que $\lim_{n\to\infty}(\mathbf{x} - \widetilde{\mathbf{x}})(n) = 0$ et donc $\|\mathbb{1} - (\mathbf{x} - \widetilde{\mathbf{x}})\|_\infty \geqslant 1$. Dans le cas où $(\mathbf{x} - \widetilde{\mathbf{x}})(n_0) < 0$ pour au moins un $n_0 \geqslant 1$, on a $1 - (\mathbf{x} - \widetilde{\mathbf{x}})(n_0) > 1$; donc là aussi $\|\mathbb{1} - (\mathbf{x} - \widetilde{\mathbf{x}})\|_\infty \geqslant 1$. Ceci étant vrai pour tout $\mathbf{x} \in \ell_\infty$, on obtient $\mathrm{dist}\,(\mathbb{1}, M) \geqslant 1$, par définition de M. D'où l'égalité.

2) Notons que $\mathbb{1} \notin M$. En effet, si l'on avait $\mathbf{x} - \widetilde{\mathbf{x}} = \mathbb{1}$, on aurait $x_n - x_{n+1} = 1$ pour tout $n \geqslant 1$, d'où $x_n = x_1 + (n-1)$, et $(x_n)_{n\geqslant 1}$ ne serait pas bornée. On peut donc définir $L_0\colon M \oplus \mathbb{R}\,\mathbb{1} \to \mathbb{R}$ par $L_0(m + a\mathbb{1}) = a$ pour $m \in M$ et $a \in \mathbb{R}$. On a $L_0(\mathbb{1}) = 1$

et L_0 est clairement linéaire et s'annule sur M. Maintenant, comme $\text{dist}\,(\mathbb{1}, M) = 1$, on a $|L_0(m + a\mathbb{1})| = |a| = \text{dist}\,(a\mathbb{1}, M) \leqslant \|m + a\mathbb{1}\|_\infty$ pour tous $m \in M$ et $a \in \mathbb{R}$; donc L_0 est continue sur $M \oplus \mathbb{R}\,\mathbb{1}$ et $\|L_0\| = \sup_{(m,a)\neq(0,0)} \frac{|L_0(m+a\mathbb{1})|}{\|m+a\mathbb{1}\|_\infty} = \sup_{a\neq 0} \frac{|a|}{\text{dist}\,(a\mathbb{1},M)} = 1$. Le *Théorème de Hahn-Banach* permet d'obtenir une forme linéaire continue $L \in (\ell_\infty)^*$ de norme $\|L\| = \|L_0\| = 1$ qui prolonge L_0. En particulier $L(\mathbb{1}) = L_0(\mathbb{1}) = 1$ et L s'annule sur M, de sorte que $L(\mathbf{x}) = L(\widetilde{\mathbf{x}})$ pour tout $\mathbf{x} \in \ell_\infty$.

3) Soit $\mathbf{x} = (x_n)_{n\geqslant 1} \in c_0$. Posons $\mathbf{x}_N = (x_1, \ldots, x_N, 0, 0, \ldots)$ pour $N \geqslant 1$. Comme $LB = L$, on a $LB^k = L$ pour tout $k \geqslant 1$, par récurrence ; donc $L(\mathbf{x}_N) = L[B^N(\mathbf{x}_N)] = L(0) = 0$. Comme $\mathbf{x}_N \xrightarrow[N\to\infty]{} \mathbf{x}$, on obtient (puisque L est continue) $L(\mathbf{x}) = 0$. Maintenant, si $\mathbf{x} = (x_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite convergente et si $a = \lim_{n\to\infty} x_n$ est sa limite, on a $\mathbf{x} - a\mathbb{1} \in c_0$; donc $L(\mathbf{x}) = L(a\mathbb{1}) = aL(\mathbb{1}) = a$.

4) Si $0 \leqslant x_n \leqslant 1$ pour tout $n \geqslant 1$, on a $\|\mathbb{1} - \mathbf{x}\|_\infty \leqslant 1$; donc $1 - L(\mathbf{x}) = L(\mathbb{1} - \mathbf{x}) \leqslant |L(\mathbb{1} - \mathbf{x})| \leqslant \|L\| = 1$, de sorte que $L(\mathbf{x}) \geqslant 0$. Maintenant, si $\mathbf{x} \in \ell_\infty$ est positif, et non nul, on pose $x'_n = x_n/\|\mathbf{x}\|_\infty$; on a $0 \leqslant x'_n \leqslant 1$ pour tout $n \geqslant 1$; donc $L(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|_\infty L(\mathbf{x}') \geqslant 0$.

Exercice 11

1) On a évidemment $0 \in \mathcal{J}$. Soit $f, g \in \mathcal{J}$ et $a, b \in \mathbb{C}$. Il existe de ouverts Ω_f et Ω_g denses dans $\mathbb{R}$ tels que $f = 0$ *p.p.* sur Ω_f et $g = 0$ *p.p.* sur Ω_g. Alors $af + bg = 0$ *p.p.* sur $\Omega_f \cap \Omega_g$. Comme l'intersection de deux ouverts denses de $\mathbb{R}$ est encore un ouvert dense (la densité peut s'obtenir par le *Théorème de Baire*, $\mathbb{R}$ étant un espace métrique complet ; mais dans le cas de l'intersection de deux ouverts denses, il est aussi facile de faire une preuve directe : c'est la première étape de la preuve du Théorème de Baire), on obtient $af + bg \in \mathcal{J}$.

2) Soit $f \in \mathcal{J}$ et Ω_f un ouvert dense sur lequel $f = 0$ *p.p.* ; on a $(\mathbb{1} - f)(x) = 1$ *p.p.* sur Ω_f. Comme tout ouvert non vide de $\mathbb{R}$ est de mesure positive, on a $\|\mathbb{1} - f\|_\infty = \operatorname*{sup\,ess}_{x\in\mathbb{R}} |(\mathbb{1} - f)(x)| \geqslant 1$.

3) Soit $X = \mathcal{J} + \mathbb{C}\,\mathbb{1}$ le sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{J}$ et $\mathbb{1}$. Notons que $\mathbb{1} \notin \mathcal{J}$, d'après la question précédente. Posons $\varphi(f + a\mathbb{1}) = a$ pour toute $f \in \mathcal{J}$ et tout $a \in \mathbb{C}$. La fonction $\varphi\colon X \to \mathbb{C}$ est clairement une forme linéaire et elle est continue, de norme 1. En effet, pour tout $a \in \mathbb{C}^*$, on a $1 \leqslant \|\mathbb{1} + a^{-1}f\|_\infty$ (car $a^{-1}f \in \mathcal{J}$), soit $|\varphi(f + a\mathbb{1})| = |a| \leqslant \|f + a\mathbb{1}\|_\infty$ (et cela reste bien sûr encore vrai pour $a = 0$). Cela s'écrit aussi $|\varphi(g)| \leqslant \|g\|_\infty$ pour toute $g \in X$, ce qui prouve que $\|\varphi\| \leqslant 1$. En fait $\|\varphi\| = 1$ car $\varphi(\mathbb{1}) = 1$.

Le *Théorème de Hahn-Banach* donne l'existence d'une forme linéaire continue $\Phi \in [L^\infty(\mathbb{R})]^*$, de norme 1, et qui prolonge φ. Elle s'annule donc sur $\mathcal{J}$, comme φ, et $\Phi(\mathbb{1}) = \varphi(\mathbb{1}) = 1$.

4) a) Chaque Ω_k est ouvert (réunion d'intervalles ouverts) et est dense car contenant $\mathbb{Q}$. D'autre part, il est clair que $]r_n - 2^{-nk}, r_n + 2^{-nk}[\,\supseteq\,]r_n - 2^{-n(k+1)}, r_n + 2^{-n(k+1)}[$ pour tout $n \geqslant 1$; donc $\Omega_k \supseteq \Omega_{k+1}$, de sorte que la suite $(\Omega_k)_{k\geqslant 1}$ est décroissante. Finalement, on a :

$$\lambda(\Omega_k) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(]r_n - 2^{-nk}, r_n + 2^{-nk}[) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2^{nk}} = \frac{2}{2^k - 1}\,;$$

comme $\lambda\big(\bigcap_{k\geqslant 1} \Omega_k\big) \leqslant \lambda(\Omega_j) \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$, on obtient $\lambda\big(\bigcap_{k\geqslant 1} \Omega_k\big) = 0$.

b) Supposons qu'il existe $h \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\Phi(g) = \int_{\mathbb{R}} g(x)\,h(x)\,dx$ pour toute $g \in L^\infty(\mathbb{R})$.

Notons que les fonctions $f_k = \mathbb{1}_{\Omega_k^c}$ sont dans $\mathcal{J}$ (f_k s'annule sur l'ouvert dense Ω_k) ; donc $\Phi(f_k) = 0$ pour tout $k \geqslant 1$. Comme $(\Omega_k)_{k\geqslant 1}$ est décroissante, la suite $(f_k)_{k\geqslant 1}$ est croissante. De plus, $\lim\!\uparrow_{k\to\infty} f_k = \mathbb{1}$ presque partout, puisque $f_k(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \Omega_k$ entraîne $\lim_{k\to\infty} f(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \bigcap_{k\geqslant 1} \Omega_k$, et que $\bigcap_{k\geqslant 1} \Omega_k$ est de mesure nulle. Comme

$|f_k h| \leqslant |h|$, pour tout $k \geqslant 1$, le *Théorème de convergence dominée* nous donnerait :

$$1 = \Phi(\mathbb{I}) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{I}(x)\, h(x)\, dx = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k(x)\, h(x)\, dx = \lim_{k\to\infty} \Phi(f_k) = 0\,,$$

ce qui est faux. Donc Φ n'est pas définie par une fonction de $L^1(\mathbb{R})$: $\Phi \in [L^\infty(\mathbb{R})]^* \setminus L^1(\mathbb{R})$.

Remarque. Cela montre en particulier, puisque $L^\infty(\mathbb{R}) = [L^1(\mathbb{R})]^*$, que $L^1(\mathbb{R})$ n'est pas réflexif.

Exercice 12

1) a) Soit Φ_1 la restriction de Φ à $\ker \Psi$. Par hypothèse, on a $|\Phi_1(x)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $x \in \ker \Psi$ de norme $\leqslant 1$; donc $\|\Phi_1\| \leqslant \varepsilon$. Le *Théorème de Hahn-Banach* dit qu'il existe une forme linéaire continue $\widetilde{\Phi}\colon X \to \mathbb{R}$ prolongeant Φ_1 et telle que $\|\widetilde{\Phi}\| = \|\Phi_1\| \leqslant \varepsilon$. De plus, comme la forme linéaire $\widetilde{\Phi} - \Phi$ s'annule sur $\ker \Psi$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\widetilde{\Phi} - \Phi = \alpha\Psi$.

b) • Pour tout $x \in B_X$, on a $|\Phi(x) + \alpha\Psi(x)| = |\widetilde{\Phi}(x)| \leqslant \|\widetilde{\Phi}\| \leqslant \varepsilon$. Comme

$$|\Phi(x) + \alpha\Psi(x)| \geqslant |\Phi(x)| - |\alpha|\,|\Psi(x)| \geqslant |\Phi(x)| - |\alpha|\,\|\Psi\| = |\Phi(x)| - |\alpha|,$$

on obtient $|\Phi(x)| \leqslant |\alpha| + \varepsilon$. Comme c'est vrai pour tout $x \in B_X$, il en résulte que $\|\Phi\| \leqslant |\alpha| + \varepsilon$, soit $1 \leqslant |\alpha| + \varepsilon$.

• Partons cette fois-ci de l'égalité $-\widetilde{\Phi}(x) = -\Phi(x) - \alpha\Psi(x)$. On a, pour $x \in B_X$, d'une part, $-\widetilde{\Phi}(x) \geqslant -\|\widetilde{\Phi}\| \geqslant -\varepsilon$, et, d'autre part :

$$-\Phi(x) - \alpha\Psi(x) \leqslant |\Phi(x)| - \alpha\Psi(x) \leqslant \|\Phi\| - \alpha\Psi(x) = 1 - \alpha\Psi(x)\,;$$

donc $\alpha\Psi(x) \leqslant 1 + \varepsilon$. Cela entraîne que $|\alpha\Psi(x)| \leqslant 1 + \varepsilon$. Comme c'est vrai pour tout $x \in B_X$, on obtient $|\alpha| = \|\alpha\Psi\| \leqslant 1 + \varepsilon$.

Ainsi $-\varepsilon \leqslant 1 - |\alpha| \leqslant \varepsilon$, c'est-à-dire $\big|1 - |\alpha|\big| \leqslant \varepsilon$.

c) Si $\alpha \geqslant 0$, on a :

$$\|\Phi - \Psi\| \leqslant \|\Phi - \alpha\Psi\| + \|\alpha\Psi - \Psi\| = \|\widetilde{\Phi}\| + |1 - \alpha|\,\|\Psi\| \leqslant 2\varepsilon\,.$$

Si $\alpha < 0$, alors $1 - |\alpha| = 1 + \alpha$ et :

$$\|\Phi + \Psi\| \leqslant \|\Phi - \alpha\Psi\| + \|\alpha\Psi + \Psi\| = \|\widetilde{\Phi}\| + |1 + \alpha|\,\|\Psi\| \leqslant 2\varepsilon\,.$$

2) Supposons qu'il existe $x_0 \in E$ avec $\|x_0\| = 1$ tel que $|f(x_0)| \leqslant \delta/(4\,\|\Psi\|)$ pour toute $f \in \ker \Psi$ de norme $\|f\| \leqslant 1$. Considérons l'élément $\Phi = i_E(x_0)$ associé à x_0, et posons $\Psi_1 = \Psi/\|\Psi\|$ (notons que $\Psi \neq 0$ puisque $\Psi \notin E$). On a $\|\Phi\| = \|x_0\| = 1$ et $\|\Psi_1\| = 1$. Par ailleurs, si l'on pose $\varepsilon = \delta/(4\,\|\Psi\|)$, l'hypothèse faite dit que $|\Phi(f)| \leqslant \varepsilon$ pour toute $f \in (\ker \Psi_1) \cap B_{E^*}$. Donc, par le 1) c), on a $\|x_0 - \Psi_1\| = \|\Phi - \Psi_1\| \leqslant 2\varepsilon$ ou $\|x_0 + \Psi_1\| = \|\Phi + \Psi_1\| \leqslant 2\varepsilon$. Il en résulte que $\mathrm{dist}\,(\Psi_1, E) \leqslant 2\varepsilon$. Donc :

$$\delta = \mathrm{dist}\,(\Psi, E) = \|\Psi\|\,\mathrm{dist}\,(\Psi_1, E) \leqslant 2\varepsilon\,\|\Psi\| = \delta/2\,,$$

ce qui n'est pas possible.

Il en résulte que $\sup\{|f(x)|\,;\ f \in (\ker \Psi) \cap B_{E^*}\} \geqslant \delta/(4\,\|\Psi\|)$ pour tout $x \in S_E$, et, par homogénéité, que $\sup\{|f(x)|\,;\ f \in (\ker \Psi) \cap B_{E^*}\} \geqslant [\delta/(4\,\|\Psi\|)]\,\|x\|$ pour tout $x \in E$. Cela signifie que le sous-espace $\ker \Psi$ de E^* est un sous-espace normant de E.

Exercice 13

1) $\mathfrak{P}$ est convexe car si $f, g \in \mathfrak{P}$ et $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, on a $\alpha f(x) + (1-\alpha)g(x) > 0$, puisqu'une combinaison convexe de deux nombres > 0 est encore > 0 (si $0 < a < b$, alors $[a, b] \subseteq \mathbb{R}_+^*$). Montrons qu'il est ouvert. Soit $f \in \mathfrak{P}$. Comme $f([0,1])$ est une partie compacte de $\mathbb{R}_+^*$, il existe $\delta > 0$ tel que $f(x) \geqslant \delta$ pour tout $x \in [0,1]$. Alors la boule de centre f et de rayon $\delta/2$ est contenue dans $\mathfrak{P}$. En effet, si $\|f-g\|_\infty \leqslant \delta/2$, on a $g(x) \geqslant f(x) - \|f-g\|_\infty \geqslant \delta - \delta/2 = \delta/2 > 0$, pour tout $x \in [0,1]$; donc $g \in \mathfrak{P}$.

2) $\mathfrak{C}$ est convexe (c'est un sous-espace affine) et non vide car il contient la fonction g définie par $g(x) = -x$, par exemple. De plus, il est clair que $\mathfrak{C}$ est fermé (si $g_k(1/n) = -1/n$ pour tout $n \geqslant 1$ et $g_k \xrightarrow[k\to\infty]{} g$ uniformément (simplement suffit) sur $[0,1]$, alors $g(1/n) = -1/n$ pour tout $n \geqslant 1$). Comme $\mathfrak{P}$ est convexe et ouvert (et non vide : $\mathbb{1} \in \mathfrak{P}$), le *Théorème de Hahn-Banach, version géométrique* (plus précisément le Théorème VI.3.3) dit qu'il existe un hyperplan fermé séparant, au sens large, $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{P}$, c'est-à-dire l'existence d'une forme linéaire continue Φ sur $\mathscr{C}([0,1])$ et d'un nombre $a \in \mathbb{R}$ tels que $\Phi(f) \geqslant a \geqslant \Phi(g)$ pour toute $f \in \mathfrak{P}$ et toute $g \in \mathfrak{C}$.

3) Supposons qu'il existe $f \in \mathfrak{P}$ telle que $\Phi(f) < 0$. Comme $\lambda f \in \mathfrak{P}$ pour tout $\lambda > 0$, on a $\lambda\Phi(f) = \Phi(\lambda f) \geqslant a$. Mais $\lambda\Phi(f) \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} -\infty$; on a une contradiction. Donc $\Phi(f) \geqslant 0$ pour toute $f \in \mathfrak{P}$.

Exercice 14

1) Notons que si $u(t) = \sum_{n=-N}^{N} a_n \, \mathrm{e}^{2\pi i n t}$, alors $a_n = \widehat{u}(n)$; donc $|a_n| \leqslant \|u\|_{L^1(0,1)} \leqslant \|u\|_\infty$. Alors :

$$|u'(t)| \leqslant 2\pi \sum_{n=-N}^{N} n\,|a_n| \leqslant 2\pi \|u\|_\infty \sum_{n=-N}^{N} n = 2\pi N(N+1)\,\|u\|_\infty\,.$$

2) Soit $P(x) = \sum_{n=0}^{N} c_n x^n$ un polynôme de degré $\leqslant N$. Posons $u(t) = P(\sin 2\pi t)$. Alors :

$$u(t) = \sum_{n=0}^{N} c_n \left[\frac{\mathrm{e}^{2\pi i t} - \mathrm{e}^{-2\pi i t}}{2i}\right]^n = \sum_{n=-N}^{N} a_n \, \mathrm{e}^{2\pi i n t}$$

est un polynôme trigonométrique de degré N. Comme $u'(t) = 2\pi\cos(2\pi t)P'(\sin 2\pi t)$, on a :

$$|P'(0)| = \frac{1}{2\pi}\,|u'(0)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\,\|u\|_\infty \leqslant N(N+1)\,\|u\|_\infty = N(N+1)\,\|P\|_\infty\,.$$

3) Considérons la forme linéaire $\varphi \colon P \in \mathscr{P}_N \mapsto P'(0)$. Il résulte du 2) que φ est continue et de norme $\|\varphi\| \leqslant N(N+1)$. De par le *Théorème de Hahn-Banach*, il existe un prolongement $\widetilde{\varphi} \colon \mathscr{C}([-1,1]) \to \mathbb{C}$ linéaire continu de norme $\|\widetilde{\varphi}\| = \|\varphi\| \leqslant N(N+1)$. Il résulte du Théorème VIII.3.1 qu'il existe une mesure complexe ν sur $[-1,1]$ telle que $\widetilde{\varphi}(f) = \int_{-1}^{1} f(s)\,d\nu(s)$ pour toute $f \in \mathscr{C}([-1,1])$. En particulier, on a $\int_{-1}^{1} P(s)\,d\nu(s) = P'(0)$ pour toute $P \in \mathscr{P}_N$. Pour $P(s) = s$, on obtient $\int_{-1}^{1} s\,d\nu(s) = 1$. Pour $P(s) = s^n$, avec $2 \leqslant n \leqslant N$, on a $P'(0) = 0$, et donc $\int_{-1}^{1} s^n\,d\nu(s) = 0$.

Exercice 15

1) Il est clair que $0 \in L^{1/2}$ et que $\alpha f \in L^{1/2}$ pour toute $f \in L^{1/2}$ et tout scalaire α. Comme on a $u^2 + v^2 \leqslant (u+v)^2$ pour tous $u, v \geqslant 0$, on a $|f(t)+g(t)|^{1/2} \leqslant (|f(t)|+|g(t)|)^{1/2} \leqslant |f(t)|^{1/2} + |g(t)|^{1/2}$; donc $f + g \in L^{1/2}$ lorsque $f, g \in L^{1/2}$. On a en fait montré que $\mathscr{L}^{1/2}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions mesurables sur $[0,1]$; cela entraîne que $L^{1/2}$ est un espace vectoriel.

2) Il est clair que $d(f,g) = d(g,f)$ et que $d(f,f) = 0$. Si $d(f,g) = 0$, on a $f = g$ presque partout, donc $f = g$ en tant qu'éléments de $L^{1/2}$. D'après l'inégalité utilisée au 1), on a, en intégrant : $d(f,g) = d(f-g,0) = d[(f-h)-(g-h),0] \leqslant d(f-h,0) + d(g-h,0) = d(f,h) + d(g,h)$. Donc d est une distance sur $L^{1/2}$. On peut noter qu'elle est *invariante par translation* : $d(f+h, g+h) = d(f,g)$ pour toute $h \in L^{1/2}$.

Notons aussi que $d(\alpha f, 0) = |\alpha|^{1/2} d(f,0)$, de sorte que l'application $f \mapsto d(f,0)$ n'est *pas* une norme (on verra dans la question 3) qu'il n'existe en fait *aucune* norme définissant la même topologie que d).

Il est clair, en utilisant l'inégalité triangulaire et l'invariance par translation, que l'addition est continue sur $L^{1/2}$: $d(f+g, f_0+g_0) = d(f-f_0, g_0-g) \leqslant d(f-f_0,0) + d(g_0-g,0) = d(f,f_0) + d(g,g_0)$. Pour montrer la continuité de la multiplication par les scalaires, on utilise l'inégalité habituelle : $d(\alpha f, \alpha_0 f_0) = d(\alpha f - \alpha_0 f_0, 0) \leqslant d(\alpha f - \alpha_0 f, 0) + d(\alpha_0 f - \alpha_0 f_0, 0) = |\alpha - \alpha_0|^{1/2} d(f,0) + |\alpha_0|^{1/2} d(f-f_0,0) \leqslant |\alpha-\alpha_0|^{1/2}[d(f,f_0) + d(f_0,0)] + |\alpha_0|^{1/2} d(f,f_0)$, qui tend vers 0 lorsque α tend vers α_0 et $d(f,f_0)$ tend vers 0.

3) Soit $f \in L^{1/2}$ telle que $d(f,0) \leqslant r\sqrt{2}$. Considérons $F(x) = \int_0^x |f(t)|^{1/2}\,dt$. C'est une fonction continue sur $[0,1]$, d'après le Théorème de convergence dominée. Comme $F(0) = 0$, il existe, grâce au Théorème des valeurs intermédiaires, un $x_0 \in [0,1]$ tel que $F(x_0) = F(1)/2$. On a donc $\int_0^{x_0} |f(t)|^{1/2}\,dt = \int_{x_0}^1 |f(t)|^{1/2}\,dt = F(1)/2$. Soit $g = 2\,f\,\mathbb{I}_{[0,x_0]}$ et $h = 2\,f\,\mathbb{I}_{[x_0,1]}$. Alors $\int_0^1 |g(t)|^{1/2}\,dt = \sqrt{2}\int_0^{x_0} |f(t)|^{1/2}\,dt = F(1)/\sqrt{2} \leqslant r$, car $0 \leqslant F(1) = d(f,0) \leqslant r\sqrt{2}$, et $\int_0^1 |h(t)|^{1/2}\,dt = \sqrt{2}\int_{x_0}^1 |f(t)|^{1/2}\,dt = F(1)/\sqrt{2} \leqslant r$. Donc $g, h \in L^{1/2}$ et sont dans la boule $B_d(0,r)$ de centre 0 et de rayon r. Comme $f = (g+h)/2$ (presque partout), f est dans l'enveloppe convexe de $B_d(0,r)$.

En itérant, on obtient que l'enveloppe convexe de $B_d(0,r)$ contient la boule $B_d(0, 2^{n/2} r)$ pour tout entier $n \geqslant 1$, donc l'espace $L^{1/2}$ tout entier, si $r > 0$. Maintenant, si Ω est un ouvert convexe non vide, il contient une boule $B_d(x_0, r) = x_0 + B_d(0,r)$ de rayon $r > 0$. D'après ce qui précède, son enveloppe convexe est $L^{1/2}$. Mais, comme Ω est convexe, cette enveloppe est contenue dans Ω. Par conséquent $\Omega = L^{1/2}$.

4) Il n'existe aucune forme linéaire continue non nulle sur $L^{1/2}$, car si φ est une forme linéaire continue, l'ensemble $\{f \in L^{1/2}\,;\ |\varphi(f)| < 1\}$ est un ouvert convexe non vide (il contient 0) ; il est donc égal à $L^{1/2}$. Mais cela n'est possible que si $\varphi = 0$ (l'image d'une forme linéaire continue non nulle est le corps des scalaires).

XI.7. Exercices du Chapitre VII

Exercice 1

1) Notons d'abord que φ étant continue, elle est dans $L^2([0,1])$; donc, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, le produit φf est intégrable ; en fait $\int_0^1 \varphi(t) f(t)\,dt$ est le produit scalaire $(f \mid \overline{\varphi})$, qui est égal à $(f \mid \varphi)$, puisque φ est réelle. On a $Af = (f \mid \varphi)\,\varphi$; donc, puisque $\varphi \in L^2([0,1])$, A est bien une application linéaire continue de $L^2([0,1]]$ dans lui-même.

2) On a, pour toutes $f, g \in L^2([0,1])$:

$$\begin{aligned}(f \mid A^* g) &= (Af \mid g) = \big((f \mid \varphi)\,\varphi \mid g\big) = (f \mid \varphi)\,(\varphi \mid g) = \big(f \mid \overline{(\varphi \mid g)}\,\varphi\big) \\ &= \big(f \mid (g \mid \varphi)\,\varphi\big) = (f \mid Ag);\end{aligned}$$

donc $A^* g = Ag$ et par conséquent $A^* = A$.

3) On a $A^2 f = A(Af) = (Af \mid \varphi)\,\varphi = (f \mid \varphi)\,(\varphi \mid \varphi)\,\varphi$; on a donc $A^2 = \lambda A$ avec $\lambda = (\varphi \mid \varphi) = \|\varphi\|_2^2$.

4) Comme l'espace est complexe, on peut utiliser la formule du rayon spectral : $r(A) = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n}$. Mais, par la question précédente, $A^n = \lambda^{n-1}A$; on a donc $\|A^n\|^{1/n} = \lambda^{\frac{n-1}{n}} \|A\|^{1/n}$ et $r(A) = \lambda = \|\varphi\|_2^2$.

Pour $\varphi(x) = \frac{x}{1+x}$, on a $r(A) = \int_0^1 \frac{x^2}{(1+x)^2}\, dx = \frac{3}{2} - 2\ln 2$.

Exercice 2

1) On a $(Tf)(x) - (Tf)(x') = \int_0^x [K(x,t) - K(x',t)]\, f(t)\, dt - \int_x^{x'} K(x',t)\, f(t)\, dt$, pour $x, x' \in [0,1]$; donc :

$$\begin{aligned}|(Tf)(x) - (Tf)(x')| &\leqslant \int_0^x \sup_{t\in[0,1]} |K(x,t) - K(x',t)|\, \|f\|_\infty\, dt + \int_x^{x'} \|K\|_\infty\, \|f\|_\infty\, dt \\ &\leqslant \sup_{t\in[0,1]} |K(x,t) - K(x',t)|\, \|f\|_\infty + |x - x'|\, \|K\|_\infty\, \|f\|_\infty\,.\end{aligned}$$

Maintenant, K étant continue sur le compact $[0,1] \times [0,1]$ y est uniformément continue : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|x - x'| \leqslant \delta \quad \text{et} \quad |t - t'| \leqslant \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |K(x,t) - K(x',t')| \leqslant \varepsilon/2\,.$$

En particulier, on a $|K(x,t) - K(x',t')| \leqslant \varepsilon/2$ si $|x - x'| \leqslant \delta$. Soit $\delta' = \min[\delta, \varepsilon/(2\,\|K\|_\infty)]$ (on peut bien sûr supposer K non identiquement nul) ; alors :

$$|x - x'| \leqslant \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |(Tf)(x) - (Tf)(x')| \leqslant \big((\varepsilon/2) + \delta'\|K\|_\infty\big)\, \|f\|_\infty \leqslant \varepsilon\, \|f\|_\infty\,.$$

Cela prouve que Tf est (uniformément) continue sur $[0,1]$, et même que $T(B_{\mathscr{C}([0,1])})$ est équicontinue.

Il est clair que $T\colon \mathscr{C}([0,1]) \to \mathscr{C}([0,1])$ est linéaire. D'autre part, on a $|(Tf)(x)| \leqslant \|K\|_\infty \|f\|_\infty$ pour tout $x \in [0,1]$, c'est-à-dire $\|Tf\|_\infty \leqslant \|K\|_\infty \|f\|_\infty$. Cela prouve que l'ensemble $T(B_{\mathscr{C}([0,1])})$ est borné dans $\mathscr{C}([0,1])$ (ce qui signifie que l'application linéaire T est continue, et $\|T\| \leqslant \|K\|_\infty$). Avec l'équicontinuité, cela montre, grâce au *Théorème d'Ascoli*, que $T(B_{\mathscr{C}([0,1])})$ est relativement compact dans $\mathscr{C}([0,1])$. Donc T est un opérateur compact.

2) Montrons-le par récurrence. Pour $n = 0$, on a $T^0 = I$, qui est de norme 1, et l'inégalité se réduit à $|f(x)| \leqslant \|f\|_\infty$, ce qui est évidemment vrai. Supposons maintenant que $|(T^n g)(x)| \leqslant \|g\|_\infty \|K\|_\infty^n\, x^n/n!$ pour tout $x \in [0,1]$ et toute $g \in \mathscr{C}([0,1])$. Utilisons cette hypothèse de récurrence pour $g = T^n f$; on obtient :

$$\begin{aligned}|(T^{n+1}f)(x) &= \left| \int_0^x K(x,t)\, (T^n f)(xt)\, dt \right| \leqslant \int_0^x \|K\|_\infty|\, |(T^n f)(t)|\, dt \\ &\leqslant \int_0^x \|K\|_\infty \|K\|_\infty^n \|f\|_\infty \frac{t^n}{n!}\, dt = \|K\|_\infty^{n+1} \|f\|_\infty \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\,,\end{aligned}$$

ce qui est bien l'inégalité cherchée, à l'ordre $n+1$.

On en déduit $\|T^n f\|_\infty \leqslant (\|K\|_\infty^n/n!)\, \|f\|_\infty$; donc $\|T^n\|^{1/n} \leqslant \|K\|_\infty/(n!)^{1/n}$. Mais $(n!)^{1/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$; cela résulte de la formule de Stirling mais peut se voir facilement grâce à l'inégalité $n! \geqslant (k+1)\cdots n \geqslant k^{n-k}$ valable pour tout $k \leqslant n$; en effet, on a alors $\liminf_{n\to\infty} (n!)^{1/n} \geqslant k$, pour tout $k \geqslant 1$, et donc $\lim_{n\to\infty} (n!)^{1/n} = +\infty$. Or la formule du rayon spectral dit que $r(T) \leqslant \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}$ (l'espace peut être réel ou complexe) ; comme $\lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} = 0$, d'après ce qui précède, on obtient $r(T) = 0$.

3) Le spectre d'un opérateur T est contenu dans le disque (ou intervalle) fermé de centre 0 et de rayon $r(T)$; comme ici $r(T) = 0$, on a $\sigma\,(T) \subseteq \{0\}$. Mais T est compact, sur l'espace de dimension infinie $\mathscr{C}([0,1])$; donc 0 est une valeur spectrale de T. Il en résulte que $\sigma\,(T) = \{0\}$.

Exercice 3

1) a) Le nombre λ est valeur propre de B si, et seulement si, il existe un élément non nul $\mathbf{x} = (x_n)_{n\geqslant 1} \in \ell_2$ tel que $B(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$. On doit donc avoir $(x_2, x_3, \ldots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots)$, soit $x_{n+1} = \lambda x_n$ pour tout $n \geqslant 1$; donc $x_n = \lambda^{n-1}x_1$ pour tout $n \geqslant 1$. Si $|\lambda| < 1$, le vecteur $\mathbf{u}_\lambda = (1, \lambda, \lambda^2, \ldots)$ est dans ℓ_2 et vérifie $B(\mathbf{u}_\lambda) = \lambda\, \mathbf{u}_\lambda$. Donc λ est valeur propre de B.

b) On sait que le rayon spectral est plus petit, ou égal, à la norme ; comme $\|B\| = 1$, on a donc $r(B) \leqslant \|B\| = 1$; cela signifie que pour le spectre $\sigma(B)$, on a $\sigma(B) \subseteq \overline{\mathbb{D}}$, $\mathbb{D}$ étant le disque ouvert de centre 0 et de rayon 1. Mais on a vu au a) que tout $\lambda \in \mathbb{D}$ est valeur propre de B : $\mathbb{D} \subseteq \sigma_p(B)$. Comme le spectre $\sigma(B)$ est fermé (il est compact) et contient $\sigma_p(B)$, on en déduit que $\sigma(B) = \overline{\mathbb{D}}$.

2) Comme S est injectif, 0 n'est pas valeur propre de S. Maintenant, si $\lambda \neq 0$ était valeur propre de S, on aurait un $\mathbf{x} = (x_n)_{n\geqslant 1}$ non nul tel que $(0, x_1, x_2, \ldots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots)$, ce qui implique que $x_1 = 0$ et $x_{n-1} = \lambda x_n$ pour tout $n \geqslant 2$, donc $x_n = 0$ pour tout $n \geqslant 1$, ce qui contredit $\mathbf{x} \neq 0$. Donc S ne possède aucune valeur propre.

3) Si $\lambda \notin \sigma(T)$, l'opérateur $T - \lambda I$ est inversible ; il existe donc $R_\lambda \in \mathscr{L}(H)$ tel que $(T - \lambda I)\, R_\lambda = R_\lambda(T - \lambda I) = I$. On obtient $R_\lambda^*(T^* - \overline{\lambda}I) = (T^* - \overline{\lambda}I)\, R_\lambda^* = I$, en prenant les adjoints ; donc $\overline{\lambda} \notin \sigma(T^*)$. On a donc $\sigma(T^*) \subseteq \sigma(T)^\sim$. Inversement, cette inclusion, appliquée à T^* au lieu de T, donne $\sigma(T) \subseteq \sigma(T^*)^\sim$, puisque $T^{**} = T$. Comme cela s'écrit aussi $\sigma(T)^\sim \subseteq \sigma(T^*)$, cela donne l'égalité.

4) On a vu dans l'Exercice 12 du Chapitre II (mais il serait facile de le montrer à nouveau) que $S = B^*$. Donc $\sigma(S) = \sigma(B)^\sim = \overline{\mathbb{D}}^\sim = \overline{\mathbb{D}}$.

Exercice 4

1) a) Soit $(\mathbf{e}_n)_{n\geqslant 1}$ la base canonique de ℓ_2. Comme, pour tout $n \geqslant 1$, $T(\mathbf{e}_n) = c_n\mathbf{e}_n$, c_n est une valeur propre de T.

b) Soit $F = \overline{\{c_n\,;\ n \geqslant 1\}}$. C'est un fermé de $\mathbb{C}$; donc si $\lambda \notin F$, on a $\operatorname{dist}(\lambda, F) = d > 0$. Il en résulte que $\left|\frac{1}{c_n - \lambda}\right| \leqslant 1/d$ pour tout $n \geqslant 1$. On peut donc définir une application linéaire $R_\lambda \colon \ell_2 \to \ell_2$ en posant $R_\lambda(\mathbf{x}) = \left(\frac{1}{c_n - \lambda}\, x_n\right)_{n\geqslant 1}$; elle est continue, de norme $\|R_\lambda\| \leqslant 1/d$, et il est clair que $R_\lambda = (T - \lambda I)^{-1}$. Donc $\lambda \notin \sigma(T)$.

c) Comme le spectre est fermé et qu'il contient $\{c_n\,;\ n \geqslant 1\}$, d'après le a), il contient $\overline{\{c_n\,;\ n \geqslant 1\}}$. Il résulte alors du b) qu'il lui est égal : $\sigma(T) = \overline{\{c_n\,;\ n \geqslant 1\}}$.

2) Soit $(c_n)_{n\geqslant 1}$ une suite dense dans K, de sorte que $\overline{\{c_n\,;\ n \geqslant 1\}} = K$. Elle est bornée ; donc si on lui associe l'opérateur T du 1), celui-ci vérifie $\sigma(T) = K$.

Exercice 5

A. 1) On a :

$$\begin{aligned} R(\lambda_1) - R(\lambda_2) &= R(\lambda_1)\,[I - (T - \lambda_1 I)\, R(\lambda_2)] \\ &= R(\lambda_1)\,\big[I + [(\lambda_1 - \lambda_2)\, I - (T - \lambda_2 I)]\, R(\lambda_2)\big] \quad = (\lambda_1 - \lambda_2)\, R(\lambda_1)\, R(\lambda_2)\,; \end{aligned}$$

donc $\|R(\lambda_1) - R(\lambda_2)\| \leqslant |\lambda_1 - \lambda_2|\, \|R(\lambda_1)\|\, \|R(\lambda_2)\|$.

2) a) Il résulte du 1) que l'on a $\|R(\lambda_n) - R(\lambda_k)\| \leqslant M^2|\lambda_n - \lambda_k|$; donc, puisque la suite $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ converge, la suite $\big(R(\lambda_n)\big)_{n\geqslant 1}$ est de Cauchy dans $\mathscr{L}(E)$. Comme E est complet, $\mathscr{L}(E)$ aussi ; par conséquent la suite $\big(R(\lambda_n)\big)_{n\geqslant 1}$ converge, vers un opérateur $U \in \mathscr{L}(E)$.

b) Pour tout $n \geqslant 1$, on a $(T - \lambda_n I)\, R(\lambda_n) = R(\lambda_n)\, (T - \lambda_n I) = I$; donc, en passant à la limite, on obtient $(T - \lambda I)\, U = U\, (T - \lambda I) = I$, ce qui signifie que $U = (T - \lambda I)^{-1}$, et donc $\lambda \in \rho(T)$ et $U = R(\lambda)$.

Nota. On a utilisé le fait que $\mathscr{L}(E)$ est une *algèbre de Banach*, c'est-à-dire que l'application $(A, B) \in \mathscr{L}(E) \mapsto AB \in \mathscr{L}(E)$ est continue. Cela résulte du fait que cette application est bilinéaire et que $\|AB\| \leqslant \|A\|\, \|B\|$ (voir, par exemple, l'Exercice 14 du Chapitre IV).

B. 1) Comme T est une isométrie, on a $\|T\| = 1$; comme $r(T) \leqslant \|T\|$, on en déduit que $\sigma(T) \subseteq \overline{\mathbb{D}}$.

Nota. Bien que cela ne soit pas utile ici, on peut remarquer que si T est une isométrie, ses puissances T^n en sont aussi ; donc $\|T^n\| = 1$, et la formule du rayon spectral, dans le cas d'un *espace complexe*, dit que $r(T) = 1$. Cela n'est pas vrai pour les espaces réels, puisque, dans $\mathbb{R}^2$, les rotations (d'angle $\neq 0 \mod \pi$) n'ont pas de valeur propre et ont donc un spectre vide.

2) Si $\sigma(T) \subseteq \partial\mathbb{D}$, on a $0 \notin \sigma(T)$, et donc T est inversible.

3) a) En utilisant le fait que T est une isométrie, on a, pour tout $x \in E$:

$$\|(T - \lambda_n I)x\| \geqslant \|Tx\| - |\lambda_n|\,\|x\| = \|x\| - |\lambda_n|\,\|x\| = (1 - |\lambda_n|)\,\|x\|\,.$$

b) Comme $|\lambda| < 1$, le nombre $\delta = \frac{1-|\lambda|}{2}$ est > 0. La convergence de $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ vers λ permet donc de trouver un entier $N \geqslant 1$ tel que $|\lambda_n - \lambda| \leqslant \delta$ pour $n \geqslant N$. On a alors $|\lambda_n| \leqslant |\lambda| + \delta$; d'où $1 - |\lambda_n| \geqslant 1 - (|\lambda| + \delta) = (1 - |\lambda|) - \delta = 2\delta - \delta = \delta$. Il résulte alors du a) que $\|(T - \lambda_n I)x\| \geqslant \delta\,\|x\|$ pour tout $x \in E$.

c) En utilisant cette inégalité avec $R(\lambda_n)x$ au lieu de x, on obtient :

$$\|x\| = \|(T - \lambda_n I)\,[R(\lambda_n)x]\| \geqslant \delta\,\|R(\lambda_n)x\|\,;$$

d'où $\|R(\lambda_n)x\| \leqslant (1/\delta)\,\|x\|$ pour tout $x \in E$, et donc $\|R(\lambda_n)\| \leqslant (1/\delta)$.

Il résulte alors du **A.** 2) que $\lambda \in \rho(T)$, c'est-à-dire $\lambda \notin \sigma(T)$.

d) Ainsi, $\lambda \in \mathbb{D}\cap\big(\mathbb{C}\setminus\sigma(T)\big) = \mathbb{D}\setminus A$, pour toute suite $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ dans $\mathbb{D}\setminus A$ convergeant vers $\lambda \in \mathbb{D}$. Cela signifie que $\mathbb{D}\setminus A$ est fermé *dans* $\mathbb{D}$. Mais, le spectre étant fermé, $A = \sigma(T)\cap\mathbb{D}$ est aussi fermé dans $\mathbb{D}$. Comme $\mathbb{D}$ est *connexe*, et comme $A \neq \emptyset$, par hypothèse (on a $\sigma(T) \subseteq \overline{\mathbb{D}}$ et $\sigma(T) \not\subseteq \partial\mathbb{D}$), on obtient $A = \mathbb{D}$.

On a donc $\sigma(T) \cap \mathbb{D} = \mathbb{D}$, ce qui signifie que $\sigma(T) \supseteq \mathbb{D}$. Comme le spectre est fermé, on a en fait $\sigma(T) \supseteq \overline{\mathbb{D}}$. Mais on avait vu au 1) que $\sigma(T) \subseteq \overline{\mathbb{D}}$; donc $\sigma(T) = \overline{\mathbb{D}}$.

Exercice 6

1) a) Puisque $t \in [0,1]$, on a $|(Sf)(t)| \leqslant |f(t)|$; il en résulte que $Sf \in L^2$ pour toute $f \in L^2$ (Sf étant de toute évidence mesurable). On a ainsi une application $S\colon L^2 \to L^2$, qui est clairement linéaire. Comme $|(Sf)(t)| \leqslant |f(t)|$ pour tout $t \in [0,1]$ entraîne $\|Sf\|_2 \leqslant \|f\|_2$, cela prouve que S est continu.

b) Si l'on a $Sf = \lambda f$, pour un $\lambda \in \mathbb{C}$, alors, pour tout $t \in [0,1]$, on a $tf(t) = \lambda f(t)$; par conséquent $f(t) = 0$ pour tout $t \neq \lambda$. En particulier, $f = 0$ presque partout, c'est-à-dire que $f = 0$ en tant qu'élément de L^2. Ainsi λ n'est pas valeur propre.

2) a) On a :

$$\begin{aligned}\|(S - \lambda I)(f_\varepsilon)\|_2^2 &\leqslant \int_0^1 [(t-\lambda)\,f_\varepsilon(t)]^2\,dt = \int_0^1 [(t-\lambda)\,\frac{1}{\varepsilon}\,\mathbb{1}_{[\lambda,\lambda+\varepsilon]}(t)\,dt \\ &= \frac{1}{\varepsilon}\int_\lambda^{\lambda+\varepsilon} (t-\lambda)^2\,dt = \frac{1}{3\varepsilon}\,\big[(t-\lambda)^3\big]_\lambda^{\lambda+\varepsilon} = \frac{1}{3\varepsilon}\,\varepsilon^3 = \frac{\varepsilon^2}{3} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0\,.\end{aligned}$$

b) Si λ n'était pas dans le spectre de S, $S - \lambda I$ serait inversible ; en notant R_λ son inverse, on aurait, grâce au a) et à la continuité de R_λ, $f_\varepsilon = R_\lambda[(S - \lambda I)(f_\varepsilon)] \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$. Mais $\|f_\varepsilon\|_2 = 1$, et l'on aurait une contradiction.

3) Comme $[0,1]$ est fermé, si $\lambda \notin [0,1]$, on a $\operatorname{dist}(\lambda, [0,1]) = d > 0$. Ainsi, $|t - \lambda| \geqslant d$ pour tout $t \in [0,1]$. Il en résulte que si l'on pose $(R_\lambda f)(t) = \frac{1}{t-\lambda}\,f(t)$, on a $|(R_\lambda f)(t)| \leqslant (1/d)\,|f(t)|$, de sorte que l'on a une application $R_\lambda\colon L^2 \to L^2$, qui est clairement linéaire, et qui est

continue car $\|R_\lambda f\|_2 \leqslant (1/d)\,\|f\|_2$. Comme il est alors clair que $R_\lambda(S-\lambda I) = (S-\lambda I)\,R_\lambda = I$, il en résulte que $S - \lambda I$ est inversible, et donc que $\lambda \notin \sigma(S)$.

4) Il résulte du 3) que $\sigma(S) \subseteq [0,1]$. Mais le 2) nous dit que $[0,1[\subseteq \sigma(S)$; comme le spectre est fermé, cela entraîne que $[0,1] \subseteq \sigma(S)$. Par conséquent, $\sigma(S) = [0,1]$.

Exercice 7

1) Comme la mesure m est σ-finie, il existe une suite croissante $(S_n)_{n\geqslant 1}$ de partie mesurables de mesure finie telle que $S = \lim\uparrow_{n\to\infty} S_n$. Alors $B = \lim\uparrow_{n\to\infty}(S_n \cap B)$, et donc $m(B) = \lim\uparrow_{n\to\infty} m(S_n \cap B)$. Comme $m(B) > 0$, on a $m(S_n \cap B) > 0$ pour n assez grand. En particulier, pour l'un de ces n, $A = S_n \cap B$ est non négligeable et de mesure finie.

2) a) Il est immédiat que M_u est mesurable, et l'on a $\int_S |M_u(f)|^2\,dm \leqslant \|u\|_\infty^2 \int_S |f|^2\,dm$; donc $M_u \in L^2(m)$ pour toute $f \in L^2(m)$. Il est ensuite clair que M_u est linéaire, et elle est continue et $\|M_u\| \leqslant \|u\|_\infty$, puisque $\|M_u\|_2 \leqslant \|u\|_\infty \|f\|_2$.

b) Soit $\beta < \|u\|_\infty$. Par définition $B = \{t \in S\,;\ |u(t)| > \beta\}$ est de mesure > 0. Par le 1), il existe une partie mesurable $A \subseteq B$ non négligeable et de mesure finie. La fonction $f = \mathbb{1}_A$ est alors dans $L^2(m)$ et non nulle. On a, d'une part, $\|\mathbb{1}_A\|_2 = [m(A)]^{1/2}$, et, d'autre part, puisque $A \subsetneq B$:

$$\|M_u(\mathbb{1}_A)\|_2^2 = \int_S [|u(t)|\,\mathbb{1}_A(t)]^2\,dm(t) = \int_A |u(t)|^2\,dm(t) \geqslant \beta^2 m(A)\,;$$

donc $\|M_u\| \geqslant \frac{\|M_u(\mathbb{1}_A)\|_2}{\|\mathbb{1}_A\|_2} \geqslant \beta$. Comme c'est vrai pour tout $\beta < \|u\|_\infty$, on obtient $\|M_u\| \geqslant \|u\|_\infty$, d'où l'égalité.

3) a) Puisque $\frac{1}{u-\lambda\mathbb{1}} \in L^\infty(m)$, on peut considérer l'opérateur de multiplication $M_{\frac{1}{u-\lambda\mathbb{1}}}$ associé. Il est clair que $M_u - \lambda\,\mathrm{Id} = M_{u-\lambda\mathbb{1}}$ et $M_{u-\lambda\mathbb{1}} M_{\frac{1}{u-\lambda\mathbb{1}}} = M_{\frac{1}{u-\lambda\mathbb{1}}} M_{u-\lambda\mathbb{1}} = \mathrm{Id}$. Donc $M_u - \lambda\,\mathrm{Id}$ est inversible.

b) Comme V est un voisinage de λ, on a $d = \mathrm{dist}\,(\lambda, V^c) > 0$. Maintenant, dire que $u^{-1}(V)$ est négligeable signifie que u prend m-presque partout ses valeurs dans V^c. On a ainsi $|u(t) - \lambda| \geqslant d$ pour m-presque tout $t \in S$. Il en résulte que $\frac{1}{u-\lambda\mathbb{1}} \in L^\infty(m)$. Grâce au a), on en déduit que $M_u - \lambda\,\mathrm{Id}$ est inversible, c'est-à-dire que $\lambda \notin \sigma(M_u)$.

c) Prenons pour V le disque fermé de centre λ et de rayon ε. Par hypothèse, $B = u^{-1}(V)$ n'est pas m-négligeable. Il existe donc, grâce au 1), une partie mesurable $A \subseteq u^{-1}(V)$ telle que $0 < m(A) < +\infty$. Pour $t \in A$, on a $u(t) \in V$, c'est-à-dire $|u(t) - \lambda| \leqslant \varepsilon$. Considérons la fonction $f_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{m(A)}}\,\mathbb{1}_A$. Elle est dans $L^2(m)$ et $\|f_\varepsilon\|_2 = 1$. De plus :

$$\|(u-\lambda)f_\varepsilon\|_2^2 = \frac{1}{m(A)} \int_A |u(t) - \lambda|^2\,dm(t) \leqslant \varepsilon\,.$$

Il en résulte que $\lambda \in \sigma(M_u)$, car sinon cela signifierait que $M_u - \lambda\,\mathrm{Id}$ est inversible et il existerait une constante $c > 0$ (par exemple $c = 1/\|(M_u - \lambda\,\mathrm{Id})^{-1}\|$) telle que $\|(u-\lambda)f\|_2 = \|(M_u - \lambda\,\mathrm{Id})(f)\|_2 \geqslant c\,\|f\|_2$ pour toute $f \in L^2(m)$, ce qui n'est pas le cas ici : on devrait avoir $c = c\,\|f_\varepsilon\|_2 \leqslant \|(u-\lambda)f_\varepsilon\|_2 \leqslant \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$.

d) On a montré au b et c) que $\lambda \in \sigma(M_u)$ si et seulement si $m[u^{-1}(V)] > 0$ pour tout voisinage V de λ. Si $\lambda \in \sigma(M_u)$, on a donc, pour tout voisinage V de λ, $m[u^{-1}(V)] > 0$; en particulier $u^{-1}(V) \neq \emptyset$, ce qui signifie que $V \cap u(S) \neq \emptyset$. Comme c'est vrai pour tout voisinage V de λ, on obtient $\lambda \in \overline{u(S)}$. Par conséquent, $\sigma(M_u) \subseteq \overline{u(S)}$.

4) Supposons maintenant que S est un espace topologique muni de sa tribu borélienne et que u est continue (et bornée). Si $\lambda \in \overline{u(S)}$, on a $V \cap u(S) \neq \emptyset$, pour tout voisinage V de λ. Mais, comme ci-dessus, dire que $V \cap u(S) \neq \emptyset$ revient à dire que $u^{-1}(V) \neq \emptyset$. Comme on peut prendre V ouvert, la continuité de u implique que $u^{-1}(V)$ est ouvert. Par hypothèse tout ouvert non vide est de mesure non nulle ; donc $m[u^{-1}(V)] > 0$. Ainsi $m[u^{-1}(V)] > 0$

pour tout voisinage ouvert V de λ. Cela reste vrai *a fortiori* pour tout voisinage V de λ. On obtient donc $\lambda \in \sigma(M_u)$. Par conséquent $\overline{u(S)} \subseteq \sigma(M_u)$, d'où l'égalité, grâce au 3) d).

Exercice 8

1) Pour toute fonction mesurable *bornée* f, on a :

$$|(Tf)(x) - (Tf)(x')| = \left| \int_{x'}^{x} f(t)\, dt \right| \leqslant \|f\|_\infty \, |x - x'| \qquad (*)$$

(c'est en particulier le cas si f est continue sur $[0,1]$) ; donc Tf est lipschitzienne, et en particulier continue.

Il est clair que T est linéaire, par la linéarité de l'intégrale.

Pour montrer que T est compact, il faut montrer que l'image de la boule unité B de $\mathscr{C}([0,1])$ par T est relativement compacte. Pour cela, on utilise le *Théorème d'Ascoli* ; or :

- $\|(Tf)(x)| \leqslant \int_0^1 \|f\|_\infty \, dt \leqslant 1$ pour toute $f \in B$, et $T(B)$ est bornée ;
- $|(Tf)(x) - (Tf)(x')| \leqslant [x - x'|$ pour toute $f \in B$, par $(*)$, d'où l'équicontinuité de $T(B)$.

2) a) Pour $\lambda \neq 0$, l'équation $F - \lambda F' = 0$ a pour solutions $F(x) = C\, \mathrm{e}^{x/\lambda}$, où $C \in \mathbb{R}$ est une constante réelle. La méthode de variation de la constante donne $-\lambda\, C'\, \mathrm{e}^{x/\lambda} = g(x)$, et donc, puisque $F(0) = 0$, $C = -\frac{1}{\lambda} G(x)$; on obtient $F(x) = -\frac{1}{\lambda}\, \mathrm{e}^{-x/\lambda} G(x)$.

b) Il résulte du a) que, pour $\lambda \neq 0$, l'opérateur $T - \lambda I$ est bijectif ; en effet, f étant continue, le Théorème fondamental du Calcul Intégral dit que Tf est continûment dérivable et que $(Tf)' = f$; on peut donc utiliser le a) avec $F = Tf$. Il en résulte que T ne possède aucune valeur spectrale non nulle. Par ailleurs, 0 est une valeur spectrale, car $\mathscr{C}([0,1])$ est de dimension infinie (ce que l'on peut voir directement : T n'est pas surjectif, puisque Tf est continûment dérivable). Ainsi le spectre de T est $\{0\}$.

Pourtant 0 n'est pas une valeur propre de T : $Tf = 0$ entraîne $f = (Tf)' = 0$.

Exercice 9

1) a) On a $(Tf)(x) - (Tf)(y) = \int_{1-y}^{1-x} f(t)\, dt$; donc $|(Tf)(x) - (Tf)(y)| \leqslant \|f\|_\infty |x - y|$.

b) Il suffit d'appliquer le *Théorème d'Ascoli*, exactement comme au 1) de l'Exercice 8.

2) La fonction f étant continue, le Théorème fondamental du Calcul Intégral nous dit que Tf est continûment dérivable ; T n'est donc pas surjective, ce qui entraîne que $0 \in \sigma(T)$. D'autre part, T est injective car, pour tout $x \in [0,1]$, on a $(Tf)'(x) = -f(1-x)$, et par conséquent $Tf = 0$ entraîne $f = 0$. Donc 0 n'est pas une valeur propre de T.

3) a) On a $Tg = \lambda g$, avec $\lambda \neq 0$, puisque l'on a vu au 2) que 0 n'est pas valeur propre de T. Or on sait que Tg est de classe C^1 et $(Tg)(1) = 0$; on en déduit que g est de classe C^1 et $g(1) = 0$. De plus, comme $(Tg)'(x) = -g(1-x)$, on obtient $\lambda g'(x) = -g(1-x)$.

b) En utilisant de nouveau le fait que $\lambda \neq 0$, l'égalité $\lambda g'(x) = -g(1-x)$, pour tout $x \in [0,1]$, entraîne que g' est de classe C^1, c'est-à-dire que g est de classe C^2. Cette égalité donne aussi, d'une part, $\lambda g'(0) = -g(1) = 0$, d'où $g'(0) = 0$ (toujours parce que $\lambda \neq 0$), et, d'autre part, $\lambda g'(1) = -g(0)$. Finalement, en la dérivant, on obtient $\lambda g''(x) = g'(1-x)$, d'où $\lambda^2 g''(x) = -g(x)$.

c) L'équation différentielle $\lambda^2 y'' + y = 0$ a pour solution générale $y(x) = A\cos(x/\lambda) + B\sin(x/\lambda)$. Alors $y'(x) = -(A/\lambda)\sin(x/\lambda) + (B/\lambda)\cos(x/\lambda)$. La condition $y'(0) = 0$ entraîne donc $B = 0$, de sorte que $y(x) = A\cos(x/\lambda)$.

d) Il résulte du b) et du c) que $g(x) = A\cos(x/\lambda)$. Mais on sait que $g(1) = 0$; cela entraîne $\cos(1/\lambda) = 0$. Par ailleurs, la condition $\lambda g'(1) = -g(0)$ donne $\sin(1/\lambda) = 1$, puisque $g'(1) = -(A/\lambda)\sin(1/\lambda)$ et $g(0) = A$. Ainsi l'on a $\cos(1/\lambda) = 0$ et $\sin(1/\lambda) = 1$, ce qui équivaut à dire que $\frac{1}{\lambda} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Les valeurs $\lambda_k = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$, sont donc les seules valeurs propres possibles pour T. Vérifions que ce sont effectivement des valeurs propres pour T. Pour cela, considérons, pour $k \in \mathbb{Z}$, la fonction continue g_k définie par $g_k(x) = \cos\big(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\big)x$. On a $(Tg_k)(x) = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2k\pi}\sin\big[\big(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\big)(1-x)\big]$. Or on a $\sin\big[\big(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\big)(1-x)\big] = \sin\big[\frac{\pi}{2} - \big(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\big)x\big] = \cos\big(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\big)x = g_k(x)$; de sorte que l'on a bien $Tg_k = \lambda_k g_k$.

4) a) L'opérateur T étant compact, ses valeurs spectrales non nulles sont des valeurs propres. Comme on a vu au 2) que $0 \in \sigma(T)$, il résulte du 3) que :

$$\sigma(T) = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}\ ;\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

b) Le rayon spectral de T est par conséquent $\frac{2}{\pi}$. Il résulte alors de la formule du rayon spectral, puisque l'espace est *complexe*, que $\lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} = 2/\pi$.

Remarque. On notera la différence avec l'Exercice 8 ci-dessus. Bien que l'opérateur ici soit une simple modification de l'opérateur de Volterra (composition avec la symétrie qui à f associe la fonction $x \mapsto f(1-x)$), le spectre n'est pas du tout le même.

Exercice 10

1) Si $f \leqslant g$, alors $g - f \geqslant 0$; donc $U(g) - U(f) = U(g-f) \geqslant 0$.

Comme $-\|f\|_\infty \mathbb{1} \leqslant f \leqslant \|f\|_\infty \mathbb{1}$, on obtient $-\|f\|_\infty U(\mathbb{1}) = U(-\|f\|_\infty \mathbb{1}) \leqslant U(f) \leqslant U(\|f\|_\infty \mathbb{1}) = \|f\|_\infty U(\mathbb{1})$, soit $|U(f)| \leqslant \|f\|_\infty U(\mathbb{1})$. Donc $\|U(f)\|_\infty \leqslant \|U(\mathbb{1})\|_\infty \|f\|_\infty$. Cela prouve que U est continu et que $\|U\| \leqslant \|U(\mathbb{1})\|_\infty$. On a égalité car $\|\mathbb{1}\|_\infty = 1$.

2) La fonction $(x,t) \mapsto \varphi(x,t)\, f(t)$ étant continue sur $[0,1]^2$, elle est intégrable sur $[0,1]$ par rapport à la variable t, de sorte que $(U_\varphi f)(x)$ existe pour tout $x \in [0,1]$, et de plus $U_\varphi f$ est continue sur $[0,1]$, d'après un théorème vu en $2^{ème}$ année de Licence.

L'application $U\colon f \in \mathscr{C}([0,1]) \mapsto U_\varphi f \in \mathscr{C}([0,1])$ est clairement linéaire, et l'on a $|U_\varphi(f)| \leqslant C\,\|f\|_\infty$, avec $C = \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} \int_0^1 \varphi(x,t)\,dt$ (puisque φ est positive) ; donc U_φ est continu et $\|U_\varphi\| \leqslant C$. Posons $h(x) = U_\varphi(\mathbb{1})(x) = \int_0^1 \varphi(x,t)\,dt$; comme $\frac{\partial\varphi}{\partial x} \geqslant 0$, la fonction $x \mapsto \varphi(x,t)$ est croissante pour tout t ; il en résulte que h est croissante, et donc que $C = h(1) = \int_0^1 \varphi(1,t)\,dt$. On a en fait $\|U_\varphi\| = h(1)$ car $\|U_\varphi\| \geqslant \|U_\varphi(\mathbb{1})\|_\infty \geqslant [U_\varphi(\mathbb{1})](1) = h(1)$.

3) Il faut montrer que l'image $\mathcal{K}$ par U_φ de la boule-unité de $\mathscr{C}(X)$ est relativement compacte dans $\mathscr{C}(Y)$. On utilise pour cela le *Théorème d'Ascoli*. Il s'agit de montrer que $\mathcal{K}$ est :

- bornée, et c'est le cas car U_φ est continue ;

- équicontinue ; vérifions cela : la fonction φ étant continûment différentiable, $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ est continue, et donc $M = \sup_{0\leqslant x,t\leqslant 1} \big|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)\big| < +\infty$, et l'on a, par le *Théorème des accroissements finis*, pour $\|f\|_\infty \leqslant 1$ et tous $x, x' \in [0,1]$:

$$|(U_\varphi f)(x) - (U_\varphi f)(x')| \leqslant \int_0^1 |\varphi(x,t) - \varphi(x',t)|\,|f(t)|\,dt \leqslant \int_0^1 M\,|x-x'|\,\|f\|_\infty\,dt \leqslant M\,|x-x'|.$$

Exercice 11

Soit $T\colon E \to F$ un opérateur compact, avec $F = \ell_p$, $1 \leqslant p < \infty$, ou $F = c_0$. Soit $(e_n)_{n\geqslant 1}$ la base canonique de F : $e_n = (\delta_{n,k})_{k\geqslant 1}$, où $\delta_{n,k} = 1$ si $k = n$ et $= 0$ si $k \neq n$. On sait que tout $y = (y_n)_{n\geqslant 1} \in F$ s'écrit $y = \sum_{n=1}^\infty y_n e_n$ (Exercice 13 du Chapitre I). Soit P_n la projection qui à un tel y associe $P_n y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$, et soit $T_n = P_n T$. C'est un opérateur de rang fini (puisque $\dim(\operatorname{im} P_n) = n$). Il reste à montrer que $\|T - T_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Supposons que $\|T - T_n\|$ ne tende pas vers 0. On pourrait trouver un $\varepsilon_0 > 0$ et une sous-suite tels que, si $S_k = T_{n_k}$, on ait $\|T - S_k\| > \varepsilon_0$ pour tout $k \geqslant 1$. Notons $Q_k = I - P_{n_k}$. Comme $\|T - T_n\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|(I - P_n)(Tx)\| = \sup_{y\in T(B_E)} \|(I-P_n)(y)\|$, on peut trouver, pour tout $k \geqslant 1$, un $y_k \in T(B_E)$ tel que $\|T - S_k\| \leqslant \|Q_k(y_k)\| + 2^{-k}$. Comme T est compact, $T(B_E)$ est relativement compact et $(y_k)_{k\geqslant 1}$ possède une sous-suite convergente, vers un $y \in F$. Sans perdre de généralité, on peut supposer que $(y_k)_{k\geqslant 1}$ elle-même tend vers y. Or $\|Q_k(y_k)\| \leqslant \|Q_k(y)\| + \|Q_k(y-y_k)\| \leqslant \|Q_k(y)\| + \|y-y_k\|$ (car $\|Q_k\| = 1$). Comme $\|Q_k(y)\| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ et $\|y-y_k\| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, on obtient $\|T-S_k\| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, ce qui contredit $\|T-S_k\| > \varepsilon_0$. Donc $\|T-T_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Exercice 12

1) Soit T un opérateur de Hilbert-Schmidt sur un espace de Hilbert (réel) séparable H, et soit $(e_n)_{n\geqslant 1}$ une base orthonormée de H. Soit P_n la projection orthogonale de H sur l'espace engendré par $e_1, \ldots, e_n$, et posons $T_n = TP_n$. C'est un opérateur de rang fini et $\|T-T_n\|^2 \leqslant \|T-T_n\|^2_{\mathfrak{S}_2(H)} = \sum_{k=1}^\infty \|Te_k - T_ne_k\|^2 = \sum_{k=n+1}^\infty \|Te_k\|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Donc T est limite des opérateurs de rang fini T_n ; par conséquent T est compact.

2) a) Il est clair que $\sum_{n=1}^\infty |w_nx_n|^2 \leqslant \|\mathbf{w}\|_\infty^2 \sum_{n=1}^\infty |w_n|^2$; donc $T(\mathbf{x}) \in \ell_2$ pour tout $\mathbf{x} \in \ell_2$. Comme T est clairement linéaire, cela prouve aussi que T est continu et $\|T\| \leqslant \|\mathbf{w}\|_\infty$. On a en fait $\|T\| = \|\mathbf{w}\|_\infty$. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \geqslant 1$ tel que $|w_N| \geqslant \|\mathbf{w}\|_\infty - \varepsilon$; alors $\|T\| \geqslant \|T(\mathbf{e}_N)\|_2 = \|w_N\mathbf{e}_N\|_2 = |w_N| \geqslant \|\mathbf{w}\|_\infty - \varepsilon$.

Notons qu'ainsi $\mathbf{w} \in \ell_\infty \mapsto T_\mathbf{w} \in \mathscr{L}(\ell_2)$ est une isométrie de ℓ_∞ dans $\mathscr{L}(\ell_2)$.

b) • Supposons $T_\mathbf{w}$ compact, et montrons que $w_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Comme la suite $\mathbf{w}$ est bornée, il suffit de montrer qu'elle n'a que 0 comme seule valeur d'adhérence possible. Soit donc w une valeur d'adhérence de $(w_n)_{n\geqslant 1}$. Il existe une sous-suite $(w_{n_k})_{k\geqslant 1}$ convergeant vers w. L'opérateur $T_\mathbf{w}$ étant compact, la suite $\big(T(\mathbf{e}_{n_k})\big)_{k\geqslant 1}$ possède une sous-suite convergente (car $\mathbf{e}_{n_k} \in B_{\ell_2}$). Soit $\mathbf{x} = \lim_{l\to\infty} T(\mathbf{e}_{n_{k_l}})$ sa limite. Mais $T(\mathbf{e}_n) = w_n\mathbf{e}_n$ pour tout $n \geqslant 1$; donc, pour tout $j \geqslant 1$, on a $\big(T(\mathbf{e}_{n_{k_l}}) \mid \mathbf{e}_j\big) = 0$ pour $n_{k_l} > j$. En faisant tendre l vers l'infini, on obtient $(\mathbf{x} \mid \mathbf{e}_j) = 0$. Comme c'est vrai pour tout $j \geqslant 1$, on a $\mathbf{x} = 0$. Mais alors $|w_{n_{k_l}}| = \|w_{n_{k_l}}\mathbf{e}_{n_{k_l}}\|_2 = \|T(\mathbf{e}_{n_{k_l}})\|_2 \xrightarrow[l\to\infty]{} \|\mathbf{x}\|_2 = 0$. Donc $w = 0$, comme on le souhaitait.

On trouvera à l'Exercice 24 du Chapitre VIII un argument formellement (en fait les preuves sont similaires) plus direct, en utilisant le fait que la suite $(\mathbf{e}_n)_{n\geqslant 1}$ converge faiblement vers 0).

• Supposons maintenant que $w_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Alors $\mathbf{w}_n = (w_1, \ldots, w_n, 0, 0, \ldots) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbf{w}$ dans c_0 (voir l'Exercice 13 du Chapitre I). L'opérateur $T_n \colon \ell_2 \to \ell_2$ défini par :

$$T_n(\mathbf{x}) = (w_1x_1, \ldots, w_nx_n, 0, 0, \ldots)$$

est de rang fini et l'on a :

$$\begin{aligned}
\|T_n - T\| &= \sup_{\|\mathbf{x}\|_2\leqslant 1} \|(T_n - T)\mathbf{x}\|_2 = \sup_{\|\mathbf{x}\|_2\leqslant 1} \|(0, \ldots, 0, w_{n+1}x_{n+1}, w_{n+2}x_{n+2}, \ldots)\|_2 \\
&\leqslant \sup_{\|\mathbf{x}\|_2\leqslant 1} \left[\sup_{k\geqslant n+1} |w_k| \Big(\sum_{k=n+1}^\infty |x_k|^2\Big)^{1/2}\right] = \sup_{k\geqslant n+1} |w_k| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,;
\end{aligned}$$

donc $T = T_\mathbf{w}$ est compact comme limite d'opérateurs de rang fini.

On notera que l'application $\mathbf{w} \mapsto T_\mathbf{w}$ réalise ainsi une isométrie de c_0 dans $\mathscr{K}(\ell_2)$.

c) Par définition, $T = T_\mathbf{w}$ est Hilbert-Schmidt si et seulement si $\sum_{n=1}^\infty \|T(\mathbf{e}_n)\|_2^2 < +\infty$. Or $\|T(\mathbf{e}_n)\|_2 = \|w_n\mathbf{e}_n\|_2 = |w_n|$; donc $T = T_\mathbf{w}$ est Hilbert-Schmidt si et seulement si $\sum_{n=1}^\infty |w_n|^2 < +\infty$, c'est-à-dire $\mathbf{w} \in \ell_2$. Pour avoir un opérateur compact mais pas Hilbert-Schmidt, il suffit donc de prendre un opérateur de la forme $T_\mathbf{w}$, avec $\mathbf{w} \in c_0$ mais $\mathbf{w} \notin \ell_2$; par exemple $\mathbf{w} = (1/\sqrt{n})_{n\geqslant 1}$.

Exercice 13

1) Dire que $0 \notin \overline{T(S_E)}$ équivaut à dire que $\mathrm{dist}\,(0, \overline{T(S_E)}) = c > 0$. Cela signifie que $\|Tx\| \geqslant c$ pour tout $x \in S_E$. Par homogénéité, cela entraîne que $\|Tx\| \geqslant c\,\|x\|$ pour tout $x \in E$.

Montrons qu'alors $T(E)$ est fermé (voir aussi l'Exercice 11 du Chapitre II). Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite dans E telle que $Tx_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$. La suite $(Tx_n)_{n\geqslant 1}$ est en particulier de Cauchy : pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un $N \geqslant 1$ tel que $\|Tx_n - Tx_k\| \leqslant \varepsilon$ pour $n, k \geqslant N$. Alors $\|x_n - x_k\| \leqslant (1/c)\,\|Tx_n - Tx_k\| \leqslant (\varepsilon/c)$, pour $n, k \geqslant N$. La suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est donc de Cauchy dans E. Comme E est complet, elle converge, et, si x est sa limite, on a, puisque T est continue, $Tx_n \xrightarrow[n\to\infty]{} Tx$. Il en résulte que $y = Tx \in T(E)$.

2) Il en résulte que le sous-espace $F = T(E)$ de E est complet, puisque E l'est. On a ainsi une application linéaire continue *surjective* $T\colon E \to T(E)$ de l'espace de Banach E sur l'espace de Banach $T(E)$. Le *Théorème de l'application ouverte* dit qu'il existe $r > 0$ tel que $B_{T(E)}(0, r) \subseteq T(B_E)$.

3) Si T est de plus compact, $T(B_E)$ est relativement compact. Il résulte du 2) qu'alors $B_{T(E)}(0, r)$ l'est aussi. Comme cette boule est fermée, elle est en fait compacte, et il résulte du *Théorème de Riesz* du Chapitre I (Théorème I.2.5) que $T(E)$ est de dimension finie, c'est-à-dire que T est de rang fini.

Exercice 14

1) Comme l'espace X est *complexe*, on a la *formule du rayon spectral* :

$$r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}.$$

Si $r(T) < 1$, on a $\|T^n\|^{1/n} < 1$ (donc $\|T^n\| < 1$) pour n assez grand, disons $n \geqslant n_0 \geqslant 1$. Alors, pour tout $x \in X$, on a $\|T^n x\| \leqslant \max\{\|x\|, \|Tx\|, \ldots, \|T^{n_0-1}x\|, 1\}$ pour tout $n \geqslant 0$; par conséquent $O(x, T)$ ne peut pas être dense dans X.

2) a) Pour toute $\varphi \in X^*$, on a $\langle U^*\varphi, x\rangle = \langle \varphi, Ux\rangle = 0$ pour tout $x \in \ker U$; donc $U^*\varphi \in (\ker U)^\perp$, de sorte que $\mathrm{im}\, U^* \subseteq (\ker U)^\perp$.

b) Si λ n'est pas une valeur spectrale de T^*, $T^* - \lambda Id_{X^*}$ est inversible. En particulier, $\mathrm{im}\,(T^* - \lambda Id_{X^*}) = X^*$. Il résulte du a) que $[\ker\,(T - \lambda Id_X)]^\perp = X^*$. Ce n'est possible, par le *Théorème de Hahn-Banach*, que si $\ker\,(T - \lambda Id_X) = \{0\}$ (Corollaire VI.2.3), c'est-à-dire que si λ n'est pas une valeur propre de T.

Variante. Il est facile de voir (*cf.* le 3) de l'Exercice 3) que pour tout opérateur V sur un espace de Banach Y, on a $\sigma(V^*) \subseteq \sigma(V)$. On a donc $\sigma(T^{**}) \subseteq \sigma(T^*)$. Mais, comme $T^{**}_{|X} = T$, il est clair que toute valeur propre de T en est aussi une de T^{**} ; on a donc $\sigma_p(T) \subseteq \sigma_p(T^{**}) \subseteq \sigma(T^{**}) \subseteq \sigma(T^*)$. (Notons que l'on semble ne pas utiliser le Théorème de Hahn-Banach dans cet argument ; mais c'est bel et bien le cas : on l'utilise pour dire que l'on a une injection de X dans X^{**} et donc que $T^{**}_{|X} = T$. Sans lui, on peut avoir $X^* = \{0\}$ - voir l'Exercice 15 du Chapitre VI - et donc $T^{**} = 0$, de sorte que sa restriction à X n'est pas égale à T, si $T \neq 0$).

3) Si λ est valeur propre de T^*, il existe $\varphi \in X^*$, non nulle, telle que $T^*(\varphi) = \lambda\varphi$. Alors $(T^*)^n(\varphi) = \lambda^n \varphi$ pour tout $n \geqslant 0$. Pour tout $x \in X$, on a donc :

$$\langle \varphi, T^n x\rangle = \langle (T^*)^n(\varphi), x\rangle = \lambda^n \varphi(x)$$

pour tout $n \geqslant 0$. Si T était hypercyclique, $O(x, T) = \{T^n x\,;\ n \geqslant 0\}$ serait dense dans X ; donc $\{\lambda^n \varphi(x)\} = \{\varphi(T^n x)\,;\ n \geqslant 0\}$ serait dense dans $\mathbb{C}$ (car $\varphi \neq 0$), ce qui est visiblement faux.

4) Si T est compact, son adjoint l'est aussi, par le Théorème de Schauder. Si T était hypercyclique, T^* ne pourrait avoir, à cause du 3), de valeur propre. Il résulte du *Théorème*

spectral de Riesz (Théorème VII.2.11) que l'on aurait $\sigma(T^*) = \{0\}$ (X^* étant de dimension infinie, $0 \in \sigma(T^*)$; mais $\sigma(T^*) \subseteq \{0\}$ suffirait). Il résulterait du 2) que 0 serait la seule valeur propre possible de T, et donc, de nouveau par le *Théorème spectral de Riesz*, on aurait $\sigma(T) = \{0\}$. Il en résulterait que $r(T) = 0$ (on aurait pu utiliser la formule du rayon spectral pour obtenir cela, vu que $\|T\| = \|T^*\|$). Mais alors le 1) dirait que T n'est pas hypercyclique, et l'on aurait une contradiction.

Exercice 15

Si T est nul, on prend n'importe quel sous-espace X_0 de X, différent de $\{0\}$ et X ; alors $T(X_0) = \{0\} \subseteq X_0$.

1) Comme T n'est pas nul, il existe $x_1 \in X$ tel que $Tx_1 \neq 0$. Alors $\|T(ax_1)\| = |a|\,\|Tx_1\| \xrightarrow[|a|\to+\infty]{} +\infty$; il existe donc un nombre a tel que $\|ax_1\| > 1$ et $\|T(ax_1)\| \geqslant 2\,\|T\|$. Posons $x_0 = ax_1$. On a $\|x_0\| > 1$ et, pour $\|x - x_0\| < 1$, on a :

$$2\,\|T\| - \|Tx\| \leqslant \|Tx_0\| - \|Tx\| \leqslant \|Tx - Tx_0\| \leqslant \|T\|\,\|x - x_0\| < \|T\|\,;$$

donc $\|Tx\| > \|T\|$. Il s'ensuit que pour tout $y \in K_1 = \overline{T(B_0)}$, on a $\|y\| \geqslant \|T\| > 0$, de sorte que $0 \notin K_1$. Par ailleurs, puisque T est compact, l'image par T de toute partie bornée de X est relativement compacte ; donc K_1 est compact.

2) Il est facile de voir que $\mathfrak{C}_T$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(X)$; donc $X_1^{\sim} = \{Ux_1\,;\ U \in \mathfrak{C}_T\}$ est un sous-espace vectoriel de X. Il en est alors de même pour X_1. Notons maintenant que $x_1 \in X_1$ car $\mathrm{Id}_X \in \mathfrak{C}_T$. Comme $x_1 \in K_1$ et $0 \notin K_1$, on a $x_1 \neq 0$; donc $X_1 \neq \{0\}$. D'autre part, $X_1 \cap B_0 = \emptyset$, par hypothèse ; donc $X_1 \neq X$. Il ne reste plus qu'à montrer que $T(X_1) \subseteq X_1$. Mais X_1 étant fermé et T étant continue, il suffit de montrer que $T(X_1^{\sim}) \subseteq X_1$, c'est-à-dire que $T(Ux_1) \in X_1$ pour tout $U \in \mathfrak{C}_T$. Mais c'est évident car $T(Ux_1) = (TU)x_1$ et $TU \in \mathfrak{C}_T$; donc $T(Ux_1) \in X_1^{\sim}$.

3) a) Par hypothèse, pour tout $x \in K_1$, on a $\overline{\{Ux\,;\ U \in \mathfrak{C}_T\}} \cap B_0 \neq \emptyset$. Comme B_0 est ouvert, cela revient à dire que $\{Ux\,;\ U \in \mathfrak{C}_T\} \cap B_0 \neq \emptyset$; il existe donc $U_x \in \mathfrak{C}_T$ tel que $U_x(x) \in B_0$.

b) Comme B_0 est ouvert et U_x est continu, $U_x^{-1}(B_0)$ est un ouvert. Par définition de U_x, cet ouvert contient x. Alors $K_1 = \bigcup_{x\in K_1} U_x^{-1}(B_0)$. La compacité de K_1 permet de trouver $x_1, \ldots, x_n \in K_1$ tels que $K_1 = \bigcup_{1\leqslant k\leqslant n} U_{x_k}^{-1}(B_0)$. Si l'on pose $U_k = U_{x_k}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, on a $U_k \in \mathfrak{C}_T$ et pour tout $x \in K_1$, il existe $k \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $x \in U_k^{-1}(B_0)$, c'est-à-dire $U_k(x) \in B_0$.

c) Soit $x \in K_1$. Par le b), il existe un $k_x \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $U_{k_x}(x) \in B_0$; cela signifie que $\|U_{k_x}(x) - x_0\| < 1$, et donc que $\varphi_{k_x}(x) > 0$. Comme, par définition, on a $\varphi_k(x) \geqslant 0$ pour tout $k = 1, \ldots, n$, cela entraîne que $\sum_{k=1}^n \varphi_k(x) > 0$.

d) D'après le c), Q est définie sur K_1. Il est ensuite clair que Q est une fonction continue sur K_1 car les φ_k et les U_k le sont. Par ailleurs, on a, en tenant compte de la positivité des φ_k :

$$\begin{aligned}
\|Q(x) - x_0\| &= \frac{1}{\sum_{k=1}^n \varphi_k(x)} \left\| \sum_{k=1}^n \varphi_k(x)\,[U_k(x) - x_0] \right\| \\
&\leqslant \frac{1}{\sum_{k=1}^n \varphi_k(x)} \sum_{k=1}^n \varphi_k(x)\,\|U_k(x) - x_0\| \\
&< \frac{1}{\sum_{k=1}^n \varphi_k(x)} \sum_{k=1}^n \varphi_k(x) = 1\,,
\end{aligned}$$

parce que $\|U_k(x) - x_0\| < 1$ pour tout k, et parce que les $\varphi_k(x)$ ne sont pas tous nuls. Donc $Q(x) \in B_0$.

e) L'adhérence d'un convexe étant convexe (soit C ce convexe ; si $x, y \in \overline{C}$, il existe $x_n, y_n \in C$ tels que $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ et $y = \lim_{n\to\infty} y_n$; pour $0 \leqslant t \leqslant 1$, $tx + (1-t)y = \lim_{n\to\infty} tx_n + (1-t)y_n \in \overline{C}$), il suffit de montrer que K est compact. Pour cela, il suffit de montrer que $\operatorname{conv} Q(K_1)$ est précompact. Tout d'abord, K_1 étant compact et Q étant continue, $Q(K_1)$ est compact. Il ne reste donc plus qu'à montrer que l'enveloppe convexe C d'un compact H est précompacte. Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire. H étant compact, il existe $x_1, \ldots x_n \in H$ tels que $H \subseteq B(x_1, \varepsilon/2) \cup \cdots \cup B(x_n, \varepsilon/2)$. Écrit autrement : $H \subseteq \{x_1, \ldots x_n\} + B(0, \varepsilon/2)$. Notons A l'enveloppe convexe de $\{x_1, \ldots, x_n\}$ dans X. On obtient $H \subseteq A + B(0, \varepsilon/2)$. Comme la somme de deux convexes est encore convexe, l'ensemble $A + B(0, \varepsilon/2)$ est convexe ; il en résulte que $C = \operatorname{conv} H \subseteq A + B(0, \varepsilon/2)$.

Considérons maintenant le sous-espace vectoriel F engendré par $x_1, \ldots, x_n$. L'enveloppe convexe A de $\{x_1, \ldots, x_n\}$ dans X est l'ensemble

$$\{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n\,;\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \geqslant 0 \text{ et } \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1\}\,;$$

elle est donc contenue dans F. C'est de plus une partie bornée de F. Comme F est de dimension finie, A est relativement compacte, autrement dit précompacte, dans F. C'est *a fortiori* aussi le cas dans X. Il existe donc un ensemble fini de vecteurs $y_1, \ldots, y_q \in A$ tels que $A \subseteq B(y_1, \varepsilon/2) \cup \cdots \cup B(y_q, \varepsilon/2) = \{y_1, \ldots y_q\} + B(0, \varepsilon/2)$. Alors :

$$\begin{aligned} C \subseteq A + B(0,\varepsilon/2) &\subseteq [\{y_1, \ldots y_q\} + B(0, \varepsilon/2)] + B(0, \varepsilon/2) = \{y_1, \ldots y_q\} + B(0, \varepsilon) \\ &= B(y_1, \varepsilon) \cup \cdots \cup B(y_q, \varepsilon)\,, \end{aligned}$$

ce qui prouve que C est précompact.

f) L'application linéaire T étant continue, on a $T(\overline{B_0}) \subseteq \overline{T(B_0)} = K_1$. On peut donc considérer la composée $f = QT\colon \overline{B_0} = B(x_0, 1) \to B_0$. C'est une fonction continue, puisque T et Q le sont. D'autre part, $Q(K_1) \subseteq B_0$, ainsi qu'on l'a vu au d) ; comme $B_0 = B^o(x_0, 1)$ est convexe, on obtient $K = \overline{\operatorname{conv}}\, Q(K_1) \subseteq \overline{B_0}$; donc $f(K) = (QT)(K) \subseteq Q[T(\overline{B_0})] \subseteq Q(K_1) \subseteq K$. Comme K est convexe et compact, le *Théorème du point fixe de Schauder* assure que f possède un point fixe : il existe $y_0 \in K$ tel que $Q[T(y_0)] = y_0$.

g) Puisque $U_1, \ldots, U_n \in \mathfrak{C}_T$ et que $\mathfrak{C}_T$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(X)$, il est clair que $L \in \mathfrak{C}_T$. D'autre part, on a $L(Ty_0) = Q(Ty_0)$; donc $(LT)(y_0) = y_0$, c'est-à-dire que $y_0 \in \ker(\mathrm{Id}_X - LT)$.

h) Comme T est compact, LT l'est aussi ; il résulte du 1) du Théorème VII.2.9 que $\ker(\mathrm{Id}_X - LT)$ est de dimension finie. Il est donc différent de X, puisque X est de dimension infinie. Il est aussi différent de $\{0\}$ puisqu'il contient y_0 et que $y_0 \neq 0$; en effet, $y_0 = Q[T(y_0)] \in Q(K_1) \subseteq B_0$ et $0 \notin B_0$. Pour finir, $\ker(\mathrm{Id}_X - LT)$ est invariant par T parce que $L \in \mathfrak{C}_T$: si $x \in \ker(\mathrm{Id}_X - LT)$, alors $(\mathrm{Id}_X - LT)(Tx) = Tx - (LT)(Tx) = Tx - (TL)(Tx) = T[x - (LT)x] = T(0) = 0$. Par conséquent $\ker(\mathrm{Id}_X - LT)$ est un *s.e.i.n.t.* pour T.

XI.8. Exercices du Chapitre VIII

Exercice 1

On sait que a) $\Leftrightarrow$ c) (voir l'Exercice 4 du Chapitre II).

On a bien sûr a) $\Rightarrow$ b) puisque la convergence en norme est plus forte que la convergence faible. Supposons qu'on ait b). En posant $x_n = \sum_{k=1}^n u_k$, cela signifie que que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ converge faiblement. On sait que toute suite faiblement convergente est bornée : $\|x_n\| \leqslant M < +\infty$ pour tout $n \geqslant 1$. Comme la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est orthonormée, on a $\|x_n\|^2 = \sum_{k=1}^n \|u_k\|^2$. Donc $\sum_{k=1}^n \|u_k\|^2 \leqslant M^2$ pour tout $n \geqslant 1$, ce qui entraîne la convergence de la série $\sum_{k\geqslant 1} \|u_k\|^2$.

Exercice 2

Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite faiblement convergente dans $L^1(\mathbb{R})$. On sait que toute suite faiblement convergente est bornée ; donc $\|f_n\|_1 \leqslant M < +\infty$ pour tout $n \geqslant 1$.

Dire que $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} f$ dans $L^1(\mathbb{R})$ signifie que $\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\, g(x)\, dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{\mathbb{R}} f(x)\, g(x)\, dx$ pour toute $g \in L^\infty(\mathbb{R})$. En particulier, si l'on prend, pour chaque $y \in \mathbb{R}$, $h(x) = \mathrm{e}^{-2\pi i y x}$ (qui est continue et de module 1, donc dans $L^\infty(\mathbb{R})$), on obtient $\widehat{f_n}(y) \xrightarrow[n\to\infty]{} \widehat{f}(x)$. Comme les fonctions $\widehat{f_n}$ et $\widehat{f}$ sont dans $\mathscr{C}_0(\mathbb{R})$ et uniformément bornées (car $\|\widehat{f_n}\|_\infty \leqslant \|f_n\|_1 \leqslant M$ pour tout $n \geqslant 1$), cela signifie que $(\widehat{f}_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers $\widehat{f}$ dans $\mathscr{C}_0(\mathbb{R})$.

Exercice 3

Soit q l'exposant conjugué de p. On sait que le dual de $L^p(\mathbb{R})$ s'identifie à $L^q(\mathbb{R})$. Pour tout $g \in L^q(\mathbb{R})$, la fonction fg est intégrable sur $\mathbb{R}$ (par l'inégalité de Hölder) ; par conséquent :

$$\langle f_n, g\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, g(x)\, \mathrm{e}^{2\pi i n x}\, dx = \widehat{(fg)}(-n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,.$$

Cela signifie que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge faiblement vers 0.

La suite ne converge pas en norme car, si c'était le cas, ce ne pourrait être que vers 0 (puisque la topologie de la norme est plus forte que la topologie faible) ; comme $\|f_n\|_p = \|f\|_p \neq 0$ pour tout $n \geqslant 1$, ce n'est pas le cas.

Exercice 4

Soit V un voisinage faible de 0. Il existe des vecteurs $x_1, \ldots, x_L \in \ell_2$ et un $\varepsilon > 0$ tel que $V \supseteq \{x \in \ell_2\,;\ |(x \mid x_l)| \leqslant \varepsilon,\ \forall l = 1, \ldots, L\}$.

Notons maintenant que pour tout $z \in \ell_2$, on a $|z(n)|^2 \leqslant \varepsilon^2/n$ pour une infinité de n, car sinon, on aurait un $n_0 \geqslant 1$ pour lequel $|z(n)|^2 > \varepsilon^2/n$ pour $n \geqslant n_0$, et on aurait $\sum_{n=1}^\infty |z(n)|^2 = +\infty$.

Prenons alors $z(n) = \sum_{l=1}^L |x_l(n)|$. C'est un élément de ℓ_2 car $|x_l| \in \ell_2$ pour tout $l = 1, \ldots, L$, et l'on a donc $|z(n)|^2 \leqslant \varepsilon^2/n$ pour une infinité de n ; donc $|x_l(n)| \leqslant \varepsilon/\sqrt{n}$ pour une infinité de n, pour tout $l = 1, \ldots, L$, et en particulier $V \cap \{\sqrt{n}\, e_n\,;\ n \geqslant 1\} \neq \emptyset$, puisque $(\sqrt{n}\, e_n \mid x_l) = \sqrt{n}\, x_l(n)$. Par conséquent 0 est bien faiblement adhérent à $\{\sqrt{n}\, e_n\,;\ n \geqslant 1\}$.

Par contre, il n'existe aucune sous-suite de $\{\sqrt{n}\, e_n\,;\ n \geqslant 1\}$ convergeant faiblement (vers 0), car une telle sous-suite devrait être bornée (Proposition VIII.1.4), or ce n'est pas le cas.

Exercice 5

Étant convexes et fermés, les C_n sont faiblement fermés ; comme ils sont bornés, ils sont faiblement compacts, car $L^p(m)$ est réflexif (puisque $1 < p < \infty$). On a donc une suite décroissante de parties compactes (pour la topologie faible) non vides ; son intersection n'est par conséquent pas vide.

Exercice 6

1) Considérons, pour $x \in B$, les formes linéaires continues $\widetilde{x}\colon E^* \to \mathbb{C}$ définies par $\widetilde{x}(\varphi) = \varphi(x)$ pour $\varphi \in E^*$. Par hypothèse, on a $\sup_{x\in B} |\widetilde{x}(\varphi)| < +\infty$ pour toute $\varphi \in E^*$. Le *Théorème de Banach-Steinhaus* dit qu'alors $\sup_{x\in B} \|\widetilde{x}\| < +\infty$. Mais $\|\widetilde{x}\| = \|x\|$. Donc $\sup_{x\in B} \|x\| < +\infty$, ce qui signifie que B est borné.

2) L'hypothèse signifie que $\sum_{n\geqslant 1} a_n u_n$ converge pour tout $a = (a_n)_{n\geqslant 1} \in \ell_2$. Les sommes partielles de cette série sont en particulier bornées : $\sup_{n\geqslant 1} \left|\sum_{k=1}^n a_k u_k\right| < +\infty$. Notons B l'ensemble de toutes les suites partielles $s_n = (u_1, \ldots, u_n, 0, 0, \ldots)$, $n \geqslant 1$. C'est une partie de ℓ_2. Pour toute forme linéaire continue φ sur ℓ_2, il existe $a = (a_n)_{n\geqslant 1} \in \ell_2$ telle que $\varphi(x) = (x \mid \overline{a}) = \sum_{n=1}^\infty x_n a_n$, si $x = (x_n)_{n\geqslant 1} \in \ell_2$. L'hypothèse entraîne donc que $\sup_{n\geqslant 1} |\varphi(s_n)| < +\infty$ pour toute $\varphi \in (\ell_2)^*$. Il résulte du 1) que $\sup_{n\geqslant 1} \|s_n\|_2 = M <$

$+\infty$. Mais $\|s_n\|_2^2 = \sum_{k=1}^n |u_k|^2$; par conséquent $\sup_{n\geqslant 1} \sum_{k=1}^n |u_k|^2 = M^2$, et il s'ensuit que $\sum_{k=1}^\infty |u_k|^2 = M^2 < +\infty$.

Exercice 7

Soit $x_n \in B_E$ tels que $Tx_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y \in F$. Comme E est réflexif, sa boule unité est faiblement compacte. La suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ a donc une sous-suite convergente $x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x \in B_E$ (*Théorème d'Eberlein-Šmulian*). Comme T est continue pour les topologies faibles (Théorème VIII.1.12), on a $Tx_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} Tx$. Donc $y = Tx \in T(B_E)$, et $T(B_E)$ est fermé dans F.

Exercice 8

1) S_n étant un polynôme trigonométrique, on a $\widehat{S_n}(l) = c_l$ pour $|l| \leqslant n$ et $\widehat{S_n}(l) = 0$ pour $|l| > n$ (on peut aussi faire le calcul direct très facilement) ; en particulier, $\widehat{S_n}(l) \xrightarrow[n\to\infty]{} c_l$ pour tout $l \in \mathbb{Z}$. Par linéarité, on a $\widehat{K_N}(l) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \widehat{S_n}(l)$; c'est la moyenne de Cesàro d'une suite qui converge vers c_l ; donc $\widehat{K_N}(l)$ converge vers c_l. En fait, ici, il est très facile de le voir (même si le résultat sur la convergence des moyennes de Cesàro n'est pas bien difficile !) : comme $\widehat{S_n}(l) = 0$ pour $0 \leqslant n < |l|$ et $\widehat{S_n}(l) = c_l$ pour $n \geqslant |l|$, on a, pour $N \geqslant |l|$:

$$\widehat{K_N}(l) = \frac{1}{N}\sum_{n=|l|}^{N-1} c_l = \frac{N-|l|}{N}\, c_l \xrightarrow[N\to\infty]{} c_l\,.$$

2) Comme $1 < p < \infty$, l'espace $L^p(0,1)$ est *réflexif* et donc ses parties *bornées* sont *relativement compactes pour la topologie faible.* Par conséquent, puisque l'on a supposé la suite $(K_n)_{N\geqslant 1}$ bornée dans $L^p(0,1)$, on peut en extraire une sous-suite $(K_{N_j})_{j\geqslant 1}$ faiblement convergente, vers un élément $f \in L^p(0,1)$, par le *Théorème d'Eberlein-Šmulian.* Cela signifie que, pour tout $g \in L^q(0,1)$, q étant l'exposant conjugué de p, on a :

$$\int_0^1 K_{N_j}(x)\,g(x)\,dx \xrightarrow[j\to\infty]{} \int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx\,.$$

En particulier, en prenant, pour $l \in \mathbb{Z}$, $g(x) = \mathrm{e}^{-2\pi i l x}$, on a $\widehat{K_{N_j}}(l) \xrightarrow[j\to\infty]{} \widehat{f}(l)$.

Comme on a vu que $\widehat{K_N}(l) \xrightarrow[N\to\infty]{} c_l$, on obtient $\widehat{f}(l) = c_l$.

Exercice 9

Soit $\Phi \in B_{X^{**}}$ et soit W un voisinage de Φ pour la topologie préfaible $\sigma(X^{**},X^*)$. Il existe $\varepsilon > 0$ et $\varphi_1,\ldots,\varphi_n \in X^*$ tels que $W_{\varepsilon,\varphi_1,\ldots,\varphi_n} \subseteq W$. Posons $\alpha_j = \Phi(\varphi_j)$ pour $j = 1,\ldots,n$. Pour tous $\beta_1,\ldots,\beta_n \in \mathbb{K}$, on a :

$$\Big|\sum_{j=1}^n \beta_j\alpha_j\Big| = \Big|\Phi\Big(\sum_{j=1}^n \beta_j\varphi_j\Big)\Big| \leqslant \Big\|\sum_{j=1}^n \beta_j\varphi_j\Big\|,$$

car $\|\Phi\| \leqslant 1$. Le Lemme de Helly (Exercice 5 du Chapitre VI) dit qu'il existe $x_\varepsilon \in B_X$ tel que $|\varphi_j(x_\varepsilon) - \Phi(\varphi_j)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $j \leqslant n$. Cela signifie que $x_\varepsilon \in W_{\varepsilon,\varphi_1,\ldots,\varphi_n}$. Par conséquent, $x_\varepsilon \in W \cap B_X$, et cela prouve que Φ est $\sigma(X^{**},X^*)$-adhérent à B_X.

Exercice 10

1) Soit $x_0 \in B_X \setminus S_X$. Soit V un voisinage faible de x_0. Il existe $\varepsilon > 0$ et $\varphi_1,\ldots,\varphi_n \in X^*$ tels que $x_0 + V_{\varepsilon,\varphi_1,\ldots,\varphi_n} \subseteq V$. Comme X est de dimension infinie, il existe $x \neq 0$ tel que $x \in \bigcap_{k=1}^n \ker\varphi_k$. Si $f(t) = \|x_0 + tx\|$, $t \in \mathbb{R}$, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, et l'on a

$f(0) = \|x_0\| < 1$ et $f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$. Le Théorème des valeurs intermédiaires donne l'existence d'un $t_0 > 0$ tel que $f(t_0) = 1$. Alors $x_1 = x_0 + t_0 x \in S_X$ et, par le choix de x :

$$|\varphi_k(x_1 - x_0)| = t_0 |\varphi_k(x)| = 0 \leqslant \varepsilon\,, \quad 1 \leqslant k \leqslant n\,;$$

donc $x_1 \in x_0 + V_{\varepsilon,\varphi_1,\ldots,\varphi_n} \subseteq V$, de sorte que $S_X \cap V \neq \emptyset$. Ainsi S_X est w-dense dans B_X.

2) Les formes linéaires $\varphi \in X^*$ sont w-continues, par définition. Par le Théorème de Hahn-Banach, on a $\|x\| = \sup_{\varphi\in B_{X^*}} |\varphi(x)|$. Comme la borne supérieure de toute famille de fonctions continues est semi-continue inférieurement, la norme est donc w-*s.c.i.*.

Si X est de dimension infinie, la norme $N = \|\,.\,\|$ n'est pas w-continue, car si elle l'était, on devrait avoir $N(\overline{S_X}^{\,w}) \subseteq \overline{N(S_X)} = \{1\}$, alors que $N(\overline{S_X}^{\,w}) = N(B_X)$ est l'intervalle $[0,1]$.

Exercice 11

1) La boule unité B_Y de Y étant un voisinage de 0, son image réciproque par T est un voisinage faible de 0 dans X. Il existe par conséquent un $\varepsilon > 0$ et des formes linéaires continues $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in X^*$ tels que $V_{\varepsilon,\varphi_1,\ldots,\varphi_n}(0) \subseteq T^{-1}(B_Y)$. On rappelle que $V_{\varepsilon,\varphi_1,\ldots,\varphi_n}(0) = \{x \in X\,;\ |\varphi_j(x)| \leqslant \varepsilon\,, 1 \leqslant j \leqslant n\}$. Mais $\bigcap_{j=1}^n \ker\varphi_j \subseteq V_{\varepsilon,\varphi_1,\ldots,\varphi_n}(0)$; donc $\bigcap_{j=1}^n \ker\varphi_j \subseteq T^{-1}(B_Y)$. Mais $\bigcap_{j=1}^n \ker\varphi_j$ est un sous-espace vectoriel ; donc si $x \in \bigcap_{j=1}^n \ker\varphi_j$, on a $tx \in \bigcap_{j=1}^n \ker\varphi_j$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Il en résulte que $|t|\,\|Tx\| = \|T(tx)\| \leqslant 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Cela n'est possible que si $Tx = 0$. Par conséquent $\bigcap_{j=1}^n \ker\varphi_j \subseteq \ker T$.

2) On sait (voir Chapitre I, Exercice 15) que T se factorise en une application linéaire continue $\widetilde{T}\colon X/\ker T \to Y$. Comme $\bigcap_{j=1}^n \ker\varphi_j$ est de codimension finie, $\ker T$ aussi, par le 1). Cela signifie que $X/\ker T$ est de dimension finie. Par conséquent $\operatorname{im}(T) = \operatorname{im}(\widetilde{T})$ est de dimension finie, c'est-à-dire que T est de rang fini.

Exercice 12

Si l'espace métrique $(X^*, \|\,.\,\|)$ est séparable, son sous-espace S_{X^*} l'est aussi. Soit $(\varphi_n)_{n\geqslant1}$ une suite dense dans S_{X^*}. Pour tout $n \geqslant 1$, on peut trouver $x_n \in S_X$ tel que $|\varphi(x_n)| > 1/2$. Soit Y le sous-espace fermé engendré par les x_n, $n \geqslant 1$. Il est séparable et il suffit donc de montrer qu'il est égal à X. Supposons que ce ne soit pas le cas. Le *Théorème de Hahn-Banach* dit qu'il existe alors $\varphi \in X^*$ telle que $\|\varphi\| = 1$ et $\varphi(x) = 0$ pour tout $x \in Y$. Grâce à la densité de la suite $(\varphi_n)_{n\geqslant1}$ dans S_{X^*}, on peut trouver un $N \geqslant 1$ tel que $\|\varphi_N - \varphi\| < 1/4$. Alors :

$$\begin{aligned} |\varphi(x_N)| &= |\varphi_N(x_N) - [\varphi_N(x_N) - \varphi(x_N)]| \geqslant |\varphi_N(x_N)| - |\varphi_N(x_N) - \varphi(x_N)| \\ &\geqslant |\varphi_N(x_N)| - \|\varphi_N - \varphi\|\,\|x_N\| > \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\,, \end{aligned}$$

ce qui est contradictoire.

Exercice 13

1) La forme linéaire $\varphi\colon \mathscr{C}([0,1]) \to \mathbb{K}$ définie par $\varphi(f) = f(0)$ est bien sûr continue ; le *Théorème de Hahn-Banach* permet de la prolonger en une forme linéaire continue $\Phi\colon L^\infty([0,1]) \to \mathbb{K}$.

2) Posons $e_n(t) = \mathrm{e}^{-2\pi i n t}$; on a $\Phi(e_n) = e_n(0) = 1$, puisque e_n est continue. Il n'existe aucune $g \in L^1([0,1])$ telle que $\Phi(f) = \int_0^1 f(t)\,g(t)\,dt$ pour toute $f \in L^\infty([0,1])$ car, si tel était le cas, on aurait $\Phi(e_n) = \widehat{g}(n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$; mais le Lemme de Riemann-Lebesgue affirme que $\widehat{g}(n) \xrightarrow[|n|\to\infty]{} 0$, ce qui contredit le fait que $\Phi(e_n) = 1$.

Par conséquent, le dual de $L^\infty([0,1])$ contient strictement $L^1([0,1])$; il en résulte que $L^1([0,1])$ n'est pas réflexif, puisque $L^\infty([0,1])$ est le dual de $L^1([0,1])$.

Exercice 14

1) Considérons les vecteurs $\mathbf{e}_n$, $n \geqslant 1$, de la base canonique de c_0. Ce sont en particulier des éléments de $\ell_\infty = (\ell_1)^*$. Donc, puisque $(\mathbf{x}_n)_{n\geqslant 1}$ converge faiblement vers 0, on a $x_{n,k} = \langle \mathbf{x}_n, \mathbf{e}_k \rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

2) a) La boule B est compacte, par le *Théorème d'Alaoglu.* Elle est métrisable car ℓ_∞ est le dual de l'espace séparable ℓ_1.

b) Tout $\mathbf{x} \in \ell_1$ définit une forme linéaire w^*-continue sur ℓ_∞ ; donc, en notant $I_\varepsilon = [-\varepsilon, \varepsilon]$ dans le cas réel et $I_\varepsilon = \overline{D(0,\varepsilon)}$ dans le cas complexe, l'ensemble $\mathbf{x}_k^{-1}(I_\varepsilon)$ est w^*-fermé pour tout $k \geqslant 1$. Il en résulte que $F_n = \bigcap_{k\geqslant n} \mathbf{x}_k^{-1}(I_\varepsilon) \cap B$ est fermé dans B. Comme la suite $(\mathbf{x}_n)_{n\geqslant 1}$ converge faiblement vers 0, on a $\langle \mathbf{b}, \mathbf{x}_n \rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ pour tout $\mathbf{b} \in B$; il existe donc, pour tout $\mathbf{b} \in B$, $n \geqslant 1$ tel que $|\langle \mathbf{b}, \mathbf{x}_n \rangle| \leqslant \varepsilon$ pour tout $k \geqslant n$. Cela signifie que $B = \bigcup_{n\geqslant 1} F_n$. Comme B est un compact métrisable, B est métrisable complet ; le *Théorème de Baire* dit qu'il existe un entier $n_0 \geqslant 1$ tel que l'intérieur (dans B) de F_{n_0} soit non vide.

c) On a une base d'ouverts pour la topologie produit de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}^*}$ formée des produits $W = \Omega_1 \times \cdots \Omega_N \times \mathbb{K}^{\{N+1,N+2,\ldots\}}$, où $\Omega_1, \ldots, \Omega_N$ sont des ouverts de $\mathbb{K}$. Si $(\mathbf{e}_n)_{n\geqslant 1}$ est cette fois-ci vue comme la base canonique de ℓ_1, on peut écrire $W \cap \ell_\infty = \bigcap_{n=1}^N \mathbf{e}_n^{-1}(\Omega_n)$. Comme les $\mathbf{e}_n$ sont w^*-continues sur ℓ_∞, cette intersection $W \cap \ell_\infty$ est w^*-ouverte dans ℓ_∞. Cela signifie que la trace sur ℓ_∞ de la topologie produit de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}^*}$ est moins fine que la topologie préfaible. Sur B, qui est w^*-compacte, cette topologie moins fine, qui est de plus séparée, coïncide donc avec la topologie préfaible.

d) On a montré au b) que F_{n_0} est d'intérieur non vide dans B ; il existe donc $\mathbf{b}_0 \in F_{n_0}$ et $\varepsilon_0 > 0$, $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_l \in \ell_1$ tels que $(\mathbf{b}_0 + V_{\varepsilon_0,\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_l}) \cap B \subseteq F_{n_0}$, où :

$$V_{\varepsilon_0,\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_l} = \{\mathbf{b} \in \ell_\infty \,;\ |\langle \mathbf{u}_j, \mathbf{b} \rangle| \leqslant \varepsilon_0, 1 \leqslant j \leqslant l\}\,.$$

Or F_{n_0} est convexe et symétrique (par rapport à 0), car c'est l'intersections des convexes symétriques $\mathbf{x}_k^{-1}(I_\varepsilon) \cap B$ pour $k \geqslant n_0$; donc :

$$V_{\varepsilon_0,\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_l} \cap B = \frac{1}{2}\left[(\mathbf{b}_0 + V_{\varepsilon_0,\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_l}) \cap B\right] + (-\mathbf{b}_0 + V_{\varepsilon_0,\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_l}) \cap B\big] \subseteq \frac{1}{2}\,(F_{n_0} + F_{n_0}) = F_{n_0}\,.$$

Mais $V_{\varepsilon_0,\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_l} \cap B$ est un voisinage de 0 dans B, pour la topologie préfaible ; c'est donc aussi un voisinage de 0 dans B pour la topologie produit, par le c). Il existe donc $N_0 \geqslant 1$ et $\delta_0 > 0$ tels que $[-\delta_0, \delta_0]^{N_0} \times \mathbb{K}^{\{N_0+1,\ldots\}} \cap B \subseteq V_{\varepsilon_0,\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_l} \cap B$. En particulier, tout $\mathbf{b} \in B$ tel que $b_1 = \cdots = b_{N_0} = 0$ est dans $V_{\varepsilon_0,\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_l} \cap B$, donc dans F_{n_0}.

3) On sait que $\|\mathbf{x}_k\|_1 = \sup_{\mathbf{b}\in B} |\langle \mathbf{b}, \mathbf{x}_k \rangle|$. Or, étant donné $\varepsilon > 0$, on peut lui associer un entier $n_0 \geqslant 1$, comme au 2) b) et un autre entier N_0 comme au 2) d), et l'on a, pour tout $\mathbf{b} \in B$:

$$|\langle \mathbf{b}, \mathbf{x}_k \rangle| = \Big|\sum_{j=1}^{\infty} b_j x_{k,j}\Big| \leqslant \Big|\sum_{j=1}^{N_0} b_j x_{k,j}\Big| + \Big|\sum_{j=N_0+1}^{\infty} b_j x_{k,j}\Big|\,.$$

Pour chaque $j \geqslant 1$, on a vu au 1) que $x_{k,j} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$; donc il existe $n_1 \geqslant 1$ tel que $\sum_{j=1}^{N_0} |x_{k,j}| \leqslant \varepsilon$ pour $k \geqslant n_1$. On a alors :

$$\Big|\sum_{j=1}^{N_0} b_j x_{k,j}\Big| \leqslant \sum_{j=1}^{N_0} |x_{k,j}| \leqslant \varepsilon$$

pour tout $k \geqslant n_1$ et tout $\mathbf{b} \in B$. Maintenant, on peut écrire $\sum_{j=N_0+1}^{\infty} b_j x_{k,j} = \langle \mathbf{b}', \mathbf{x}_k \rangle$, avec $\mathbf{b}' = (0, \ldots, 0, b_{N_0+1}, \ldots) = \mathbf{b} - \sum_{j=1}^{N_0} b_j \mathbf{e}_j$. Comme $\|\mathbf{b}'\|_\infty \leqslant \|\mathbf{b}\|_\infty \leqslant 1$, on a $\mathbf{b}' \in B$. Alors, puisque $b'_j = 0$ pour $1 \leqslant j \leqslant N_0$, on a $\mathbf{b}' \in F_{n_0}$, grâce au 2) d), c'est-à-dire que $|\langle \mathbf{b}', \mathbf{x}_k \rangle| \leqslant \varepsilon$.

Finalement, pour $k \geqslant \max(n_0, n_1)$, on obtient $|\langle \mathbf{b}, \mathbf{x}_k \rangle| \leqslant 2\,\varepsilon$ pour tout $\mathbf{b} \in B$, de sorte que $\|\mathbf{x}_k\|_1 \leqslant 2\,\varepsilon$ pour $k \geqslant \max(n_0, n_1)$, et ainsi l'on a prouvé que $\|\mathbf{x}_k\|_1 \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.

Remarque. On aurait pu se passer de la topologie produit. En effet, étant donnés $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_l \in \ell_1$ et $\varepsilon_0 > 0$, il existe $N_0 \geqslant 1$ tel que $\sum_{n=N_0+1}^{\infty} |u_{j,n}| \leqslant \varepsilon_0/2$ pour tout $j = 1, \dots, l$. Alors $\left|\sum_{n=N_0+1}^{\infty} b_n u_{j,n}\right| \leqslant \varepsilon_0/2$ pour tout $\mathbf{b} \in B$ et $j = 1, \dots, l$. Il en résulte que si l'on pose $\tilde{\mathbf{u}}_j = (u_{j,1}, \dots, u_{j,N_0}, 0, 0, \dots)$, alors $V_{\varepsilon_0/2, \tilde{\mathbf{u}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{u}}_l} \cap B \subseteq V_{\varepsilon_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_l} \cap B \subseteq F_{n_0}$, de sorte que si $\mathbf{b} \in B$ est tel que $b_1 = \dots = b_{N_0} = 0$, alors $\mathbf{b} \in F_{n_0}$.

Exercice 15

1) a) Fixons un $\varepsilon_0 > 0$ et considérons le $\delta_0 > 0$ associé issu du 4) de l'Exercice 4 du Chapitre V. Décomposons alors l'intervalle $[0,1]$ en parties mesurables (des intervalles, par exemple) $B_1, \dots, B_L$ de mesure $\leqslant \delta_0$. On a alors, pour tout $n \geqslant N_0$:

$$\int_0^1 |f_n(x)|\, dx \leqslant \sum_{l=1}^{L} \int_{B_l} |f_n(x)|\, dx \leqslant L \times 5\,\varepsilon_0\,,$$

et $\sup_{n\geqslant 1} \|f_n\|_1 \leqslant M = \max\{\|f_1\|_1, \dots, \|f_{N_0-1}\|_1, 5\,\varepsilon_0 L\} < +\infty$.

b) On a $\int_A f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)\, dx$, pour tout borélien A de $[0,1]$. Par linéarité, on a $\int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx$ pour toute fonction étagée g. Maintenant, les fonctions étagées sont denses dans l'espace $L^\infty(0,1)$: pour toute fonction mesurable bornée g, on peut trouver une suite de fonctions étagées g_k telles que $\sup_{x\in[0,1]} |g_k(x) - g(x)| \leqslant 1/2^k$ pour tout $k \geqslant 1$. Comme

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx - \int_0^1 f_n(x)\, g(x)\, dx\right| \\
&\qquad \leqslant \int_0^1 |f(x)|\, |g(x) - g_k(x)|\, dx + \left|\int_0^1 f(x)\, g_k(x)\, dx - \int_0^1 f_n(x)\, g_k(x)\, dx\right| \\
&\qquad \leqslant \|f\|_1 \|g - g_k\|_\infty + \left|\int_0^1 f(x)\, g_k(x)\, dx - \int_0^1 f_n(x)\, g_k(x)\, dx\right|\,;
\end{aligned}$$

on peut, étant donné $\varepsilon > 0$, choisir un $k \geqslant 1$ tel que $\|f\|_1 \|g - g_k\|_\infty \leqslant \varepsilon/2$; pour ce $k \geqslant 1$, il existe un $N_k \geqslant 1$ tel que $\left|\int_0^1 f(x)\, g_k(x)\, dx - \int_0^1 f_n(x)\, g_k(x)\, dx\right| \leqslant \varepsilon/2$, car g_k est étagée. Cela prouve que $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, g(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$. Comme c'est vrai pour toute $g \in L^\infty(0,1)$ et que cet espace est le dual de $L^1(0,1)$, cela signifie que la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge faiblement vers f.

2) Dire que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de Cauchy pour la topologie faible revient à dire que, pour toute $g \in L^\infty(0,1)$, la suite numérique $\left(\int_0^1 f_n(x)\, g(x)\, dx\right)_{n\geqslant 1}$ est de Cauchy. Elle converge donc dans $\mathbb{R}$. En particulier, pour $g = \mathbb{1}_A$, $A \in \mathscr{B}or$, $\nu(A) = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)\, dx$ existe. Il résulte du 1) que la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge faiblement.

Exercice 16

1) L'application T_n envoie C dans lui-même parce que pour tout $x \in C$, on a $T_n(x) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) T(x) + \frac{1}{n} 0 \in C$ car C est convexe et contient 0, ainsi que $T(x)$. De plus, on a $\|T_n(x) - T_n(y)\| = \frac{n-1}{n} \|T(x) - T(y)\| \leqslant \frac{n-1}{n} \|x - y\|$; donc l'application T_n est contractante (puisque $\frac{n-1}{n} < 1$). Comme C est un espace métrique complet (C est fermé dans l'espace complet H), le *Théorème du point fixe de Picard* assure donc l'existence d'un unique point fixe $x_n \in C$.

2) L'ensemble C est fermé et borné dans l'espace réflexif H ; il est donc faiblement compact. Le *Théorème d'Eberlein-Šmulian* assure que l'on peut extraire de $(x_n)_n$ une sous-suite $(x_{n_k})_k = (y_k)_k$ faiblement convergente vers un élément $y \in C$.

3) a) On a :

$$\begin{aligned}\|T(u)-T(v)\|^2 &= \|T(u)\|^2+\|T(v)\|^2-2\operatorname{Re}\big(T(u)\mid T(v)\big)\\ &= \Big(\frac{n}{n-1}\Big)^2\|T_n(u)\|^2+\Big(\frac{m}{m-1}\Big)^2\|T_m(u)\|^2-2\,\frac{nm}{(n-1)(m-1)}\operatorname{Re}\big(T_n(u)\mid T_m(v)\big)\end{aligned}$$

b) Comme $y_k=T_{n_k}y_k$ et $y_j=T_{n_j}y_j$, on obtient :

$$\|T(y_k)-T(y_j)\|^2=\Big(\frac{n_k}{n_k-1}\Big)^2\|y_k\|^2+\Big(\frac{n_j}{n_j-1}\Big)^2\|y_j\|^2-2\,\frac{n_kn_j}{(n_k-1)(n_j-1)}\operatorname{Re}(y_k\mid y_j)\,.$$

Alors, en utilisant l'inégalité $\|T(y_k)-T(y_j)\|\leqslant\|y_k-y_j\|$ et le fait que $\|y_k-y_j\|^2=\|y_k\|^2+\|y_j\|^2-2\operatorname{Re}(y_k\mid y_j)$, on obtient :

$$\begin{aligned}&\Big(\frac{n_k}{n_k-1}\Big)^2\|y_k\|^2+\Big(\frac{n_j}{n_j-1}\Big)^2\|y_j\|^2-2\,\frac{n_kn_j}{(n_k-1)(n_j-1)}\operatorname{Re}(y_k\mid y_j)\\ &\qquad\qquad\leqslant\|y_k\|^2+\|y_j\|^2-2\operatorname{Re}(y_k\mid y_j)\,.\end{aligned}$$

Faisant tendre j vers l'infini, il vient, puisque $(y_k\mid y_j)\xrightarrow[j\to\infty]{}(y_k\mid y)$:

$$\begin{aligned}&\frac{n_k^2}{(n_k-1)^2}\|y_k\|^2+\limsup_{j\to\infty}\|y_j\|^2-2\,\frac{n_k}{n_k-1}\operatorname{Re}(y_k\mid y)\\ &\qquad\qquad\leqslant\|y_k\|^2+\limsup_{j\to\infty}\|y_j\|^2-2\operatorname{Re}(y_k\mid y)\,,\end{aligned}$$

d'où $\|y_k\|^2\leqslant\frac{2(n_k-1)}{2n_k-1}\operatorname{Re}(y_k\mid y)$.

4) Il en résulte que :

$$\begin{aligned}\|y_k-y\|^2=\|y_k\|^2+\|y\|^2-2\operatorname{Re}(y_k\mid y)&\leqslant\frac{2(n_k-1)}{2n_k-1}\operatorname{Re}(y_k\mid y)+\|y\|^2-2\operatorname{Re}(y_k\mid y)\\ &\xrightarrow[k\to\infty]{}(y\mid y)+\|y\|^2-(y\mid y)=0\,,\end{aligned}$$

de sorte que $\|y_k-y\|\xrightarrow[k\to\infty]{}0$. Alors la continuité de T donne $y_k=\frac{n_k-1}{n_k}T(y_k)\xrightarrow[k\to\infty]{}T(y)$, d'où $y=T(y)$.

Exercice 17

1) C'est clair puisque l'on a : $a\|x\|^2\leqslant B(x,x)\leqslant M\|x\|^2$ et que $B(x,x)=|||x|||^2$ pour tout $x\in H$.

2) a) Notons d'abord que $J(v)\geqslant a\|v\|^2-2\|L\|\,\|v\|\geqslant-\|L\|^2/a$; donc J est minorée sur H. Ensuite, par définition de la borne inférieure, il existe une suite $(w_k)_{k\geqslant1}$ d'éléments de C telle que $m\leqslant J(w_k)\leqslant m+2^{-k}$ pour tout $k\geqslant1$. Comme $J(v)\geqslant a\|v\|^2-2\|L\|\,\|v\|\xrightarrow[\|v\|\to+\infty]{}+\infty$, il existe $R>0$ tel que $J(v)>m+1$ si $\|v\|>R$. Donc $\|w_k\|\leqslant R$ pour tout $k\geqslant1$. Puisque H est réflexif, on peut extraire de la suite bornée $(w_k)_{k\geqslant1}$, grâce au *Théorème d'Eberlein-Šmulian*, une sous-suite $(v_n)_{n\geqslant1}$ convergente. Par construction, on a $\lim_{n\to\infty}J(v_n)=m$.

b) L'ensemble C étant convexe et fermé, il est aussi faiblement fermé. Il en résulte que $v_0\in C$.

c) La norme $|||\,.\,|||$ étant équivalente à la norme de H, elle engendre la même topologie; les topologies faibles associées à ces deux normes sont donc aussi les mêmes. On a donc $B(v_n,v)\xrightarrow[n\to\infty]{}B(v_0,v)$ pour tout $v\in H$. En particulier, $B(v_n,v_0)\xrightarrow[n\to\infty]{}B(v_0,v_0)$. Par ailleurs, on sait que les formes linéaires continues pour la norme le sont aussi pour la topologie faible. Donc $L(v_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} L(v_0)$. Il en résulte que

$$B(v_n, v_n) = J(v_n) + 2\,L(v_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} m + 2\,L(v_0)\,.$$

Alors :

$$\begin{aligned} |||v_n - v_0|||^2 &= |||v_n|||^2 + |||v_0|||^2 - 2\,B(v_n, v_0) = B(v_n, v_n) + B(v_0, v_0) - 2\,B(v_n, v_0) \\ &\xrightarrow[n\to\infty]{} m + 2\,L(v_0) - B(v_0, v_0) = m - J(v_0)\,; \end{aligned}$$

par conséquent $m - J(v_0) \geqslant 0$, c'est-à-dire $J(v_0) \leqslant m$. Par définition de m, cela exige que $J(v_0) = m$.

De plus, on a alors $|||v_n - v_0|||^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, d'où $\|v_n - v_0\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

3) a) Pour tout $v \in C$, on a donc $J(v_0) \leqslant J(v)$. En utilisant le fait que $L(v) = B(u, v)$, cela s'écrit $B(v_0, v_0) - 2\,B(u, v_0) \leqslant B(v, v) - 2\,B(u, v)$. On en déduit que $B(v_0, v_0) - 2\,B(u, v_0) + B(u, u) \leqslant B(v, v) - 2\,B(u, v) + B(u, u)$, soit $B(u - v_0, u - v_0) \leqslant B(u - v)$, ou encore $|||u - v_0||| \leqslant |||u - v|||$.

Ceci étant vrai pour tout $v \in C$, on a $|||u - v_0||| = \mathrm{dist}_{|||\,.\,|||}(u, C)$. Par conséquent v_0 est la projection de u sur le convexe fermé (fermé pour la norme $\|\,.\,\|$ de H, mais donc aussi pour la norme équivalente $|||\,.\,|||$) C.

b) Il résulte du Théorème de projection (voir $(*)$ dans le Théorème II.2.1) que :

$$B(u - v_0, v - v_0) = (u - v_0 \mid v - v_0)_B \leqslant 0\,, \quad \forall v \in C\,.$$

Cela s'écrit aussi $B(u, v - v_0) - B(v_0, v - v_0) \leqslant 0$, soit encore $L(v - v_0) \leqslant B(v_0, v - v_0)$, pour tout $v \in C$.

Exercice 18

1) Pour tout $x \in H$, on a $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x \mid e_n)|^2$; donc, en particulier, $(x \mid e_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, ce qui signifie que $e_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} 0$.

2) a) La topologie faible est une topologie d'espace vectoriel topologique ; donc, pour tout $k \geqslant 1$, on a aussi $ke_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} 0$. Puisque la distance d définit la topologie faible, on a donc $d(ke_n, 0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Il existe par conséquent un entier $n_k \geqslant 1$ tel que $d(ke_{n_k}, 0) \leqslant 1/k$. Il suffit donc de prendre $x_k = ke_{n_k}$.

b) On obtient une contradiction car $d(x_k, 0) \leqslant 1/k$ entraîne $x_k \xrightarrow[k\to\infty]{d} 0$; par conséquent $x_k \xrightarrow[k\to\infty]{w} 0$; or $(x_k)_{k\geqslant 1}$ n'est pas bornée, alors que toute suite qui est faiblement convergente doit être bornée.

Exercice 19

Première méthode

1) Notons B_n la boule ouverte, pour la distance d qui est sensée définir la topologie faible de X, de centre 0 et de rayon $1/n$. C'est donc un voisinage faible de 0 et par conséquent il existe $\varepsilon_n > 0$ et une partie finie $F_n \subseteq X^*$ telle que $V_n = \{x \in X\,;\ |\varphi(x)| \leqslant \varepsilon_n,\ \forall \varphi \in F_n\} \subseteq B_n$. Comme les boules B_n, $n \geqslant 1$, forment une base de voisinage de 0 pour la distance d, les V_n forment une base de voisinages de 0 pour la topologie faible ; ainsi tout voisinage faible de 0 contient l'un des V_n.

2) L'ensemble F_n étant fini, Y_n est de dimension finie ; il est donc fermé dans X^*. Tout sous-espace vectoriel qui n'est pas X^* tout entier est d'intérieur vide. Comme Y_n est de dimension finie et que X^* est de dimension infinie (car X est de dimension infinie), Y_n est

d'intérieur vide. Comme X^* est complet, le *Théorème de Baire* nous dit que $\bigcup_{n\geqslant 1} Y_n$ est aussi d'intérieur vide. En particulier, cette réunion n'est pas X^* tout entier ; il existe donc $\varphi_0 \in X^*$ tel que $\varphi_0 \notin \bigcup_{n\geqslant 1} Y_n$.

3) Supposons que l'on ait un $n \geqslant 1$ tel que $V_n \subseteq U$. On aurait en particulier $\bigcap_{\varphi\in F_n} \ker\varphi \subseteq U$. Mais $\bigcap_{\varphi\in F_n} \ker\varphi$ est un sous-espace vectoriel et donc, si $x \in \bigcap_{\varphi\in F_n} \ker\varphi$, on a $tx \in \bigcap_{\varphi\in F_n} \ker\varphi$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On obtient $tx \in U$, c'est-à-dire $|t|\,|\varphi_0(x)| = |\varphi_0(tx)| \leqslant 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Cela n'est possible que si $\varphi_0(x) = 0$. Ainsi $\bigcap_{\varphi\in F_n} \ker\varphi \subseteq \ker\varphi_0$. Mais alors φ_0 est une combinaison linéaire des éléments de F_n, c'est-à-dire un élément de Y_n, contrairement au choix de φ_0. Donc U ne contient aucun des V_n.

4) On obtient une contradiction avec le choix des V_n fait dans le 1) car U est un voisinage faible de 0. Par conséquent la topologie faible de X n'est pas métrisable.

Deuxième méthode

On a vu dans l'Exercice 10 que la sphère unité S_X de X est faiblement dense dans la boule unité B_X. En particulier, 0 est faiblement adhérent à S_X. Les homothéties, de rapport non nul, étant des isomorphismes continus pour la topologie faible (puisque cette topologie est une topologie d'espace vectoriel topologique), 0 est aussi faiblement adhérent à nS_X, pour tout $n \geqslant 1$. La topologie faible étant supposée définie par la distance d, il existe donc $x_n \in nS_X$ tel que $d(x_n, 0) \leqslant 1/n$. Alors $(x_n)_{n\geqslant 1}$ converge faiblement vers 0. Mais $\|x_n\| = n$ et cela contredit le fait que toute suite faiblement convergente est bornée. Par conséquent, la topologie faible de X n'est pas métrisable.

Exercice 20

1) On a vu dans l'Exercice 10 que, si X est de dimension infinie, la sphère unité S_X de X est faiblement dense dans la boule unité B_X ; en particulier 0 est faiblement adhérent à S_X. Si X^* était séparable, la boule unité B_X de X serait métrisable pour la topologie faible. Il existerait donc une suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ d'éléments de S_X convergeant faiblement vers 0. Mais ℓ_1 a la *propriété de Schur* ; la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ devrait donc converger en norme vers 0, ce qui n'est pas possible puisque $\|x_n\| = 1$. Donc X^* n'est pas séparable.

2) L'espace X étant séparable, on sait que la boule unité B_{X^*} de X^* est w^*-métrisable. Comme elle est w^*-compacte (*Théorème d'Alaoglu*), elle est donc w^*-séparable. Il en est de même de $n\,B_{X^*}$ pour tout $n \geqslant 1$. Comme $X^* = \bigcup_{n\geqslant 1}(n\,B_{X^*})$, il en résulte que X^* est w^*-séparable. En effet, si Δ_n est une partie dénombrable de $n\,B_{X^*}$ w^*-dense dans $n\,B_{X^*}$, alors $\Delta = \bigcup_{n\geqslant 1} \Delta_n$ est une partie dénombrable de X^* qui est w^*-dense dans X^*.

3) On sait que $\ell_\infty = (\ell_1)^*$; donc $(\ell_\infty)^* = (\ell_1)^{**}$. Le *Théorème de Goldstine* dit que la boule unité B_{ℓ_1} est w^*-dense dans la boule unité $B_{(\ell_\infty)^*}$ de $(\ell_\infty)^*$. Comme ℓ_1 est un espace de Banach séparable, B_{ℓ_1} est aussi séparable ; il existe donc une partie dénombrable $\Delta \subseteq B_{\ell_1}$ qui est dense dans B_{ℓ_1}. Alors Δ est w^*-dense dans $B_{(\ell_\infty)^*}$; en effet $B_{\ell_1} = \overline{\Delta}^{\|\cdot\|_1} \subseteq \overline{\Delta}^{w^*}$ entraîne $B_{(\ell_\infty)^*} = \overline{B_{\ell_1}}^{w^*} \subseteq \overline{\Delta}^{w^*}$. Ainsi, $B_{(\ell_\infty)^*}$ est w^*-séparable et il en est de même de $n\,B_{(\ell_\infty)^*}$ pour tout $n \geqslant 1$. Finalement, $(\ell_\infty)^*$ est w^*-séparable car $(\ell_\infty)^* = \bigcup_{n\geqslant 1}(n\,B_{(\ell_\infty)^*})$.

Exercice 21

1) Puisque $\inf_{\|x\|=1} \|Tx\| = 0$, on peut trouver, pour tout $n \geqslant 1$, un élément $u_n \in S_X$ tel que $\|Tu_n\| \leqslant 1/n^2$. Alors, si $x_n = nu_n$, on a $\|x_n\| = n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ et $\|Tx_n\| = n\,\|Tu_n\| \leqslant 1/n$, donc $\|Tx_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

2) a) Soit $\varphi \in E^*$. Comme T^* est surjectif, il existe $\psi \in F^*$ tel que $T^*(\psi) = \varphi$. Alors $\langle \varphi, x_n\rangle = \langle T^*\psi, x_n\rangle = \langle \psi, Tx_n\rangle$; donc $|\langle \varphi, x_n\rangle| \leqslant \|\psi\|\,\|Tx_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, de sorte que $\langle \varphi, x_n\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

b) Il résulte alors du 1) que $a = \inf_{\|x\|=1} \|Tx\| > 0$. Par homogénéité on obtient $\|Tx\| \geqslant a\,\|x\|$ pour tout $x \in E$.

Exercice 22

A. 1) a) Cela résulte directement du *Théorème de l'application ouverte* (voir Chapitre IV).

b) On a, pour toute $\varphi \in F^*$:

$$\begin{aligned}\|S^*\varphi\|_{E^*} &= \sup_{x\in B_E} |\langle S^*\varphi, x\rangle| = \sup_{x\in B_E} |\langle \varphi, Sx\rangle| = \sup_{y\in S(B_E)} |\langle \varphi, y\rangle| \\ &\geqslant \sup_{y\in \delta B_F} |\langle \varphi, y\rangle| = \sup_{y\in B_F} |\langle \varphi, \delta y\rangle| = \delta \sup_{y\in B_F} |\langle \varphi, y\rangle| = \delta\, \|\varphi\|_{F^*}\,.\end{aligned}$$

c) Soit $\varphi_n \in F^*$ telles que $S^*\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \psi \in E^*$. La suite $(S^*\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ est en particulier de Cauchy. Comme $\|S^*\varphi_n - S^*\varphi_k\|_{E^*} \geqslant \delta\, \|\varphi_n - \varphi_k\|_{F^*}$, la suite $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ est aussi de Cauchy, dans F^*. Comme F^* est complet, cette suite converge. Si $\varphi = \lim_{n\to\infty} \varphi_n$, la continuité de S^* donne $S^*\varphi = \lim_{n\to\infty} S^*\varphi_n = \psi$. Donc $\psi \in S^*(F^*)$, de sorte que $S^*(F^*)$ est fermé dans E^*.

2) On raisonne de la même façon. Par le théorème de l'application ouverte, il existe $\delta > 0$ tel que $\delta B_{E^*} \subseteq S^*(B_{F^*})$. Alors, pour tout $x \in E$:

$$\begin{aligned}\|Sx\|_F &= \sup_{\psi\in B_{F^*}} |\langle \psi, Sx\rangle| = \sup_{\psi\in B_{F^*}} |\langle S^*\psi, x\rangle| = \sup_{\varphi\in S^*(B_{F^*})} |\langle \varphi, x\rangle| \\ &\geqslant \sup_{\varphi\in \delta B_{E^*}} |\langle \varphi, x\rangle| = \sup_{\varphi\in B_{E^*}} |\langle \delta\varphi, x\rangle| = \delta \sup_{\varphi\in B_{E^*}} |\langle \varphi, x\rangle| = \delta\, \|x\|_E\,.\end{aligned}$$

Alors, si $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite d'éléments de E telle que $Sx_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y \in F$, cette suite est de Cauchy, donc converge. Si x est sa limite, on a $y = S(x) \in S(X)$; donc $S(X)$ est fermé dans E.

B. 1) a) Le fait que $j^*\colon Y^* \to [T(X)]^*$ soit surjective résulte du *Théorème de Hahn-Banach* : pour toute $\varphi \in [T(X)]^*$, il existe $\psi \in Y^*$ prolongeant φ ; or le fait que ψ prolonge φ s'exprime en disant que $\psi \circ j = \varphi$, c'est-à-dire $j^*(\psi) = \varphi$.

b) Utilisons le 1) avec $E = X$ et $F = T(X)$, qui est bien un espace de Banach, car fermé (par hypothèse) dans l'espace de Banach Y, et avec $S\colon X \to T(X)$ la co-restriction de T : $S(x) = T(x)$ pour tout $x \in X$. Comme S est surjective, le sous-espace $S^*\big([T(X)]^*\big)$ est fermé dans X^*. Mais $T = j \circ S$, et la surjectivité de j^* entraîne que $T^*(Y^*) = S^*[j^*(Y^*)] = S^*\big([T(X)]^*\big)$. par conséquent $T^*(Y^*)$ est fermé dans X^*.

2) a) On sait (Chapitre I, Exercice 15, 1) b)), que l'image par q de la boule ouverte B^o de X de centre 0 et de rayon 1 est la boule ouverte $\widetilde{B}^o$ de X/Z de centre 0 et de rayon 1. Donc, pour tout $\psi \in (X/Z)^*$, on a :

$$\|q^*(\psi)\|_{X^*} = \sup_{x\in B^o} |\langle q^*(\psi), x\rangle| = \sup_{x\in B^o} |\langle \psi, q(x)\rangle| = \sup_{\xi\in \widetilde{B}^o} |\langle \psi, \xi\rangle| = \|\psi\|_{(X/Z)^*}\,.$$

b) Considérons l'application $\widehat{T}\colon X \to \overline{T(X)}$, définie par $\widehat{T}(x) = T(x)$ pour $x \in X$. Elle se factorise en $\widehat{T} = \widetilde{T} \circ q$, par une application linéaire continue $S = \widetilde{T}\colon E = X/\ker T \to F = \overline{T(X)}$. De plus, si $j\colon \overline{T(X)} \to Y$ est l'injection canonique, on a $T = j \circ \widehat{T}$. Comme au 1), le Théorème de Hahn-Banach dit que l'application $j^*\colon Y^* \to [\overline{T(X)}]^*$ est surjective. Alors $S^*\big([\overline{T(X)}]^*\big) = S^*[j^*(Y^*)]$. Comme q^* est une isométrie, $S^*[j^*(Y^*)]$ est isométrique à $q^*\big(S^*[j^*(Y^*)]\big) = (j \circ \widetilde{T} \circ q)^*(Y^*) = T^*(Y^*)$. Par hypothèse, ce sous-espace est fermé dans X^*, donc complet. Étant isométrique à $S^*[j^*(Y^*)]$, ce dernier est aussi complet, donc fermé dans $E^* = (X/\ker T)^*$. Il résulte du **A.** 2) que $S(E)$ est fermé dans $F = \overline{T(X)}$. Il est donc aussi fermé dans Y. Mais $S(E) = S[q(X)] = \widehat{T}(X) = T(X)$, et par conséquent, $T(X)$ est fermé dans Y.

Exercice 23

1) Supposons qu'il n'existe aucun $c > 0$ tel que $\|T\xi\| \geqslant c\,\|\xi\|_1$ pour tout $\xi \in \ell_1$. On peut alors trouver une suite d'éléments $\xi_n \in \ell_1$ tels que $\|\xi_n\|_1 = 1$ et $\|T\xi_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Alors, pour tout $x^* \in X^*$, on a $(T^*x^*)(\xi_n) = x^*(T\xi_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Comme $T^*(X^*)$ est dense dans ℓ_∞, cela prouve que $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} 0$. En effet, soit $\zeta \in \ell_\infty$; pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x^* \in X^*$ tel que $\|\zeta - T^*x^*\|_\infty \leqslant \varepsilon$. Pour cet $\varepsilon > 0$, il existe aussi un $N \geqslant 1$ tel que $|(T^*x^*)(\xi_n)| \leqslant \varepsilon$ pour $n \geqslant N$. Alors $|\zeta(\xi_n)| \leqslant |(T^*x^*)(\xi_n)| + \|\zeta - T^*x^*\|_\infty \|\xi_n\|_1 \leqslant \varepsilon + \varepsilon = 2\,\varepsilon$. Donc $\zeta(\xi_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Mais si $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} 0$, la propriété de Schur de ℓ_1 (Exercice 14, ou Exercice 18 du Chapitre I) entraîne $\|\xi_n\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, ce qui contredit $\|\xi_n\|_1 = 1$.

2) $T^*(X^*)$ est alors fermé dans ℓ_∞ (c'est le même raisonnement qu'à l'Exercice 11 du Chapitre II). En effet, si l'on a des $x_n^* \in X^*$ tels que $T^*x_n^* \xrightarrow[n\to\infty]{} \zeta$, la suite $(T^*x_n^*)_{n\geqslant 1}$ est de Cauchy : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \geqslant 1$ tel que $\|T^*x_n^* - T^*x_k^*\|_\infty \leqslant \varepsilon$ pour $n, k \geqslant N$. Il résulte du 1) qu'alors $\|x_n^* - x_k^*\| \leqslant (1/c)\,\varepsilon$ pour $n, k \geqslant N$. Cela signifie que la suite $(x_n^*)_{n\geqslant 1}$ est de Cauchy dans l'espace de Banach X^*. Elle est donc convergente, et si x^* est sa limite, on a, par la continuité de T^*, $T^*x_n^* \xrightarrow[n\to\infty]{} T^*x^*$, d'où $\zeta = T^*x^* \in T^*(X^*)$.

$T^*(X^*)$ étant dense et fermé dans ℓ_∞, est égal à ℓ_∞.

Exercice 24

1) Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite faiblement convergente dans X : $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} x$. Cette suite est bornée. Comme T est compact, l'ensemble $K = \{Tx_n\,;\ n \geqslant 1\}$ est relativement compact dans Y. Soit y une valeur d'adhérence (en norme) de la suite $(Tx_n)_{n\geqslant 1}$. Il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k\geqslant 1}$ telle que $Tx_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{\|\cdot\|} y$. Mais T est continu pour les topologies faibles (Théorème VIII.1.12) ; donc $Tx_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} Tx$. Par conséquent, $y = Tx$. La suite $(Tx_n)_{n\geqslant 1}$ n'ayant qu'une seule valeur d'adhérence dans le compact K, est donc convergente (en norme). Donc T est un opérateur de Dunford-Pettis.

2) Il s'agit de montrer que l'image par T de la boule unité de X est relativement compacte. Cela revient à montrer que pour toute suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ dans la boule unité de X, la suite $(Tx_n)_{n\geqslant 1}$ possède une sous-suite convergente. Comme X est réflexif, sa boule unité est faiblement compacte ; la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ possède donc, par le *Théorème d'Eberlein-Šmulian*, une sous-suite $(x_{n_k})_{k\geqslant 1}$ faiblement convergente. Comme T est un opérateur de Dunford-Pettis, la suite $(Tx_{n_k})_{k\geqslant 1}$ converge en norme, ce qu'il fallait obtenir.

3) a) Notons d'abord que V est bien défini, c'est-à-dire que Vf est continue sur $[0,1]$ pour toute $f \in L^1(0,1)$; cela résulte du *Théorème de convergence dominée* : si $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$, alors $\mathbb{1}_{[0,x_n]}f \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{1}_{[0,x]}f$ et $|\mathbb{1}_{[0,x_n]}f| \leqslant |f|$, presque partout. Il est clair ensuite que V est linéaire et l'on a $|(Vf)(x)| \leqslant \int_0^x |f(t)|\,dt \leqslant \int_0^1 |f(t)|\,dt = \|f\|_1$ pour tout $x \in [0,1]$, de sorte que $\|Vf\|_\infty \leqslant \|f\|_1$, et V est continu, de norme $\|V\| \leqslant 1$ (en fait $\|V\| = 1$ car $(V\mathbb{1})(x) = x$).

Pour montrer que V est Dunford-Pettis, donnons-nous une suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ faiblement convergente dans $L^1(0,1)$. Nous allons utiliser le *Théorème d'Ascoli* pour montrer que $A = \{Vf\,;\ n \geqslant 1\}$ est relativement compact dans $\mathscr{C}([0,1])$. Il en résultera que $(Vf_n)_{n\geqslant 1}$ converge en norme dans $\mathscr{C}([0,1])$, car on sait que $(Vf_n)_{n\geqslant 1}$ converge faiblement (Théorème VIII.1.12) et elle ne peut donc avoir qu'une seule valeur d'adhérence en norme. Vérifions les hypothèses du Théorème d'Ascoli :

(*i*) A est borné dans $\mathscr{C}([0,1])$. En effet, toute suite faiblement convergente est bornée, donc il existe $M < +\infty$ tel que $\|f_n\|_1 \leqslant M$ pour tout $n \geqslant 1$; alors $\|Vf_n\|_\infty \leqslant \|V\|\,\|f_n\|_1 \leqslant M$ pour tout $n \geqslant 1$.

(*ii*) A est équicontinue. En effet, la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ est faiblement convergente; donc, en particulier, $\lim_{n\to\infty}\int_A f_n(t)\,dt$ existe pour tout borélien A de $[0,1]$. Il résulte alors du 4) de l'Exercice 4 du Chapitre V (et de l'absolue continuité des intégrales : voir Proposition V.1.8) que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$|x-y| \leqslant \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |(Vf_n)(x) - (Vf_n)(y)| = \left|\int_x^y f_n(t)\,dt\right| \leqslant \varepsilon\,, \quad \forall n \geqslant 1\,,$$

ce qui est bien l'équicontinuité de A.

b) V n'est pas compact car si $f_n = n\,\mathbb{1}_{[0,1/n]}$, on a $\|f_n\|_1 = 1$ (donc $f_n \in B_{L^1(0,1)}$); mais, d'autre part, on a $(V_n)(x) = nx$ pour $0 \leqslant x \leqslant 1/n$ et $(Vf_n)(x) = 1$ pour $1/n \leqslant x \leqslant 1$, de sorte que la suite $(Vf_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers la fonction *non continue* $\mathbb{1}_{]0,1]}$, et donc ne peut avoir de sous-suite uniformément convergente (c'est-à-dire convergente pour la norme de $\mathscr{C}([0,1])$).

Variante. L'ensemble $\{Vf_n\ ;\ n \geqslant 1\}$ n'est pas relativement compact dans $\mathscr{C}([0,1])$ car il n'est pas équicontinu : pour tout $\delta > 0$, on a, si $N \geqslant 1/\delta$:

$$\sup_{|x-y|\leqslant\delta}\left[\sup_{n\geqslant 1}|(Vf_n)(x) - (Vf_n)(y)|\right] \geqslant |(Vf_N)(1/N) - (Vf_N)(0)| = 1\,.$$

Exercice 25

1) Soit $(z_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'éléments de la boule unité B_Z de Z. Comme Z est réflexif, cette boule est faiblement compacte, et on peut donc extraire de cette suite, par le *Théorème d'Eberlein-Šmulian*, une sous-suite $(w_n)_{n\geqslant 1}$ faiblement convergente. Comme toute application linéaire continue est aussi continue pour les topologies faibles (Théorème VIII.1.12), la suite $(Tw_n)_{n\geqslant 1}$ est faiblement convergente dans ℓ_1. La propriété de Schur de ℓ_1 assure que cette suite converge en norme. Ainsi toute suite d'éléments de $T(B_Z)$ possède une sous-suite convergente (pour la norme). Cela signifie que $T(B_Z)$ est relativement compacte (en fait elle est compacte), et donc que T est un opérateur compact.

2) On sait que le dual d'un espace réflexif est aussi réflexif. Alors, si $U\colon c_0 \to Y$ est linéaire continu, son adjoint $U^*\colon Y^* \to \ell_1$ est compact, par le 1). Il résulte du *Théorème de Schauder* (Théorème VII.2.7) que U est compact.

Exercice 26

Soit $q\colon X \to X/M$ la surjection canonique. Elle est continue pour les normes, donc aussi continue pour les topologies faibles (Théorème VIII.1.12). L'espace X étant réflexif, sa boule unité B_X est faiblement compacte, par le *Théorème de Kakutani*; donc $q(B_X)$ est faiblement compact dans X/M. Maintenant, on sait (Chapitre I, Exercice 15, 1) b)) que l'image par q de la boule unité ouverte B_X° de X est la boule unité ouverte $B_{X/M}^\circ$ de X/M. Donc $B_{X/M}^\circ = q(B_X^\circ) \subseteq q(B_X)$. Comme $q(B_X)$ est faiblement compact, il est en particulier faiblement fermé, et *a fortiori* fermé en norme. On obtient donc $B_{X/M} = \overline{B_{X/M}^\circ} \subseteq q(B_X)$. Par ailleurs, la boule unité fermée étant convexe, elle est faiblement fermée (*Théorème de Mazur*). Il résulte alors de la faible compacité de $q(B_X)$ que $B_{X/M}$ est faiblement compacte, ce qui, de nouveau par le *Théorème de Kakutani*, montre que X/M est réflexif.

Exercice 27

1) a) Cela résulte du fait que les formes linéaires $\varphi \in X^*$, qui sont continues pour la norme, sont aussi continues, par définition, pour la topologie faible.

b) Pour tout $x \in X$, notons par $\widetilde{x}$ son image canonique dans X^{**}, c'est-à-dire que $\widetilde{x}(\varphi) = \varphi(x)$ pour toute $\varphi \in X^*$. Par le a), on a $\sup_{x\in K}|\widetilde{x}(\varphi)| \leqslant C_\varphi$ pour toute $\varphi \in X^*$. Le *Théorème de Banach-Steinhaus* dit qu'alors $\sup_{x\in K}\|\widetilde{x}\| = C < +\infty$. Comme $\|\widetilde{x}\| = \|x\|$, on obtient bien $\|x\| \leqslant C$ pour tout $x \in K$.

Ainsi donc, toute partie faiblement compacte est bornée (en norme).

2) a) On fixe un $\varepsilon > 0$. Par le 1) K_ε est borné : $\|x\| \leqslant C_\varepsilon$ pour tout $x \in K$. Alors $\|x\| \leqslant C_\varepsilon + \varepsilon$ pour tout $x \in A$. Donc A est borné.

b) On sait que la topologie préfaible $\sigma(X^{**}, X^*)$ de X^{**} est une topologie d'espace vectoriel topologique ; ainsi l'application somme $s\colon (u,v) \in X^{**} \times X^{**} \mapsto (u+v) \in X^{**}$ est préfaiblement continue. Alors, si H et L sont deux parties préfaiblement compactes dans X^{**}, leur produit $H \times L$ est préfaiblement compact dans $X^{**} \times X^{**}$. Son image $H + L$ par s est donc préfaiblement compacte dans X^{**}.

c) La boule unité $B_{X^{**}}$ de X^{**} est w^*-compacte par le *Théorème d'Alaoglu*. Il en est de même de $L = \varepsilon\, B_{X^{**}}$; donc $K_\varepsilon + \varepsilon\, B_{X^{**}}$ est w^*-compact, par le b).

d) Pour tout $\varepsilon > 0$, on a $A \subseteq K_\varepsilon + \varepsilon\, B_X$; donc $\overline{A}^{w^*} \subseteq \overline{K_\varepsilon + \varepsilon\, B_X}^{w^*}$. Par w^*-continuité de l'addition et de la multiplication par les scalaires, $\overline{K_\varepsilon + \varepsilon\, B_X}^{w^*} \subseteq \overline{K_\varepsilon}^{w^*} + \varepsilon\, \overline{B_X}^{w^*}$. Mais $\overline{B_X}^{w^*} = B_{X^{**}}$ (*Théorème de Goldstine*). D'autre part, par définition de ces topologies, la trace sur X de la topologie préfaible $\sigma(X^{**}, X^*)$ de X^{**} est la topologie faible $\sigma(X, X^*)$ de X ; donc K_ε qui est faiblement compact dans X est w^*-compact dans X^{**} ; en particulier, K_ε est w^*-fermé dans X^{**}. Ainsi donc $\overline{A}^{w^*} \subseteq K_\varepsilon + \varepsilon\, B_{X^{**}}$. En particulier $\overline{A}^{w^*} \subseteq X + \varepsilon\, B_{X^{**}}$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient $\overline{A}^{w^*} \subseteq \bigcap_{\varepsilon > 0} (X + \varepsilon\, B_{X^{**}})$.

e) Pour tout $\xi \in \overline{A}^{w^*}$, on a donc $\operatorname{dist}(\xi, X) \leqslant \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. Cela signifie que $\operatorname{dist}(\xi, X) = 0$, et donc que $\xi \in X$ (puisque X est fermé dans X^{**}). Ainsi $\overline{A}^{w^*} \subseteq X$. Mais, comme on l'a dit, la trace sur X de la topologie préfaible de X^{**} est la topologie faible de X ; donc $\overline{A}^{w^*} = \overline{A}^{w}$, l'adhérence de A dans X pour la topologie faible. Par ailleurs, on a montré au c) que $K_\varepsilon + \varepsilon\, B_{X^{**}}$ est w^*-compact. Comme $\overline{A}^{w^*} \subseteq K_\varepsilon + \varepsilon\, B_{X^{**}}$, $\overline{A}^{w} = \overline{A}^{w^*}$ est aussi w^*-compact dans X^{**}. Étant contenu dans X, $\overline{A}^{w}$ est donc faiblement compact dans X.

3) a) Comme T est linéaire et B_X est convexe, $T(B_X)$ est aussi convexe ; son adhérence est donc la même pour la topologie faible et pour la topologie de la norme.

Si T est compact $\overline{T(B_X)}$ est compact pour la norme. La topologie faible étant moins fine que la topologie de la norme, mais néanmoins séparée, $\overline{T(B_X)}$ est aussi compact pour la topologie faible (et ces deux topologies coïncident dessus). Donc T est faiblement compact.

b) Si Y est réflexif, toute partie bornée de Y est faiblement relativement compacte (par le Théorème de Kakutani). C'est le cas de $T(B_X)$; donc T est faiblement compact.

Si X est réflexif, sa boule unité B_X est faiblement compacte ; comme T est continu pour les topologies faibles, $T(B_X)$ est faiblement compact dans Y.

c) Par hypothèse, $T(B_X)$ est faiblement relativement compacte dans Y ; par conséquent, puisque S est continu pour les topologies faibles, $S[\overline{T(B_X)}]$ est faiblement compact dans Z. Comme $R(B_W)$ est contenu dans $\|R\|\, B_X$, on a $(TR)(B_W) = T[R(B_W)] \subseteq \|R\|\, T(B_X) \subseteq \|R\|\, \overline{T(B_X)}$, de sorte que $(STR)(B_W) \subseteq \|R\|\, S[\overline{T(B_X)}]$ est relativement faiblement compact dans Z. Ainsi, STR est un opérateur faiblement compact.

d) Notons que l'on suppose *a priori* les applications faiblement compactes continues ; mais on a vu au 1) que toute partie faiblement compacte est bornée ; donc si $\overline{T(B_X)}$ est faiblement compact, il est borné, ce qui signifie que T est continu.

L'opérateur nul est évidemment faiblement compact et il est clair que aT est faiblement compact si T l'est, pour tout scalaire $a \in \mathbb{K}$. Ensuite, si T et U sont faiblement compacts, $(T+U)(B_X) \subseteq T(B_X) + U(B_X)$; donc $\overline{(T+U)(B_X)}^{w} \subseteq \overline{T(B_X)}^{w} + \overline{U(B_X)}^{w}$, qui est w-compact, comme somme de deux ensembles w-compacts dans l'espace vectoriel topologique $\big(X, \sigma(X, X^*)\big)$; donc $\overline{(T+U)(B_X)}^{w}$ est w-compact et $T+U$ est un opérateur faiblement compact.

Soit $(T_n)_{n \geqslant 1}$ une suite d'opérateurs faiblement compacts convergeant en norme vers l'opérateur T. Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un $N \geqslant 1$ tel que $\|T_N - T\| \leqslant \varepsilon$. Alors, pour tout $x \in B_X$, on a $\|T_N x - Tx\| \leqslant \varepsilon$, c'est-à-dire que $Tx \in T_N x + \varepsilon B_X$. On a donc $T(B_X) \subseteq T_N(B_X) + \varepsilon B_X \subseteq \overline{T_N(B_X)}^w + \varepsilon B_X$. Comme $\overline{T_N(B_X)}^w$ est faiblement compact, par hypothèse, il résulte du 2) que $\overline{T(B_X)}^w$ est faiblement compact, c'est-à-dire que l'opérateur T est faiblement compact.

e) Montrons d'abord que T^{**} est w^*-continu. Soit $\xi \in X^{**}$ et W un voisinage préfaible de $T^{**}(\xi)$ dans Y^{**}. Il existe $\varepsilon > 0$ et $\psi_1, \ldots, \psi_n \in Y^*$ tels que :

$$W \supseteq W_{\varepsilon,\psi_1,\ldots,\psi_n}(T^{**}\xi) = \{\sigma \in Y^{**}\,;\ |\langle \sigma - T^{**}\xi, \psi_k\rangle| \leqslant \varepsilon\,,\ 1 \leqslant k \leqslant n\}\,.$$

Alors :

$$\begin{aligned}(T^{**})^{-1}(W) &\supseteq \{\zeta \in X^{**}\,;\ |\langle T^{**}\zeta - T^{**}\xi, \psi_k\rangle| \leqslant \varepsilon\,,\ 1 \leqslant k \leqslant n\} \\ &= \{\zeta \in X^{**}\,;\ |\langle \zeta - \xi, T^*\psi_k\rangle| \leqslant \varepsilon\,,\ 1 \leqslant k \leqslant n\} = V_{\varepsilon,T^*\psi_1,\ldots,T^*\psi_n}(\xi)\,,\end{aligned}$$

qui est un voisinage préfaible de ξ dans X^{**}. Donc T^{**} est w^*-continu.

Supposons T faiblement compact. En utilisant le *Théorème de Goldstine*, on a :

$$T^{**}(B_{X^{**}}) = T^{**}\big(\overline{B_X}^{\sigma(X^{**},X^*)}\big) \subseteq \overline{T^{**}(B_X)}^{\sigma(Y^{**},Y^*)} = \overline{T(B_X)}^{\sigma(Y^{**},Y^*)}\,.$$

Mais, T étant faiblement compact, l'ensemble $\overline{T(B_X)}^{\sigma(Y,Y^*)}$ est faiblement compact dans Y. Vu comme partie de Y^{**}, il est donc $\sigma(Y^{**},Y^*)$-compact. Il en résulte que l'on a $\overline{T(B_X)}^{\sigma(Y^{**},Y^*)} = \overline{T(B_X)}^{\sigma(Y,Y^*)}$. Par conséquent, $T^{**}(B_{X^{**}}) \subseteq \overline{T(B_X)}^{\sigma(Y,Y^*)} \subseteq X$, et cela entraîne que $T^{**}(B_{X^{**}}) \subseteq X$.

Réciproquement, supposons que $T^{**}(X^{**}) \subseteq X$. Alors :

$$T(B_X) = T^{**}(B_X) \subseteq T^{**}(B_{X^{**}}) \subseteq X\,.$$

Mais $B_{X^{**}}$ est w^*-compacte, par le *Théorème d'Alaoglu* ; donc son image $T^{**}(B_{X^{**}})$ par l'application w^*-continue T^{**} est aussi w^*-compacte. Étant contenue dans Y, $T^{**}(B_{X^{**}})$ est en fait faiblement compacte dans Y. Il en résulte que $T(B_X)$ est faiblement relativement relativement compacte, c'est-à-dire que T est faiblement compact.

Exercice 28

1) Supposons que $e = tx + (1-t)y$, avec $0 < t < 1$ et $x, y \in K$. Comme $e \in F$ et F est une face extrémale, cela entraîne que $x, y \in F$. Comme e est un point extrémal de F, on a forcément $x = y = e$, de sorte que e est un point extrémal de K.

2) On munit l'ensemble $\mathscr{E}$ des faces extrémales de K de l'ordre définit par $F_1 \prec F_2$ si $F_2 \subseteq F_1$. Cet ordre est inductif car si $\mathscr{F}$ est une partie totalement ordonnée de $\mathscr{E}$, alors $F_\infty = \bigcap_{F \in \mathscr{F}} F$ est une intersection de compacts non vides, donc est lui-même un compact (donc un fermé de E, puisque E est séparé) *non vide* de K. De plus, F_∞ est convexe, comme intersection de convexes. C'est une face extrémale de K car si $tx + (1-t)y \in F_\infty$, avec $x, y \in K$ et $0 < t < 1$, on a $tx + (1-t)y \in F$ pour tout $F \in \mathscr{F}$. Comme chaque $F \in \mathscr{F}$ est une face extrémale, on en déduit que $x, y \in F$ pour tout $F \in \mathscr{F}$, et donc que $x, y \in F_\infty$. Ainsi, F_∞ est un majorant de $\mathscr{F}$. Le *Lemme de Zorn* donne l'existence d'une face F_0 maximale pour l'ordre $\prec$, c'est-à-dire que F_0 est minimale pour l'inclusion.

3) a) Tout d'abord, C est convexe (car φ est linéaire) et fermé dans E (car φ est continue et F_0 est fermé dans E), et il n'est pas vide car F_0 est compact et φ est continue. Montrons que c'est une face extrémale de K. Soit $z_1, z_2 \in K$ et $z = tz_1 + (1-t)z_2$, avec $0 < t < 1$. Comme F_0 est une face extrémale, on a $z_1, z_2 \in F_0$. Alors $m = \varphi(z) = t\varphi(z_1) + (1-t)\varphi(z_2) \leqslant tm + (1-t)m = m$. Comme $0 < t < 1$, cela n'est possible que si $\varphi(z_1) = \varphi(z_2) = m$, et donc $z_1, z_2 \in C$.

b) On a $C \neq F_0$ car, puisque $\varphi(x) \neq \varphi(y)$, C ne peut contenir à la fois x et y.

c) On a une contradiction avec la minimalité de F_0, car C est une face extrémale strictement contenue dans F_0. Par conséquent, F_0 ne contient qu'un seul point ; ce point est un point extrémal de K. Ainsi tout convexe compact non vide K de E possède au moins un point extrémal.

4) a) Bien sûr $K_0 \subseteq K$, puisque K est convexe fermé. Si $K_0 \neq K$, il existe $x_0 \in K \setminus K_0$. Le *Théorème de Hahn-Banach*, sous la forme du Théorème VI.3.6, assure l'existence d'une forme linéaire continue ψ telle que $\max_{y \in K_0} \psi(y) < \psi(x_0)$. En particulier, $\max_{y \in K_0} \psi(y) < \max_{x \in K} \psi(x)$.

b) Pour la même raison qu'au 3) a), C' est une face extrémale de K. En tant que compact convexe non vide de E, il possède, d'après 3) c), au moins un point extrémal. Ce point extrémal est, d'après le 1), un point extrémal de K.

5) D'après le choix de ψ et la définition de C', $C' \cap K_0 = \emptyset$. On a donc obtenu au 4) b) un point extrémal de K qui n'est pas dans K_0, ce qui n'est pas possible. Donc $K_0 = K$, ce qui prouve le résultat annoncé : K est l'enveloppe convexe fermée de l'ensemble de ses points extrémaux.

6) Si c_0 ou $L^1(0,1)$ étaient isométriques à un espace de Banach dual X^*, leur boule unité serait un compact convexe (non vide) dans l'espace localement convexe X^* muni de la topologie préfaible $\sigma(X^*, X)$ (*Théorème d'Alaoglu*). Par le Théorème de Krein-Milman, ces boules auraient au moins un point extrémal. Or on a vu dans l'Exercice 24 du Chapitre I que ce n'était pas le cas.

Exercice 29

1) Considérons $E^\perp = \{\mu \in \mathscr{M}(K)\,;\ \int_K f\,d\mu = 0,\ \forall f \in E\}$. Ce sous-espace est préfaiblement fermé dans $\mathscr{M}(K)$; donc, par le *Théorème d'Alaoglu*, sa boule unité est un convexe préfaiblement compact. Il en est de même de $\mathscr{K}_E = \{\mu \in E^\perp\,;\ \|\mu\| \leqslant 1 \text{ et } \mu \text{ réelle}\}$. La topologie préfaible étant une topologie localement convexe séparée, le *Théorème de Krein-Milman* (Exercice 28) dit que $\mathscr{K}_E$ est l'enveloppe convexe fermée de l'ensemble de ses points extrémaux. Or, si E n'est pas dense dans $\mathscr{C}(K)$, le *Théorème de Hahn-Banach* dit qu'il existe une forme linéaire continue non nulle sur $\mathscr{C}(K)$ s'annulant sur E ; autrement dit, $E^\perp$ n'est pas réduit à $\{0\}$. Notons maintenant que E étant stable par conjugaison, on a $\bar{\mu} \in E^\perp$ pour toute $\mu \in E^\perp$; donc les mesures réelles $\operatorname{Re}\mu = (\mu + \bar{\mu})/2$ et $\operatorname{Im}\mu = (\mu - \bar{\mu})/2i$ sont dans $E^\perp$, et si $\mu \neq 0$, l'une des deux n'est pas nulle. Il en résulte que $\mathscr{K}_E$ n'est pas réduit à $\{0\}$. Les points extrémaux sont donc forcément de norme 1, d'où l'existence d'un point extrémal (au moins) μ de $\mathscr{K}_E$ tel que $\|\mu\| = 1$.

2) a) Si g vérifie les conditions données, $\bar{g}$ aussi. En effet, $\bar{g} \in L^\infty(|\nu|)$, et n'est pas $|\nu|$-presque partout constante. De plus, si $f \in E$, on a $\bar{f} \in E$; donc $\int_K f\,\bar{g}\,d\nu = \overline{\int_K \bar{f} g\,d\nu} = 0$. Donc $\operatorname{Re} g = (g + \bar{g})/2$ les vérifie aussi. On peut donc supposer g réelle. Ensuite, comme g est $|\nu|$- essentiellement bornée, on peut, en lui ajoutant une constante, supposer qu'elle est positive $|\nu|$-*p.p.*. Finalement, on a $\int_K g\,d|\nu| \neq 0$, car sinon, comme g est positive $|\nu|$-*p.p.*, g serait nulle $|\nu|$-*p.p.*, contrairement à l'hypothèse. En multipliant g par une constante, on peut donc supposer que $\int_K g\,d|\nu| = 1$.

b) Si l'on avait $M \leqslant 1$, on aurait $0 \leqslant g \leqslant M \leqslant 1$ $|\nu|$-*p.p.* ; donc $\mathbb{1} - g \geqslant 0$ $|\nu|$-*p.p.*, et $\int_K |\mathbb{1} - g|\,d|\nu| = \int_K (\mathbb{1} - g)\,d|\nu| = \int_K d|\nu| - \int_K g\,d|\nu| = 1 - 1 = 0$. On aurait donc $g = \mathbb{1}$ $|\nu|$-*p.p.*, contrairement à l'hypothèse.

c) Considérons les mesures ν_1 et ν_2 indiquées dans l'énoncé, et soit $\nu = h.|\nu|$ la décomposition polaire de ν. On a $\|\nu_1\| = |\nu_1|(K) = \int_K g h\,d|\nu| \leqslant \int_K g\,d|\nu| = 1$. De même, puisque $0 < \lambda < 1$ entraîne $\frac{\mathbb{1} - \lambda g}{1-\lambda} \geqslant 0$ $|\nu|$-*p.p.*, on a $\|\nu_2\| = |\nu_2|(K) \leqslant \int_K \frac{\mathbb{1} - \lambda g}{1-\lambda}\,d|\nu| = \frac{1}{1-\lambda}\,|\nu|(K) - \frac{\lambda}{1-\lambda}\int_K g\,d|\nu| = \frac{1}{1-\lambda} - \frac{\lambda}{1-\lambda} = 1$. D'autre part, pour toute $f \in E$, on a $\int_K f\,d\nu_1 = \int_K f g\,d\nu = 0$ (par hypothèse), et $\int_K f\,d\nu_2 = \int_K f\,\frac{\mathbb{1} - \lambda g}{1-\lambda}\,d\nu = \frac{1}{1-\lambda}\int_K f\,d\nu - \frac{\lambda}{1-\lambda}\int_K f g\,d\nu = 0 - 0 = 0$

(on a utilisé l'hypothèse et le fait que $\nu \in E^\perp$). Donc ν_1 et ν_2 sont dans $\mathscr{K}_E$. Comme $\nu = \lambda\nu_1 + (1-\lambda)\nu_2$, avec $0 < \lambda < 1$, ν n'est pas un point extrémal de $\mathscr{K}_E$.

3) a) Notons d'abord que g étant continue sur le compact K, elle est bornée sur K ; on a donc $g \in L^\infty(|\mu|)$. D'autre part, on a $fg \in E$ pour toute $f \in E$, par hypothèse. Donc $\int_K fg\,d\mu = 0$ pour toute $f \in E$. Comme μ est extrémale dans $\mathscr{K}_E$, le 2) permet de dire que g est constante $|\mu|$-presque partout.

b) Supposons que g soit m-*p.p.* égale à la constante C. Soit $x_0 \in \operatorname{supp} m$ tel que $g(x_0) \neq C$. La continuité de g nous donne un voisinage, que l'on peut prendre ouvert, V de x_0 et un $\varepsilon > 0$ tels que $|g(x)-C| \geqslant \varepsilon$ pour tout $x \in V$. Alors $\int_V |g(x)-C|\,dm(x) \geqslant \varepsilon\, m(V)$. Mais g étant m-*p.p.* égale à C, on a $\int_V |g(x)-C|\,dm(x) = 0$. Donc $m(V) = 0$. Alors $(\operatorname{supp} m)^c \cup V$ est un ouvert strictement plus grand que $(\operatorname{supp} m)^c$ (car $x_0 \in V$ et $x_0 \notin (\operatorname{supp} m)^c$) sur lequel m s'annule. Ce n'est pas possible, et donc $g(x_0) = C$. Ainsi g est constante sur $\operatorname{supp} m$.

c) Par le a) et le b), toute $g \in E$ est constante sur $\operatorname{supp}|\mu|$. Comme, par hypothèse, E sépare les points de K, cela n'est possible que si $\operatorname{supp}|\mu|$ est réduit à un point $a \in K$. Comme $\mu \neq 0$ (puisque $\|\mu\| = 1$), on a $|\mu|(\{a\}) \neq 0$ (en fait $|\mu|(\{a\}) = |\mu|(K) = \|\mu\| = 1$, de sorte que $\mu = \theta\,\delta_a$, avec $\theta \in \mathbb{C}$ et $|\theta| = 1$, mais on n'en a pas besoin). Mais $\int_K g\,d\mu = 0$ car $g \in E$ et $\mu \in E^\perp$, et $\int_K g\,d\mu = g(a)\,\mu(\{a\})$, et donc (puisque μ étant aussi portée par $\{a\}$, on a $\mu(\{a\}) \neq 0$) on obtient $g(a) = 0$.

Exercice 30

1) a) Soit $(e_n)_{n\geqslant 1}$ une base orthonormée de H. Pour tout $N \geqslant 1$, on a :

$$\sum_{n=1}^N \|Te_n\|^2 \leqslant C^2 \sup_{\|x\|\leqslant 1} \sum_{n=1}^N |(e_n \mid x)|^2 \leqslant C^2\,,$$

puisque $\sum_{n=1}^N |(e_n \mid x)|^2 \leqslant \|x\|^2$ par l'*inégalité de Bessel*. Il en résulte que $\sum_{n=1}^\infty \|Te_n\|^2 \leqslant C^2$ et donc que T est Hilbert-Schmidt et $\|T\|_{\mathfrak{HS}} \leqslant \pi_2(T)$.

b) Tout opérateur de Hilbert-Schmidt étant compact, T^*T est compact et auto-adjoint ; il possède donc une base orthonormée $(e_k)_{k\geqslant 1}$ formée de vecteurs propres : $T^*Te_k = s_k e_k$, avec $s_k \geqslant 0$. On a :

$$\|T\|_{\mathfrak{HS}}^2 = \sum_{k=1}^\infty \|Te_k\|^2 = \sum_{k=1}^\infty \langle Te_k, Te_k\rangle = \sum_{k=1}^\infty \langle T^*Te_k, e_k\rangle = \sum_{k=1}^\infty s_k\,.$$

Pour $x_1, \ldots, x_N \in H$, posons $\sigma^2 = \sup_{\|\xi\|\leqslant 1} \sum_{n=1}^N |\langle \xi, x_n\rangle|^2$, et décomposons chaque x_n sur la base $(e_k)_{k\geqslant 1}$: $x_n = \sum_{n=1}^\infty a_{n,k} e_k$. Il vient alors :

$$\sum_{n=1}^N \|Tx_n\|^2 = \sum_{n=1}^N \langle T^*Tx_n, x_n\rangle = \sum_{n=1}^N \Big\langle \sum_{k=1}^\infty a_{n,k}\, s_k\, e_k \sum_{j=1}^\infty a_{n,j} e_j \Big\rangle = \sum_{n=1}^N \Big(\sum_{k=1}^\infty |a_{n,k}|^2 s_k\Big)$$

$$= \sum_{k=1}^\infty s_k \Big(\sum_{n=1}^N |a_{n,k}|^2\Big) \leqslant \sigma^2 \sum_{k=1}^\infty s_k = \sigma^2 \|T\|_{\mathfrak{HS}}^2\,,$$

car $\sum_{n=1}^N |a_{n,k}|^2 = \sum_{n=1}^N |\langle e_k, x_n\rangle|^2 \leqslant \sigma^2$. Ainsi, T est 2-sommant et $\pi_2(T) \leqslant \|T\|_{\mathfrak{HS}}$.

2) a) Soit $f_1, \ldots, f_N \in \mathscr{C}(K)$. On a, en utilisant le fait que le dual de $\mathscr{C}(K)$ est l'espace $\mathscr{M}_R(K)$ des mesures régulières sur K (Théorème VIII.3.1) :

$$\sum_{n=1}^N \|j_p(f_n)\|_p^p = \sum_{n=1}^N \int_K |f_n(t)|^p\,d\mu(t) = \int_K \Big(\sum_{n=1}^N |f_n(t)|^p\,d\mu(t)\Big)$$

$$\leqslant \sup_{t\in K} \sum_{n=1}^N |f_n(t)|^p = \sup_{t\in K} \sum_{n=1}^N |\langle \delta_t, f_n\rangle|^p \leqslant \sup_{\nu \in B_{\mathscr{M}_R(K)}} \sum_{n=1}^N |\langle \nu, f_n\rangle|^p\,;$$

donc j_p est p-sommante et $\pi_p(j_p) \leqslant 1$.

Comme $\|j_p\| = 1$ et $\|j_p\| \leqslant \pi_p(j_p)$, on a finalement $\pi_p(j_p) = 1$.

Remarque. Si $(S, \mathscr{T}, m)$ est un espace de probabilité, l'injection canonique $i_p\colon L^\infty(m) \to L^p(m)$ est aussi p-sommante. Une façon de le voir est d'utiliser le fait, utilisant la Théorie des algèbres de Banach, que $L^\infty(m)$ est isométrique à un espace $\mathscr{C}(K)$. Comme on n'a pas vu cela, on doit faire un raisonnement direct, comme ci-dessus, mais on a une difficulté due au fait que l'on ne peut pas, à proprement parler, de la valeur d'une fonction en un point, et une autre, petite, liée à l'utilisation de la norme supérieure essentielle. Pour obvier à cela, on remarque d'abord que si $f_1, \ldots, f_n \in \mathscr{L}^\infty(m)$, alors, pour tout $t \in S$, on a $\sum_{k=1}^n |f_k(t)|^p = \sup_{\sum_{k=1}^n |a_k|^q \leqslant 1} \left|\sum_{k=1}^n a_k f_k(t)\right|$, où $1 < q \leqslant \infty$ est l'exposant conjugué de p (pour $p = 1$, $\sum_{k=1}^n |a_k|^q \leqslant 1$ signifiera $\max_{1\leqslant k\leqslant n} |a_k| \leqslant 1$). D'autre part, pour tout $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, il existe un ensemble négligeable $N_{\mathbf{a}} \subseteq S$ tel que $\left|\sum_{k=1}^n a_k f_k(t)\right| \leqslant \left\|\sum_{k=1}^n a_k f_k\right\|_\infty$ pour tout $t \in S \backslash N_{\mathbf{a}}$. Pour s'en sortir, il faut remarque que la boule unité de ℓ_q^n est séparable ; il en existe donc une partie dénombrable Δ telle que $\sum_{k=1}^n |f_k(t)|^p = \sup_{\mathbf{a}\in\Delta} \left|\sum_{k=1}^n a_k f_k(t)\right|$ pour tout $t \in S$. Si $N = \bigcup_{\mathbf{a}\in\Delta} N_{\mathbf{a}}$, N est alors négligeable et $\sum_{k=1}^n |f_k(t)|^p \leqslant \sup_{\mathbf{a}\in\Delta} \left\|\sum_{k=1}^n a_k f_k\right\|_\infty$ pour tout $t \in S \setminus N$. On obtient donc :

$$\sum_{k=1}^n \|f_k\|_p^p = \int_S \left[\sum_{k=1}^n |f_k(t)|^p\right] dm(t) \leqslant \sup_{\mathbf{a}\in\Delta} \left\|\sum_{k=1}^n a_k f_k\right\|_\infty = \sup_{\mathbf{a}\in\Delta} \sup_{\xi\in B_{(L^\infty)^*}} \left|\xi\Big(\sum_{k=1}^n a_k f_k\Big)\right|$$
$$= \sup_{\xi\in B_{(L^\infty)^*}} \sup_{\mathbf{a}\in\Delta} \left|\sum_{k=1}^n a_k \xi(f_k)\right| = \sup_{\xi\in B_{(L^\infty)^*}} \sum_{k=1}^n |\xi(f_k)|^p,$$

ce qui prouve que i_p est p-sommante et que $\pi_p(i_p) \leqslant 1$.

3) Par hypothèse, on peut définir une application $U\colon \xi \in X^* \mapsto \big(\xi(x_n)\big)_{n\geqslant 1} \in \ell_p$. Elle est linéaire. Utilisons le *Théorème du graphe fermé* pour montrer sa continuité. Soit $(\xi_k)_{n\geqslant 1}$ une suite d'éléments de X^* telle que $\xi_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \xi \in X^*$ et $U\xi_k \xrightarrow[k\to\infty]{} a = (a_n)_{n\geqslant 1} \in \ell_p$. La suite $(\xi_k)_{k\geqslant 1}$, convergeant dans X^* pour la norme, converge *a fortiori* pour la topologie préfaible ; donc $\xi_k(x_n) \xrightarrow[k\to\infty]{} \xi(x_n)$ pour tout $n \geqslant 1$. Par ailleurs, la suite $(U\xi_k)_{k\geqslant 1}$ convergeant dans ℓ_p vers a, elle converge ponctuellement : $(U\xi_k)(n) \xrightarrow[k\to\infty]{} a_n$ pour tout $n \geqslant 1$. Mais $(U\xi_k)(n) = \xi_k(x_n)$; on obtient donc $a_n = \xi(x_n)$ pour tout $n \geqslant 1$, de sorte que $a = U(\xi)$, prouvant que le graphe de U est fermé.

Alors, pour tout $\xi \in B_{X^*}$, on a, pour tout $N \geqslant 1$:

$$\sum_{n=1}^N |\xi(x_n)|^p \leqslant \sum_{n=1}^\infty |\xi(x_n)|^p = \|U\xi\|_p^p \leqslant \|U\|^p .$$

Comme T est p-sommant, on obtient $\sum_{n=1}^N \|Tx_n\|^p \leqslant C^p\|U\|^p$. Ceci étant vrai pour tout $N \geqslant 1$, il en résulte que $\sum_{n=1}^\infty \|Tx_n\|^p < +\infty$.

4) a) Il est clair que $\mathfrak{C} \subseteq \mathscr{C}(K)$. De plus $\mathfrak{C}$ est un cône car si $\phi = \phi_{x_1,\ldots,x_N} \in \mathfrak{C}$, alors, pour tout $\lambda \geqslant 0$, $\lambda\phi = \phi_{\lambda x_1,\ldots,\lambda x_N} \in \mathfrak{C}$. Pour montrer que le cône $\mathfrak{C}$ est convexe, il suffit de montrer que $\phi_1 + \phi_2 \in \mathfrak{C}$ pour tous $\phi_1, \phi_2 \in \mathfrak{C}$. Or si $\phi_1 = \phi_{x_1,\ldots,x_N}$ et $\phi_2 = \phi_{y_1,\ldots,y_M}$, alors $\phi_1 + \phi_2 = \phi_{x_1,\ldots,x_N,y_1,\ldots,y_M}$.

b) $\mathfrak{C}^-$ est clairement un cône ($\lambda\mathfrak{C}^- = \mathfrak{C}^-$ pour tout $\lambda > 0$) et il est convexe car si $\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{C}^-$, alors $\sup_K(\psi_1 + \psi_2) \leqslant \sup_K \psi_1 + \sup_K \psi_2 < 0$. Pour finir, il est ouvert car si $\psi \in \mathfrak{C}^-$ et $m = -\sup_K \psi$, alors la boule de centre ψ et de rayon $m/2$ est contenue dans $\mathfrak{C}^-$.

c) L'opérateur T étant p-sommant, la définition de $\pi_p(T)$ entraîne que $\phi \geqslant 0$ si $\phi \in \mathfrak{C}$. Il en résulte que $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{C}^- = \emptyset$. Comme $\mathfrak{C}^-$ est ouvert, on a aussi $\overline{\mathfrak{C}} \cap \mathfrak{C}^- = \emptyset$. Mais $\overline{\mathfrak{C}}$ est un convexe fermé; comme il est disjoint du convexe ouvert $\mathfrak{C}^-$, la forme géomtrique du *Théorème de Hahn-Banach*, dans la version du Théorème VI.3.3, dit qu'il existe une forme linéaire continue Φ sur $\mathscr{C}(K)$ séparant $\overline{\mathfrak{C}}$ et $\mathfrak{C}^-$. En changeant au besoin Φ en $-\Phi$, on obtient $\sup_{\psi \in \mathfrak{C}^-} \Phi(\psi) \leqslant \inf_{\phi \in \mathfrak{C}} \Phi(\phi)$.

On a $\sup_{\psi \in \mathfrak{C}^-} \Phi(\psi) \leqslant 0$ car si $\psi \in \mathfrak{C}^-$, on a $\lambda\psi \in \mathfrak{C}^-$ pour tout $\lambda > 0$, car $\mathfrak{C}^-$ est un cône, et cela entraîne $\lambda\Phi(\psi) \leqslant \inf_{\phi \in \mathfrak{C}} \Phi(\phi)$ pour tout $\lambda > 0$. cela n'est possible que si $\Phi(\psi) \leqslant 0$. De même $\inf_{\phi \in \mathfrak{C}} \Phi(\phi) \geqslant 0$.

Mais on sait (Théorème VIII.3.1) que les formes linéaires continues sur $\mathscr{C}(K)$ sont données par des mesures. Plus précisément, il existe une mesure régulière ν sur K telle que $\Phi(f) = \int_K f\, d\nu$ pour toute $f \in \mathscr{C}(K)$. On a alors :

$$\int_K \psi\, d\nu \leqslant 0\,, \quad \forall \psi \in \mathfrak{C}^-\,, \quad \text{et} \quad \int_K \phi\, d\nu \geqslant 0\,, \quad \forall \phi \in \mathfrak{C}\,.$$

d) Cette mesure ν est positive car si $f \in \mathscr{C}(K)$ est positive ou nulle, alors $\psi_n = -\max(f, 1/n) \in \mathfrak{C}^-$, et l'on a, par le Théorème de convergence monotone :

$$\int_K f\, d\nu = \lim_{n\to\infty}\!\downarrow \int_K (-\psi_n)\, d\nu \geqslant 0\,.$$

Notons que l'on peut normaliser ν pour obtenir une mesure de probabilité.

e) Pour tout $x \in X$, prenons $\phi(\xi) = \phi_x(\xi) = [\pi_p(T)]^p |\xi(x)|^p - \|Tx\|^p$; alors l'inégalité $\int_K \phi_x\, d\nu \geqslant 0$ devient $\|Tx\| \leqslant \pi_p(T)\big(\int_K |\xi(x)|^p\, d\nu(\xi)\big)^{1/p}$.

Remarque. Cette méthode, utilisant le Théorème de Hahn-Banach de façon astucieuse est due à B. Maurey (1972).

5) Pour tout $x \in X$, posons $\widetilde{x}(\xi) = \xi(x)$, pour $\xi \in X^*$. On définit ainsi une forme linéaire sur X^* qui est continue pour la topologie préfaible $\sigma(X^*, X)$ de X^*. En particulier $\widetilde{x}$ est continue sur $K = (B_{X^*}, w^*)$. De plus, $\|x\|_X = \sup_{\xi \in B_{X^*}} |\xi(x)| = \sup_{\xi \in B_{X^*}} |\widetilde{x}(\xi)| = \|\widetilde{x}\|_{\mathscr{C}(K)}$. On peut donc définir une application $i\colon X \to \mathscr{C}(K)$, qui est linéaire et isométrique. Posons $X_0 = i(X)$ et $X_p = \overline{j_p(X_0)} \subseteq L^p(\nu)$. Pour toute $f \in j_p(X_0)$, il existe un unique $x \in X$ tel que $f = (j_p \circ i)(x)$; on peut donc définir $\widetilde{T}(f) = T(x)$. On obtient une application linéaire $\widetilde{T}\colon j_p(X_0) \to Y$. Elle est continue car, par le Théorème de factorisation de Pietsch, on a $\|\widetilde{T}(f)\|_Y = \|T(x)\|_Y \leqslant \pi_p(T)\big(\int_K |\xi(x)|^p\, d\nu(\xi)\big)^{1/p} = \pi_p(T)\, \|f\|_{L^p(\nu)}$. On peut la prolonger, par densité, en une application linéaire continue $\widetilde{T}\colon X_p \to Y$ et l'on a $T = \widetilde{T} \circ j_p \circ i$.

6) La mesure ν étant bornée (car $\nu(K) = \|\Phi\| < +\infty$), on a $L^r(\nu) \subseteq L^p(\nu)$ pour $r \geqslant p$, et l'injection canonique $j_{r,p}\colon L^r(\nu) \to L^p(\nu)$ est continue (par l'inégalité de Hölder, lorsque $r > p$). On a $j_p = j_{r,p} \circ j_r$. Donc $T = \widetilde{T} \circ j_{r,p} \circ j_r \circ i$. Comme $j_r\colon \mathscr{C}(K) \to L^r(\nu)$ est r-sommant, par le 2), sa restriction à X_0 l'est aussi, bien évidemment. Il résulte en que T est r-sommant (il est clair, d'après la définition, que la composée d'un opérateur r-sommant avec des applications linéaires continues est encore r-sommant).

7) Si $1 < p < \infty$, l'espace $L^p(\nu)$ est réflexif; son sous-espace fermé X_p aussi. Il résulte du 3) de l'Exercice 27, que $\widetilde{T}\colon X_p \to Y$ est faiblement compact et donc que $T = \widetilde{T} \circ j_{r,p} \circ j_r \circ i$ l'est aussi.

Si $p = 1$, il résulte du 6) que T est p-sommant avec $p > 1$; il est donc faiblement compact.

Montrons maintenant que T est Dunford-Pettis. Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite faiblement convergente dans X, vers x. Alors $(\widetilde{x_n})_{n\geqslant 1}$ est faiblement convergente vers $\widetilde{x}$ dans $\mathscr{C}(K)$. Donc cette suite est (uniformément) bornée et converge simplement. La mesure ν étant bornée, les constantes sont ν-intégrables et l'on peut donc utiliser le *Théorème de convergence dominée* pour obtenir $\|(j_p \circ i)(x_n - x)\|^p_{L^p(\nu)} = \int_K |(\widetilde{x_n} - \widetilde{x})(\xi)|^p\, d\nu(\xi) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Il en résulte que $\|Tx_n - Tx\|_Y = \|\widetilde{T}[(j_p \circ i)(x_n - x)]\|_Y \leqslant \|\widetilde{T}\|\, \|(j_p \circ i)(x_n - x)\|_{L^p(\nu)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Remarque. En utilisant la remarque faite à la fin du 2), on en déduit que pour toute suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ faiblement convergente dans $L^\infty(m)$, on a $\|f_n\|_p \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, pour $1 \leqslant p < \infty$. Ce qui n'est pas facile à montrer directement. Notons que cela a été possible grâce à l'utilisation du Théorème de factorisation de Pietsch, qui a permis de voir la convergence faible dans $L^\infty(m)$ comme une convergence ponctuelle sur $B_{(L^\infty)^*}$, et d'utiliser le Théorème de convergence dominée.

Remarque. On peut alors donner la démonstration originelle de Grothendieck pour le résultat de l'Exercice 10 du Chapitre IV. Puisque la norme $\|\,.\,\|_\infty$ est plus fine que la norme $\|\,.\,\|_2$ sur $L^2(0,1)$, il résulte du 1) de cet exercice que ces deux normes sont équivalentes sur X. L'espace $L^2(0,1)$ étant réflexif, son sous-espace X l'est aussi. Il en résulte que l'injection canonique $j\colon (X, \|\,.\,\|_2) \to (X, \|\,.\,\|_\infty) \subseteq L^\infty(0,1)$ est faiblement compacte. Mais l'injection canonique $i\colon L^\infty(0,1) \to L^2(0,1)$ est de Dunford-Pettis (en fait, Grothendieck a montré en 1953 que *tout* opérateur faiblement compact de $L^\infty(0,1)$ dans un espace de Banach arbitraire est de Dunford-Pettis ; ici i est faiblement compact car $L^2(0,1)$ est réflexif). La composée $i\circ j\colon (X, \|\,.\,\|_2) \to\colon (X, \|\,.\,\|_2)$ est alors compacte : si $(f_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite dans la boule unité de X, elle possède une sous-suite $(f_{n_k})_{k\geqslant 1}$ telle que $\big(j(f_{n_k})\big)_{k\geqslant 1}$ soit faiblement convergente dans $L^\infty(0,1)$ (en fait ici, la réflexivité de X permettrait de supposer que $(f_{n_k})_{k\geqslant 1}$ elle-même est faiblement convergente dans $(X, \|\,.\,\|_2)$, mais ce n'est pas utile ici) ; maintenant, le fait que i soit de Dunford-Pettis nous dit que la suite $\big((i\circ j)(f_{n_k})\big)_{k\geqslant 1}$ converge en norme. Mais $i\circ j$ est l'application identité de $(X, \|\,.\,\|_2)$ dans lui-même ; on a donc montré que toute suite de la boule unité de X possède une sous-suite convergente en norme, et donc que cette boule unité est compacte. Il résulte du Théorème de Riesz que X est de dimension finie.

8) Si X est réflexif, sa boule unité B_X est faiblement compacte, par le *Théorème de Kakutani.* Alors, le *Théorème d'Eberlein-Šmulian* dit que toute suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ dans B_X possède une sous-suite $(x_{n_k})_{k\geqslant 1}$ faiblement convergente. Comme tout opérateur p-sommant $T\colon X \to Y$ est Dunford-Pettis, la suite $(Tx_{n_k})_{k\geqslant 1}$ converge en norme. Ainsi, toute suite de $T(B_X)$ possède une sous-suite convergeant en norme. Cela signifie que $T(B_X)$ est relativement compact ; autrement dit T est compact.

9) Si l'identité de X est p-sommante, elle est en particulier faiblement compacte. Cela entraîne que la boule unité $B_X = \overline{id_X(B_X)}$ de X est faiblement compacte. Il résulte du *Théorème de Kakutani* que X est réflexif. Alors le 8) nous apprend que id_X est compacte. Donc $B_X = \overline{id_X(B_X)}$ est compacte. Il résulte du *Théorème de Riesz* que X est de dimension finie.

10) a) Soit $(e_n)_{n\geqslant 1}$ la base canonique de ℓ_2. Si on pose $x_n = \frac{1}{n}\,e_n$, la série $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ est inconditionnellement convergente car pour toute permutation π des entiers, la suite est $(x_{\pi(n)})_{n\geqslant 1}$ orthogonale et $\sum_{n=1}^\infty \|x_{\pi(n)}\|_2^2 = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{[\pi(n)]^2} = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} < +\infty$ (voir l'Exercice 4 du Chapitre II). Pourtant, elle n'est pas absolument convergente car $\sum_{n=1}^\infty \|x_n\|_2 = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} = +\infty$.

De même, si $(e_n)_{n\geqslant 1}$ est la base canonique de c_0 et $x_n = \frac{1}{n}\,e_n$, la série $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ n'est pas absolument convergente car $\sum_{n=1}^\infty \|x_n\|_\infty = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} = +\infty$. Pourtant elle est inconditionnellement convergente. En effet, pour toute permutation π des entiers, la suite $\big(\frac{1}{\pi(j)}\big)_{j\geqslant 1}$ converge vers 0 (pour tout entier $N \geqslant 1$, il n'existe qu'un nombre fini de $j \geqslant 1$ tels que $\pi(j) \leqslant N$) ; donc $\big\|\sum_{j=n}^{n+k} x_{\pi(j)}\big\|_\infty = \max_{n\leqslant j\leqslant n+k} \frac{1}{\pi(j)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Il en résulte que $\sum_{n\geqslant 1} x_{\pi(n)}$ converge.

b) Si toute série inconditionnellement convergente dans X est absolument convergente, X ne contient aucun sous-espace isomorphe à c_0, d'après le a). Il en résulte que si $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ est une série telle que $\sum_{n=1}^\infty |\xi(x_n)| < +\infty$ pour toute $\xi \in X^*$, alors elle est inconditionnellement convergente. Par hypothèse, elle est donc absolument convergente. Il résulte alors du 3) que id_X est 1-sommante, et on en déduit, grâce au 9), que X est de dimension finie.

Complément. On va donner une preuve directe du fait que si m est une mesure de probabilité (ou une mesure bornée), alors la convergence faible dans $L^\infty(m)$ des suites entraîne leur convergence en norme dans $L^p(m)$ pour $1 \leqslant p < \infty$. Cette preuve est due à L. Rodríguez-Piazza (mai 2013).

Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite faiblement convergente vers 0 dans $L^\infty(m)$. Comme elle est bornée, on peut supposer que $\|f_n\|_\infty \leqslant 1$. On suppose que $(f_n)_n$ ne converge pas en norme dans $L^p(m)$. Dans le cas complexe, soit $(\operatorname{Re} f_n)_n$, soit $(\operatorname{Im} f_n)_n$ ne converge pas en norme vers 0 ; on peut donc supposer les f_n à valeurs réelles.

Comme $\|f_n\|_\infty \leqslant 1$, on a $|f_n|^p \leqslant |f_n|$ presque partout ; donc $\|f_n\|_p^p \leqslant \|f_n\|_1$, de sorte que $\|f_n\|_1 \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer qu'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $\int_S |f_n|\,dm \geqslant 2\varepsilon$ pour tout $n \geqslant 1$. Soit $A_n = \{|f_n| \geqslant \varepsilon\}$; on a, puisque $\|f_n\|_\infty \leqslant 1$:

$$2\,\varepsilon \leqslant \int_S |f_n|\,dm \leqslant \int_{A_n} |f_n|\,dm + \int_{A_n^c} |f_n|\,dm \leqslant m(A_n) + \varepsilon\, m(A_n^c) \leqslant m(A_n) + \varepsilon\,,$$

de sorte que $m(A_n) \geqslant \varepsilon$. Mais si $|f_n(t)| \geqslant \varepsilon$, on a $f_n(t) \geqslant \varepsilon$ ou bien $f_n(t) \leqslant -\varepsilon$; donc, pour tout $n \geqslant 1$, $m(\{f_n \geqslant \varepsilon\}) + m(\{f_n \leqslant -\varepsilon\}) = m(A_n) \geqslant \varepsilon$. Il en résulte que $m(\{f_n \geqslant \varepsilon\}) \geqslant \varepsilon/2$ ou $m(\{f_n \leqslant -\varepsilon\}) \geqslant \varepsilon/2$, et cela arrive pour une infinité de n pour au moins l'un des deux. En changeant les f_n en $-f_n$, on peut supposer que $m(\{f_n \geqslant \varepsilon\}) \geqslant \varepsilon/2$ pour une infinité de n. Quitte à prendre une nouvelle sous-suite, on peut supposer que $m(\{f_n \geqslant \varepsilon\}) \geqslant \varepsilon/2$ pour tout $n \geqslant 1$. Posons $B_n = \{f_n \geqslant \varepsilon\}$, de sorte que $m(B_n) \geqslant \varepsilon/2$.

Le point essentiel est maintenant le fait suivant.

Fait. Soit m une mesure de probabilité et B_n des parties mesurables telles que l'on ait $m(B_n) \geqslant \delta$ pour tout $n \geqslant 1$, pour un $0 < \delta < 1$. Alors il existe $n_1 \geqslant 1$ tel que $m(B_{n_1} \cap B_n) > \delta^2/2$ pour une infinité de n.

En effet, si ce n'était pas le cas, pour tout $l \geqslant 1$, on aurait $m(B_l \cap B_n) \leqslant \delta^2/2$ pour $n \geqslant n_l$; on pourrait donc trouver une suite strictement croissante d'entiers n_k telle que $m(B_{n_j} \cap B_{n_k}) \leqslant \delta^2/2$ pour $j \neq k$. Considérons alors la fonction $u = \sum_{j=1}^N \mathbb{I}_{B_{n_j}}$. On a $\|u\|_1 = \sum_{j=1}^N m(B_{n_j}) \geqslant N\delta$, d'une part, et, d'autre part :

$$\|u\|_2^2 = \sum_{1\leqslant j,k\leqslant n} m(B_{n_j} \cap B_{n_k}) = \sum_{j=1}^N m(B_{n_j}) + 2 \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} m(B_{n_j} \cap B_{n_k}) \leqslant N + 2\,\frac{N(N-1)}{2}\,\frac{\delta^2}{2}\cdot$$

Comme $\|u\|_1 \leqslant \|u\|_2$, on obtient $N^2\delta^2 \leqslant N + (N^2 - N)\,\delta^2/2$, ce qui, pour N assez grand, n'est pas possible.

Conséquence. En remplaçant la suite $(B_n)_{n\geqslant 1}$ par la suite $(B_{n_1} \cap B_n)_{n\in N_1}$, où N_1 est l'ensemble infini des indices n tels que $m(B_{n_1} \cap B_n) > \delta^2/2$, on obtient un $n_2 > n_1$ tel que $m(B_{n_1} \cap B_{n_2} \cap B_n) > (\delta^2/2)^2/2$ pour une infinité de n. En itérant, on obtient une sous-suite $(B_{n_k})_{k\geqslant 1}$ telle que $m(B_{n_1} \cap \cdots \cap B_{n_k}) > 0$ pour tout $k \geqslant 1$.

Considérons alors la sous-suite correspondante $(f_{n_k})_{k\geqslant 1}$. Elle converge faiblement vers 0 dans L^∞, comme $(f_n)_{n\geqslant 1}$. Par le Théorème de Mazur, il en existe des combinaisons convexes $C_l = \sum_{k\in K_l} c_k f_{n_k}$, avec $c_k > 0$ et $\sum_{k\in K_l} c_k = 1$, qui convergent en norme vers 0. Mais ce n'est pas possible car sur $\bigcap_{k\in K_l} B_{n_k}$, qui est de mesure > 0, on a $C_l \geqslant \sum_{k\in K_l} c_k\,\varepsilon = \varepsilon$; donc $\|C_l\|_\infty \geqslant \varepsilon$.

Variante. Posons $\varphi_j = \frac{1}{m(B_{n_1}\cap\cdots\cap B_{n_j})}\, \mathbb{I}_{B_{n_1}\cap\cdots\cap B_{n_j}}$; c'est une fonction de $L^1(m)$ de norme 1. Par le Théorème d'Alaoglu, la suite $(\varphi_j)_{j\geqslant 1}$ possède une w^*-valeur d'adhérence $\nu \in (L^\infty)^* = (L^1)^{**}$. Mais, pour $j \geqslant k$, on a $\langle \varphi_j, f_{n_k}\rangle \geqslant \varepsilon$; donc $\langle \nu, f_{n_k}\rangle \geqslant \varepsilon$, ce qui contredit le fait que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge faiblement vers 0.

XI.9. Exercices du Chapitre IX

Exercice 1

1) Soit $\varphi \in \mathscr{D}^1(]-1,1[)$. Il existe $0 < a < 1$ tels que $\operatorname{supp}\varphi \subseteq [-a,a]$. On a, en intégrant par parties :

$$\int_{-1}^{1} u(x)\,\varphi'(x)\,dx = \int_{-a}^{a} u(x)\,\varphi'(x)\,dx = \int_{-a}^{0} (1+x)\varphi'(x)\,dx + \int_{0}^{a} (1-x)\,\varphi'(x)\,dx$$
$$= [\varphi(0) - (1+a)\,\varphi(-a)] - \int_{-a}^{0} \varphi(x)\,dx + [(1-a)\,\varphi(a) - \varphi(0)] + \int_{0}^{a} \varphi(x)\,dx\,.$$

Comme $\varphi(-a) = \varphi(a) = 0$, on obtient $\int_{-1}^{1} u(x)\,\varphi'(x)\,dx = -\big(\int_{-a}^{0}\varphi(x)\,dx - \int_0^a \varphi(x)\,dx\big)$. Cela prouve que u a une dérivée faible et que $u'(x) = 1$ si $-1 < x < 0$ et $u'(x) = 1$ si $0 < x < 1$ (cette dernière fonction étant bien dans $L^p(]-1,1[)$, car continue par morceaux).

2) Tout d'abord, u est continue par morceaux sur $]-1,1[$, donc $u \in L^p(]-1,1[)$.

Soit $\varphi \in \mathscr{D}^1(]-1,1[)$. Il existe $-1 < a < 0 < b < 1$ tels que $\operatorname{supp}\varphi \subseteq [a,b]$. On a, en intégrant par parties :

$$\int_{-1}^{1} u(x)\,\varphi'(x)\,dx = \int_{a}^{b} u(x)\,\varphi'(x)\,dx = \int_{a}^{0} \varphi'(x)\,dx + \int_{0}^{b} (x+1)\,\varphi'(x)\,dx$$
$$= [\varphi(0) - \varphi(a)] + [(b+1)\,\varphi(b) - \varphi(0)] - \int_{0}^{b} \varphi(x)\,dx\,.$$

Comme $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, on obtient $\int_{-1}^{1} u(x)\,\varphi'(x)\,dx = -\int_0^b \varphi(x)\,dx$. Cela prouve que u a une dérivée faible, qui est donnée par $u'(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } -1 < x < 0\,, \\ 1 \text{ si } 0 < x < 1\,. \end{cases}$ On notera que cette fonction, étant continue par morceaux, est bien dans $L^p(]-1,1[)$.

De même, on voit que, si I est un intervalle ouvert borné, toute fonction $u\colon I \to \mathbb{R}$ qui est continue (c'est nécessaire, par le Théorème d'immersion de Sobolev) et continûment dérivable par morceaux sur I possède une dérivée faible dans $L^p(I)$ et sa dérivée faible est égale à sa dérivée usuelle, définie sur I, privé des extrémités des "morceaux".

Exercice 2

1) Si on a (ii), alors $|F(x') - F(x)| = \big|\int_x^{x'} f(t)\,dt\big| \leqslant \|f\|_\infty |x'-x|$; donc F est lipschitzienne, et sa constante de Lipschitz est $\leqslant \|f\|_\infty$.

2) a) On a, pour tout $h \neq 0$:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{F(x+h)-F(x)}{h}\,\varphi(x)\,dx = \frac{1}{h}\left[\int_{\mathbb{R}} F(x+h)\,\varphi(x)\,dx - \int_{\mathbb{R}} F(x)\,\varphi(x)\,dx\right]$$
$$= \frac{1}{h}\left[\int_{\mathbb{R}} F(u)\,\varphi(u-h)\,du - \int_{\mathbb{R}} F(u)\,\varphi(u)\,du\right]$$
$$= \int_{\mathbb{R}} F(u)\,\frac{\varphi(u-h)-\varphi(u)}{h}\,du\,.$$

Soit $A > 1$ tel que $\operatorname{supp}\varphi \subseteq [-A+1, A-1]$; pour $0 < |h| \leqslant 1$, on a alors :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{F(x+h)-F(x)}{h}\,\varphi(x)\,dx = \int_{-A}^{A} F(u)\,\frac{\varphi(u-h)-\varphi(u)}{h}\,du\,.$$

Or $F(u)\, \frac{\varphi(u-h)-\varphi(u)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} -F(u)\,\varphi'(u)$. Posons $M = \big(\sup_{|u|\leqslant A} |F(u)|\big)\,\big(\sup_{|u|\leqslant A} |\varphi'(u)|\big)$; on a $M < +\infty$ car F et φ' sont continues sur le compact $[-A, A]$, et le *Théorème des accroissements finis* entraîne que $\big|F(u)\, \frac{\varphi(u-h)-\varphi(u)}{h}\big| \leqslant M$, qui est intégrable sur $[-A, A]$. Donc le *Théorème de convergence dominée* nous dit que $\lim_{h\to 0} \int_{-A}^{A} F(u)\, \frac{\varphi(u-h)-\varphi(u)}{h}\, du = -\int_{-A}^{A} F(u)\,\varphi'(u)\, du$. Comme φ' est nulle hors de $[-A, A]$, on obtient :

$$\lim_{h\to 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{F(x+h)-F(x)}{h}\, \varphi(x)\, dx = -\int_{\mathbb{R}} F(u)\,\varphi'(u)\, du\,.$$

b) Soit C la constante de Lipschitz de F. On a $|F(x+h)-F(x)| \leqslant C\,|h|$ pour tout $h \in \mathbb{R}$; donc $\big|\int_{\mathbb{R}} \frac{F(x+h)-F(x)}{h}\, \varphi(x)\, dx\big| \leqslant \int_{\mathbb{R}} \big|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\big|\, |\varphi(x)|\, dx \leqslant C \int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|\, dx$. En passant à la limite quand h tend vers 0, on obtient $\big|\int_{\mathbb{R}} F(x)\,\varphi'(x)\, dx\big| \leqslant C \int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|\, dx$.

c) Soit $\Phi\colon \mathscr{D}^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ la forme linéaire définie par $\Phi(\varphi) = -\int_{\mathbb{R}} F(x)\,\varphi'(x)\, dx$. Le b) nous apprend qu'elle est continue. Comme $\mathscr{D}^1(\mathbb{R})$ est dense dans $L^1(\mathbb{R})$, cette forme linéaire continue se prolonge, de façon unique, en une forme linéaire continue $\widetilde{\Phi}\colon L^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Il existe donc $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\widetilde{\Phi}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\varphi(x)\, dx$ pour toute $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$. En particulier, on a $\int_{\mathbb{R}} F(x)\,\varphi'(x)\, dx = -\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\varphi(x)\, dx$ pour toute $\varphi \in \mathscr{D}^1(\mathbb{R})$.

d) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $B > |x|$. Posons $F_B = F\mathbb{1}_{]-B,B[}$ et $f_B = f\mathbb{1}_{]-B,B[}$. Alors $F_B, f_B \in L^\infty(]-B,B[) \subseteq L^1(]-B,B[)$. Comme on a $\int_{-B}^{B} F(t)\,\varphi'(t)\, dt = -\int_{-B}^{B} f(t)\,\varphi(t)\, dt$ pour toute $\varphi \in \mathscr{D}^1(\mathbb{R})$ à support dans $]-B,B[$, c'est-à-dire pour toute $\varphi \in \mathscr{D}^1(]-B,B[)$, F_B admet dans $L^1(]-B,B[)$ une dérivée faible, qui est f_B. Grâce au *Théorème d'immersion de Sobolev*, on a, pour $|u| < B$:

$$F(u) - F(0) = F_B(u) - F_B(0) = \int_0^u f_B(t)\, dt = \int_0^u f(t)\, dt\,.$$

En particulier, $F(x) = F(0) + \int_0^x f(t)\, dt$.

Exercice 3

1) En intégrant par parties, on a :

$$\widehat{\varphi'}(y) = \int_{\mathbb{R}} \varphi'(x)\, \mathrm{e}^{-2\pi i x y}\, dx = \big[\varphi(x)\, \mathrm{e}^{-2\pi i x y}\big]_{x=-\infty}^{x=+\infty} + 2\pi i y \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, \mathrm{e}^{-2\pi i x y}\, dx,$$

c'est-à-dire $\widehat{\varphi'}(y) = 2\pi i y\, \widehat{\varphi}(y)$, car $\varphi(-\infty) = \varphi(+\infty) = 0$ puisque φ est à support compact.

2) a) Pour $\varphi \in \mathscr{D}^1(\mathbb{R})$, on a $\mathscr{F}\varphi = \widehat{\varphi}$ et $\mathscr{F}(\varphi') = \widehat{\varphi'}$ car $\varphi, \varphi' \in\subseteq L^1(\mathbb{R})$; donc, en utilisant le 1), $\int_{\mathbb{R}} 2\pi i y\, (\mathscr{F} f)(y)\, \overline{(\mathscr{F}\varphi)(y)}\, dy = -\int_{\mathbb{R}} (\mathscr{F} f)(y)\, \overline{\widehat{(\mathscr{F}\varphi')}(y)}\, dx$. La transformation de Fourier-Plancherel conservant le produit scalaire, on obtient $\int_{\mathbb{R}} 2\pi i y\, (\mathscr{F} f)(y)\, \overline{(\mathscr{F}\varphi)(y)}\, dy = -\int_{\mathbb{R}} f(x)\, \overline{\varphi'(x)}\, dx$. Or $-\int_{\mathbb{R}} f(x)\, \overline{\varphi'(x)}\, dx = \int_{\mathbb{R}} f'(x)\, \overline{\varphi(x)}\, dx$, par définition de la dérivée faible de f (puisque $\overline{\varphi'} = (\overline{\varphi})'$). Utilisant à nouveau le fait que la transformation de Fourier-Plancherel conserve le produit scalaire, on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}} 2\pi i y\, (\mathscr{F} f)(y)\, \overline{(\mathscr{F}\varphi)(y)}\, dy = \int_{\mathbb{R}} [\mathscr{F}(f')](y)\, \overline{(\mathscr{F}\varphi)(y)}\, dy\,.$$

b) Comme $\mathscr{D}^1(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$ (Théorème III.1.12), $\mathscr{F}[\mathscr{D}^1(\mathbb{R})]$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$, puisque la transformation de Fourier-Plancherel est un isomorphisme de $L^2(\mathbb{R})$ sur lui-même. Le a) entraîne donc que $\int_{\mathbb{R}} 2\pi i y\, (\mathscr{F} f)(y)\, \overline{g(y)}\, dy = \int_{\mathbb{R}} [\mathscr{F}(f')](y)\, \overline{g(y)}\, dy$ pour toute $g \in L^2(\mathbb{R})$. Il en résulte que l'on a $2\pi i y\, (\mathscr{F} f)(y) = [\mathscr{F}(f')](y)$ pour presque tout $y \in \mathbb{R}$ et que $\int_{\mathbb{R}} y^2 |(\mathscr{F} f)(y)|^2\, dy < +\infty$.

3) a) Puisque $\int_{\mathbb{R}} y^2 |(\mathcal{F}f)(y)|^2\, dy < +\infty$, la fonction $y \mapsto 2\pi i\, y\, (\mathcal{F}f)(y)$ est dans $L^2(\mathbb{R})$. Par le *Théorème de Plancherel*, il existe $g \in L^2(\mathbb{R})$ telle que $(\mathcal{F}g)(y) = 2\pi i y\, (\mathcal{F}f)(y)$.

b) Puisque la transformation de Fourier-Plancherel conserve le produit scalaire, on a :

$$\begin{aligned}(g \mid \varphi) = (\mathcal{F}g \mid \mathcal{F}\varphi) &= \int_{\mathbb{R}} 2\pi i y\, (\mathcal{F}f)(y)\, \overline{\widehat{\varphi}(y)}\, dy = -\int_{\mathbb{R}} (\mathcal{F}f)(y)\, \overline{\widehat{\varphi'}(y)}\, dy \\ &= -\big(\mathcal{F}f \mid \mathcal{F}(\varphi')\big) = -(f \mid \varphi').\end{aligned}$$

c) Donc f possède une dérivée faible et cette dérivée faible est g.

Exercice 4

1) Puisque la fonction f a une dérivée faible, elle a, par le *Théorème d'immersion de Sobolev* (Théorème IX.2.6) un représentant continu u tel que :

$$u(x) - u(y) = \int_y^x f'(t)\, dt \quad \forall x, y \in I\,.$$

D'après ce même théorème, f' ayant à son tour une dérivée faible, possède aussi un représentant continu v. On a donc, $x_0 \in I$ étant fixé :

$$u(x) = u(x_0) + \int_{x_0}^x v(t)\, dt \quad \forall x \in I\,.$$

Il résulte du Théorème fondamental du Calcul Intégral que u est continûment dérivable et que $u' = v$. Ainsi f a un représentant continûment dérivable, dont la dérivée est un représentant de f'.

2) a) On sait que l'injection $j\colon H^2 \to \mathscr{C}([0,1])$ est compacte (*Théorème de Rellich-Kondrachov*) ; comme l'injection $i\colon \mathscr{C}([0,1]) \to L^2(0,1)$ est continue, la composée est compacte, de même que sa restriction $J\colon H_0^1 \to L^2(0,1)$.

b) En développant, on a :

$$F_\varphi(t) = \|J\|^2(\|f_0'\|_{L^2} + 2t\,(f_0' \mid \varphi') + t^2\|\varphi'\|_{L^2}) - (\|f_0\|_{L^2} + 2t\,(f_0 \mid \varphi) + t^2\|\varphi\|_{L^2})\,,$$

et il est alors clair que F_φ est dérivable et :

$$F_\varphi'(t) = 2\,\|J\|^2[(f_0' \mid \varphi') + t\,\|\varphi'\|_{L^2}] - 2\,[(f_0 \mid \varphi) + t\,\|\varphi\|_{L^2}].$$

On obtient $F_\varphi'(0) = 2\,[\|J\|^2(f_0' \mid \varphi') - (f_0 \mid \varphi)]$. Il n'est pas immédiat que $F_\varphi'(0) = 0$, mais cela résulte du fait que, par définition de la norme prise pour H_0^1, on a $F_\varphi(t) = \|J\|^2\|f_0 + t\varphi\|^2 - \|J(f_0 + t\varphi)\|_{L^2}^2 \geqslant 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Comme $F_\varphi(0) = 0$, par le choix de f_0, F_φ a un minimum pour $t = 0$, de sorte que $F_\varphi'(0) = 0$.

c) On a donc $\|J\|^2(f_0' \mid \varphi') = (f_0 \mid \varphi)$. Cela s'écrit :

$$\int_0^1 f_0'(x)\, \varphi'(x)\, dx = \frac{1}{\|J\|^2} \int_0^1 f_0(x)\, \varphi(x)\, dx\,.$$

Ceci étant vrai pour toute $\varphi \in \mathscr{D}^1(]0,1[)$, cela prouve que f_0' possède une dérivée faible, et que cette dérivée faible est $f_0'' = -(1/\|J\|^2)\, f_0$.

d) D'après le 1), f_0 est continûment dérivable sur $]0,1[$. Comme $f_0'' = -\big(1/\|J\|^2\big)\, f_0$ par le e), f_0' est aussi dérivable au sens usuel. Il en résulte que f_0 est solution de l'équation différentielle $y'' + \big(1/\|J\|^2\big)\, y = 0$, de sorte que $f_0(x) = A\sin(x/\|J\|) + B\cos(x/\|J\|)$. Comme $f_0(0) = 0$, on a $B = 0$. Ensuite, comme $J \neq 0$, on a $f_0 \neq 0$; donc $A \neq 0$. Alors le fait que $f_0(1) = 0$ entraîne que $1/\|J\| \in \pi\mathbb{Z}$, c'est-à-dire qu'il existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $1/\|J\| = \pi n_0$. On a forcément $n_0 \in \mathbb{N}^*$, et on obtient $\|J\| = 1/n_0\pi$. Ainsi donc $f_0(x) = A\sin(n_0\pi x)$. Maintenant $\|f_0'\|_2 = 1$ entraîne que $A = \sqrt{2}/n_0\pi$; on obtient donc $f_0(x) = \frac{\sqrt{2}}{n_0\pi}\sin(n_0\pi x)$.

On a alors $\|f_0\|_2^2 = \frac{1}{n_0^2\pi^2}\int_0^1 \big(1-\cos(2n_0\pi x)\big)\,dx = 1/n_0^2\pi^2$; donc $\|J\| = \|f_0\|_2 = 1/n_0\pi$.

Mais $\|Jf\|_2 \leqslant \|J\|\,\|f\|$ pour toute $f \in H_0^1(0,1)$. Si l'on prend $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sin(\pi x)$, on a $\|Jf\|_2 = \|f\|_2 = 1/\pi$ et $\|f\| = \|f'\|_2 = 1$; donc $1/\pi \leqslant \|J\|$. Il en résulte que $n_0 = 1$, que $f_0(x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sin(\pi x)$, et que $\|J\| = 1/\pi$.

Exercice 5

1) On sait, par le Théorème d'immersion de Sobolev, que toute $u \in W^{1,p}(I)$ se prolonge en une fonction continue sur $\bar{I}$. En particulier toute $v \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ est continue sur $\mathbb{R}$. Si l'on pose $\widetilde{u}(x) = u(x)$ si $x \in I$ et $\widetilde{u}(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R}\setminus I$, on ne peut donc obtenir un élément de $W^{1,p}(\mathbb{R})$ que si u s'annule sur ∂I.

2) On a clairement $u^* \in L^p(\mathbb{R})$. D'autre part, si l'on pose $v(x) = u'(x)$ pour $x > 0$ et $v(x) = -u'(x)$ pour $x < 0$, on a aussi clairement $v \in L^p(\mathbb{R})$. Si on pose $w(x) = \int_0^x v(t)\,dt$, on a vu dans la preuve du Théorème d'immersion de Sobolev (par une utilisation du Théorème de Fubini) que l'on a, pour toute $\varphi \in \mathscr{D}^1(\mathbb{R})$:

$$\int_{\mathbb{R}} w(x)\,\varphi'(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}} v(x)\,\varphi(x)\,dx\,.$$

Mais on sait, grâce au *Théorème d'immersion de Sobolev*, que, pour $x \geqslant 0$, on a $w(x) = \int_0^x v(t)\,dt = \int_0^x u'(t)\,dt = u(x) - u(0)$ et, pour $x \leqslant 0$, on a $w(x) = -\int_0^x u'(-t)\,dt = \int_0^{-x} u'(\tau)\,d\tau = u(-x) - u(0)$. Donc $w(x) = u^*(x) - u(0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par conséquent :

$$\int_{\mathbb{R}} w(x)\,\varphi'(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} u^*(x)\,\varphi'(x)\,dx - u(0)\int_{\mathbb{R}} \varphi'(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} u^*(x)\,\varphi'(x)\,dx\,,$$

puisque $\int_{\mathbb{R}} \varphi'(x)\,dx = [\varphi(x)]_{-\infty}^{+\infty} = 0$ car φ est à support compact. On obtient donc :

$$\int_{\mathbb{R}} u^*(x)\,\varphi'(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}} v(x)\,\varphi(x)\,dx\,, \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}^1(\mathbb{R})\,,$$

ce qui signifie que u^* a une dérivée faible et que cette dérivée faible est v.

Comme il est clair que $\|u^*\|_{L^p(\mathbb{R})} \leqslant 2\,\|u\|_{L^p(\mathbb{R}_+)}$ et $\|v\|_{L^p(\mathbb{R})} \leqslant 2\,\|u'\|_{L^p(\mathbb{R}_+)}$, on obtient $\|u^*\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leqslant 2\,\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}_+^*)}$.

3) Il est clair que $\widetilde{\eta u} = \eta\widetilde{u} \in L^p(\mathbb{R}_+^*)$ et que $\|\widetilde{\eta u}\|_{L^p(\mathbb{R}_+^*)} \leqslant \|u\|_{L^p(0,1)}$. Soit $\varphi \in \mathscr{D}^1(\mathbb{R}_+^*)$; on a :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \widetilde{\eta u}(x)\varphi'(x)\,dx &= \int_0^1 \eta(x)\,u(x)\,\varphi'(x)\,dx = \int_0^1 u(x)\,[(\eta\varphi)'(x) - \eta'(x)\varphi(x)]\,dx \\ &= -\int_0^1 u'(x)\,(\eta\varphi)(x)\,dx - \int_0^1 u(x)\,\eta'(x)\,\varphi(x)\,dx \quad \text{car } \eta\varphi \in \mathscr{D}^1(]0,1[)\,, \\ &= -\int_0^{+\infty} [\widetilde{u'}(x)\,\eta(x) + \widetilde{u}(x)\,\eta'(x)]\,\varphi(x)\,dx\,;\end{aligned}$$

donc $\widetilde{\eta u}$ possède une dérivée faible, et cette dérivée est $(\widetilde{\eta u})' = \widetilde{u'}\eta + \widetilde{u}\,\eta'$. Comme $|\widetilde{u'}\eta + \widetilde{u}\,\eta'| \leqslant |\widetilde{u'}| + \|\eta'\|_\infty|\widetilde{u}|$, on a $\|\widetilde{u'}\eta + \widetilde{u}\,\eta'\|_{L^p(\mathbb{R}_+^*)} \leqslant \|\widetilde{u'}\|_{L^p(\mathbb{R}_+^*)} + \|\eta'\|_\infty\,\|\widetilde{u}\|_{L^p(\mathbb{R}_+^*)} = \|u'\|_{L^p(0,1)} + \|\eta'\|_\infty\,\|u\|_{L^p(0,1)} \leqslant (1 + \|\eta'\|_\infty)\,\|u\|_{W^{1,p}(0,1)} < +\infty$; donc $(\widetilde{\eta u})' \in L^p(\mathbb{R}_+^*)$, de sorte que $\widetilde{\eta u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}_+^*)$, et $\|\widetilde{\eta u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}_+^*)} \leqslant (2 + \|\eta'\|_\infty)\,\|u\|_{W^{1,p}(0,1)}$.

Alors $P_1 u = (\widetilde{\eta u})^* \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ est un prolongement de ηu et :

$$\|(\widetilde{\eta u})^*\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leqslant 2\,(2 + \|\eta'\|_\infty)\,\|u\|_{W^{1,p}(0,1)}.$$

b) Si l'on pose $\theta(x) = (1-\eta)(1-x)$ et $v(x) = u(1-x)$, alors θ et $v$vérifient les mêmes conditions que η et u. Il résulte du a) que l'on a un prolongement $P_2 u$ de $(1-\eta)u$ à $W^{1,p}(\mathbb{R})$ donné par $(P_2 u)(x) = (\widetilde{\theta v})^*(1-x)$, et l'on a :

$$\|P_2 u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} = \|(\widetilde{\theta v})^*\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leqslant 2\,(2 + \|\theta'\|_\infty)\,\|v\|_{W^{1,p}(0,1)} = 2\,(2 + \|\eta'\|_\infty)\,\|u\|_{W^{1,p}(0,1)}.$$

c) Comme $u = \eta u + (1-\eta)u$, $Pu = P_1 u + P_2 u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ est un prolongement de u. L'application $P\colon W^{1,p}(0,1) \to W^{1,p}(\mathbb{R})$ est clairement linéaire et, comme $\|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leqslant \|P_1 u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} + \|P_2 u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leqslant 4\,(2 + \|\eta'\|_\infty)\,\|u\|_{W^{1,p}(0,1)}$, elle est continue.

Exercice 6

1) L est une forme linéaire continue sur H_0^1 : $|L(v)| \leqslant \|f\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \leqslant \|f\|_{L^2}\|v\|_{H_0^1}$. D'autre part, a est donc une forme bilinéaire continue coercive : $a(u,v)$ est tout simplement le produit scalaire $(u \mid v)_{H_0^1}$ de H_0^1. On peut donc appliquer le Théorème de Lax-Milgram, qui se réduit en fait ici à utiliser le *Théorème de représentation de Riesz* : il existe un unique $u_0 \in H_0^1$ tel que $L(v) = (u_0 \mid v)_{H_0^1}$ pour tout $v \in H_0^1$, ce qui donne (PDF).

2) On a, pour toute $v \in H_0^1$, donc en particulier pour toute $v \in \mathscr{D}^1(]0,1[)$:

$$\int_0^1 u_0'(x)\,v'(x)\,dx = -\int_0^1 [u_0(x) - f(x)]\,v(x)\,dx\,;$$

cela signifie que u_0' possède une dérivée faible dans $L^2(0,1)$ (car $u_0 - f \in L^2(0,1)$) et que cette dérivée est $u_0'' = u_0 - f$. On sait, par le *Théorème d'immersion de Sobolev*, que $u_0 \in \mathscr{C}([0,1])$; donc, puisque $f \in \mathscr{C}([0,1])$, on a $u_0'' = u_0 - f \in \mathscr{C}([0,1])$ (plus précisément : u_0'' a un représentant continu). Ce même *Théorème d'immersion de Sobolev* nous dit d'autre part que $u_0'(x) - u_0'(0) = \int_0^x u_0''(t)\,dt$. Comme $u_0'' \in \mathscr{C}([0,1])$, le *Théorème fondamental du Calcul Intégral* nous dit que u_0' est continûment dérivable sur $[0,1]$ et que sa dérivée (au sens usuel) est u_0''. Donc $u_0 \in \mathscr{C}^2([0,1])$.

3) On a alors, pour toute $\varphi \in \mathscr{D}^1(]0,1[)$, puisque $u_0' \in H^1$:

$$\int_0^1 [-u_0''(x) + u_0(x)]\,\varphi(x)\,dx = \int_0^1 [u_0'(x)\,\varphi'(x) + u_0(x)\,\varphi(x)]\,dx = \int_0^1 f(x)\,\varphi(x)\,dx\,,$$

en utilisant (PDF), car $\varphi \in \mathscr{D}^1(]0,1[) \subseteq H_0^1$. Il en résulte (voir Proposition IX.2.3) que $-u_0'' + u_0 = f$ (presque partout, et donc partout, par continuité). Ainsi, u_0 est bien solution de (PD), puisque $u_0(0) = u_0(1) = 0$.

Exercice 7

1) L'injection canonique de $H^1(a,b)$ dans $\mathscr{C}([a,b])$ étant continue, par le *Théorème d'immersion de Sobolev*, les évaluations $u \in H^1(a,b) \mapsto u(x)$ sont continues pour tout $x \in [a,b]$ (car elles le sont sur $\mathscr{C}([a,b])$). Comme ces évaluations sont linéaires, C est un sous-espace affine fermé de $H^1(a,b)$; donc, en particulier, un convexe fermé.

2) Considérons la forme bilinéaire continue coercive B sur $H^1(a,b)$ définie par :

$$B(u,w) = (u \mid w)_{H^1(a,b)} = \int_a^b [u(x)\,w(x) + u'(x)w'(x)]\,dx\,,$$

et la forme linéaire $L\colon H^1(a,b) \to \mathbb{R}$ définie par $L(w) = \int_a^b f(x)\,w(x)\,dx$. Elle est continue car $|L(w)| \leqslant \|f\|_{L^2}\|w\|_{L^2} \leqslant \|f\|_{L^2}\|w\|_{H^1}$. On peut donc appliquer le Théorème de Stampacchia de l'Exercice 17 du Chapitre VIII : il existe une unique $u_0 \in C$ tel que $B(u_0, w - u_0) \geqslant L(w - u_0)$ pour tout $w \in C$. Écrit autrement :

$$\int_a^b u_0'(t)\,[w'(t) - u_0'(t)]\,dt + \int_a^b u_0(t)\,[w(t) - u_0(t)]\,dt \geqslant \int_a^b f(t)\,[w(t) - u_0(t)]\,dt$$

3) Soit $v \in H_0^1(a,b)$. On pose $w = u_0 + v$; alors $w \in H^1(a,b)$ et $w(a) = u_0(a) = \alpha$, $w(b) = u_0(b) = \beta$. Donc $w \in C$, et l'on a $\int_a^b u_0'(t)\, v'(t)\, dt \geqslant \int_a^b f(t)\, v(t)\, dt$. En changeant v en $-v$, on obtient l'inégalité inverse.

4) On fait exactement comme dans le 2) de l'Exercice 6.

5) On fait exactement comme dans le 3) de l'Exercice 6.

Exercice 8

1) On pose $L(v) = (f \mid v)_{L^2} = \int_a^b f(x)\, v(x)\, dx$ pour toute $v \in H^1(a,b)$. Alors l'application $L\colon H^1(a,b) \to \mathbb{R}$ est linéaire, et elle est continue car $|L(v)| \leqslant \|f\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \leqslant \|f\|_{L^2}\|v\|_{H^1}$ (on peut aussi bien dire que L est en fait continue sur $L^2(a,b)$ et l'injection canonique $i\colon H^1(a,b) \to L^2(a,b)$ est continue). Par le *Théorème de représentation de Riesz*, il existe une unique $u_0 \in H^1(a,b)$ telle que $L(v) = (v \mid u_0)$, autrement dit $\int_a^b u_0'(t)\, v'(t)\, dt + \int_a^b u_0(t)\, v(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, v(t)\, dt$, pour toute $v \in H^1(a,b)$.

2) On a, pour toute $v \in H^1(a,b)$, donc en particulier pour toute $v \in \mathscr{D}^1(]a,b[)$:

$$\int_a^b u_0'(x)\, v'(x)\, dx = -\int_0^1 [u_0(x) - f(x)]\, v(x)\, dx\,;$$

cela signifie que u_0' possède une dérivée faible dans $L^2(a,b)$ (car $u_0 - f \in L^2(0,1)$), donc $u_0 \in H^2(a,b)$, et cette dérivée est $u_0'' = u_0 - f$.

3) On sait, par le *Théorème d'immersion de Sobolev*, que $u_0 \in \mathscr{C}([a,b])$; donc, puisque $f \in \mathscr{C}([a,b])$, on a $u_0'' = u_0 - f \in \mathscr{C}([a,b])$ (ou plus précisément u_0'' a un représentant continu). Ce même *Théorème d'immersion de Sobolev* nous dit d'autre part que $u_0'(x) - u_0'(a) = \int_a^x u_0''(t)\, dt$. Comme $u_0'' \in \mathscr{C}([a,b])$, le *Théorème fondamental du Calcul Intégral* nous dit que u_0' est continûment dérivable sur $[a,b]$ et que sa dérivée (au sens usuel) est u_0''. Donc $u_0 \in \mathscr{C}^2([a,b])$.

Pour toute $v \in \mathscr{C}^1([a,b]) \subseteq H^1(a,b)$, on a, en intégrant par parties, puisque $u_0' \in \mathscr{C}^1([a,b])$:

$$\int_a^b u_0'(x)\, v'(x)\, dx = \big[u_0'(x)\, v(x)\big]_a^b - \int_a^b u_0''(x)\, v(x)\, dx\,.$$

Cela donne, en vertu de l'égalité $\int_a^b u_0'(t)\, v'(t)\, dt + \int_a^b u_0(t)\, v(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, v(t)\, dt$,

$$[u_0'(b)\, v(b) - u_0'(a)\, v(a)] - \int_a^b u_0''(x)\, v(x)\, dx + \int_a^b u_0(t)\, v(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, v(t)\, dt\,;$$

d'où $u_0'(b)\, v(b) - u_0'(a)\, v(a) = 0$, puisque $u_0'' = u_0 - f$.

Prenant $v \in \mathscr{C}^1([a,b])$ telle que $v(a) = 1$ et $v(b) = 0$, on obtient $u_0'(a) = 0$. De même, en prenant $v \in \mathscr{C}^1([a,b])$ telle que $v(a) = 0$ et $v(b) = 1$, on obtient $u_0'(b) = 0$. Il en résulte que u_0 est solution de (PN).

Exercice 9

1) Les évaluations $\delta_x\colon u \in \mathscr{C}([a,b]) \mapsto u(x)$ sont continues, pour tout $x \in [a,b]$. Comme l'injection canonique $j\colon H^1(a,b) \to \mathscr{C}([a,b])$ est continue, par le *Théorème d'immersion de Sobolev*, ces évaluations $e_x = \delta_x \circ j$ sont des formes linéaires continues sur $H^1(a,b)$. Il en résulte que $C = e_a^{-1}(\{\alpha\})$ est un sous-espace affine fermé de $H^1(a,b)$. C'est en particulier un convexe fermé.

2) Posons, pour toute $v \in H^1(a,b)$:

$$L(v) = \int_a^b f(x)\, v(x)\, dx + \beta\, v(b)\,.$$

C'est une forme linéaire sur $H^1(a,b)$, qui est continue :

$$|L(v)| \leqslant \|f\|_{L^2}\|v\|_{L^2} + |\beta|\,|v(b)| \leqslant \|f\|_{L^2}\|v\|_{H^1} + |\beta|\,\|e_b\|\,\|v\|_{H^1} = (\|f\|_{L^2} + |\beta|\,\|e_b\|)\,\|v\|_{H^1}.$$

La forme bilinéaire B donnée par le produit scalaire $B(u,v) = (u \mid v)_{H^1}$ étant évidemment continue et coercive, le *Théorème de Stampacchia* (Exercice 17 du Chapitre VIII) dit qu'il existe une unique $u_0 \in C$ telle que $B(u_0, w - u_0) \geqslant L(w - u_0)$, soit :

$$\begin{aligned}\int_a^b u_0'(t)\,[w'(t) - u_0'(t)]\,dt + \int_a^b u_0(t)\,[w(t) - u_0(t)]\,dt& \\ \geqslant \int_a^b f(t)\,[w(t) - u_0(t)]\,dt + \beta\,[w(b) - u_0(b)]&\end{aligned}$$

pour toute $w \in C$.

3) Pour toute $v \in K$, posons $w = u_0 + v$. Alors $w \in H^1(a,b)$ et $w(a) = u_0(a) + v(a) = \alpha$; donc $w \in C$. On a par conséquent :

$$\int_a^b u_0'(t)\,v'(t)\,dt + \int_a^b u_0(t)\,v(t)\,dt \geqslant \int_a^b f(t)\,v(t)\,dt + \beta\,v(b)\,.$$

En changeant v en $-v$, on obtient :

$$\int_a^b u_0'(t)\,v'(t)\,dt + \int_a^b u_0(t)\,v(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,v(t)\,dt + \beta\,v(b)\,.$$

4) Pour toute $w \in L^2(a,b)$, posons $v(x) = \int_a^x w(t)\,dt$. On a vu, dans la preuve du Théorème d'immersion de Sobolev, que l'on a alors :

$$\int_a^b v(x)\,\varphi'(x)\,dx = -\int_a^b w(x)\,\varphi(x)\,dx$$

pour toute $\varphi \in \mathscr{D}^1(]a,b[)$. Cela signifie que $v \in H^1(a,b)$ et $v' = w$. Comme $v(a) = 0$, on a $v \in K$. Alors le 3) donne :

$$\begin{aligned}\int_a^b u_0'(x)\,w(x)\,dx = \int_a^b u_0'(x)\,v'(x)\,dx &= \int_a^b [f(x) - u_0(x)]\,v(x)\,dx + \beta\,v(b)\\ &= \int_a^b [f(x) - u_0(x)]\left[\int_a^x w(t)\,dt\right]dx + \beta\int_a^b w(t)\,dt\\ &\underset{\text{Fubini}}{=} \int_a^b \left[\int_t^b [f(x) - u_0(x)]\,dx\right] w(t)\,dt + \beta\int_a^b w(t)\,dt\,;\end{aligned}$$

l'utilisation du Théorème de Fubini étant justifiée par le fait que :

$$\begin{aligned}\int_a^b \left[\int_a^b |[f(x) - u_0(x)]\,\mathbb{I}_{[a,x]}(t)w(t)|\,dt\right]dx &\leqslant \int_a^b \left[\int_a^b |[f(x) - u_0(x)]\,w(t)|\,dt\right]dx\\ &\leqslant (b-a)\,\|f - u_0\|_{L^2}\|w\|_{L^2} < +\infty\,.\end{aligned}$$

Cette égalité étant vraie pour toute $w \in L^2(a,b)$, on obtient, en modifiant au besoin u_0' sur un ensemble de mesure nulle :

$$u_0'(t) = \int_t^b [f(x) - u_0(x)]\,dx + \beta\,, \quad \forall t \in [a,b]\,. \tag{$*$}$$

Cette dernière fonction est continûment dérivable et $(u_0')' = -(f - u_0)$ par le *Théorème fondamental du Calcul Intégral*, car $u_0 \in \mathscr{C}([a,b])$, par le *Théorème d'immersion de Sobolev*, et $f \in \mathscr{C}([a,b])$, par hypothèse. En particulier, $u_0' \in \mathscr{C}([a,b])$; comme le *Théorème d'immersion de Sobolev* nous dit que :

$$u_0(x) - u_0(a) = \int_a^x u_0'(t)\,dt\,,$$

le *Théorème fondamental du Calcul Intégral* assure que u_0 est continûment dérivable et que sa dérivée (forte) est u_0'. Donc $u_0 \in \mathscr{C}^2([a,b])$ et $u_0'' = -(f - u_0)$. Comme $(*)$ entraîne $u_0'(b) = \beta$, u_0 est bien solution de (PM).

Exercice 10

1) La linéarité de T est claire, grâce à l'unicité de la solution u de (PDF) de l'Exercice 6. Ensuite, en prenant $v = u$ dans :

$$\int_0^1 [u(x)\,v(x) + u'(x)\,v'(x)]\,dx = \int_0^1 f(x)\,v(x)\,dx\,, \quad \forall v \in H_0^1\,, \tag{PDF}$$

on obtient :

$$\int_0^1 [u'(x)]^2\,dx + \int_0^1 [u(x)]^2\,dx = \int_0^1 f(x)\,u(x)\,dx \leqslant \|f\|_{L^2}\|u\|_{L^2}\,, \tag{$*$}$$

d'où $\|u\|_{L^2}^2 \leqslant \|f\|_{L^2}\|u\|_{L^2}$, de sorte que $\|Tf\|_{L^2} = \|u\|_{L^2} \leqslant \|f\|_{L^2}$, ce qui montre que T est continue et $\|T\| \leqslant 1$.

2) L'inégalité $(*)$ entraîne que $\|u\|_{H^1}^2 \leqslant \|f\|_{L^2}\|u\|_{L^2} \leqslant \|f\|_{L^2}\|u\|_{H^1}$; donc $\|Tf\|_{H^1}^2 = \|u\|_{H^1}^2 \leqslant \|f\|_{L^2}$ et $\widetilde{T}$ est continu, $\widetilde{T}$ étant la co-restriction $\widetilde{T}\colon L^2(0,1) \to H^1(0,1)$ de T à $H^1(0,1)$. Or l'injection canonique $j\colon H^1(0,1) \to \mathscr{C}([0,1])$ est compacte, par le *Théorème de Rellich-Kondrachov*. Comme l'injection canonique $i\colon \mathscr{C}([0,1]) \to L^2(0,1)$ est continue, il s'ensuit que $T = i \circ j \circ \widetilde{T}$ est compacte.

3) Pour montrer que T est auto-adjoint, c'est-à-dire que $T^* = T$, on doit montrer que $(Tf \mid g) = (f \mid Tg)$ pour toutes $f, g \in L^2(0,1)$. Par densité, il suffit de le montrer pour $f, g \in \mathscr{C}([0,1])$. Mais alors, $u = Tf$ et $v = Tg$ sont de classe C^2 et solutions de (PD) de l'Exercice 6 :

$$\begin{cases} -u'' + u = f \\ -v'' + v = g \end{cases}$$

avec $u(0) = u(1) = 0$ et $v(0) = v(1) = 0$. En multipliant la première équation par v et la seconde par u, et en intégrant, il vient :

$$(Tf \mid g) = \int_0^1 [-u''(x) + u(x)]\,v(x)\,dx \quad \text{et} \quad (f \mid Tg) = \int_0^1 u(x)\,[-v''(x) + v(x)]\,dx\,.$$

Mais, puisque $u, v \in \mathscr{C}^2([0,1])$, on peut intégrer par parties :

$$\int_0^1 u''(x)\,v(x)\,dx = \big[u'(x)\,v(x)\big]_0^1 - \int_0^1 u'(x)\,v'(x)\,dx = -\int_0^1 u'(x)\,v'(x)\,dx\,,$$

car $u(0) = u(1) = 0$ et, de même :

$$\int_0^1 u(x)\,v''(x)\,dx = \big[u(x)\,v'(x)\big]_0^1 - \int_0^1 u'(x)\,v'(x)\,dx = -\int_0^1 u'(x)\,v'(x)\,dx\,,$$

car $v(0) = v(1) = 0$. On obtient par conséquent $(Tf \mid g) = (f \mid Tg)$.

Ensuite, T est positif car, en prenant $v = u$ dans (PDF), on a :

$$(Tf \mid f) = \int_0^1 (Tf)(x)\, f(x)\, dx = \int_0^1 u(x)\, f(x)\, dx = \int_0^1 \left([u'(x)]^2 + [u(x)]^2\right) dx \geqslant 0\,.$$

4) L'opérateur T étant compact et auto-adjoint sur l'espace de Hilbert séparable $L^2(0,1)$, on peut utiliser le *Théorème spectral* pour les opérateurs compacts auto-adjoints (Théorème VII.3.10) : il existe une base orthonormée $(u_n)_{n\geqslant 1}$ de $L^2(0,1)$ formée de vecteurs propres de T. Notons μ_n la valeur propre associée à u_n. Comme T est positif, on a $\mu_n \geqslant 0$. En fait $\mu_n > 0$ pour tout $n \geqslant 1$ car 0 n'est pas valeur propre : si $u = Tf = 0$, alors $f = -u'' + u = 0$.

Puisque u_n est vecteur propre de T pour la valeur propre μ_n, on a $Tu_n = \mu_n u_n$. Par définition de T, cela signifie que $\mu_n u_n$ est la solution de (PDF), avec $f = u_n$. Mais $u_n \in H^1(0,1) \subseteq \mathscr{C}([0,1])$, par le *Théorème d'immersion de Sobolev* ; la solution $\mu_n u_n$ de (PDF) est donc de classe $\mathcal{C}^2$ et est solution de (PD) (voir l'Exercice 6). On a donc, pour tout $n \geqslant 1$:

$$-(\mu_n u_n)'' + (\mu_n u_n) = u_n\,.$$

Mais T étant compact, ses valeurs propres, qui ne sont pas nulles, forment une suite convergeant vers 0. Si l'on pose $\lambda_n = 1/\mu_n$, on a $\lambda_n > 0$ car $\mu_n > 0$, et donc $\lambda_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. De plus :

$$-u_n'' + u_n = \lambda_n u_n\,, \quad \forall n \geqslant 1\,.$$

Remarque. On notera que l'on ne peut pas traiter directement avec l'opérateur différentiel $u \mapsto -u'' + u$ car si, par exemple, on le fait agir sur $\mathscr{C}^2([0,1])$, on peut seulement dire que son image est dans $\mathscr{C}([0,1])$. Par ailleurs, s'il envoie bien $\mathscr{C}^\infty([0,1]$ dans lui-même, ce dernier espace n'est pas normable.

XI.10. Exercices du Chapitre X

Exercice 1

Posons $h(x) = \int_0^x (\sin t) f(t)\, dt$; alors $h \in \mathscr{E}^1(\mathbb{R})$ et $h'(x) = (\sin x) f(x)$. L'équation s'écrit $T_f + T_h = T_g$. En dérivant dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$, on obtient $(T_f)' + (\sin x)(T_f) = (T_g)'$, car, h étant continûment dérivable, on a $(T_h)' = T_{h'} = (\sin x)(T_f)$. Posons $S = \mathrm{e}^{-\cos x} T_f$. Alors $T_f = \mathrm{e}^{\cos x} S$ et l'équation devient $S' = \mathrm{e}^{-\cos x}(T_g)'$.

Alors $(\mathrm{e}^{-\cos x} T_g)' = (\sin x)\, \mathrm{e}^{-\cos x} T_g + \mathrm{e}^{-\cos x}(T_g)' = T_{\sin x\, \mathrm{e}^{-\cos x} g(x)} + S'$, de sorte qu'il existe une constante $C \in \mathbb{C}$ telle que :

$$S = \mathrm{e}^{-\cos x} T_g - \int_0^x \sin t\, \mathrm{e}^{-\cos t} g(t)\, dt + C\,.$$

Il en résulte que :

$$f(x) = g(x) - \mathrm{e}^{\cos x} \int_0^x \sin t\, \mathrm{e}^{-\cos t} g(t)\, dt + C\, \mathrm{e}^{\cos x}\,.$$

Exercice 2

1) On a $\mathrm{e}^{1/x^2} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^*)$ car si K est un compact de $\mathbb{R}^*$ il existe $0 < \varepsilon < A < +\infty$ tels que $K \subseteq [-A, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, A]$, et e^{1/x^2} est continue sur K.

2) a) Soit $A > 0$ tel que $\operatorname{supp}\varphi \subseteq [-A, A]$. Alors $\operatorname{supp}\varphi_n \subseteq \frac{1}{n}\operatorname{supp}\varphi \subseteq [-A, A]$ pour tout $n \geqslant 1$. Comme $\varphi_n^{(k)}(x) = n^k \mathrm{e}^{-n}\varphi^{(k)}(nx)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on obtient :

$$\sup_{|x|\leqslant A} |\varphi_n^{(k)}(x)| \leqslant n^k \mathrm{e}^{-n} \sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi^{(k)}(x)| = n^k \mathrm{e}^{-n} \sup_{|x|\leqslant A} |\varphi^{(k)}(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 .$$

Donc $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0 dans $\mathscr{D}(\mathbb{R})$.

b) Posons $\varphi(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{(x-1)(x-2)}} & \text{si } 1 < x < 2 \\ 0 & \text{si } x \notin]1, 2[\end{cases}$. On sait que $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, et l'on a $\operatorname{supp}\varphi_n = \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right] \subseteq \mathbb{R}^*$. De plus :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{1/x^2}\varphi_n(x)\,dx &= \int_{1/n}^{2/n} \mathrm{e}^{1/x^2}\mathrm{e}^{-n}\mathrm{e}^{-\frac{1}{(nx-1)(nx-2)}}\,dx = \int_1^2 \mathrm{e}^{n^2/u^2}\mathrm{e}^{-n}\mathrm{e}^{-\frac{1}{u^2-1}}\,\frac{du}{n} \\ &\geqslant \mathrm{e}^{n^2}\mathrm{e}^{-n}\frac{1}{n}\left(\int_1^2 \mathrm{e}^{-\frac{1}{u^2-1}}\,du\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty . \end{aligned}$$

3) S'il existait une distribution T sur $\mathbb{R}$ dont la restriction à $\mathbb{R}^*$ soit e^{1/x^2}, on aurait, d'une part $\langle T, \varphi_n\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ car $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0 dans $\mathscr{D}(\mathbb{R})$; mais on a, d'autre part, puisque $\operatorname{supp}\varphi_n \subseteq \mathbb{R}^*$:

$$\langle T, \varphi_n\rangle = \int_{\mathbb{R}^*} \mathrm{e}^{1/x^2}\varphi_n(x)\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty .$$

C'est contradictoire, et donc il n'existe aucune distribution sur $\mathbb{R}$ dont la restriction à $\mathbb{R}^*$ soit e^{1/x^2}.

Exercice 3

1) Pour toute $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, on a $\langle T_{f_n}, \varphi\rangle = n\int_{-1/n}^{1/n} \varphi(t)\,dt$. De par la *formule de la moyenne*, il existe $c_n \in \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$ tel que $n\int_{-1/n}^{1/n}\varphi(t)\,dt = 2\varphi(c_n)$. Il en résulte que $\langle T_{f_n}, \varphi\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} 2\varphi(0)$. Donc $(T_{f_n})_{n\geqslant 1} = (f_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 2δ dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

Par ailleurs, $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge presque partout vers 0.

De même, $(g_n)_{n\geqslant 1}$ converge presque partout vers 0 ; pourtant $\langle T_{g_n}, \varphi\rangle = 2n\varphi(c_n)$ n'a en général pas de limite quand n tend vers l'infini.

2) Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ et soit $A > 0$ tel que $\operatorname{supp}\varphi \subseteq [-A, A]$; on a :

$$\begin{aligned} \langle T_{h_n}, \varphi\rangle &= \frac{n}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-n^2t^2}\varphi(t)\,dt \\ &= \frac{n}{\sqrt{\pi}}\int_{-A}^{A} \mathrm{e}^{-n^2t^2}[\varphi(t) - \varphi(0)]\,dt + \frac{n}{\sqrt{\pi}}\varphi(0)\int_{-A}^{A}\mathrm{e}^{-n^2t^2}\,dt . \end{aligned}$$

Or :

$$\frac{n}{\sqrt{\pi}}\int_{-A}^{A}\mathrm{e}^{-n^2t^2}\,dt = \int_{-nA}^{nA}\mathrm{e}^{-x^2}\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,dx = 1 ,$$

et, grâce au Théorème des accroissements finis :

$$\begin{aligned} \left|\frac{n}{\sqrt{\pi}}\int_{-A}^{A}\mathrm{e}^{-n^2t^2}[\varphi(t) - \varphi(0)]\,dt\right| &\leqslant \frac{n}{\sqrt{\pi}}\|\varphi'\|_\infty \int_{-A}^{A}\mathrm{e}^{-n^2t^2}\,dt \\ &= \frac{1}{n\sqrt{\pi}}\|\varphi'\|_\infty\int_{-nA}^{nA}\mathrm{e}^{-x^2}\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 . \end{aligned}$$

Par conséquent $\lim_{n\to\infty} h_n = \delta$.

3) Pour toute $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, on a $\int_{\mathbb{R}} (\sin nx)\, \varphi(x)\, dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ par le *Lemme de Riemann-Lebesgue* (il suffit en fait ici d'intégrer par parties pour le voir). Donc $\lim_{n\to\infty}(\sin nx) = 0$ dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

On a, si $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ a son support dans $[-A, A]$:

$$\Big\langle \frac{\sin nx}{x}, \varphi \Big\rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin nx}{x}\, \varphi(x)\, dx = \int_{-A}^{A} \frac{\sin nx}{x}\, \varphi(x)\, dx$$
$$= \int_{-A}^{A} (\sin nx)\, \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}\, dx + \varphi(0) \int_{-A}^{A} \frac{\sin nx}{x}\, dx\,.$$

Comme $\psi(x) = \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}$ se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$, on a $\psi \mathbb{1}_{[-A,A]} \in L^1(\mathbb{R})$; donc $\int_{-A}^{A} (\sin nx)\, \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\, dx = \int_{\mathbb{R}} \psi(x) \sin nx\, dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ par le Lemme de Riemann-Lebesgue. Par ailleurs,

$$\int_{-A}^{A} \frac{\sin nx}{x}\, dx = \int_{-nA}^{nA} \frac{\sin y}{y}\, dy \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin y}{y}\, dy = \pi\,.$$

Par conséquent, $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin nx}{x} = \pi\delta$ dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

4) L'application $y \mapsto \int_{-n}^{n} \mathrm{e}^{-2\pi i xy}\, dx$ est continue sur $\mathbb{R}$ (on intègre une fonction continue de deux variables sur un intervalle compact) ; elle est donc localement intégrable et définit une distribution sur $\mathbb{R}$. Pour $y \neq 0$, on a :

$$\int_{-n}^{n} \mathrm{e}^{-2\pi i xy}\, dx = \left[\frac{\mathrm{e}^{-2\pi i xy}}{-2\pi i y} \right]_{x=-n}^{x=n} = \frac{\mathrm{e}^{-2\pi i n y} - \mathrm{e}^{2\pi i n y}}{-2\pi i y} = \frac{\sin(2\pi n y)}{\pi y}\,.$$

Comme dans le 3), on obtient $\frac{\sin(2\pi n y)}{\pi y} \xrightarrow[n\to\infty]{} \delta$ car :

$$\int_{-A}^{A} \frac{\sin(2\pi n y)}{\pi y}\, dy = \int_{-2\pi n A}^{2\pi n A} \frac{\sin u}{\pi u}\, du \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\, du = 1\,.$$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2\pi i xy}\, dx = \delta$.

Maintenant, si l'on pose $\Phi_n(y) = \int_{-n}^{n} \mathrm{e}^{-2\pi i xy}\, dx$, Φ_n est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$ (c'est l'intégrale d'une fonction continûment différentiable de deux variables sur un intervalle compact) et $\Phi_n'(y) = -2\pi i \int_{-n}^{n} x\, \mathrm{e}^{-2\pi i xy}\, dx$. De plus $T_{\Phi_n'} = (T_{\Phi_n})'$, par la Proposition X.3.7 (il suffit d'ailleurs d'intégrer par parties $\int_{\mathbb{R}} \Phi_n'(y)\varphi(y)\, dy$). On a donc, par le résultat précédent, pour toute $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$:

$$\langle T_{\Phi_n'}, \varphi \rangle = \langle (T_{\Phi_n})', \varphi \rangle = -\langle T_{\Phi_n}, \varphi' \rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} -\langle \delta, \varphi' \rangle = \langle \delta', \varphi \rangle\,,$$

de sorte que $\int_{-\infty}^{+\infty} x\, \mathrm{e}^{-2\pi i xy}\, dx = -\frac{1}{2\pi i}\, \delta'$.

Exercice 4

1) a) Pour $\varepsilon > 0$, on a, par définition, $\log(x + i\,\varepsilon) = \log|x + i\,\varepsilon| + i \arg(x + i\,\varepsilon)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, avec $0 < \arg(x + i\,\varepsilon) < \pi$. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$, donc localement intégrable. Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{cases} \log(x + i\,\varepsilon)\, \varphi(x) \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} \log|x|\, \varphi(x) & \text{si } x > 0 \\ \log(x + i\,\varepsilon)\, \varphi(x) \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} [\log|x| + i\pi]\, \varphi(x) & \text{si } x < 0\,. \end{cases}$$

Or $|\log(x+i\,\varepsilon)\,\varphi(x)| \leqslant [\log\sqrt{x^2+1}+\pi]\,|\varphi(x)|$ pour $0<\varepsilon\leqslant 1$ et $x\in\mathbb{R}$; cette dernière fonction étant intégrable sur $\mathbb{R}$ (car continue et à support compact), le Théorème de convergence dominée donne :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \log(x+i\,\varepsilon)\,\varphi(x)\,dx \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} &\int_{-\infty}^{0} [\log|x|+i\pi]\,\varphi(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty} \log|x|\,\varphi(x)\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} [\log|x| + i\pi Y(-x)]\,\varphi(x)\,dx\,.\end{aligned}$$

Donc $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \log(x+i\,\varepsilon) = \log|x| + i\pi Y(-x)$ dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

b) La fonction $f_\varepsilon(x) = \log(x+i\,\varepsilon)$ est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_\varepsilon'(x) = \frac{1}{x+i\,\varepsilon}$. En intégrant par parties (ou en utilisant la Proposition X.3.7), on voit que $T_{f_\varepsilon'} = (T_{f_\varepsilon})'$. Posons d'autre part $g(x) = \log|x| + i\pi Y(-x)$. Alors, pour toute $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R})$:

$$\langle T_{f_\varepsilon'},\varphi\rangle = \langle (T_{f_\varepsilon})',\varphi\rangle = -\langle T_{f_\varepsilon},\varphi'\rangle \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} -\langle T_g,\varphi'\rangle = \langle (T_g)',\varphi\rangle\,.$$

Donc $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{x+i\,\varepsilon}$ existe dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ et est égale à $(T_g)'$.

On sait que $Y' = \delta$; donc la dérivée de $Y(-x)$ est $-\delta$. Toutefois, on n'a pas vu de formule de changement de variable pour les dérivées dans le cours, mais on vérifie immédiatement directement que :

$$\langle [Y(-x)]',\varphi\rangle = \langle Y(-x),\varphi'\rangle = \int_{-\infty}^{0} \varphi'(t)\,dt = -\varphi(0)\,.$$

Calculons d'autre part la dérivée de $\log|x|$. Pour toute $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R})$, on a, si $\operatorname{supp}\varphi \subseteq [-A,A]$:

$$\begin{aligned}\langle (T_f)',\varphi\rangle &= -\langle T_f,\varphi'\rangle = -\int_{\mathbb{R}} (\log|x|)\,\varphi'(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}_+} (\log x)\,[\varphi'(x)+\varphi'(-x)]\,dx \\ &= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{\varepsilon}^{A} (\log x)\,[\varphi'(x)+\varphi'(-x)]\,dx\right) \\ &= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\Big[(\log x)\,[\varphi(x)-\varphi(-x)]\Big]_{\varepsilon}^{A} - \int_{\varepsilon}^{A} \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,dx\right) \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left((\log\varepsilon)\,[\varphi(\varepsilon)-\varphi(-\varepsilon)] + \int_{\varepsilon}^{A} \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,dx\right),\end{aligned}$$

en intégrant par parties et en utilisant le fait que $\varphi(A) = 0$. Comme :

$$|(\log\varepsilon)\,[\varphi(\varepsilon)-\varphi(-\varepsilon)]| = 2\,\varepsilon\,|\log\varepsilon|\left|\frac{\varphi(\varepsilon)-\varphi(-\varepsilon)}{2\,\varepsilon}\right| \leqslant 2\,\varepsilon\,|\log\varepsilon|\,\|\varphi'\|_\infty$$

par le Théorème des accroissements finis, on a $(\log\varepsilon)\,[\varphi(\varepsilon)-\varphi(-\varepsilon)] \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$ et l'on obtient :

$$\langle (T_f)',\varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{A} \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,dx = \langle \operatorname{vp}(1/x),\varphi\rangle\,;$$

donc $(T_f)' = \operatorname{vp}(1/x)$.

Par conséquent $\frac{1}{x+i\,0} = \operatorname{vp}(1/x) - i\pi\delta$.

2) Il suffit de remarquer que $\frac{a}{x^2+a^2} = -\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{x+ia} - \frac{1}{x-ia}\right]$; on obtient donc :

$$\lim_{a\to 0^+} \frac{a}{x^2+a^2} = \pi\delta\,.$$

Remarque. On pouvait s'attendre à ce dernier résultat car si $p_a(x) = \frac{1}{\pi}\frac{a}{x^2+a^2}$, on a $p_a(x) = \frac{1}{a}p\big(\frac{1}{a}\big)$ avec $p(x) = \frac{1}{\pi(x^2+1)}$; donc $(p_a)_{a>0}$ est une unité approchée pour la convolution, de sorte que $\langle p_a, \varphi\rangle = (p_a * \check\varphi)(0) \xrightarrow[a\to 0]{} \check\varphi(0) = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi\rangle$ pour toute $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}) \subseteq \mathscr{C}_b(\mathbb{R})$.

Exercice 5

1) Posons $\chi(x) = \frac{\psi(x)}{x}$ pour $x \neq 0$. Comme $\psi(0) = 0$, on a $\frac{\psi(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} \psi'(0)$; donc χ se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$, et l'on a $\psi(x) = x\chi(x)$. D'autre part, on peut aussi écrire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, parce que ψ' est continue :

$$\chi(x) = \int_0^1 \psi'(tx)\,dt \qquad (*)$$

(c'est clair pour $x \neq 0$; pour $x = 0$, cela se réduit à l'égalité $\chi(0) = \psi'(0)$. Comme la fonction $(t,x) \in [0,1]\times\mathbb{R} \mapsto \psi'(tx)$ est de classe C^∞, χ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus $\operatorname{supp}\chi \subseteq \operatorname{supp}\psi$. En effet, si $\chi(x) \neq 0$, on a $\psi(x) \neq 0$ ou $x = 0$; mais si l'on avait $\chi(0) = 0$ et $0 \notin \operatorname{supp}\psi$, ψ s'annulerait sur un voisinage de 0 et l'on aurait $\chi(0) = \psi'(0) = 0$, et l'on aurait une contradiction. Par conséquent $\chi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$.

2) a) Posons $\psi(x) = \varphi(x) - \varphi(0)\,\theta(x)$. Alors $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ et $\psi(0) = 0$. De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$|\psi^{(k)}(x)| \leqslant |\varphi^{(k)}(x)| + |\varphi(0)|\,|\theta^{(k)}(x)| \leqslant \|\varphi^{(k)}\|_\infty + \|\varphi\|_\infty\|\theta^{(k)}\|_\infty \leqslant (1 + \|\theta^{(k)}\|_\infty)\,\|\varphi\|_{(k)}\,.$$

Il résulte de $(*)$ que $\|\chi\|_{(m)} \leqslant C_m\|\varphi\|_{(m+1)}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Comme T est une distribution, il existe, pour tout compact $K \subseteq \mathbb{R}$, un entier $m = m(K)$ tel que $|\langle T, \phi\rangle| \leqslant C_K\|\phi\|_{(m)}$ pour toute $\phi \in \mathscr{D}_K(\mathbb{R})$. Par conséquent, pour toute $\varphi \in \mathscr{D}_K(\mathbb{R})$:

$$|\langle T_0, \varphi\rangle| = |\langle T, \chi\rangle| \leqslant C_K\|\chi\|_{(m)} \leqslant C_K C_m\|\varphi\|_{(m+1)}\,,$$

et cela prouve que T_0 est une distribution sur $\mathbb{R}$.

b) Lorsque $T = \mathbb{I}$, on a, puisque χ est continue sur $\mathbb{R}$, si $\operatorname{supp}\varphi \subseteq [-A, A]$ et $\operatorname{supp}\theta \subseteq [-B, B]$:

$$\begin{aligned}\langle T_0, \varphi\rangle &= \int_{\mathbb{R}} \chi(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\geqslant\varepsilon} \chi(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\geqslant\varepsilon} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)\,\theta(x)}{x}\,dx \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{\varepsilon\leqslant|x|\leqslant A} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}\,dx + \varphi(0)\int_{\varepsilon\leqslant|x|\leqslant B} \frac{1-\theta(x)}{x}\,dx\right] \\ &= \langle \operatorname{vp}(1/x), \varphi\rangle + C\,\varphi(0)\,,\end{aligned}$$

avec $C = \int_{-B}^{B} \frac{1-\theta(x)}{x}\,dx$ (on note que $\frac{1-\theta(x)}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}$ car $\frac{1-\theta(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} -\theta'(0)$). Par conséquent $T_0 = \operatorname{vp}(1/x) + C\delta$, avec $C \in \mathbb{C}$.

Notons d'abord que lorsque l'on remplace $\varphi(x)$ par $x\varphi(x)$, la nouvelle fonction χ est tout simplement φ ; donc, pour toute $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, on a $\langle xT_0, \varphi\rangle = \langle T_0, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle$, de sorte que $xT_0 = T$ et ainsi T_0 est une solution particulière de l'équation $xS = T$.

c) Pour toute $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, on peut écrire $\varphi = [\varphi - \varphi(0)\,\theta] + \varphi(0)\,\theta = x\chi + \varphi(0)\,\theta$; donc, si $xS = T$, on a, en posant $C_S = \langle S, \theta\rangle$:

$$\langle S, \varphi\rangle = \langle S, x\chi\rangle + \varphi(0)\,\langle S, \theta\rangle = \langle xS, \chi\rangle + C_S\varphi(0) = \langle T, \chi\rangle + C_S\varphi(0) = \langle T_0, \varphi\rangle + C_S\langle \delta, \varphi\rangle\,.$$

Par conséquent $S = T_0 + C_S\delta$.

3) a) En particulier, les solutions de l'équation $xS = 0$ sont $S = C\,\delta$.

Pour toute $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$, on définit $\widetilde{T}\colon \mathscr{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ par $\langle \widetilde{T}, \varphi\rangle = \langle T, \varphi_a\rangle$, où $\varphi_a(x) = \varphi(x-a)$. C'est clairement une distribution sur $\mathbb{R}$: pour tout compact $K \subseteq \mathbb{R}$, et toute suite de $\varphi_n \in \mathscr{D}_K(\mathbb{R})$ convergeant uniformément vers φ, la suite des $(\varphi_n)_a$ est dans $\mathscr{D}_{K-a}(\mathbb{R})$ et converge uniformément vers φ_a ; donc $\langle \widetilde{T}, \varphi_n\rangle = \langle T, (\varphi_n)_a\rangle$ converge vers $\langle T, \varphi_a\rangle = \langle \widetilde{T}, \varphi\rangle$. On a :

$$\langle x\widetilde{S}, \varphi\rangle = \langle \widetilde{S}, x\varphi\rangle = \langle S, (x\varphi)_a\rangle = \langle S, (x-a)\,\varphi_a\rangle = \langle (x-a)\,S, \varphi_a\rangle\,. \qquad (*)$$

Comme l'application $\varphi \mapsto \varphi_a$ est une bijection de $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ sur lui-même, l'équation $(x-a)\,S = 0$ équivaut donc à $x\widetilde{S} = 0$. Cela donne $\widetilde{S} = C\,\delta$, avec $C \in \mathbb{C}$. Par conséquent :

$$\langle S, \varphi\rangle = \langle \widetilde{S}, \varphi_{-a}\rangle = \langle C\,\delta, \varphi_{-a}\rangle = C\,\varphi_{-a}(0) = C\,\varphi\,(a)\,;$$

de sorte que $S = C\,\delta_a$.

Autre méthode. On fait comme au 2), en modifiant la définition de ψ : on fixe $\theta \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ telle que $\theta(a) = 1$, et l'on pose $\psi_a(x) = \varphi\,(x) - \varphi\,(a)\,\theta(x)$ et $\chi_a(x) = \frac{\psi(x)}{x-a}$. On définit alors T_a par $\langle T_a, \varphi\rangle = \langle T, \chi_a\rangle$. Comme au 2) a), on voit que l'on obtient une distribution, et, comme au 2) c), on voit que les solutions $(x-a)\,S = T$ sont $S = T_a + C\,\delta_a$, avec $C \in \mathbb{C}$.

b) Comme $\langle (x-a)\,\delta_b, \varphi\rangle = \langle \delta_b, (x-a)\,\varphi\rangle = (b-a)\,\varphi\,(b)$, on a $(x-a)\,\delta_b = (b-a)\,\delta_b$, de sorte que $\frac{1}{b-a}\,\delta_b$ est une solution particulière de l'équation $(x-a)\,S = \delta_b$.

Si l'on pose $T = S - \frac{1}{b-a}\,\delta_b$, alors $(x-a)\,S = \delta_b$ équivaut à $(x-a)\,T = 0$. Par conséquent $T = C\,\delta_a$, de sorte que $S = C\,\delta_a + \frac{1}{b-a}\,\delta_b$, avec $C \in \mathbb{C}$.

c) Une solution particulière de l'équation $(x-a)\,S = \delta_a$ est $-\delta'_a$; en effet :

$$\langle (x-a)\,(-\delta'_a), \varphi\rangle = \langle -\delta'_a, (x-a)\,\varphi\rangle = \langle \delta_a, [(x-a)\varphi]'\rangle = \langle \delta_a, \varphi + (x-a)\varphi'\rangle = \varphi(a)\,.$$

Par conséquent, si l'on pose $T = S + \delta'_a$, l'équation $(x-a)\,S = \delta_a$ équivaut à $(x-a)\,T = 0$, et l'on obtient $T = C\,\delta_a$, de sorte que $S = C\,\delta_a - \delta'_a$.

d) Définissons $\widetilde{S}$ comme au a). On a $(x-a)\,S = \delta'_b$ si et seulement si $\langle (x-a)\,S, \varphi_a\rangle = -\varphi'_a(b)$ pour toute $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$; donc, par $(*)$, si et seulement si $\langle x\widetilde{S}, \varphi\rangle = -\varphi'_a(b) = -\varphi'(b-a)$, c'est-à-dire $x\widetilde{S} = \delta'_{b-a}$.

Utilisons alors le 2) avec $T = \delta'_{b-a}$. Pour $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, et $\chi(x) = \frac{\varphi\,(x) - \varphi\,(0)\,\theta(x)}{x}$, on a :

$$\langle T_0, \varphi\rangle = \langle T, \chi\rangle = \langle \delta'_{b-a}, \chi\rangle = -\langle \delta_{b-a}, \chi'\rangle = -\chi'(b-a)\,.$$

Or $\chi'(x) = \frac{\varphi'(x) - \varphi\,(0)\,\theta'(x)}{x} - \frac{\varphi\,(x) - \varphi\,(0)\,\theta(x)}{x^2}$; donc :

$$T_0 = -\frac{1}{b-a}\,\delta'_{b-a} + \frac{1}{(b-a)^2}\,\delta_{b-a} - \left[\frac{\theta'(b-a)}{b-a} - \frac{\theta(b-a)}{(b-a)^2}\right]\delta\,,$$

de sorte que, en vertu du 2), on a $\widetilde{S} = K\,\delta + \frac{1}{(b-a)^2}\,\delta_{b-a} - \frac{1}{b-a}\,\delta'_{b-a}$, avec $K \in \mathbb{C}$, d'où :

$$\begin{aligned}\langle S, \varphi\rangle = \langle \widetilde{S}, \varphi_{-a}\rangle &= K\,\varphi_{-a}(0) + \frac{1}{(b-a)^2}\,\varphi_{-a}(b-a) + \frac{1}{b-a}\,\varphi'_{-a}(b-a)\\ &= K\,\varphi\,(a) + \frac{1}{(b-a)^2}\,\varphi\,(b) + \frac{1}{b-a}\,\varphi'\,(b)\,,\end{aligned}$$

et donc $S = K\,\delta_a + \frac{1}{(b-a)^2}\,\delta_b - \frac{1}{b-a}\,\delta'_b$, avec $K \in \mathbb{C}$.

e) *Première méthode.* On fait comme au d). On a $(x-a)\,S = \delta'_a$ si et seulement si, pour toute $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, $\langle x\widetilde{S}, \varphi\rangle = \langle (x-a)\,S, \varphi_a\rangle = \langle \delta'_a, \varphi_a\rangle = -\varphi'_a(a) = -\varphi'(0)$, c'est-à-dire $x\widetilde{S} = \delta'$. On utilise alors le 2) avec $T = \delta'$; on a $\langle T_0, \varphi\rangle = \langle T, \chi\rangle = -\chi'(0)$. Mais :

$$\begin{aligned}\chi(0) &= \lim_{x\to 0} \chi(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\varphi\,(x) - \varphi\,(0)\,\theta(x)}{x}\\ &= \lim_{x\to 0}\left[\frac{\varphi\,(x) - \varphi\,(0)}{x} - \frac{\theta(x) - 1}{x}\right] = \varphi'(0) - \varphi\,(0)\,\theta'(0)\end{aligned}$$

et

$$\chi'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\chi(x)-\chi(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{[\varphi(x)-\varphi(0)\,\theta(x)] - x[\varphi'(0)-\varphi(0)\,\theta'(0)]}{x^2}\,.$$

Comme $\varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(0) + \frac{x^2}{2}\,\varphi''(0) + o(x^2)$ et $\theta(x) = 1 + x\theta'(0) + \frac{x^2}{2}\,\theta''(0) + o(x^2)$, on a :

$$\begin{aligned}
&[\varphi(x)-\varphi(0)\,\theta(x)] - x[\varphi'(0)-\varphi(0)\,\theta'(0)] \\
&\qquad = \Big[\varphi(0) + x\varphi'(0) + \frac{x^2}{2}\,\varphi''(0) - \varphi(0)\big(1 + x\theta'(0) + \frac{x^2}{2}\,\theta''(0)\big)\Big] \\
&\qquad\qquad - x\,[\varphi'(0)-\varphi(0)\,\theta'(0)] + o(x^2) \\
&\qquad = \frac{x^2}{2}\,[\varphi''(0)-\varphi(0)\,\theta''(0)] + o(x^2)\,,
\end{aligned}$$

on obtient $\chi'(0) = \frac{1}{2}\,\varphi''(0) - \frac{\theta''(0)}{2}\,\varphi(0)$. Donc $T_0 = -\frac{1}{2}\,\delta'' + \frac{\theta''(0)}{2}\,\delta$. Il résulte du 2) que $\widetilde{S} = C\,\delta - \frac{1}{2}\,\delta''$. Alors :

$$\langle S,\varphi\rangle = \langle \widetilde{S},\varphi_{-a}\rangle = \langle C\,\delta - \frac{1}{2}\,\delta'',\varphi_{-a}\rangle = C\,\varphi(a) - \frac{1}{2}\,\varphi''(a)\,,$$

et donc $S = C\,\delta_a - \frac{1}{2}\,\delta_a''$.

Deuxième méthode. On part de l'égalité $-(x-a)\,\delta_a' = \delta_a$, vue au c), et on la dérive ; on obtient $-\delta_a' - (x-a)\,\delta_a'' = \delta_a'$. Cela s'écrit aussi $(x-a)\,\big(-\frac{1}{2}\,\delta_a''\big) = \delta_a'$, de sorte que $-\frac{1}{2}\,\delta_a''$ est une solution particulière de l'équation $(x-a)\,S = \delta_a'$. En posant $T = S + \frac{1}{2}\,\delta_a''$, on obtient $(x-a)\,T = 0$; donc $T = C\,\delta_a$, par le a). Il en résulte que $S = C\,\delta_a - \frac{1}{2}\,\delta_a''$.

f) On a $(x-a)^2 S = (x-a)[(x-a)S] = 0$; donc $(x-a)S = C\,\delta_a$, par le a). Il résulte alors du c) que $S = C\,[C'\delta_a - \delta_a']$. Les solutions de $(x-a)^2 S = 0$ sont donc $S = C_1\delta_a + C_2\,\delta_a'$, avec $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$.

g) On a $(1-x^4)^2 S = (1+x^2)^2(1-x^2)^2 S$. Comme $(1+x^2)^2$ ne s'annule pas, $\frac{1}{(1+x^2)^2}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$; donc $(1-x^4)^2 S = 0$ si et seulement si $(1-x^2)^2 S = 0$. Cela s'écrit aussi $(x-1)^2[(x+1)^2 S] = 0$. Posons $S_1 = (x+1)^2 S$. Il résulte du f) que $S_1 = C_1\delta_1 + C_2\,\delta_1'$, avec $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$. Posons maintenant $S_2 = (x+1)\,S$. On a $S_1 = (x+1)\,S_2$; donc $(x+1)\,S_2 = C_1\delta_1 + C_2\,\delta_1'$. Il résulte du b) et du d), avec $a = -1$ et $b = 1$, que :

$$S_2 = C_1\Big(C\,\delta_{-1} + \frac{1}{2}\,\delta_1\Big) + C_2\Big(K\,\delta_{-1} + \frac{1}{2^2}\,\delta_1 - \frac{1}{2}\,\delta_1'\Big) = K_1\,\delta_{-1} + K_2\,\delta_1 + K_3\,\delta_1'\,.$$

En utilisant maintenant le c), et de nouveau les b) et d), on obtient :

$$S = K_1\Big(C\,\delta_{-1} - \delta_{-1}'\Big) + K_2\Big(C'\delta_{-1} + \frac{1}{2}\,\delta_1\Big) + K_3\Big(K'\delta_{-1} + \frac{1}{2^2}\,\delta_1 - \frac{1}{2}\,\delta_1'\Big)\,,$$

c'est-à-dire $S = a\,\delta_{-1} + a'\delta_{-1}' + b\,\delta_1 + b'\delta_1'$, avec $a, a', b, b' \in \mathbb{C}$.

h) On va montrer par récurrence que les solutions de $(x-a)^l S = 0$ sont $S = \sum_{j=0}^{l-1} C_j \delta_a^{(j)}$, avec $C_0, \ldots, C_{l-1} \in \mathbb{C}$. Nous avons vu au a) et au f) que c'est vrai pour $l = 1$ et $l = 2$. Supposons que cela soit vrai pour un $l \geqslant 1$, et considérons l'équation $(x-a)^{l+1} S = 0$. Elle est équivalente à $(x-a)^l[(x-a)\,S] = 0$. Par l'hypothèse de récurrence, cela donne $(x-a)\,S = \sum_{j=0}^{l-1} K_j \delta_a^{(j)}$, avec $K_0, \ldots, K_{l-1} \in \mathbb{C}$. Par linéarité, il suffit donc de résoudre $(x-a)\,S = \delta_a^{(j)}$. Définissons $\widetilde{S}$ comme au a) : $\langle \widetilde{S},\varphi\rangle = \langle S,\varphi_a\rangle$. Alors $(x-a)\,S = \delta_a^{(j)}$ si et seulement si $\langle x\widetilde{S},\varphi\rangle = \langle (x-a)\,S,\varphi_a\rangle = \langle \delta_a^{(j)},\varphi_a\rangle = (-1)^j\varphi_a^{(j)}(a) = (-1)^j\varphi^{(j)}(0) = \langle \delta^{(j)},\varphi\rangle$ pour toute $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire $x\widetilde{S} = \delta^{(j)}$.

Utilisons alors le 2) avec $T = \delta^{(j)}$. On a $\langle T_0, \varphi\rangle = \langle T, \chi\rangle = \langle \delta^{(j)}, \chi\rangle = (-1)^j \chi^{(j)}(0)$, avec $x\chi(x) = \varphi(x) - \varphi(0)\,\theta(x)$. On a :

$$x\chi(x) = \varphi(x) - \varphi(0)\,\theta(x) = \left[\sum_{h=0}^{j+1} \frac{\varphi^{(h)}(0)}{h!}\, x^h + o(x^{j+1})\right] - \varphi(0)\left[\sum_{h=0}^{j+1} \frac{\theta^{(h)}(0)}{h!}\, x^h + o(x^{j+1})\right];$$

d'où, puisque $\theta(0) = 1$:

$$\chi(x) = \sum_{h=0}^{j} \frac{\varphi^{(h+1)}(0) - \varphi(0)\,\theta^{(h+1)}(0)}{(h+1)!}\, x^h + o(x^j)\,.$$

Par unicité du développement limité, on en déduit que :

$$\chi^{(j)}(0) = \frac{1}{j+1}\,[\varphi^{(j+1)}(0) - \varphi(0)\,\theta^{(j+1)}(0)]\,.$$

Il en résulte que $T_0 = \frac{1}{j+1}\,[-\delta^{(j+1)} + (-1)^{j+1}\theta^{(j+1)}(0)\,\delta]$, et donc que $\widetilde{S} = C\,\delta - \frac{1}{j+1}\,\delta^{(j+1)}$. Revenant à S, on obtient $S = C\,\delta_a - \frac{1}{j+1}\,\delta_a^{(j+1)}$.

Finalement, les solutions de $(x-a)^{l+1}S = 0$ sont $S = \sum_{j=0}^{l-1} K_j\left[C\,\delta_a - \frac{1}{j+1}\,\delta_a^{(j+1)}\right] + K\,\delta_a$, soit $S = \sum_{j=0}^{l} C_j \delta_a^{(j)}$, et cela termine la récurrence, et donc la preuve.

4) Le polynôme P s'écrit $P(x) = (x-a_1)^{l_1}\cdots(x-a_n)^{l_n}Q(x)$, où $a_1 < \cdots < a_n$ et Q est un polynôme ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$. Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{supp}\varphi \cap \{a_1,\ldots,a_n\} = \emptyset$. Sur $\mathbb{R}\setminus\{a_1,\ldots,a_n\}$, le polynôme P ne s'annule pas ; on peut donc définir φ/P, et l'on obtient une fonction dans $\mathscr{D}(\mathbb{R})$. Alors $\langle S,\varphi\rangle = \langle PS, \varphi/P\rangle = 0$. Donc $\operatorname{supp} S \subseteq \{a_1,\ldots,a_n\}$.

Par suite, il suffit, d'après le principe de localisation (*Proposition X.4.4*), de déterminer $\langle S,\varphi\rangle$ pour $\varphi \in \mathscr{D}_K(\mathbb{R})$, où K est un voisinage compact de $\{a_1,\ldots,a_n\}$; par exemple $K = \bigcup_{1\leqslant k\leqslant n}[a_k-\alpha, a_k+\alpha]$, avec $0 < \alpha < \frac{1}{2}\min\{a_1,\ldots,a_n\}$. De plus, comme $1/Q \in \mathscr{E}(\mathbb{R})$, l'équation $PS = 0$ est équivalente à l'équation $(x-a_1)^{l_1}\cdots(x-a_n)^{l_n}S = 0$.

Soit $\Omega_1,\ldots,\Omega_n$ des ouverts recouvrant K et tels que, pour $1\leqslant k\leqslant n$, on ait $a_k \in \Omega_k$, mais $a_k \notin \Omega_j$ pour $j\neq k$; par exemple $\Omega_k =]a_k-2\alpha, a_k+2\alpha[$. Soit $(\psi_1,\ldots,\psi_n)$ une partition de l'unité de K subordonnée à ce recouvrement. Soit $\varphi \in \mathscr{D}_K(\mathbb{R})$; posons $\varphi_k = \varphi\psi_k$. Comme $\sum_{k=1}^n \psi_k(x) = 1$ pour $x \in K$, on a $\varphi = \sum_{k=1}^n \varphi_k$.

Puisque $(x-a_1)^{l_1}\cdots(x-a_n)^{l_n}S = 0$, on a $\langle (x-a_1)^{l_1}\cdots(x-a_n)^{l_n}S, \varphi_k\rangle = 0$ pour tout $k = 1,\ldots,n$, car $\varphi_k \in \mathscr{D}(\Omega_k) \subseteq \mathscr{D}(\mathbb{R})$. Mais, pour $1\leqslant k\leqslant n$, la fonction $\prod_{j\neq k}(x-a_j)^{l_j}$ ne s'annule pas sur Ω_k ; on peut donc définir $\varphi_k/\prod_{j\neq k}(x-a_j)^{l_j}$, et l'on obtient une fonction de $\mathscr{D}(\mathbb{R})$; alors :

$$\langle (x-a_k)^{l_k}S, \varphi_k\rangle = \Big\langle (x-a_1)^{l_1}\cdots(x-a_n)^{l_n}S, \frac{1}{\prod_{j\neq k}(x-a_j)^{l_j}}\,\varphi_k\Big\rangle = 0\,.$$

Il en résulte que $\langle (x-a_k)^{l_k}(\psi_k S), \varphi\rangle = 0$. Ceci étant vrai pour toute $\varphi \in \mathscr{D}_K(\mathbb{R})$, on a donc $(x-a_k)^{l_k}(\psi_k S) = 0$. Il résulte du 3) h) que $\psi_k S = \sum_{j=0}^{l_k} C_{k,j}\delta_{a_k}^{(j)}$, avec $C_{k,j} \in \mathbb{C}$.

Pour finir, on a, pour toute $\varphi \in \mathscr{D}_K(\mathbb{R})$:

$$\langle S,\varphi\rangle = \Big\langle S, \sum_{k=1}^n \psi_k\varphi\Big\rangle = \sum_{k=1}^n \langle \psi_k S, \varphi\rangle = \sum_{k=1}^n \Big\langle \sum_{j_k=0}^{l_k} C_{k,j_k}\delta_{a_k}^{(j_k)}, \varphi\Big\rangle\,,$$

et donc $S = \sum_{k=1}^n \big(\sum_{j_k=0}^{l_k} C_{k,j_k}\delta_{a_k}^{(j_k)}\big)$.

Remarque. L. Hörmander et S. Łojasiewicz ont montré, en 1957, que l'on pouvait toujours diviser n'importe quelle distribution T par un polynôme ; autrement dit, que l'équation

$PS = T$ avait toujours une solution. Ce problème posé par L. Schwartz, est lié à la résolution des équations différentielles (en passant du “côté Fourier”). Leur méthode était différente, Hörmander raisonnant par dualité, tandis que Łojasiewicz raisonnait directement ; de plus, ce dernier a montré que l'on pouvait diviser les distributions par des fonctions analytiques sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6

A. 1) La distribution T étant d'ordre m n'est pas d'ordre $\leqslant m-1$ (cela a un sens, puisque $m \geqslant 1$). Il existe donc un compact $K \subseteq J$ et des fonctions $\varphi_n \in \mathscr{D}_K(J)$ telles que $\|\varphi_n\|_{(m-1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ mais $\langle T, \varphi_n\rangle \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. En prenant une sous-suite, et en normalisant, on peut supposer que les φ_n ont été choisies de sorte que $\langle T, \varphi_n\rangle = 1$ pour tout $n \geqslant 1$ et $\|\varphi_n\|_{(m-1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

2) Soit $K' = K \cup (\operatorname{supp}\psi)$. Comme la somme de deux compacts est encore compacte, K' est compact. Soit $c = \inf K'$ et $d = \sup K'$; on a $K' \subseteq [c,d] \subseteq J$, car $c, d \in K'$. Pour $a < x \leqslant c$, on a $\varphi_n(t) = \psi(t) = 0$ pour $a < t \leqslant x$; donc $\chi_n(x) = 0$. Pour $d \leqslant x < b$, on a :

$$\chi_n(x) = \int_a^x \varphi_n(t)\, dt - \alpha_n \int_a^x \psi(t)\, dt = \int_a^b \varphi_n(t)\, dt - \alpha_n \int_a^b \psi(t)\, dt = 0\,.$$

Donc $\operatorname{supp}\chi_n \subseteq K'$ et les χ_n sont dans $\mathscr{D}_{K'}(J)$.

Pour tout $k \geqslant 1$, on a $\chi_n^{(k)}(x) = \varphi_n^{(k-1)}(x) - \alpha_n \psi^{(k-1)}(x)$. Comme $|\alpha_n| \leqslant \lambda(K)\,\|\varphi_n\|_\infty = \lambda(K)\,\|\varphi_n\|_{(0)}$, on obtient $\|\chi_n\|_{(m)} \leqslant \|\varphi_n\|_{(m-1)} + \lambda(K)\,\|\psi\|_{(m-1)}\|\varphi_n\|_{(0)} \leqslant C\,\|\varphi_n\|_{(m-1)}$, de sorte que $\|\chi_n\|_{(m)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Par ailleurs, $\langle T', \chi_n\rangle = -\langle T, \chi_n'\rangle = -\langle T, \varphi_n\rangle + \alpha_n\langle T, \psi\rangle = -1 + \alpha_n\langle T, \psi\rangle$. Mais $|\alpha_n| \leqslant \lambda(K)\,\|\varphi_n\|_{(0)} \leqslant \lambda(K)\,\|\varphi_n\|_{(m-1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Donc $\langle T', \chi_n\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} -1$.

3) Il en résulte que T' n'est pas d'ordre $\leqslant m$. Comme on sait qu'elle est d'ordre $\geqslant m+1$, elle est d'ordre $m+1$.

B. 1) a) Notons d'abord que $f(x) = \log|x|$ n'est pas définie partout sur $\mathbb{R}$, mais seulement presque partout. Pour tout $A > 0$, elle est intégrable sur $[-A, A]$ parce que si l'on pose $f_n(x) = |f(x)|\mathbb{1}_{[-A,-2^{-n}]\cup[2^{-n},A]}$, alors la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ est positive et croissante et tend presque partout vers f ; le Théorème de convergence monotone nous dit alors que :

$$\begin{aligned}\int_{-A}^{A} |f(x)|\, dx &= \lim_{n\to\infty}\!\uparrow \int_{-A}^{A} f_n(x)\, dx = 2\lim_{n\to\infty}\!\uparrow \int_{2^{-n}}^{A} \log x\, dx \\ &= 2\lim_{n\to\infty}\!\uparrow [A\log A - A + 2^{-n} n\log 2 + 2^{-n}] = 2\,(A\log A - A) < +\infty\,.\end{aligned}$$

On aurait aussi pu dire que $\int_{-A}^{A} |f(x)|\, dx = 2\int_0^A \log x\, dx$ et que cette intégrale de Riemann généralisée converge (soit en faisant le calcul ci-dessus, soit, par exemple, en disant que $\sqrt{x}\,\log x \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$ et donc que, pour $x > 0$ assez petit, $\log x \leqslant 1/\sqrt{x}$, qui est intégrable sur $]0, A]$, comme c'est bien connu, et facile à vérifier).

b) Pour toute $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, on a, si $\operatorname{supp}\varphi \subseteq [-A, A]$:

$$\begin{aligned}
\langle (T_f)', \varphi\rangle &= -\langle T_f, \varphi'\rangle = -\int_{\mathbb{R}} (\log|x|)\,\varphi'(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}_+} (\log x)\,[\varphi'(x) + \varphi'(-x)]\,dx \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_\varepsilon^A (\log x)\,[\varphi'(x)+\varphi'(-x)]\,dx\right) \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\Big[(\log x)\,[\varphi(x)-\varphi(-x)]\Big]_\varepsilon^A - \int_\varepsilon^A \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,dx\right) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left((\log\varepsilon)\,[\varphi(\varepsilon)-\varphi(-\varepsilon)] + \int_\varepsilon^A \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,dx\right),
\end{aligned}$$

en intégrant par parties et en utilisant le fait que $\varphi(A) = 0$. Comme :

$$|(\log\varepsilon)\,[\varphi(\varepsilon)-\varphi(-\varepsilon)]| = 2\varepsilon\,|\log\varepsilon|\left|\frac{\varphi(\varepsilon)-\varphi(-\varepsilon)}{2\varepsilon}\right| \leqslant 2\varepsilon\,|\log\varepsilon|\,\|\varphi'\|_\infty$$

par le Théorème des accroissements finis, on a $(\log\varepsilon)\,[\varphi(\varepsilon)-\varphi(-\varepsilon)] \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$ et l'on obtient :

$$\langle (T_f)', \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^A \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,dx = \langle \operatorname{vp}(1/x), \varphi\rangle\,;$$

donc $(T_f)' = \operatorname{vp}(1/x)$.

2) De même, si $\operatorname{supp}\varphi \subseteq [-A, A]$:

$$\begin{aligned}
\langle (T_g)', \varphi\rangle &= -\langle T_g, \varphi'\rangle = -\int_{\mathbb{R}} Y(x)\,(\log|x|)\,\varphi'(x)\,dx = -\int_0^{+\infty} (\log x)\,\varphi'(x)\,dx \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^A (\log x)\,\varphi'(x)\,dx = -\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\Big[(\log x)\,\varphi(x)\Big]_\varepsilon^A - \int_\varepsilon^A \frac{\varphi(x)}{x}\,dx\right) \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left((\log\varepsilon)\,\varphi(\varepsilon) + \int_\varepsilon^A \frac{\varphi(x)}{x}\,dx\right) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_\varepsilon^A \frac{\varphi(x)}{x}\,dx + \varphi(0)\log\varepsilon + [\varphi(\varepsilon)-\varphi(0)]\log\varepsilon\right);
\end{aligned}$$

et comme :

$$|\,[\varphi(\varepsilon)-\varphi(0)]\,\log\varepsilon| = \left|\frac{\varphi(\varepsilon)-\varphi(0)}{\varepsilon}\,(\varepsilon\,\log\varepsilon)\right| \leqslant \|\varphi'\|_\infty(\varepsilon\,|\log\varepsilon|) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0\,,$$

on obtient :

$$\langle (T_g)', \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_\varepsilon^A \frac{\varphi(x)}{x}\,dx\right) = \langle \operatorname{Pf}[Y(x)/x], \varphi\rangle\,,$$

d'où $(T_g)' = \operatorname{Pf}[Y(x)/x]$.

3) Pour $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{supp}\varphi \subseteq [-A, A]$, on a, pour tout $\varepsilon > 0$, en intégrant par parties :

$$\int_\varepsilon^A \varphi(x)x^2\,dx = \Big[-\frac{\varphi(x)}{x}\Big]_\varepsilon^A + \int_\varepsilon^A \frac{\varphi'(x)}{x}\,dx = \frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon} + \int_\varepsilon^A \frac{\varphi'(x)}{x}\,dx$$

et

$$\int_{-A}^{-\varepsilon} \varphi(x)x^2\,dx = -\frac{\varphi(-\varepsilon)}{-\varepsilon} + \int_{-A}^{-\varepsilon} \frac{\varphi'(x)}{x}\,dx\,,$$

de sorte que :

$$\begin{aligned}\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx - 2\,\frac{\varphi(0)}{\varepsilon} &= \int_{|x|\geqslant\varepsilon} \frac{\varphi'(x)}{x}\,dx + \frac{\varphi(\varepsilon)+\varphi(-\varepsilon)}{\varepsilon} - 2\,\frac{\varphi(0)}{\varepsilon}\\ &= \int_{|x|\geqslant\varepsilon} \frac{\varphi'(x)}{x}\,dx + \frac{\varphi(\varepsilon)+\varphi(0)}{\varepsilon} + \frac{\varphi(-\varepsilon)-\varphi(0)}{\varepsilon}\\ &\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \langle \mathrm{vp}\,(1/x), \varphi'\rangle + \varphi'(0) - \varphi'(0) = -\langle [\mathrm{vp}\,(1/x)]', \varphi\rangle\,.\end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{Pf}\,(1/x^2) = -[\mathrm{vp}\,(1/x)]'$. Elle est d'ordre 2, par le **A.**, puisque $\mathrm{vp}\,(1/x)$ est d'ordre 1.

4) a) Si $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ et $\operatorname{supp}\varphi \subseteq [-A, A]$, on a, pour tout $\varepsilon > 0$, en intégrant par parties

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^A \frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx &= \Big[-\frac{\varphi(x)}{x}\Big]_\varepsilon^A + \int_\varepsilon^A \frac{\varphi'(x)}{x}\,dx\\ &= \frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon} + \int_\varepsilon^A \frac{\varphi'(x)-\varphi'(0)}{x}\,dx + \varphi'(0)\log A - \varphi'(0)\log\varepsilon\,;\end{aligned}$$

donc :

$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx - \frac{\varphi(0)}{\varepsilon} + \varphi'(0)\,\log\varepsilon = \frac{\varphi(\varepsilon)-\varphi(0)}{\varepsilon} + \int_\varepsilon^A \frac{\varphi'(x)-\varphi'(0)}{x}\,dx + \varphi'(0)\log A\,.$$

La fonction $x \mapsto \frac{\varphi'(x)-\varphi'(0)}{x}$ a pour limite $\varphi''(0)$ quand x tend vers 0; elle se prolonge donc en une fonction continue $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Par conséquent :

$$\int_\varepsilon^A \frac{\varphi'(x)-\varphi'(0)}{x}\,dx \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \int_0^A \psi(x)\,dx\,.$$

Il en résulte l'existence de la limite :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx - \frac{\varphi(0)}{\varepsilon} + \varphi'(0)\,\log\varepsilon\right],$$

et, pour $A \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{Pf}\,[Y(x)/x^2], \varphi\rangle &= \varphi'(0) + \int_0^A \psi(x)\,dx + \varphi'(0)\log A\\ &= [1+\log A]\,\varphi'(0) + \int_0^A \frac{\varphi'(x)-\varphi'(0)}{x}\,dx\,.\end{aligned}$$

On a alors, puisque $|\psi(x)| \leqslant \|\varphi''\|_\infty$, grâce au Théorème des accroissements finis :

$$|\langle \mathrm{Pf}\,[Y(x)/x^2], \varphi\rangle| \leqslant [1+\log A]\,\|\varphi'\|_\infty + A\,\|\varphi''\|_\infty \leqslant A\,\|\varphi\|_{(2)}.$$

Cela prouve que $\mathrm{Pf}\,[Y(x)/x^2]$ est une distribution, et qu'elle est d'ordre $\leqslant 2$.

b) Toujours avec les mêmes arguments, on a, pour $\operatorname{supp}\varphi \subseteq [-A, A]$:

$$\begin{aligned}\langle (\mathrm{Pf}\,[Y(x)/x])', \varphi\rangle = -\langle \mathrm{Pf}\,[Y(x)/x], \varphi'\rangle &= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_\varepsilon^A \frac{\varphi'(x)}{x}\,dx + \varphi'(0)\,\log\varepsilon\right]\\ &= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\Big[\frac{\varphi(x)}{x}\Big]_\varepsilon^A + \int_\varepsilon^A \frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx + \varphi'(0)\,\log\varepsilon\right)\\ &= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon} + \int_\varepsilon^A \frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx + \varphi'(0)\,\log\varepsilon\right)\\ &= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{\varphi(\varepsilon)-\varphi(0)}{\varepsilon} - \frac{\varphi(0)}{\varepsilon} + \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx + \varphi'(0)\,\log\varepsilon\right)\\ &= \varphi'(0) - \langle \mathrm{Pf}\,[Y(x)/x^2], \varphi\rangle = -\langle \delta', \varphi\rangle - \langle \mathrm{Pf}\,[Y(x)/x^2], \varphi\rangle\,.\end{aligned}$$

Donc $(\mathrm{Pf}\,[Y(x)/x])' = -\mathrm{Pf}\,[Y(x)/x^2] - \delta'$.

Notons que l'on retrouve ainsi le fait que $\mathrm{Pf}\,[Y(x)/x^2]$ est bien définie et que c'est une distribution : c'est $-\delta' - (\mathrm{Pf}\,[Y(x)/x])' = -(\delta + \mathrm{Pf}\,[Y(x)/x])'$.

c) D'après le **A.**, il suffit de vérifier que $\delta + \mathrm{Pf}\,[Y(x)/x]$ est d'ordre 1. Mais δ étant d'ordre 0 et $\mathrm{Pf}\,[Y(x)/x]$, leur somme est d'ordre 1 : en effet, il existe un compact $K \subseteq \mathbb{R}$ tet des $\varphi_n \in \mathscr{D}_K(\mathbb{R})$ telles que $\|\varphi_n\|_\infty = \|\varphi_n\|_{(0)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et $\langle \mathrm{Pf}\,[Y(x)/x], \varphi_n\rangle = 1$. Comme $\langle \delta, \varphi_n\rangle = \varphi_n(0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, on a $\langle \delta + \mathrm{Pf}\,[Y(x)/x], \varphi_n\rangle = 1$; donc $\delta + \mathrm{Pf}\,[Y(x)/x]$ n'est pas d'ordre 0.

On aurait aussi pu utiliser la remarque de la fin de la section X.2.2. Si $\delta + \mathrm{Pf}\,[Y(x)/x]$ était une distribution d'ordre 0, ce serait une combinaison linéaire de distributions définies par des mesures positives. Comme δ est une mesure positive, donc une distribution d'ordre 0, on en déduirait que $\mathrm{Pf}\,[Y(x)/x] = (\delta + \mathrm{Pf}\,[Y(x)/x]) - \delta$ est aussi d'ordre 0, ce qui n'est pas.

5) On a, pour toute $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
\langle x\,(\mathrm{Pf}\,[Y(x)/x])', \varphi\rangle &= \langle (\mathrm{Pf}\,[Y(x)/x])', x\,\varphi\rangle = -\langle \mathrm{Pf}\,[Y(x)/x], \varphi + x\,\varphi'\rangle \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_\varepsilon^{+\infty}\Big(\frac{\varphi(x)}{x} + \varphi'(x)\Big)\,dx + \varphi(0)\log\varepsilon\right] \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left[-\varphi(\varepsilon) + \int_\varepsilon^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx + \varphi(0)\log\varepsilon\right] \\
&= \varphi(0) - \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx + \varphi(0)\log\varepsilon\right];
\end{aligned}$$

donc $x\,(\mathrm{Pf}\,[Y(x)/x])' = \delta - \mathrm{Pf}\,[Y(x)/x]$.

On a vu dans le 4) b) que l'on a $(\mathrm{Pf}\,[Y(x)/x])' = -\mathrm{Pf}\,[Y(x)/x^2] - \delta'$; on obtient donc $x\big(-\mathrm{Pf}\,[Y(x)/x^2] - \delta'\big) = \delta - \mathrm{Pf}\,[Y(x)/x]$. Mais $x\,\delta' = -\delta$ car

$$\langle x\,\delta', \varphi\rangle = \langle \delta', x\varphi\rangle = -\langle \delta, \varphi + x\varphi'\rangle = -\varphi(0) = -\langle \delta, \varphi\rangle.$$

Par conséquent $x\,\mathrm{Pf}\,[Y(x)/x^2] = \mathrm{Pf}\,[Y(x)/x]$.

6) a) On a vu au 5) que $x\,(\mathrm{Pf}\,[Y(x)/x])' = \delta - \mathrm{Pf}\,[Y(x)/x]$; cela signifie que $\mathrm{Pf}\,[Y(x)/x]$ est solution de l'équation $xy' + y = \delta$. Si l'on pose $z = y - \mathrm{Pf}\,[Y(x)/x]$, on a alors $xz' + z = 0$, c'est-à-dire $(xz)' = 0$. Les solutions sont $xz = C$, avec $C \in \mathbb{C}$. Il résulte du 2) b) et du 2) c) de l'Exercice 5 que $z = C_1\,\mathrm{vp}\,(1/x) + C_2\delta$, avec $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$. Par conséquent les solutions de $xy' + y = \delta$ sont $y = C_1\,\mathrm{vp}\,(1/x) + C_2\,\delta + \mathrm{Pf}\,[Y(x)/x]$.

b) Vérifions d'abord que l'on définit bien une distribution sur $\mathbb{R}$ en posant :

$$\langle \mathrm{Pf}\,[Y(x)\log|x|/x], \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{\varphi(x)\log x}{x}\,dx + \varphi(0)\,\frac{(\log\varepsilon)^2}{2}\right).$$

En effet, si $\operatorname{supp}\varphi \subseteq [-A, A]$, on a :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{\varphi(x)\log x}{x}\,dx + \varphi(0)\,\frac{(\log\varepsilon)^2}{2}\right) = \int_0^A \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}\,\log x\,dx + \varphi(0)\,\frac{(\log A)^2}{2};$$

on définit donc bien une forme linéaire sur $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ et l'on a, en utilisant le Théorème des accroissements finis :

$$|\langle \mathrm{Pf}\,[Y(x)\log|x|/x], \varphi\rangle| \leqslant \|\varphi'\|_\infty \int_0^A |\log x|\,dx + \|\varphi\|_\infty (\log A)^2/2,$$

d'où $|\langle \mathrm{Pf}\,[Y(x)\log|x|/x], \varphi\rangle| \leqslant C_A\|\varphi\|_{(1)}$, et ainsi $\mathrm{Pf}\,[Y(x)\log|x|/x]$ est une distribution, d'ordre $\leqslant 1$ (d'ordre 1 en fait).

L'équation $xy' + y = \mathrm{Pf}\,[Y(x)/x]$ équivaut, grâce au 2), à $(xy)' = (Y(x)\log|x|)'$; on obtient donc $xy = Y(x)\log|x| + C$, avec $C \in \mathbb{C}$. Or $\mathrm{Pf}\,[Y(x)\log|x|/x]$ est une solution de cette équation car, si l'on pose $\psi(x) = x\varphi(x)$, on a, puisque $\psi(0) = 0$:

$$\langle x\,\mathrm{Pf}\,[Y(x)\log|x|/x], \varphi\rangle = \langle \mathrm{Pf}\,[Y(x)\log|x|/x], \psi\rangle = \int_0^{+\infty} \varphi(x)\log x\,dx = \langle Y(x)\log|x|, \varphi\rangle\,;$$

donc si l'on pose $z = y - \mathrm{Pf}\,[Y(x)\log|x|/x]$, on a $xz = C$, d'où $z = C\,\mathrm{vp}\,(1/x) + C'\delta$, et $y = C\,\mathrm{vp}\,(1/x) + C'\delta + \mathrm{Pf}\,[Y(x)\log|x|/x]$, avec $C, C' \in \mathbb{C}$.

Autre méthode. On utilise le 2) de l'Exercice 5. Avec les notations de cet exercice, on a, avec $T = Y(x)\log|x|$, puisque $\theta(0) = 1$:

$$\begin{aligned}
\langle T_0, \varphi\rangle = \langle T, \chi\rangle &= \int_{\mathbb{R}} Y(x)\log|x|\,\chi(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \log x\,\frac{\varphi(x) - \varphi(0)\,\theta(x)}{x}\,dx \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_\varepsilon^{+\infty} \varphi(x)\,\frac{\log x}{x}\,dx - \varphi(0)\int_\varepsilon^{+\infty}\theta(x)\,\frac{\log x}{x}\,dx\right] \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\Bigg[\left(\int_\varepsilon^{+\infty} \varphi(x)\,\frac{\log x}{x}\,dx + \varphi(0)\,\frac{(\log\varepsilon)^2}{2}\right) \\
&\qquad\qquad - \varphi(0)\left(\int_\varepsilon^{+\infty}\theta(x)\,\frac{\log x}{x}\,dx + \theta(0)\,\frac{(\log\varepsilon)^2}{2}\right)\Bigg] \\
&= \langle \mathrm{Pf}\,[Y(x)\log|x|/x], \varphi\rangle - \varphi(0)\,\langle \mathrm{Pf}\,[Y(x)\log|x|/x], \theta\rangle\,;
\end{aligned}$$

donc $T_0 = \mathrm{Pf}\,[Y(x)\log|x|/x] + C_\theta\delta$.

On obtient donc $y = \mathrm{Pf}\,[Y(x)\log|x|/x] + C_\theta\delta + C\,[\mathrm{vp}\,(1/x) + K\,\delta]$, et par conséquent $y = C\,\mathrm{vp}\,(1/x) + C'\delta + \mathrm{Pf}\,[Y(x)\log|x|/x]$, avec $C, C' \in \mathbb{C}$.

Exercice 7

A. 1) Il est clair que $f_k \xrightarrow[k\to\infty]{} f$ dans $\mathscr{E}(\mathbb{R})$ si et seulement si, pour tout $m \in \mathbb{N}$, la suite $(f_k^{(m)})_{k\geqslant 1}$ converge vers $f^{(m)}$ uniformément sur tout compact K de $\mathbb{R}$. En particulier, pour tout compact $K \subseteq \mathbb{R}$, la topologie induite sur $\mathscr{D}_K(\mathbb{R})$ par $\mathscr{E}(\mathbb{R})$ est la topologie de $\mathscr{D}_K(\mathbb{R})$. Il en résulte que toute forme linéaire T continue sur $\mathscr{E}(\mathbb{R})$ induit une distribution $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$. Pour voir qu'elle est d'ordre fini, il faut être plus précis.

Soit T une forme linéaire continue sur $\mathscr{E}(\mathbb{R})$. Fixons $\varepsilon_0 > 0$; il existe $\delta_0 > 0$ tel que, pour toute $f \in \mathscr{E}(\mathbb{R})$, on ait $|\langle T, f\rangle| \leqslant \varepsilon_0$ si $d(f, 0) \leqslant \delta_0$.

Soit $m \geqslant 0$ un entier tel que $1/2^m \leqslant \delta_0/4$.

Si K est un compact arbitraire de $\mathbb{R}$, et soit $\varphi \in \mathscr{D}_K(\mathbb{R})$ telle que $\|\varphi\|_{(m)} \leqslant \delta_0/8$. En particulier $\varphi \in\subseteq \mathscr{E}(\mathbb{R})$, et l'on a $p_{n,j}(\varphi) \leqslant \|\varphi\|_{(m)} \leqslant \delta_0/8$ pour tout $j \leqslant m$ et $n \geqslant 1$; donc :

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{2^j}\,\frac{p_{n,j}(\varphi)}{1 + p_{n,j}(\varphi)} \leqslant \sum_{j=0}^{m}\frac{1}{2^j}\,\frac{\delta_0}{8} + \sum_{j=m+1}^{\infty}\frac{1}{2^j} \leqslant \frac{\delta_0}{4} + \frac{1}{2^m} \leqslant \frac{\delta_0}{2}\cdot$$

Par conséquent $d(\varphi, 0) \leqslant \delta_0/2 \leqslant \delta_0$, de sorte que $|\langle T, \varphi\rangle| \leqslant \varepsilon_0$. Par homogénéité, on obtient $|\langle T, \varphi\rangle| \leqslant (8\,\varepsilon_0/\delta_0)\,\|\varphi\|_{(m)}$ pour toute $\varphi \in \mathscr{D}_K(\mathbb{R})$. Cela signifie que T est une distribution d'ordre $\leqslant m$.

b) Soit ε_0, δ_0 et $m \in \mathbb{N}$ comme au a), et soit $N \geqslant 1$ un entier tel que $1/2^N \leqslant \delta_0/2$. Pour toute $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ telle que $p_{N,m}(\varphi) \leqslant \delta_0/8$, on a :

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{2^j}\,\frac{p_{n,j}(\varphi)}{1 + p_{n,j}(\varphi)} \leqslant \sum_{j=0}^{m}\frac{1}{2^j}\,\frac{\delta_0}{8} + \sum_{j=m+1}^{\infty}\frac{1}{2^j} \leqslant \frac{\delta_0}{4} + \frac{1}{2^m} \leqslant \frac{\delta_0}{2}\,;$$

d'où :

$$d(\varphi,0) \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n}\,\frac{\delta_0}{2} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \leqslant \frac{\delta_0}{2} + \frac{1}{2^N} \leqslant \delta_0\,,$$

de sorte que $|\langle T,\varphi\rangle| \leqslant \varepsilon_0$. Par homogénéité, on obtient $|\langle T,\varphi\rangle| \leqslant (8\,\varepsilon_0/\delta_0)\,p_{N,m}(\varphi)$ pour toute $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. En particulier, si $(\operatorname{supp}\varphi) \cap [-N,N] = \emptyset$, on a $\langle T,\varphi\rangle = 0$. Donc $\operatorname{supp} T \subseteq [-N,N]$, et T est à support compact.

Remarque. Le b) entraîne en fait le a), puisque l'on sait que toute distribution à support compact est d'ordre fini.

2) On sait que toute distribution à support compact est d'ordre fini m. De plus, si $N \geqslant 1$ est un entier tel que $\operatorname{supp} T \subseteq]-N,N[$, on sait (*localisation*) qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $|\langle T,\varphi\rangle| \leqslant C \sup_{0\leqslant j\leqslant m} \sup_{x\in K} |\varphi^{(j)}(x)| = C \sup_{0\leqslant j\leqslant m} p_{N,j}(\varphi)$ pour toute $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$.

Pour $\varepsilon > 0$ arbitraire, posons $\delta = \frac{1}{2^{N+m}}\,\frac{(\varepsilon/C)}{1+(\varepsilon/C)}$. Alors, si $d(\varphi,0) \leqslant \delta$, on a :

$$\frac{1}{2^n}\,\frac{1}{2^j}\,\frac{p_{n,j}(\varphi)}{1+p_{n,j}(\varphi)} \leqslant d(\varphi,0) \leqslant \delta = \frac{1}{2^{N+m}}\,\frac{(\varepsilon/C)}{1+(\varepsilon/C)}$$

pour tous $n \geqslant 1$ et $j \geqslant 0$. En particulier, pour $0 \leqslant j \leqslant m$, on a :

$$\frac{1}{2^N}\,\frac{1}{2^j}\,\frac{p_{N,j}(\varphi)}{1+p_{N,j}(\varphi)} \leqslant \frac{1}{2^{N+m}}\,\frac{(\varepsilon/C)}{1+(\varepsilon/C)} \leqslant \frac{1}{2^{N+j}}\,\frac{(\varepsilon/C)}{1+(\varepsilon/C)}\,;$$

donc $p_{N,j}(\varphi) \leqslant \varepsilon/C$, et l'on obtient $|\langle T,\varphi\rangle| \leqslant \varepsilon$. Ainsi, T est continue en 0 sur $\mathscr{D}(\mathbb{R})$, pour la distance d de $\mathscr{E}(\mathbb{R})$. Comme cette distance est invariante par translation, T est continue en 0 sur $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ pour la distance d.

Il reste maintenant à montrer que $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathscr{E}(\mathbb{R})$, ce qui permettra de prolonger, de façon unique, T en une forme linéaire continue sur $\mathscr{E}(\mathbb{R})$ (on pourrait utiliser le Théorème de Hahn-Banach, mais on ne l'a pas vu dans le cadre des espaces de Fréchet). Or si $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est une unité approchée avec $\rho_\varepsilon \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, on a $(f * \rho_\varepsilon)^{(j)} = f^{(j)} * \rho_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} f^{(j)}$, uniformément sur tout compact ; cela montre la densité.

Remarque. On peut définir explicitement le prolongement. En effet, si $\chi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ vaut 1 sur un voisinage de $\operatorname{supp} T$, on pose $\langle T^\sharp, f\rangle = \langle T, f\,\chi\rangle$, pour toute $f \in \mathscr{E}(\mathbb{R})$. La formule de Leibniz permet de voir que $T^\sharp$ est une forme linéaire continue sur $\mathscr{E}(\mathbb{R})$. De plus, pour toute $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, on a $[\operatorname{supp}(\mathbb{1}-\chi)\,\varphi] \cap (\operatorname{supp} T) = \emptyset$, donc $\langle T, (\mathbb{1}-\chi)\,\varphi\rangle = 0$, de sorte que $\langle T^\sharp,\varphi\rangle = \langle T, \varphi\,\chi\rangle = \langle T,\varphi\rangle$.

3) Toute distribution à support compact est tempérée, par le 2), parce que $\mathscr{S}(\mathbb{R}) \subseteq \mathscr{E}(\mathbb{R})$ et l'injection canonique est continue car $p_{n,j}(f) \leqslant q_{0,j}(f)$ pour toute $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, tout $n \geqslant 1$, et tout $j \in \mathbb{N}$.

B. 1) a) Soit, comme dans la preuve de la proposition de localisation (Proposition X.4.4), $\rho \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{supp}\rho \subseteq [-1,1]$ et $\int_{\mathbb{R}} \rho(x)\,dx = 1$, et soit, pour $\varepsilon > 0$, $\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\,\rho(x/\varepsilon)$. On a $\operatorname{supp}\rho_\varepsilon \subseteq [-\varepsilon,\varepsilon]$ et $\int_{\mathbb{R}} \rho_\varepsilon(x)\,dx = 1$. On pose $\chi_\varepsilon(x) = (\mathbb{1}_{K_{2\varepsilon}} * \rho_\varepsilon)(x) = \int_{K_{2\varepsilon}} \rho_\varepsilon(x-t)\,dt$. Alors χ_ε est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\operatorname{supp}\chi_\varepsilon \subseteq K_{2\varepsilon} + \operatorname{supp}\rho_\varepsilon \subseteq K_{3\varepsilon}$. De plus, si $x \in K_\varepsilon$, on a $|x-t| > \varepsilon$ pour tout $t \notin K_{2\varepsilon}$; donc $\rho_\varepsilon(x-t) = 0$, de sorte que $\chi_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}} \rho_\varepsilon(x-t)\,dt = 1$. Finalement, pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} |\chi_\varepsilon^{(j)}(x)| \leqslant \int_{K_{2\varepsilon}} |\rho_\varepsilon^{(j)}(x-t)|\,dt \leqslant \int_{\mathbb{R}} |\rho_\varepsilon^{(j)}(x-t)|\,dt &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\varepsilon^{j+1}}\,\Big|\rho^{(j)}\Big(\frac{x-t}{\varepsilon}\Big)\Big|\,dx \\ &= \frac{1}{\varepsilon^j}\int_{\mathbb{R}} |\rho^{(j)}(u)|\,du\,, \end{aligned}$$

d'où la majoration demandée, avec $C_j = \int_{\mathbb{R}} |\rho^{(j)}(u)|\, du$.

b) Utilisons la formule de Taylor ; pour $0 \leqslant j \leqslant m$, il existe $\theta_j \in [0,1]$ tel que :

$$\psi^{(j)}(t+u) = \sum_{h=0}^{m-j} \frac{\psi^{(j+h)}(t)}{h!}\, u^h + \frac{\psi^{(m+1)}(t+\theta_j u)}{(m-j+1)!}\, u^{m-j+1}.$$

Lorsque $t \in K$, on a $\psi^{(j+h)}(t) = 0$ pour $0 \leqslant h \leqslant m-j$; donc, si $|u| \leqslant 3\varepsilon$, cela donne $|\psi^{(j)}(t+u)| \leqslant M\, \varepsilon^{m-j+1}$, avec $M = 3^{m+1} \sup_{x \in K_{3\varepsilon}} |\psi^{(m+1)}(x)|$.

c) On utilise l'argument de localisation (Proposition X.4.4) : comme $\chi_\varepsilon(x) = 1$ pour $x \in K_\varepsilon$, la fonction $(\mathbb{1} - \chi_\varepsilon)\psi$ s'annule sur K_ε ; donc $\operatorname{supp}[(\mathbb{1}-\chi_\varepsilon)\psi] \subseteq \overline{\mathbb{R} \setminus K_\varepsilon}$, de sorte que $\operatorname{supp}[(\mathbb{1}-\chi_\varepsilon)\psi] \cap K = \emptyset$. Il en résulte que $\langle T, (\mathbb{1}-\chi_\varepsilon)\psi\rangle = 0$, c'est-à-dire que $\langle T, \psi\rangle = \langle T, \chi_\varepsilon \psi\rangle$.

Comme T est d'ordre m, il existe une constante $C > 0$ telle que $|\langle T, \varphi\rangle| \leqslant C\, \|\varphi\|_{(m)}$ pour toute $\varphi \in \mathscr{D}_{K_{3\varepsilon}}(\mathbb{R})$. En particulier $|\langle T, \psi\rangle| \leqslant C\, \|\chi_\varepsilon \psi\|_{(m)}$, puisque $\langle T, \psi\rangle = \langle T, \chi_\varepsilon\psi\rangle$ et $\chi_\varepsilon \psi \in \mathscr{D}_{K_{3\varepsilon}}(\mathbb{R})$. Or, par la formule de Leibniz, on a, pour $x \in K_{3\varepsilon}$, grâce au a) et au b) :

$$|(\chi_\varepsilon\psi)^{(j)}(x)| \leqslant \sum_{h=0}^{j} \mathrm{C}_j^h |\chi_\varepsilon^{(j-h)}(x)|\, |\psi^{(h)}(x)| \leqslant \sum_{h=0}^{j} \mathrm{C}_j^h \frac{C_{j-h}}{\varepsilon^{j-h}}\, M\, \varepsilon^{m-h+1} = K_j \varepsilon^{m-j+1}.$$

On obtient $\|\chi_\varepsilon\psi\|_{(m)} \leqslant K\varepsilon$, pour $0 < \varepsilon \leqslant 1$. Ainsi $|\langle T, \psi\rangle| \leqslant CK\varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient $\langle T, \psi\rangle = 0$.

d) Si $\operatorname{supp} T = \{0\}$, T est à support compact ; elle est donc d'ordre fini m. Si $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, posons :

$$\psi(x) = \varphi(x) - \sum_{j=0}^{m} \frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!}\, x^j.$$

Alors $\psi \in \mathscr{E}(\mathbb{R})$ et $\psi^{(j)}(0) = 0$ pour $0 \leqslant j \leqslant m$. Il résulte du c) que $\langle T, \psi\rangle = 0$. Si l'on pose $c_j = \frac{(-1)^j}{j!}\langle T, x^j\rangle$, on obtient $\langle T, \varphi\rangle = \sum_{j=0}^m c_j \langle \delta^{(j)}, \varphi\rangle$. Donc $T = \sum_{j=0}^m c_j \delta^{(j)}$.

2) Soit $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ telle que $\psi(x) = 1$ pour tout $x \in \operatorname{supp}\varphi$. On a $\psi\varphi = \varphi$; donc $\langle T, \varphi\rangle = \langle T, \psi\varphi\rangle = \langle \psi T, \varphi\rangle$. La distribution ψT est à support compact, contenu dans $K = \operatorname{supp}\psi$. De plus, comme T est d'ordre m, ψT est d'ordre $m' \leqslant m$. Comme $\varphi^{(j)}(x) = 0$ pour tout $x \in \operatorname{supp} T$ et tout $j = 0, \ldots, m$, on a, en particulier, $\varphi^{(j)}(x) = 0$ pour tout $x \in \operatorname{supp}(\psi T) \subseteq \operatorname{supp} T$ et tout $j = 0, \ldots, m'$. Il résulte alors du 1) c) que $\langle \psi T, \varphi\rangle = 0$, et donc que $\langle T, \varphi\rangle = 0$.

3) Soit $(U_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ un recouvrement fini de $\operatorname{supp}\varphi$ par des ouverts relativement compacts, et soit $(\varphi_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ une partition de l'unité de $\operatorname{supp}\varphi$ subordonnée à ce recouvrement. On a $\varphi = \varphi_1\varphi + \cdots + \varphi_n\varphi$; donc $\langle T, \varphi\rangle = \sum_{k=1}^n \langle T, \varphi_k\varphi\rangle = \sum_{k=1}^n \langle \varphi_k T, \varphi\rangle$. Les distributions $T_k = \varphi_k T$ sont à support compact, donc d'odre fini m_k.Comme on a, en particulier, $\varphi^{(j)}(x) = 0$ pour tout $x \in \operatorname{supp} T_k \subseteq \operatorname{supp} T$ et $0 \leqslant j \leqslant m_k$, le 1) c) donne $\langle T_k, \varphi\rangle = 0$. Il en résulte que $\langle T, \varphi\rangle = 0$.

Exercice 8

1) Soit K' un voisinage compact de K contenu dans V. La distribution T étant à support compact, elle est d'ordre fini m, et l'on a (Corollaire X.4.5) :

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leqslant C \sup_{0 \leqslant j \leqslant m} \sup_{x \in K'} |\varphi^{(j)}(x)|$$

pour toute $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$. Comme $\varphi_n^{(j)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ uniformément sur $K' \subseteq V$ pour $0 \leqslant j \leqslant m$, on obtient $\langle T, \varphi_n\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

2) a) Pour tout $k \geqslant 1$, la formule de Taylor dit qu'il existe $\theta_k \in]0,1[$ tel que :

$$\varphi\Big(\frac{1}{k}\Big) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{k} + \frac{1}{2k^2}\,\varphi''\Big(\frac{\theta_k}{k}\Big)\,;$$

on a donc

$$\sum_{k=1}^{m} \varphi\Big(\frac{1}{k}\Big) - m\,\varphi(0) - \varphi'(0)\log m = \varphi'(0)\Big(\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k} - \log m\Big) + \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2k^2}\,\varphi''(\theta_k/k)\,.$$

Comme la série $\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{2k^2}\,\varphi''(\theta_k/k)$ converge (car $|\varphi''(\theta_k/k)| \leqslant \|\varphi''\|_\infty$), la limite

$$\lim_{m\to\infty}\Big[\sum_{k=1}^{m}\varphi\Big(\frac{1}{k}\Big) - m\,\varphi(0) - \varphi'(0)\log m\Big]$$

existe. Cela montre l'existence de $\langle T,\varphi\rangle$. Il est alors clair que T est une forme linéaire sur $\mathscr{D}(\mathbb{R})$. De plus, $|\langle T,\varphi\rangle| \leqslant \big(C + \frac{\pi^2}{12}\big)\,\|\varphi\|_{(2)}$, où C est la constante d'Euler ; donc T est une distribution d'ordre $\leqslant 2$.

Soit $K = \{0\}\cup\{1/k\,;\ k\geqslant 1\}$. Pour toute $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ telle que $(\operatorname{supp}\varphi)\cap K = \emptyset$, on a $\varphi(0) = \varphi(1/k) = 0$; donc $\varphi'(0) = \lim_{k\to\infty}\frac{\varphi(1/k)-\varphi(0)}{1/k} = 0$. Il en résulte que $\langle T,\varphi\rangle = 0$, de sorte que $\operatorname{supp} T \subseteq K$.

En fait $\operatorname{supp} T = K$. En effet, pour tout $k\geqslant 2$, il existe $\psi_k \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ telle que $\psi_k(1/k) = 1$ et $\operatorname{supp}\psi_k \subseteq \big]\frac{1}{k+1},\frac{1}{k-1}\big[$; alors $\langle T,\psi_k\rangle = 1 \neq 0$. Pour $k = 1$, on prend $\operatorname{supp}\psi_1 \subseteq]1/2, 2[$ telle que $\psi_1(1) = 1$. Donc $\{1/k\,;\ k\geqslant 1\} \subseteq \operatorname{supp} T$, et par conséquent $K = \overline{\{1/k\,;\ k\geqslant 1\}} \subseteq \operatorname{supp} T$.

b) Soit $\varphi_n \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ telle que $0 \leqslant \varphi_n \leqslant 1/\sqrt{n}$, $\varphi_n(x) = 0$ si $x \leqslant 1/(n+1)$ et si $x\geqslant 2$, et $\varphi_n(x) = 1/\sqrt{n}$ si $1/n \leqslant x \leqslant 1$. Alors $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}$ et $\varphi_n^{(j)}(x) = 0$ pour tout $x\in K$ et tout $j\geqslant 1$, car φ_n est constante sur un voisinage de K. Pourtant $\langle T,\varphi_n\rangle = \sum_{k=1}^{n}\varphi_n(1/k) = n/\sqrt{n} = \sqrt{n}\xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

Exercice 9

1) $\sum_{k=0}^{\infty}\delta_k^{(k)}$ n'est pas une distribution tempérée car elle est d'ordre infini ; par contre $\log|x|$ en est une car c'est une fonction à croissance lente (elle n'est définie que presque partout sur $\mathbb{R}$, mais c'est sans importance), de même que $\operatorname{vp}(1/x)$, qui est sa dérivée (voir l'Exercice 6, **B.** 1) a)).

2) a) Cela résulte de la continuité de T_g sur $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ pour la topologie de $\mathscr{S}(\mathbb{R})$.

b) Soit d la distance introduite dans le cours sur $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. Il existe $\delta > 0$ tel que $d(\varphi,0)\leqslant\delta$ entraîne $\varphi\in V$. Posons $I_m = \{0,1,\ldots,m\}^2$ et prenons m tel que $\sum_{(k,n)\notin I_m}\frac{1}{2^{n+k}} \leqslant \delta/2$. Il suffit maintenant de montrer qu'il existe $M < +\infty$ tel que $q_{k,n}(\varphi_j)\leqslant M$ pour $0\leqslant k,n\leqslant m$, pour tout $j\geqslant 1$, car alors pour $0\leqslant\lambda\leqslant\delta/(8M)$, on aura $q_{k,n}(\lambda\varphi_j)\leqslant\delta/8$ pour $0\leqslant k,n\leqslant m$; donc $d(\lambda\varphi_j,0)\leqslant\sum_{(k,n)\in I_m}\frac{1}{2^{k+n}}\,q_{k,n}(\lambda\varphi_j) + \sum_{(k,n)\notin I_m}\frac{1}{2^{k+n}} \leqslant (\delta/2)+(\delta/2) = \delta$, de sorte que $\lambda\varphi_j\in V$ pour tout $j\geqslant 1$.

Mais on voit, par récurrence, que pour tout $h\in\mathbb{N}$, la dérivée d'ordre h de $\frac{1}{(1+x^2)^m}$ est de la forme $\frac{P_h(x)}{(1+x^2)^{m+h}}$, où P_h est un polynôme de degré $\leqslant h$. Alors $\sup_{x\in\mathbb{R}}(1+|x|)^m\frac{|P_h(x)|}{(1+x^2)^{m+h}} = M_h < +\infty$ pour $0\leqslant h\leqslant m$. La formule de Leibniz nous dit alors que, pour $0\leqslant k,n\leqslant m$, on a :

$$\begin{aligned} q_{k,n}(\varphi_j) = \sup_{x\in\mathbb{R}}|x^n\varphi_j^{(k)}(x)| &\leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}}(1+|x|)^m\sum_{h=0}^{k}\mathrm{C}_k^h\frac{|P_h(x)|}{(1+x^2)^{m+h}}\Big(\frac{1}{j}\Big)^{k-h}\Big|\psi^{(k-h)}\Big(\frac{x}{j}\Big)\Big| \\ &\leqslant \sup_{k\leqslant m}\Big(\sum_{h=0}^{k}\mathrm{C}_k^h M_h\Big)\,\|\psi\|_{(m)} := M\,. \end{aligned}$$

c) Comme $\lambda\varphi_j \in V$, on a $|\langle T_g, \varphi_j\rangle| \leqslant 1/\lambda$. Par ailleurs, on a $\varphi_j(x) \xrightarrow[j\to\infty]{} \frac{1}{(1+x^2)^m}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$; le Lemme de Fatou donne :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \frac{g(x)}{(1+x^2)^m}\, dx &\leqslant \liminf_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g(x)\,\varphi_j(x)\, dx = \liminf_{j\to\infty} \left| \int_{\mathbb{R}} g(x)\,\varphi_j(x)\, dx \right| \\ &= \liminf_{j\to\infty} |\langle T_g, \varphi_j\rangle| \leqslant 1/\lambda\,;\end{aligned}$$

donc g est à croissance lente.

d) Comme e^x n'est pas à croissance lente, bien qu'elle soit positive et localement intégrable sur $\mathbb{R}$, elle ne définit donc pas une distribution tempérée.

Exercice 10

1) a) Notons d'abord que δ est une distribution tempérée car elle est à support compact (voir l'Exercice 7). On peut aussi le voir directement : $|\langle \delta, f\rangle| = |f(0)| \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| = q_{0,0}(f)$ pour toute $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.

On a, pour $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$:

$$\langle \mathscr{F}\delta, f\rangle = \langle \delta, \mathscr{F} f\rangle = \mathscr{F} f)(0) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = \langle \mathbb{1}, f\rangle\,;$$

donc $\mathscr{F}\delta = \mathbb{1}$.

b) On sait que la transformation de Fourier sur $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ est bijective, d'inverse la co-transformation de Fourier $\overline{\mathscr{F}}$; donc, pour $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$:

$$\langle \mathscr{F}\mathbb{1}, f\rangle = \langle \mathbb{1}, \mathscr{F} f\rangle = \int_{\mathbb{R}} (\mathscr{F} f)(y)\, dy = [\overline{\mathscr{F}}(\mathscr{F} f)](0) = f(0) = \langle \delta, f\rangle\,,$$

et l'on obtient $\mathscr{F}\mathbb{1} = \delta$.

Plus généralement :

$$\begin{aligned}\langle \mathscr{F} y^k, f\rangle &= \langle y^k, \mathscr{F} f\rangle = \int_{\mathbb{R}} y^k (\mathscr{F} f)(y)\, dy = \frac{1}{(2\pi i)^k} \int_{\mathbb{R}} (2\pi i y)^k (\mathscr{F} f)(y)\, dy \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^k} \int_{\mathbb{R}} (\mathscr{F} f^{(k)})(y)\, dy = \frac{1}{(2\pi i)^k}\, [\overline{\mathscr{F}}(\mathscr{F} f^{(k)})](0) = \frac{1}{(2\pi i)^k}\, f^{(k)}(0) \\ &= \frac{(-1)^k}{(2\pi i)^k}\, \langle \delta^{(k)}, f\rangle\,.\end{aligned}$$

Par conséquent, si $P(y) = \sum_{k=0}^n a_k y^k$ est un polynôme, on a $\mathscr{F} P = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k a_k}{(2\pi i)^k}\, \delta^{(k)}$.

2) Rappelons que la dérivée de toute distribution tempérée est encore tempérée. Pour toute $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, on a, en posant $f_1(x) = -2\pi i x f(x)$:

$$\langle \mathscr{F}(T'), f\rangle = \langle T', \mathscr{F} f\rangle = -\langle T, (\mathscr{F} f)'\rangle = -\langle T, \mathscr{F} f_1\rangle = -\langle \mathscr{F} T, f_1\rangle = \langle 2\pi i x\, (\mathscr{F} T), f\rangle\,;$$

donc $\mathscr{F}(T') = 2\pi i x\, (\mathscr{F} T)$.

3) a) On sait que $Y' = \delta$; le 2) nous apprend donc que $2\pi i x(\mathscr{F} Y) = \mathscr{F}(Y') = \mathscr{F}(\delta) = \mathbb{1}$. On sait, par le 2) de l'Exercice 5 qu'alors $2\pi i\, (\mathscr{F} Y) = \mathrm{vp}\,(1/x) + K\,\delta$. Par conséquent $\mathscr{F} Y = \frac{1}{2\pi i}\, \mathrm{vp}\,(1/x) + C\,\delta$.

b) Posons $\check{f}(x) = f(-x)$. Alors, pour $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned}\langle \mathscr{F}\check{Y}, f\rangle &= \langle \check{Y}, \mathscr{F} f\rangle = \int_{-\infty}^0 (\mathscr{F} f)(y)\, dy = \int_0^{+\infty} (\mathscr{F} f)(-y)\, dy = \int_0^{+\infty} (\mathscr{F}\check{f})(y)\, dy \\ &= \langle Y, \mathscr{F}\check{f}\rangle = \langle \mathscr{F} Y, \check{f}\rangle = \frac{1}{2\pi i}\, \langle \mathrm{vp}(1/x), \check{f}\rangle + C\, \langle \delta, \check{f}\rangle\,.\end{aligned}$$

Mais $\langle \delta, \check{f}\rangle = \check{f}(0) = f(0) = \langle \delta, f\rangle$ et

$$\langle \mathrm{vp}(1/x), \check{f}\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon}\frac{f(-x)}{x}\,dx = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon}\frac{f(-x)}{x}\,dx = -\langle \mathrm{vp}(1/x), f\rangle\,;$$

donc $\mathscr{F}\check{Y} = -\frac{1}{2\pi i}\,\mathrm{vp}\,(1/x) + C\,\delta$.

Puisque $Y + \check{Y} = \mathbb{1}$, on obtient $\delta = \mathscr{F}\mathbb{1} = \mathscr{F}Y + \mathscr{F}\check{Y} = 2C\,\delta$, de sorte que $C = 1/2$.

c) Il résulte du b) et du 1) b) que l'on a $\mathrm{vp}\,(1/x) = \mathscr{F}(2\pi i Y - \pi i\mathbb{1})$. Mais $\mathscr{F}$ est inversible sur $\mathscr{S}(\mathbb{R})$, d'inverse $\overline{\mathscr{F}}$; on a donc, pour $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, en utilisant le calcul fait au b) :

$$\begin{aligned}\langle \mathscr{F}\mathrm{vp}(1/x), f\rangle &= \langle \mathrm{vp}(1/x), \mathscr{F}f\rangle = -\langle \mathrm{vp}(1/x), \check{\widehat{\mathscr{F}f}}\rangle = -\langle \mathrm{vp}(1/x), \overline{\mathscr{F}}f\rangle\\ &= -\langle \mathscr{F}(2\pi i Y - \pi i\mathbb{1}), \overline{\mathscr{F}}f\rangle = -\langle 2\pi i Y - \pi i\mathbb{1}, \mathscr{F}\overline{\mathscr{F}}f\rangle\\ &= -\langle 2\pi i Y - \pi i\mathbb{1}, f\rangle\,;\end{aligned}$$

donc $\mathscr{F}\mathrm{vp}(1/x) = -2\pi i Y + \pi i\mathbb{1} = -\pi i Y + \pi i\check{Y}$. Autrement dit, $[\mathscr{F}\mathrm{vp}(1/x)](y) = -\pi i$ si $y > 0$ et $[\mathscr{F}\mathrm{vp}(1/x)](y) = \pi i$ si $y < 0$.

4) a) La fonction $Y(x)\,\mathrm{e}^{-2\pi\lambda x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$; donc :

$$\big(\mathscr{F}[Y(x)\,\mathrm{e}^{-2\pi\lambda x}]\big)(y) = \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2\pi(\lambda+iy)x}\,dx = \left[\frac{\mathrm{e}^{-2\pi(\lambda+iy)x}}{-2\pi(\lambda+iy)}\right]_{x=0}^{x=+\infty} = \frac{1}{2\pi(\lambda+iy)}\,\cdot$$

b) Notons d'abord que $Y(x)\,\mathrm{e}^{-2\pi\lambda x}$ est une distribution tempérée, pour tout $\lambda \geqslant 0$, car c'est une fonction à croissance lente. Pour toute $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, on a :

$$\langle Y(x)\,\mathrm{e}^{-2\pi\lambda x}, f\rangle = \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2\pi\lambda x}f(x)\,dx \xrightarrow[\lambda\to 0]{} \int_0^{+\infty}f(x)\,dx = \langle Y, f\rangle\,,$$

en utilisant le Théorème de convergence dominée, vu que $|\mathrm{e}^{-2\pi\lambda x}f(x)| \leqslant |f(x)|$ pour tout $\lambda > 0$; donc $Y(x)\,\mathrm{e}^{-2\pi\lambda x} \xrightarrow[\lambda\to 0]{} Y(x)$ dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$.

c) On a vu dans l'Exercice 4 que :

$$\frac{1}{2\pi(\lambda+iy)} = \frac{1}{2\pi i}\,\frac{1}{y-i\lambda} \xrightarrow[\lambda\to 0]{\mathscr{D}'(\mathbb{R})} \frac{1}{2\pi i}\,\frac{1}{y-i0} = \frac{1}{2\pi i}\,[\mathrm{vp}\,(1/y) + i\pi\delta] = \frac{1}{2\pi i}\,\mathrm{vp}\,(1/y) + \frac{1}{2}\,\delta\,.$$

D'autre part, la transformation de Fourier envoyant $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ dans lui-même, on obtient, pour toute $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$:

$$\langle \mathscr{F}[Y(x)\,\mathrm{e}^{-2\pi\lambda x}], f\rangle = \langle Y(x)\,\mathrm{e}^{-2\pi\lambda x}, \mathscr{F}f\rangle \xrightarrow[\lambda\to 0]{} \langle Y(x), \mathscr{F}f\rangle = \langle \mathscr{F}Y, f\rangle\,.$$

C'est en particulier vrai pour $f = \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$; donc la convergence a lieu dans $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$. On obtient par conséquent $\mathscr{F}Y = \frac{1}{2\pi i}\,\mathrm{vp}\,(1/y) + \frac{1}{2}\,\delta$.

5) a) Notons d'abord que xT est tempérée si T l'est car $\langle xT, f\rangle = \langle T, xf\rangle$ pour $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, et que l'on a $(xf)^{(k)} = kf^{(k-1)}(x) + xf^{(k)}(x)$, d'où $q_{k,n}(xf) \leqslant kq_{k-1,n}(f) + q_{k,n+1}(f)$, pour $k \geqslant 1$, et $q_0, n(xf) = q_{0,n+1}(f)$. Alors :

$$\langle \mathscr{F}(xT), f\rangle = \langle xT, \mathscr{F}f\rangle = \langle T, x\,(\mathscr{F}f)\rangle = \frac{1}{2\pi i}\,\langle T, \mathscr{F}(f')\rangle = \frac{1}{2\pi i}\,\langle \mathscr{F}T, f'\rangle = -\frac{1}{2\pi i}\,\langle [\mathscr{F}T]', f\rangle\,;$$

donc $\mathscr{F}(xT) = -\frac{1}{2\pi i}\,[\mathscr{F}T]'$.

b) Comme $|x| = x[Y(x) - Y(-x)]$, on a $\mathscr{F}(|x|) = \mathscr{F}[x(Y - \check{Y})]$. Alors, d'après le a), $\mathscr{F}[xY(x)] = -\frac{1}{2\pi i}\,[\mathscr{F}(Y - \check{Y})]'$. On a vu au 3), et au 4), que $\mathscr{F}Y = \frac{1}{2\pi i}\,\mathrm{vp}\,(1/y) + \frac{1}{2}\,\delta$. Par ailleurs, $Y + \check{Y} = \mathbb{1}$, donc $\mathscr{F}Y + \mathscr{F}\check{Y} = \mathscr{F}\mathbb{1} = \delta$, par le 1) b) ; donc $\mathscr{F}\check{Y} = \delta - \mathscr{F}Y = -\frac{1}{2\pi i}\,\mathrm{vp}\,(1/y) + \frac{1}{2}\,\delta$. Il en résulte que $\mathscr{F}(Y - \check{Y}) = \mathscr{F}Y - \mathscr{F}\check{Y} = \frac{1}{\pi i}\,\mathrm{vp}\,(1/y)$. Il résulte alors de l'Exercice 6, **B**. 3), que $[\mathscr{F}(Y - \check{Y})]' = -\frac{1}{\pi i}\,\mathrm{Pf}\,(1/y^2)$, et ainsi $\mathscr{F}(|x|) = -\frac{1}{2\pi^2}\,\mathrm{Pf}\,(1/y^2)$.

Bibliographie sommaire

Quelques ouvrages en français du même niveau que celui-ci.

H. Brézis, *Analyse fonctionnelle : théorie et applications*, Dunod (1999).

L'accent est mis sur les espaces de Sobolev et leur utilisation dans l'étude des e.d.p., dont l'auteur est un spécialiste mondialement réputé.

S. D. Chatterji, *Cours d'Analyse 3 – Équations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles*, Presses polytechniques et universitaires romandes (1998).

Un pavé, tourné, comme son sous-titre l'indique, vers les équations différentielles.

F. Hirsch et G. Lacombe, *Éléments d'analyse fonctionnelle*, Masson (1997).

L'accent est mis sur les distributions et leur utilisation pour l'étude du laplacien.

A. Kolmogorov et S. Fomine, *Éléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle, 3ème édition,* Éditions Mir et Ellipses (1994).

Écrit par un des plus grands mathématiciens du 20ème siècle. Réussit, sous un format réduit, à être très agréable à lire. Contient aussi les notions de Topologie et d'Intégration nécessaires. On y trouve ausi de la Théorie des fonctions (théorie de Lebesgue de la différentiation), et du Calcul différentiel.

G. Roos, *Analyse et géométrie. Méthodes hilbertiennes*, Dunod (2002).

Insiste, comme indiqué, sur les méthodes hilbertiennes.

V. Trénoguine, *Analyse fonctionnelle*, Éditions Mir (1985).

La deuxième partie est orientée vers l'analyse numérique.

Quelques ouvrages en anglais.

J. Conway, *A Course in Functional Analysis, second edition*, Graduate Texts in Mathematics 96, Springer (1990).

Insiste plus sur les opérateurs, les algèbres de Banach et la Théorie spectrale. La seconde partie est plutôt de niveau M2.

R. Meise and D. Vogt, *Introduction to Functional Analysis*, Oxford Graduate Texts in Mathematics 2, Oxford Science publications (1997).

Insiste plus sur la Théorie spectrale, les espaces localement convexes et les espaces de Fréchet. La seconde partie est de niveau M2.

W. Rudin, *Functional Analysis, 2^{nd} edition*, International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill (1991).

Point de vue assez abstrait. Plutôt de niveau M2. Éviter la traduction française, dans laquelle des contresens conduisent à des énoncés mathématiquement faux.

K. Saxe, *Beginning Functional Analysis*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer (2002).

D'un niveau un peu plus élémentaire. Une introduction à la Mécanique quantique dans le dernier chapitre. Commentaires historiques intéressants.

K. Yosida, *Functional Analysis, 6^{th} edition*, Classics in Mathematics, Springer (1995).

Un classique, écrit par un des maîtres de l'Analyse fonctionnelle. Essentiellement de niveau M2.

Index terminologique

Cet ouvrage a été achevé d'imprimer en décembre 2013
dans les ateliers de Normandie Roto Impression s.a.s.
61250 Lonrai
N° d'impression : 134448
Dépôt légal : décembre 2013

Imprimé en France

Cours d'analyse fonctionnelle
avec 200 exercices corrigés

Ce livre est destiné en priorité aux étudiants de Master 1 de Mathématiques. Ils y trouveront exposées les bases de l'Analyse fonctionnelle. On a cherché à donner le panorama le plus large possible à ce niveau, tout en restant dans des limites raisonnables. On y trouve à la fois les aspects « abstraits » et « concrets » de l'Analyse fonctionnelle, et il permettra à ceux qui l'ont bien assimilé de poursuivre des études dans toute branche des Mathématiques dans laquelle l'Analyse fonctionnelle intervient.

Ce livre rendra aussi service aux étudiants préparant l'Agrégation, ainsi qu'aux élèves des Écoles d'ingénieurs ou de Master de Physique théorique.

Il contient 200 exercices avec des solutions détaillées, allant de la simple application jusqu'à des ouvertures vers des théories plus avancées.

Daniel Li est professeur à l'université d'Artois (Lens). Ses travaux portent sur la géométrie des espaces de Banach et l'analyse harmonique, la théorie des opérateurs et l'analyse complexe. Il est l'auteur avec Hervé Queffélec du livre Introduction à l'étude des espaces de Banach : analyse et probabilités.

9 782729 883058

www.editions-ellipses.fr