Chapitre III

Déterminant TD

Exercice 0.1. *Calculer les déterminats suivants :*

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} \quad , \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \end{vmatrix} \quad , \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad , \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & sin^2(a) & \cos^2(a) \\ 1 & sin^2(b) & \cos^2(b) \\ 1 & sin^2(c) & \cos^2(c) \end{vmatrix}$$

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x+1 & x+2 & x+3 \\ x+2 & x+3 & x+4 \end{vmatrix} \quad , \quad \Delta_6 = \begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{vmatrix}$$

Exercice 0.2. .

Pour quelles valeurs de λ, les matrices suivantes sont-elles inversibles ?

$$A = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 2-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 2 \\ 4 & 2-\lambda & 4 \\ 2 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

Exercice 0.3. *Pour tous a, b et c dans $\mathbb{R}$, soit*

$$D(a,b,c) = \begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

i) Montrer que $D(a,b,c) = -D(a,c,b)$.

ii) Exprimer $D(c,b,a)$ et $D(b,c,a)$ en fonction de $D(a,b,c)$.

iii) Mettre $D(a,b,c)$ sous forme de quatre facteurs dépendant de a, b et c.

Exercice 0.4. *Soient a, b et c trois réels distincts.*
Soit $\Delta : I\!R \longrightarrow I\!R$ l'application définie par :

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} \quad , \quad x \in I\!R$$

i) Montrer que l'application Δ est un polynôme de degré 3 en x.

ii) Montrer que $D(a) = 0$, et en déduire qu'il existe une constante k tel que :

$$\Delta(x) = k(x-a)(x-b)(x-c)$$

iii) Montrer que

$$\Delta(x) = (a-b)(a-c)(c-b)\,(x-a)(x-b)(x-c)$$

Exercice 0.5. .
Soient $A = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} z & t \\ -t & z \end{pmatrix}$ deux matrices. Calculer le produit $A\,B$.
En déduire que : $(x^2+y^2)\,(z^2+t^2) = (xz-yt)^2 + (yz+xt)^2$

Exercice 0.6. .
Montrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(I\!R)$, $det(A\ {}^tA)$ est positif ou nul.
Montrer que si A est antisymétrique, alors $det(A) = 0$.

Exercice 0.7. *Résoudre avec la méthode de Cramer le système :*

$$(S) \begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ x + 2z = 2 \\ y + 3z = 1 \end{cases}$$