Département des Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Moulay Ismail
Année Universitaire 2020-2021

S4 : Mathématiques
Module: Algèbre 5

Série 2

Exercice 1.

1) Déterminer la forme linéaire $f \in \mathbb{R}^{3*}$ telle que $f(1,1,1) = 0$, $f(2,0,1) = 1$ et $f(1,2,3) = 4$.
2) Donner une base du noyau de f.

Exercice 2.

Soient $f_1, f_2 \in \mathbb{R}^{2*}$ définie par $f_1(x,y) = x + y$ et $f_2(x,y) = x - y$.
1) Montrer que $\{f_1, f_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^{2*}$.
2) Exprimer la forme linéaire h définie par $h(x,y) = 2x - 6y$ dans cette base.

Exercice 3.

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ une base de E. Soient $f_1, f_2, f_3 \in E^*$ tels que $f_1 = 2e_1^* + e_2^* + e_3^*$, $f_2 = -e_1^* + 2e_3^*$ et $f_3 = e_1^* + 3e_2^*$. Montrer que $\{f_1, f_2, f_3\}$ est une base de E^* et déterminer la base préduale de $\{f_1, f_2, f_3\}$.

Exercice 4.

On considère les deux formes quadratiques suivantes:

$$q_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3$$

et

$$q_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1x_2 + 2x_2x_3 - x_3x_4.$$

1) Donner la décomposition de Gauss de q_1 et q_2.
2) En déduire le rang et la signature de q_1 et q_2.
3) Construire une base orthogonale B_1 pour q_1 et B_2 pour q_2.