Chapitre II: Décomposition de Gauss des formes quadratiques

1- Espace dual

Definition 2.1.
Soit E un espace vectoriel sur K. On appelle forme linéaire sur E toute application linéaire $u : E \longrightarrow K$ (i.e., $u(\alpha x + \beta y) = \alpha u(x) + \beta u(y), \forall x, y \in E, \forall \alpha, \beta \in K$). L'ensemble E^* des formes linéaires sur E est un espace vectoriel sur K.
E^* s'appelle l'espace dual de E.

Proposition 2.2.
Soit E un espace vectoriel sur K et $x \in E$. Alors

$$x = 0 \Leftrightarrow u(x) = 0, \forall u \in E^*.$$

Démonstration.
L'implication directe est facile. Invérsement, supposons que $x \neq 0$. Soit F un supplémentaire de Kx dans E. D'où $E = Kx \oplus F$. Soit $u : E \longrightarrow K$ l'application telle que

$$u(\alpha x + y) = \alpha, \forall \alpha \in K, \forall y \in F.$$

Alors, $u \in E^*$ et $u(x) = 1 \neq 0$ ce qui est absurde. Par suite $x = 0$.

Corollaire 2.3.
Soit E un espace vectoriel sur K. Alors:
1) Soit $x \in E$ tel que $x \neq 0$. Alors il existe $u \in E^*$ telle que $u(x) = 1$.
2) Soient $x, y \in E$. Alors $x = y$ si et seulement si $u(x) = u(y), \forall u \in E^*$.

Definition 2.4.
Soit E un espace vectoriel sur K. Un hyperplan H de E est sous espace vectoriel de E tel qu'il existe une droite

vectorielle non nulle D telle que $E = H \oplus D$.

Remarque.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Un sous espace vectoriel H de E est un hyperplan si et seulement si $\dim(H) = n - 1$.

Proposition 2.5.

Soit E un espace vectoriel sur K. Si H est un hyperplan de E, alors

$$E = Ka \oplus H, \forall a \notin H.$$

Démonstration.

Soit H un hyperplan de E et $a \in E \setminus H$. Soit $D = \mathrm{Vect}\{d\} = Kd$ une droite vectorielle de E telle que $E = H \oplus D$. En premier lieu, $Ka \cap H = \{0\}$ (si $x = \alpha a \in H$, alors soit $\alpha = 0$ et donc $x = 0$, soit $\alpha \neq 0$ et donc $a = \alpha^{-1}x \in H$ qui est absurde puisque $a \notin H$). Alors $Ka \oplus H$ est une somme directe telle que $Ka \oplus H \subseteq E = D \oplus H$. D'où $a = \alpha d + h$, avec $0 \neq \alpha \in K$ (puisque $a \notin H$) et $h \in H$. Alors $d = \dfrac{1}{\alpha}a - \dfrac{1}{\alpha}h \in Ka \oplus H$. Par suite $D \subseteq Ka \oplus H$ et par conséquent, $E = D \oplus H \subseteq Ka \oplus H$. D'où $E = Ka \oplus H$.

Corollaire 2.6.

Soit E un espace vectoriel sur K et H un hyperplan de E. Soit $a \in E \setminus H$. Alors il existe $u \in E^*$ tel que $u/H = 0$ (c'est à dire $u(h) = 0, \forall h \in H$) et $u(a) = 1$.

Démonstration.

On a, d'après Proposition 2.5, $E = Ka \oplus H$. On considère $u \in E^*$ tel que $u(\alpha a + h) = \alpha, \forall \alpha \in K, \forall h \in H$. Alors, $u(h) = 0$, $\forall h \in H$ et $u(a) = 1$.

Proposition 2.7.

Soit E un espace vectoriel sur K. Alors
1) Un sous espace vectoriel H de E est un hyperplan si et seulement si il existe $u \in E^*$ tel que $u \neq 0$ et $H = \mathrm{Ker}(u)$.
2) Soit $u \in E^*$ tel que $u \neq 0$ et $H = \mathrm{Ker}(u)$ un hyperplan. Alors l'égalité $u(x) = 0$ est appelée une équation de H et on a, pour $v \in E^*$, $H = \mathrm{Ker}(v) \Leftrightarrow \exists \lambda \in K \setminus \{0\} : v = \lambda u$.

Démonstration.

1) Soit H un hyperplan de E et D une droite vectorielle telle que $E = D \oplus H$. Soit $a \in D$ tel que $a \neq 0$. D'où $\exists u \in E^*$ tel que $u(a) = 1$ et $u/H = 0$. Par suite $\mathrm{Ker}(u) = H$ puisque $u(\alpha a + h) = \alpha, \forall \alpha \in K, \forall h \in H$. Inversement, montrons que, si $u \in E^*$ tel que $u \neq 0$, alors $H = \mathrm{Ker}(u)$ est un hyperplan. En effet, soit $0 \neq u \in E^*$ et soit $H = \mathrm{Ker}(u)$. Premièrement notez que u est surjective. En effet, soit $\alpha \in K$. Comme $u \neq 0$, il existe $x \in E$ tel que $u(x) \neq 0$. Par suite $\alpha = u\Big(\dfrac{\alpha}{u(x)}x\Big)$. D'où u est surjective. Par suite $\mathrm{Im}(u) = K$. D'où il existe $a \in E$ tel que $u(a) = 1$. D'où $Ka \oplus H \subseteq E$. D'autre part, on sait que $\dim(\mathrm{Ker}(u)) + \dim(\mathrm{Im}(u)) = \dim(H) + 1 = \dim(E)$. D'où $\dim(Ka \oplus H) = \dim(E)$ et par suite $Ka \oplus H = E$. Par conséquent H est un hyperplan.
2) Si $\exists v \in E^*$ tel que $v = \lambda u$, alors $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(v) = H$. Maintenant, supposons que $H = (\ \mathrm{Ker}(u)) = \mathrm{Ker}(v)$ pour un certain $v \in E^*$. D'après Corollaire 2.6, il existe $a \in E \setminus H$ tel que $u/H = 0$ et $u(a) = 1$. Par suite $u(\alpha a + h) = \alpha, \forall \alpha \in K, \forall h \in H$. Soit $\lambda = v(a)$. D'où $\lambda \neq 0$ puisque $a \notin H$ (car sinon $\lambda = v(a) = 0 \Rightarrow a \in \mathrm{Ker}(v) = H$ absurde). Par suite

$$v(\alpha a + h) = \lambda\alpha = (\lambda u)(\alpha a + h), \forall \alpha \in K, \forall h \in H.$$

Par conséquent, comme $E = Ka \oplus H$, $v(x) = (\lambda u)(x), \forall x \in E$, et ainsi $v = \lambda u$.

Equation d'un hyperplan

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $B = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ une base de E. Soit $u \in E^*$. D'où la matrice de u relativement à B est $M(u,B) = (a_1 \ a_2 \cdots a_n)$ avec $a_i = u(e_i), \forall i = 1, \cdots, n$. Soit $x \in E$ avec $x = x_1e_1 + \cdots x_ne_n$, alors

$$u(x) = (a_1 \ a_2 \ \cdots a_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n.$$

Proposition 2.8.
Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et soit $B = \{e_1, \cdots, e_n\}$ une base de E. L'equation cartésienne d'un hyperplan H est de la forme

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$$

avec $a_1, a_2, \cdots, a_n \in K$ non tous nuls.

Démonstration.
Soit H un sous espace vectoriel de E. Alors H est un hyperplan si et seulement si $\exists 0 \neq u \in E^*$ tel que $H = \mathrm{Ker}(u)$ si et seulement si $\exists 0 \neq u \in E^*$ tel que $H = \{x \in E : u(x) = 0\}$ si et seulement si $\exists 0 \neq u \in E^*$ tel que $(x \in H \Leftrightarrow a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0)$, où $(a_1 \ a_2 \cdots a_n)$ est la matrice de u.

Base duale et base préduale

Proposition-Définition 2.9.
Soient E un espace vectoriel sur K de dimension $n \geq 1$ et $B = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ une base de E. Pour tout $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, on définit le dual $e_i^* \in E^*$ de e_i par $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}, \forall j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, où δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker ($\delta_{ii} = 1$ et $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$). Alors, E^* est un espace vectoriel de dimension n

et $B^* = \{e_1^*, e_2^*, \cdots, e_n^*\}$ est une base de E^* appelée base duale de B. Aussi, la base B de E est appelée base préduale de B^*.

Remarque.
Pour $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, si $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$, alors

$$e_i^*(x) = x_i \text{ est la ième projection de } x \text{ sur } K.$$

Démonstration.
Premiérement, on montre que $\{e_1^*, \cdots, e_n^*\}$ est une famille libre de E^*. En effet, soient $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in K$ tels que $\alpha_1 e_1^* + \cdots + \alpha_n e_n^* = 0$. D'où, pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$, $(\alpha_1 e_1^* + \cdots + \alpha_n e_n^*)(e_k) = 0$, et par suite $\alpha_k = 0$. Alors $\{e_1^*, \cdots, e_n^*\}$ est une famille libre de E^*. Soit maintenant $u \in E^*$ et soit $(a_1\ a_2 \cdots a_n)$ sa matrice dans B. D'où $u(x) = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n, \forall x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n \in E$. Par suite, $\forall x \in E$,

$$u(x) = a_1 e_1^*(x) + a_2 e_2^*(x) + \cdots + a_n e_n^*(x) = (a_1 e_1^* + a_2 e_2^* + \cdots + a_n e_n^*)(x).$$

D'où $u = a_1 e_1^* + a_2 e_2^* + \cdots + a_n e_n^*$. Par conséquent, $\{e_1^*, \cdots, e_n^*\}$ est une famille génératrice et alors $\{e_1^*, e_2^*, \cdots, e_n^*\}$ est une base de E^*.

Corollary 2.10.
Soit E un espace vectoriel sur K de dimension n et soit $B = \{e_1, \cdots, e_n\}$ une base de E. Soit $u \in E^*$. Alors

$$u = u(e_1) e_1^* + u(e_2) e_2^* + \cdots + u(e_n) e_n^*.$$

Proposition 2.11.
Soit E un espace vectoriel sur K de dimension n. Soient $B = \{e_1, \cdots, e_n\}$ une famille de E et $B^* = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ une famille de E^* telles que

$$u_i(e_j) = \delta_{ij}, \forall i, j.$$

Alors
1) B est une base de E.

2) B^* est une base de E^* et B^* est la base duale de B.

Démonstration.

1) Soient $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in K$ tels que $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n = 0$. D'où, $\forall j \in \{1, \cdots, n\}$,

$$\begin{aligned} u_j(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n) &= \alpha_1 u_j(e_1) + \alpha_2 u_j(e_2) + \cdots + \alpha_n u_j(e_n) \\ &= \alpha_j = 0. \end{aligned}$$

Par suite B est une famille libre et par conséquent B est une base de E.
2) Elle provient de Proposition-Definition 2.9.

Proposition 2.12.

Soient E un espace vectoriel de dimension n et $u_1, u_2, \cdots, u_p$ une famille libre de E^*. Alors il existe p vecteurs $x_1, x_2, \cdots, x_p$ tels que $u_i(x_j) = \delta_{ij}, \forall i, j$.

Démonstration.

On complète $\{u_1, \cdots, u_p\}$ en une base $\{u_1, \cdots, u_n\}$ de E^*. Soit $f : E \longrightarrow K^n$ tel que $f(x) = (u_1(x), \cdots, u_n(x))$. f est une application linéaire. Montrons que f est injective. Soit $x \in E$ tel que $f(x) = (0, \cdots, 0)$. Supposons que $x \neq 0$. D'où, d'après Corollaire 2.3, il existe $u \in E^*$ tel que $u(x) = 1$. Comme $\{u_1, \cdots, u_n\}$ est une base de E^*, il existe $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in K$ tels que $u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$. On a $f(x) = (u_1(x), \cdots, u_n(x)) = (0, \cdots, 0)$, d'où $u_1(x) = \cdots = u_n(x) = 0$ et par suite $u(x) = 0$ ce qui est absurde puisque $u(x) = 1$. Par suite $x = 0$ et ainsi $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$. D'où f est injective. Maintenant, comme $\dim(E)$ est finie, on obtient que f est bijective et par suite f est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Soit $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ et $(0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0) \in K^n$ avec le 1 est placé à la $j$ième place. D'où il existe $x_j \in E$ tel que

$$f(x_j) = (u_1(x_j), \cdots, u_n(x_j)) = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0).$$

Par suite $u_j(x_j) = 1$ et $u_i(x_j) = 0, \forall i \neq j$. Par conséquent $u_i(x_j) = \delta_{ij}, \forall i, j$.

Corollaire 2.13.
Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ sur K. Soit $L = \{u_1, \cdots, u_n\}$ une base de E^*. Alors il existe une base $B = \{x_1, \cdots, x_n\}$ de E telle que $B^* = L$ c'est à dire que B est la base préduale de L. Les vecteurs x_j sont déterminés par le système d'equations $u_i(x_j) = \delta_{ij}, \forall i, j$.

Démonstration.
Elle provient de la combinaison de Proposition 2.11 et Proposition 2.12.

Orthogonalité pour une forme quadratique: Suite

On considère dans ce paragraphe l'orthogonalité d'un sous espace vectoriel F d'un espace vectoriel E par rapport à une forme quadratique non dégénérée q.

Proposition 2.14.
Soit q une forme quadratique non dégénérée q sur un espace vectoriel E de dimension finie $n \geq 1$. Soit F un sous espace vectoriel de E. Alors
1) $\dim(F) + \dim(F^{\perp}) = \dim(E)$.
2) $F^{\perp\perp} = F$.

Démonstration.
Soit φ la forme polaire de q. Notez que, $\forall x \in E$, l'application $\varphi_x : E \longrightarrow K$ définie par $\varphi_x(y) = \varphi(x, y), \forall y \in E$ est une forme linéaire, c'est à dire que $\varphi_x \in E^*, \forall x \in E$. On considère l'application $g : E \longrightarrow E^*$ définie par $g(x) = \varphi_x, \forall x \in E$. Donc g est une application linéaire. Montrons que g est injective. En effet, soit $x \in E$ tel que $g(x) = \varphi_x = 0$. D'où,

$\varphi_x(y) = \varphi(x, y) = 0, \forall y \in E$. Comme q est non dégénérée, on obtient que $x = 0$. Alors $\mathrm{Ker}(g) = (0)$, c'est à dire que g est injective. Comme $\dim(E) = \dim(E^*)$ est finie, on a g est bijective et donc c'est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
1) Soit F un sous espace vectoriel de E de dimension $p \leq n$. Soit $\{e_1, \cdots, e_p\}$ une base de F. On complète cette base de F en une base $B = \{e_1, \cdots, e_p, e_{p+1}, \cdots, e_n\}$ de E. On considère $B^* = \{e_1^*, \cdots, e_n^*\}$ la base duale de B. Soit $x \in E$ et soit $\varphi_x = \alpha_1 e_1^* + \cdots + \alpha_n e_n^*$. Alors

$$x \in F^\perp \Leftrightarrow \varphi_x(y) = 0, \forall y \in F \Leftrightarrow \varphi_x(e_i) = 0, \forall i = 1, \cdots, p \Leftrightarrow$$

$$\alpha_i = 0, \forall i = 1, \cdots, p \Leftrightarrow g(x) = \varphi_x \in \mathrm{Vect}(e_{p+1}^*, \cdots, e_n^*) \Leftrightarrow$$

$$x \in g^{-1}(\mathrm{Vect}(e_{p+1}^*, \cdots, e_n^*)).$$

Par suite

$$F^\perp = g^{-1}(\mathrm{Vect}(e_{p+1}^*, \cdots, e_n^*)).$$

Comme g est un isomorphisme, on obtient

$$\dim(F^\perp) = \dim(\mathrm{Vect}(e_{p+1}^*, \cdots, e_n^*) = n - p.$$

Alors $\dim(F) + \dim(F^\perp) = \dim(E)$.
2) On a, d'après (1), $\dim(F) + \dim(F^\perp) = \dim(E)$ et $\dim(F^\perp) + \dim(F^{\perp\perp}) = \dim(E)$. Par suite $\dim(F) = \dim(F^{\perp\perp})$. Comme $F \subseteq F^{\perp\perp}$, on obtient $F = F^{\perp\perp}$.

2- Décomposition de Gauss des formes quadratiques

Le but de ce paragraphe est de décomposer une forme quadratique quelconque en somme de carrés de formes linéaires libres.

Théorème 2.15.
Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n et soit q une forme quadratique sur E. Soit $t = \mathrm{rg}(q)$. Alors il existe

des formes linéaires libres (dans E^*) $L_1,\cdots,L_t$ et il existe $\alpha_1,\cdots,\alpha_t\in K$ tels que

$$\forall x\in E, q(x)=\sum_{i=1}^{t}\alpha_i L_i(x)^2.$$

1) Si $K=\mathbb{C}$, alors il existe des formes linéaires libres $L_1,\cdots,L_t$ tels que

$$\forall x\in E, q(x)=\sum_{i=1}^{t}L_i(x)^2.$$

2) Si $K=\mathbb{R}$, alors alors il existe des formes linéaires libres $L_1,\cdots,L_t$ et il existe $r,s\in\mathbb{N}$ tels que

$$\forall x\in E, q(x)=\sum_{i=1}^{r}L_i(x)^2-\sum_{i=r+1}^{t}L_i(x)^2$$

avec $s=t-r$, c'est à dire que $\mathrm{rg}(q)=t=r+s$. Le couple (r,s) s'appelle **la signature de** q et est notée $\mathbf{sgn(q)=(r,s)}$. La signature de q est indépendante de la base choisie.

Démonstration.
On rappelle que $\forall x\in E$, $q(x)=\sum\limits_{i,j}a_{ij}x_ix_j$, où $a_{ij}=\varphi(e_i,e_j)$, $\forall i,j$ avec φ est la forme polaire de q. Il y a deux cas:
Cas 1. Il existe $i\in\{1,\cdots,n\}$ tel que $a_{ii}\neq 0$.
On peut supposer que $a_{11}\neq 0$. On obtient $q(x)=a_{11}x_1^2+2x_1P(x_2,x_3,\cdots,x_n)+Q(x_2,x_3,\cdots,x_n)$ en factorisant par x_1 dans tous les termes qui contiennent x_1 et où P est une forme linéaire sur K^{n-1} et Q est une forme quadratique sur K^{n-1}. Par suite $q(x)=a_{11}x_1^2+2x_1P(y)+Q(y)$, où $y=(x_2,\cdots,x_n)\in K^{n-1}$. D'où $q(x)=a_{11}(x_1+P(y))^2+\Big(Q(y)-a_{11}P(y)^2\Big)$. On a $q':K^{n-1}\longrightarrow K$ tel que $q'(y)=Q(y)-a_{11}P(y)^2$ est une forme quadratique sur K^{n-1}. D'où $q(x)=a_{11}(x_{11}+$

$P(y))^2 + q'(y) = a_{11}L_1(x) + q'(y)$, où $L_1 : E \longrightarrow K$ tel que $L_1(x) = x_1 + P(y), \forall x \in E$ est une forme linéaire sur E. On répete le procédé jusqu'à traiter tous les carrés $a_{ii}x_i^2$ de $q(x)$ tels que $a_{ii} \neq 0$. On obtient alors

$$q(x) = a_{11}L_1(x_1, x_2, \cdots, x_n))^2 + a_{22}L_2(x_2, \cdots, x_n) + \cdots + a_{pp}L_p(x_p, \cdots, x_n)^2 + q_1(x_{p+1}, \cdots, x_n), \forall x \in E$$

avec $q_1 : K^{n-p} \longrightarrow K$ est une forme quadratique telle que

$$q_1(x) = \sum_{1 \leq i < j \leq n-p} b_{ij}x_ix_j, \forall x \in K^{n-p}$$

(il n y a pas de carrés dans l'expression de q_1). Il est facile de vérifier que $L_1(x) = x_1 + P_1(x_2, \cdots, x_n)$, $L_2(x_2, \cdots, x_n) = x_2 + P_2(x_3, \cdots, x_n)$, $\cdots, L_p = x_p + P_p(x_{p+1}, \cdots, x_n)$, avec les P_i sont des formes linéaires. Soient $\alpha_1, \cdots, \alpha_p \in K$ tels que $\alpha_1 L_1 + \cdots + \alpha_p L_p = 0$. Si on prend $x_1 \neq 0$ et $x_2 = x_3 = \cdots = x_n = 0$, alors on aura $\alpha_1 = 0$. On repéte ce processus jusqu'à montrer que $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_p = 0$. D'où $L_1, \cdots, L_p$ sont libres.

Cas 2. $a_{ii} = 0, \forall i = 1, \cdots, n$.
D'où $q(x) = a_{12}x_1x_2 + x_1A(x_3, \cdots, x_n) + x_2B(x_3, \cdots, x_n) + Q(x_3, \cdots, x_n)$, $\forall x \in E$, où A, B sont des formes linéaires sur K^{n-2} et Q est une forme quadratique sur K^{n-2}. Notons $y = (x_2, \cdots, x_n)$. D'où

$$q(x) = a_{12}\Big(x_1 + \frac{1}{a_{12}}B(y)\Big)\Big(x_2 + \frac{1}{a_{12}}A(y)\Big) + \Big(Q(y) - \frac{1}{a_{12}}A(y)B(y)\Big).$$

On note que $Q - \dfrac{1}{a_{12}}AB$ est une forme quadratique sur K^{n-2}. En utilisant l'identité: $xy = \dfrac{1}{4}(x+y)^2 - \dfrac{1}{4}(x-y)^2$, on obtient

$$q(x) = \frac{a_{12}}{4}\Big(x_1 + x_2 + \frac{1}{a_{12}}A(y) + \frac{1}{a_{12}}B(y)\Big)^2 - \frac{a_{12}}{4}\Big(x_1 - x_2 + \frac{1}{a_{12}}B(y) - \frac{1}{a_{12}}A(y)\Big)^2 +$$

$$\Big(Q(y) - \frac{1}{a_{12}}A(y)B(y)\Big).$$

On pose $L_1(x) = x_1 + x_2\frac{1}{a_{12}}A(y) + \frac{1}{a_{12}}B(y)$ et $L_2 = x_1 - x_2 + \frac{1}{a_{12}}B(y) - \frac{1}{a_{12}}A(y)$. L_1 et L_2 sont des formes linéaires et il est facile de voir qu'ils sont libres. Maintenant, par recurrence sur n, on montre que

$$q(x) = \alpha_1 L_1(x) + \cdots + \alpha_u L_u(x), \forall x \in E$$

avec $L_1, \cdots, L_u$ sont des formes linéaires libres.
En combinant les deux cas, on termine la décomposition de q en somme de carrés de formes linéaires libres.
L'assertion (1) et (2) du théorème decoulent facilement de la décomposition déja montrée.
Il reste à montrer l'independance de la signature de q de la base choisie lorsque $K = \mathbb{R}$. On considère alors deux bases $B = \{e_1, \cdots, e_n\}$ et $B' = \{e'_1, \cdots, e'_n\}$ de E. Soient (r,s) la signature de q relativement à B et (r', s') celle de q relativement à B'. D''òu, $\forall x \in E$,

$$q(x) = \sum_{i=1}^{r} L_i(x)^2 - \sum_{i=r+1}^{t} L_i(x)^2 = \sum_{i=1}^{r'} L'_i(x)^2 - \sum_{i=r'+1}^{t} L'_i(x)^2$$

avec $\{L_1, \cdots, L_t\}$ et $\{L'_1, \cdots, L'_t\}$ sont deux familles libres de E^*. On compléte ces deux familles libres en deux bases $\{L_1, \cdots, L_t, \cdots, L_n\}$ et $\{L'_1, \cdots, L'_t, \cdots, L'_n\}$ de E^* et on considère leurs bases préduales respéctives $\{u_1, \cdots, u_t \cdots, u_n\}$ et $\{u'_1, \cdots, u'_t \cdots, u'_n\}$ de E. Donc si $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i u'_i$, on a $L_i(x) = \alpha_i$ et $L'_i(x) = \beta_i$, $\forall i = 1, \cdots, n$, et par suite

$$q(x) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i^2 - \sum_{i=r+1}^{t} \alpha_i^2 = \sum_{i=1}^{r'} \beta_i^2 - \sum_{i=r'+1}^{t} \beta_i^2.$$

Soient $F=\mathrm{vect}\{u_1,\cdots,u_r\}$ et $G=\mathrm{vect}\{u'_{r'+1},\cdots,u'_n\}$. On a $\forall x\in F\setminus\{0\}, q(x)=\sum_{i=1}^{r}\alpha_i^2>0$ et $\forall x\in G\setminus\{0\}, q(x)=-\sum_{i=r'+1}^{n}\beta_i^2<0$. D'où $F\cap G=\{0\}$. Par suite $F\oplus G$ est une somme directe et on a

$$\begin{aligned}\dim(F\oplus G) &= \dim(F)+\dim(G)\\ &= r+n-r'\\ &\leq \dim(E)=n.\end{aligned}$$

Ce qui donne $r-r'\leq 0$, d'où $r\leq r'$. En utilisant la même demarche avec $F'=\mathrm{vect}\{u_{r+1},\cdots,u_n\}$ et $G'=\mathrm{vect}\{u'_1,\cdots,u'_{r'}\}$, on aura $r'\leq r$. D'où $r=r'$ et $s=s'$ puisque $r+s=r'+s'=t$. Par conséquent, la signature de q est indépendante de la base choisie.

Applications.

1) Donner la décomposition de Gauss de la forme quadratique q suivante et en déduire le rang et la signature:

$$q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+8x_3^2-2x_1x_2+4x_1x_3.$$

On a

$$\begin{aligned}q(x) &= x_1^2+2x_1(2x_3-x_2)+2x_2^2+8x_3^2\\ &= (x_1+2x_3-x_2)^2-(2x_3-x_2)^2+2x_2^2+8x_3^2\\ &= (x_1+2x_3-x_2)^2+x_2^2+4x_2x_3+4x_3^2\\ &= (x_1+2x_3-x_2)^2+(x_2+2x_3)^2.\end{aligned}$$

D'où $\mathrm{rg}(q)=2$ et $\mathrm{sgn}(q)=(2,0)$.

2) $q(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1x_2+x_1x_4+x_2x_3$.
On a

$$\begin{aligned}q(x) &= (x_1+x_3)(x_2+x_4)-x_3x_4\\ &= \frac{1}{4}(x_1+x_2+x_3+x_4)^2-\frac{1}{4}(x_1-x_2+x_3-x_4)^2-x_3x_4\\ &= \frac{1}{4}(x_1+x_2+x_3+x_4)^2-\frac{1}{4}(x_1-x_2+x_3-x_4)^2-\frac{1}{4}(x_3+x_4)^2+\frac{1}{4}(x_3-x_4)^2.\end{aligned}$$

D'où $\operatorname{sgn}(q) = (2,2)$ et $\operatorname{rg}(q) = 4$.