# Chapitre III

# Déterminant

## 1 Définition

On va définir le déterminant par récurrence sur l'ordre $n$ de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
**Notation :**
Si $A \in \mathcal{M}_n$, on note $A_{ij}$ la sous matrice carrée d'ordre $n-1$ obtenue en enlevant à $A$ la $i^{\text{ième}}$ ligne et la $j^{\text{ième}}$ colonne.

**Définition 1.1** *(Déterminant d'ordre 2 )*
*Soit* $A \in \mathcal{M}_2$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *, on appelle déterminant de* $A$*, noté* $det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ *le scalaire défini par :* $det(A) = ad - bc$.

**Proposition 1.1** *(Déterminant d'ordre 3 )*
*Soit* $A \in \mathcal{M}_3$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$
*Développement du déterminant par rapport à la* $k^{\grave{e}me}$ *colonne*

$$\phi_k = (-1)^{1+k} a_{1k} \, det(A_{1k}) + (-1)^{2+k} a_{2k} \, det(A_{2k}) + (-1)^{3+k} a_{3k} \, det(A_{3k})$$

*Développement du déterminant par rapport à la* $l^{\grave{e}me}$ *ligne*

$$\psi_l = (-1)^{l+1} a_{l1} \, det(A_{l1}) + (-1)^{l+2} a_{l2} \, det(A_{l2}) + (-1)^{l+3} a_{l3} \, det(A_{l3})$$

*alors* $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = \Delta_3$*. Les scalaires* $\phi_k$ *et* $\psi_l$ *sont tous égaux,* $k, l \in \{1, 2, 3\}$.

*On appelle déterminant de A le scalaire* $det(A) = \Delta_3$*, noté* $det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Preuve : Il suffit de calculer chacune de ces sommes et de constater qu'elles sont égales.

**Remarque 1.1** *Le terme* $(-1)^{i+j}$ *dans la définition du déterminant revient à affecter chaque coefficient* $a_{ij}$ *de la matrice A d'un signe + ou d'un signe −, les coefficients* $a_{ii}$ *de la diagonale principale étant affecté du signe + :* $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$.

**Exemple 1.1** .
*Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

**Proposition 1.2** *(Déterminant d'ordre n )*
*Soit* $A \in \mathcal{M}_n$*,* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

*Développement du déterminant par rapport à la* $k^{\text{ème}}$ *colonne*

$$\phi_k = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k}\, a_{ik}\, det(A_{ik})$$

*Développement du déterminant par rapport à la* $l^{\text{ème}}$ *ligne*

$$\psi_l = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{l+j}\, a_{lj}\, det(A_{lj})$$

*alors* $\phi_1 = \cdots = \phi_n = \psi_1 = \cdots = \psi_n = \Delta_n$*. Les scalaires* $\phi_k$ *et* $\psi_l$ *sont tous égaux,* $k, l \in \{1, \ldots, n\}$.

*On appelle déterminant de A le scalaire* $det(A) = \Delta_n$*, noté* $det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

**Preuve:** On peut admettre le résultat.

**Remarque 1.2** *A chaque coefficient $a_{ij}$ de la matrice $A$ est affecté un signe $+$ ou un signe $-$ :*

$$\begin{vmatrix} + & - & \cdots & (-1)^{1+n} \\ - & + & \cdots & (-1)^{2+n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{1+n} & (-1)^{2+n} & \cdots & + \end{vmatrix}$$

**Proposition 1.3** .
*Soit* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$ *une matrice triangulaire supérieure d'ordre $n$, alors $det(A) = a_{11} \cdots a_{nn}$ et en particulier $det(I_n) = 1$.*

**Preuve :** En effet : On procède par récurrence sur $n$, si $n = 2$,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22}$$

la propriété est vérifiée pour $n = 2$.
Supposons qu'elle est vérifiée pour $n$.
En développant par rapport à la $1^{\text{ère}}$ colonne le déterminant d'ordre $n+1$ suivant :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\,n+1} \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n+1\,n+1} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2\,n+1} \\ 0 & a_{33} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n+1\,n+1} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22} \cdots a_{n+1\,n+1})$$

d'où le résultat.

# 2 Propriétés

**Proposition 2.1** .
*Soit $C_j$ la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice $A \in \mathcal{M}_n$, on note :*

$$det(A) = det(C_1, \ldots, C_j, \ldots, C_n)$$

*le déterminant est linéaire par rapport à la $j^{\text{ème}}$ colonne :*

***i)***

$$det(C_1,\ldots,C_j\;+\;C'_j,\ldots,C_n) = det(C_1,\ldots,C_j,\ldots,C_n)\;+\;det(C_1,\ldots,C'_j,\ldots,C_n)$$

$$\begin{vmatrix} \cdots & a_{1j-1} & \alpha_{1j}+\beta_{1j} & a_{1j+1} & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & a_{ij-1} & \alpha_{1j}+\beta_{1j} & a_{1j+1} & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & a_{nj-1} & \alpha_{nj}+\beta_{nj} & a_{nj+1} & \cdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdots & a_{1j-1} & \alpha_{1j} & a_{1j+1} & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & a_{ij-1} & \alpha_{1j} & a_{1j+1} & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & a_{nj-1} & \alpha_{nj} & a_{nj+1} & \cdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdots & a_{1j-1} & \beta_{1j} & a_{1j+1} & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & a_{ij-1} & \beta_{1j} & a_{1j+1} & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & a_{nj-1} & \beta_{nj} & a_{nj+1} & \cdots \end{vmatrix}$$

***ii)***

$$det(C_1,\ldots,\lambda\,C_j,\ldots,C_n)\;=\;\lambda\,det(C_1,\ldots,C_j,\ldots C_n)$$

$$\begin{vmatrix} \cdots & a_{1j-1} & \lambda\,\alpha_{1j} & a_{1j+1} & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & a_{ij-1} & \lambda\,\alpha_{1j} & a_{1j+1} & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & a_{nj-1} & \lambda\,\alpha_{nj} & a_{nj+1} & \cdots \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \cdots & a_{1j-1} & \alpha_{1j} & a_{1j+1} & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & a_{ij-1} & \alpha_{1j} & a_{1j+1} & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & a_{nj-1} & \alpha_{nj} & a_{nj+1} & \cdots \end{vmatrix}$$

**Preuve :** Les propriétés $(i)$ et $(ii)$ sont faciles à vérifier, il suffit de développer le déterminant par rapport à la $i^{\text{ème}}$ colonne.

**Proposition 2.2** .
*le déterminant change de signe lorsque l'on permute deux colonnes $C_i \leftrightarrow\; C_j$ :*

$$det(C_1,\ldots,C_i,\ldots,C_j\ldots C_n)\;=\;-\,det(C_1,\ldots,C_j,\ldots,C_i\ldots C_n)$$

**Preuve:** Le résultat se démontre par récurrence sur $n$.

**Théorème 2.1** *(Existence et unicité du déterminant)*
*Il existe une et une seule application*

$$\begin{array}{cccc} \varphi: & M_n(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K} \\ & A=(C_1,\cdots,C_n) & \mapsto & \varphi(C_1,\cdots,C_n) \end{array}$$

*telle que :*
***i)*** $\varphi$ *est linéaire par rapport à chaque vecteur colonne, les autres étant fixés.*
***ii)*** $\varphi(C_1, \cdots, C_n)$ *change de signe lorsque l'on permute deux vecteurs colonnes.*
***iii)*** $\varphi(I_n) = 1$.
*Une telle application est appelée déterminant.*

**Preuve:** On peut admettre le résultat.

**Corollaire 2.1**

$$det(C_1, \dots, \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \, C_j^k, \dots, C_n) \; = \; \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \, det(C_1, \dots, C_j^k, \dots C_n)$$

**Corollaire 2.2** .
*Soit* $A$ *une matrice de* $\mathcal{M}_n(I\!K)$.
***i)*** *Si une colonne est nulle, alors* $det(A) = 0$.
***ii)*** *Si deux colonnes sont égales alors* $det(A) = 0$.
***iii)*** *Si une colonne est combinaison linéaire des autres colonnes, alors* $det(A) = 0$.
***iv)*** *Le déterminant ne change pas si on ajoute à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes.*
***v)*** *Si* $A$ *n'est pas inversible alors* $det(A) = 0$.

**Preuve:**
i) En développant par rapport à cette colonne on obtient $det(A) = 0$.
ii) Comme le déterminant change de signe lorsque l'on permute deux colonnes, alors si deux colonnes sont identiques, $det(A) = 0$.
Les assertions iii) et iv) résultent du corollaire 2.1 et de la propriété $(ii)$.
v) Si $A$ est non inversible alors si on considère le système homogène associé, la solution nulle n'est pas unique donc les vecteurs colonnes de $A$

sont liés, une colonne est combinaison linéaire des autres colonnes et donc d'après l'assertion $(iii)$, $det(A) = 0$.

## Propriété fondamentale

**Théorème 2.2** .
*Soient $A$ et $B$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(I\!K)$, alors*

$$det(A\,B) \;=\; det(A)\,det(B)$$

**Preuve:** On peut admettre le résultat.

**Théorème 2.3** .
*Soit $A$ une matrice de $\mathcal{M}_n(I\!K)$, alors :*

$$A \text{ est inversible } \Leftrightarrow det(A) \;\neq\; 0$$

*De plus si $A$ est inversible,*

$$det(A^{-1}) \;=\; \frac{1}{det(A)}$$

**Preuve:** Montrons que si $A$ est inversible alors $det(A) \neq 0$.
Si $A$ est inversible, on a : $A\,A^{-1} = I_n$ .
D'après le théorème 2.2, $det(A)\,det(A^{-1}) \;=\; 1$ , donc $det(A) \;\neq\; 0$ et $det(A^{-1}) \;=\; \frac{1}{det(A)}$.
Réciproquement, d'après l'assertion $(v)$ du corollaire 2.2, si $A$ n'est pas inversible alors $det(A) = 0$ donc

$$det(A) \;\neq 0 \Rightarrow A \text{ est inversible}$$

**Théorème 2.4** .
*Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(I\!K)$, alors*

$$det({}^tA) = det(A)$$

**Preuve:** le développement de $det(A)$ par rapport à la première colonne est égale au développement de $det({}^tA)$ par rapport à la première ligne.

**Méthode de calcul d'un détérmiant :**
Faire apparaître des zéros dans une ligne ou une colonne et développer ensuite par rapport à cette ligne ou cette colonne.
Pour cela on utilise les propriétés suivantes :
• Le déterminant ne change pas si on ajoute à une colonne $C_j$ ( resp. une ligne $L_i$ ) une combinaison linéaire des autres colonnes ( resp. des autres lignes ).
• Si une colonne ou une ligne est multipliée par un scalaire $\lambda$ alors le déterminant est multiplié par $\lambda$.
$\forall A \in \mathcal{M}_n(I\!K) \quad det(\lambda A) = \lambda^n A$

**Exemple 2.1** ;
*i)*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 101 & 102 & 203 \\ 201 & 202 & 203 \\ 301 & 302 & 303 \end{vmatrix} = det(C_1, C_2-C_1, C_3-C_2) = \begin{vmatrix} 101 & 1 & 1 \\ 201 & 1 & 1 \\ 301 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$car\, C_2 = C_3$

*ii)*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad car \; L_3 = L_1 + L_2$$

*iii)*

$$P(a) = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = det(C_1{+}C_2{+}C_3, C_2, C_3{-}C_2) = \begin{vmatrix} a+2 & 1 & 0 \\ a+2 & a & 1-a \\ a+2 & 1 & a-1 \end{vmatrix}$$

$$P(a) = (a+2)(a-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$P(a) = (a+2)(a-1)det(C_1, C_2 - C_1, C_3)$$

$$P(a) = (a+2)(a-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a-1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (a+2)(a-1)^2$$

*iv)*

$$\Delta(a) = \begin{vmatrix} 3-a & 0 & 8 \\ 3 & -1-a & 6 \\ -2 & 0 & -5-a \end{vmatrix} = -(1{+}a)\begin{vmatrix} 3-a & 8 \\ -2 & -5-a \end{vmatrix}$$

$$\Delta(a) = -(1+a)\begin{vmatrix} -1-a & -2-2a \\ -2 & -5-a \end{vmatrix}$$

$$\Delta(a) = -(1+a)^2\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -5-a \end{vmatrix} = -(1+a)^3$$

# 3 Application des déterminants à la résolution des systèmes d'équations linéaires

**Théorème 3.1** *( Système de Cramer )*
*Soit $A$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*
*Soient* $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$
*Considérons le système $(S)$ à $n$ équations et $n$ inconnues :*

$$(S) \quad A\,X = B$$

*Si $det(A) \neq 0$ alors le système $(S)$ est de Cramer, admet une unique solution*

$$x_1 = \frac{det(B_1)}{det(A)}, \ldots, x_i = \frac{det(B_i)}{det(A)}, \ldots, x_n = \frac{det(B_n)}{det(A)}$$

*Où $B_i$ est la matrice obtenue en remplaçant la $i$ ème colonne de $A$ par la colonne $B$*

**Preuve :** Soient $E_i$ la $i$ ème colonne de $I_n$ et $C_i$ la $i$ ème colonne de $A$. On a : $A\,E_i = C_i$ et $A\,X = B$. Soit $Z_i$ la matrice obtenue en remplaçant la $i$ ème colonne de $I_n$ par la colonne $X$

$$Z_i = \begin{pmatrix} E_1 & \cdots & E_{i-1} & X & E_{i+1} & \cdots & E_n \end{pmatrix}$$

$$A\,Z_i = \begin{pmatrix} A\,E_1 & \cdots & A\,E_{i-1} & A\,X & A\,E_{i+1} & \cdots & A\,E_n \end{pmatrix}$$

donc

$$A\,Z_i = \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_{i-1} & B & C_{i+1} & \cdots & C_n \end{pmatrix} = B_i$$

par suite

$$det(\,A\,Z_i\,) = det(\,A\,)\,det(\,Z_i\,) \; = \; det(\,B_i\,)$$

donc

$$det(\,Z_i\,) \; = \; \frac{det(\,B_i\,)}{det(\,A\,)}$$

En développant $det(\,Z_i\,)$ par rapport à la $i$ ème ligne, on a :

$$det(\,Z_i\,) = x_i\,det(\,I_{n-1}\,) = x_i$$

donc

$$x_i \; = \; \frac{det(\,B_i\,)}{det(\,A\,)}$$

d'où le résultat.

**Remarque 3.1** *le résultat du théorème 3.1, peut être utile lorsque $n = 2$ ou $n = 3$, mais si $n \geq 4$, les calculs deviennent trop lourds, la méthode de Gauss est plus pratique.*

**Exemple 3.1** *Résolvons le système suivant par la méthode de Cramer :* $(S)\begin{cases} 2x + y + 2z = 1 \\ x - y + 2z = 2 \\ -3x - z = -1 \end{cases}$

$$\Delta \; = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & -1 \end{vmatrix} \; = \; \begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 \\ -5 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \; = \; -1 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -5 & -1 \end{vmatrix}$$

*donc* $\Delta \; = \; -1(4+5) = -9 \neq 0$, *le système est de Cramer.*

$$\Delta_1 \; = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \; = \; \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \; = \; -1$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 5 \end{vmatrix} = -1(-15+10) = 5$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1(1+5) = -6$$

$x = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{1}{9}$ , $y = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = -\dfrac{5}{9}$ *et* $z = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$

*donc*

$$\mathcal{S}\{\,(\frac{1}{9}, -\frac{5}{9}, \frac{2}{3})\,\}$$

## 4 Application des déterminants au calcul de l'inverse d'une matrice

**Définition 4.1** *( Matrice des cofacteurs )*
*Soit $A \in \mathcal{M}_n$, on note $A_{ij}$ la sous matrice carrée d'ordre $n-1$ obtenue en enlevant à $A$ la $i^{ième}$ ligne et la $j^{ième}$ colonne. Le nombre $det\,A_{ij}$ est appelé mineur d'ordre $n-1$ de la matrice $A$. On appelle le cofacteur du coefficient $a_{ij}$ de $A$ le scalaire*

$$c_{ij} = (-1)^{i+j}\,det(A_{ij})$$

*La matrice $C = (c_{ij})_{n,n} \in \mathcal{M}_n$ des cofacteurs de $A$ s'appelle la comatrice de $A$, notée $C = com(A)$.*

**Théorème 4.1** .
*Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n$ et soit $com(A) = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_n$ sa coma-*

*trice. Alors*

$$A\ {}^{t}com(A) \;=\; det(A)\, I_n$$

*et si* $det(A) \neq 0$ *alors*

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}\ {}^{t}com(A)$$

${}^{t}com(A)$ *est la matrice transposée de la comatrice de* $A$.

**Preuve :**
Soit $A\ {}^{t}com(A) = (\alpha_{ij})$ et ${}^{t}com(A) = (c'_{ij})$ avec $c'_{ij} \;=\; c_{ji}$.
On a :

$$\alpha_{ij} \;=\; \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, c'_{kj} \;=\; \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, c_{jk} \;=\; \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k}\, a_{ik}\, det(A_{jk})$$

Alors
$\alpha_{ii} \;=\; \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k}\, a_{ik}\, det(A_{ik}) \;=\; det(A)$ est le developpement de $det(A)$ par rapport à la $i$ ème ligne de $A$

Soit $L_i$ la $i$ ème ligne de $A$, $\quad A \;=\; \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}$

Si $i \neq j$ soit $A' = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}$ la matrice obtenue de la matrice $A$ en remplacant la $j^{\text{ième}}$ ligne de $A$ par la $i^{\text{ième}}$ ligne de $A$. La matrice $A'$ admet deux lignes identiques la $i^{\text{ième}}$ ligne et la $j^{\text{ième}}$ ligne, donc $det(A') = 0$. En developpant le déterminant $det(A')$ par rapport à sa $j^{\text{ième}}$ ligne on a :

$$det(A') = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{ik} \, det(A_{jk}) = \alpha_{ij}$$

d'où $\alpha_{ij} = 0$ si $i \neq j$.
Par suite

$$A\ {}^t com(A) = \begin{pmatrix} det(A) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & det(A) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & det(A) \end{pmatrix} = det(A)\ I_n$$

d'où le résultat.
Si $det(A) \neq 0$, alors

$$A\ \left( \frac{1}{det(A)}\ {}^t com(A) \right) = I_n$$

donc

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}\ {}^t com(A)$$

**Remarque 4.1** *Si $n \geq 4$, les calculs deviennent trop lourds, la méthode de Gauss-Jordan est plus pratique.*

**Exemple 4.1** *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 9 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1(-1-18) = -19$$

$c_{ij} = (-1)^{i+j}\, det(A_{ij})$ *est le cofacteur de* $a_{ij}$ *où* $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

$c_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,\ c_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -9,$

$c_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 2\ c_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2,$

$c_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1,\ c_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -4$

$c_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7,\ c_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -6,$

$c_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5$

*La comatrice de A :*

$com(A) = \begin{pmatrix} 1 & -9 & 2 \\ -2 & -1 & -4 \\ 7 & -6 & -5 \end{pmatrix}$ *donc* ${}^t com(A) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ -9 & -1 & -6 \\ 2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$

*d'où*

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}\ {}^t com(A) = -\frac{1}{19} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ -9 & -1 & -6 \\ 2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$