Chapitre III

Déterminant TD

Exercice 0.1. *Calculer les déterminats suivants :*

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} \ , \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \end{vmatrix} \ , \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 \end{vmatrix} \ , \ \Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & sin^2(a) & \cos^2(a) \\ 1 & sin^2(b) & \cos^2(b) \\ 1 & sin^2(c) & \cos^2(c) \end{vmatrix}$$

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x+1 & x+2 & x+3 \\ x+2 & x+3 & x+4 \end{vmatrix} \ , \ \Delta_6 = \begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{vmatrix}$$

Solution. *:*

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2 \ , \ \Delta_2 = 2\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 0 \ , \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 \end{vmatrix} = abc$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & sin^2(a)+\cos^2(a) & \cos^2(a) \\ 1 & sin^2(b)+\cos^2(b) & \cos^2(b) \\ 1 & sin^2(c)+\cos^2(c) & \cos^2(c) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cos^2(a) \\ 1 & 1 & \cos^2(b) \\ 1 & 1 & \cos^2(c) \end{vmatrix} = 0 \ , \ \Delta_5 = \begin{vmatrix} -1 & x+1 & 1 \\ -1 & x+2 & 1 \\ -1 & x+3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_6 = a\begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & d & 0 \\ c & 0 & d \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & 0 \\ 0 & c & d \end{vmatrix} = ad\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} - bc\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = (ad-bc)\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = (ad-bc)^2$$

Exercice 0.2. .

Pour quelles valeurs de λ, les matrices suivantes sont-elles inversibles ?

$$A = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 2-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 2 \\ 4 & 2-\lambda & 4 \\ 2 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

Solution. *:*

$det\, A = (1-\lambda)^2(2-\lambda)$, *A est inversible ssi* $det\, A \neq 0$ *ssi* $\lambda \in I\!R\backslash\{1,2\}$.

$$det\, B = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 4 \\ \lambda & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 4 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & 4 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

donc

$$det\, B = \lambda \begin{vmatrix} 2 & 4-\lambda \\ 2-\lambda & 4 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 2 & 4-\lambda \\ -\lambda & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 \begin{vmatrix} 2 & 4-\lambda \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2(6-\lambda)$$

B est inversible ssi $det\, A \neq 0$ *ssi* $\lambda \in I\!R\backslash\{0,6\}$.

Exercice 0.3. *Pour tous a, b et c dans* $I\!R$*, soit*

$$D(a,b,c) = \begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

i) Montrer que $D(a,b,c) = -D(a,c,b)$.

ii) Exprimer $D(c,b,a)$ *et* $D(b,c,a)$ *en fonction de* $D(a,b,c)$.

iii) Mettre $D(a,b,c)$ *sous forme de quatre facteurs dépendant de a, b et c.*

Solution. *:*

$D(a,b,c) = det(C_1,C_2,C_3) = -det(C_1,C_3,C_2) = -D(a,c,b)$ *donc* $D(a,c,b) = -D(a,b,c)$.

$D(a,b,c) = det(C_1,C_2,C_3) = -det(C_3,C_2,C_1) = -D(c,b,a)$ *donc* $D(c,a,a) = -D(a,b,c)$.

$D(c,b,a) = det(C_3,C_2,C_1) = -det(C_2,C_3,C_1) = -D(b,c,a) = -D(a,b,c)$ *donc* $D(b,c,a) = D(a,b,c)$.

$$D(a,b,c) = \begin{vmatrix} b-a & c+a & b-c \\ c(b-a) & ca & a(b-c) \\ a^2-b^2 & b^2 & b^2-c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(b-c) \begin{vmatrix} 1 & c+a & 1 \\ c & ca & a \\ a+b & b^2 & b+c \end{vmatrix}$$

alors

$$D(a,b,c) = (b-a)(b-c)\begin{vmatrix} 0 & c+a & 1 \\ c-a & ca & a \\ a-c & b^2 & b+c \end{vmatrix} = (b-a)(b-c)(a-c)\begin{vmatrix} 0 & c+a & 1 \\ -1 & ca & a \\ 1 & b^2 & b+c \end{vmatrix}$$

$$D(a,b,c) = (b-a)(b-c)(a-c)\begin{vmatrix} 0 & c+a & 1 \\ 0 & ca+b^2 & a+b+c \\ 1 & b^2 & b+c \end{vmatrix} = (b-a)(b-c)(a-c)\begin{vmatrix} c+a & 1 \\ ca+b^2 & a+b+c \end{vmatrix}$$

donc

$$D(a,b,c) = (b-a)(b-c)(a-c)(a^2-b^2+c^2+ab+ac+bc)$$

Exercice 0.4. *Soient a, b et c trois réels distints.*
soit $\Delta : I\!R \longrightarrow I\!R$ l'application définie par :

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} \quad , \quad x \in I\!R$$

i) Montrer que l'application Δ est un polynôme de degré 3 en x.
ii) Montrer que $D(a) = 0$, et en déduire qu'il existe une constante k tel que :

$$\Delta(x) = k(x-a)(x-b)(x-c)$$

iii) Montrer que

$$\Delta(x) = (a-b)(a-c)(c-b)\,(x-a)(x-b)(x-c)$$

Solution. *:*
i) En développant le déterminant par rapport à la 4^{me} ligne on obtient :

$$\Delta(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3$$

où $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ et α_3 sont des constantes.
ii) la 1^{re} ligne et le 4^{me} ligne de $\Delta(a)$ sont égales donc $\Delta(a) = 0$.
De même on a : $\Delta(b) = 0$ et $\Delta(c) = 0$, donc le polynôme Δ posséde trois racines simples et $deg(\Delta) = 3$ alors il existe une constante k telle que :

$$\Delta(x) = k(x-a)(x-b)(x-c)$$

iii) $\Delta(0) = -k\ a\,b\,c$ *et en développant* $\Delta(0)$ *par rapport à la* 4^{me} *ligne on obtient :*

$$\Delta(0) = -\begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 \\ b & b^2 & b^3 \\ c & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = -a\,b\,c \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = -a\,b\,c \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix}$$

Donc

$$\Delta(0) = -a\,b\,c(b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & b+a \\ 1 & c+a \end{vmatrix} = -a\,b\,c(b-a)(c-a)(c-b)$$

Par suite $k = (b-a)(c-a)(c-b)$ *et*

$$\Delta(x) = (b-a)(c-a)(c-b)(x-a)(x-b)(x-c)$$

Exercice 0.5. .
Soient $A = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} z & t \\ -t & z \end{pmatrix}$ *deux matrices. Calculer le produit* $A\,B$.
En déduire que :

$$(x^2 + y^2)\,(z^2 + t^2) = (xz - yt)^2 + (yz + xt)^2$$

Solution. *:*

$$A\,B = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & t \\ -t & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xz - yt & xt + yz \\ -(xt + yz) & xz - yt \end{pmatrix}$$

On a : $det(\,A\,B\,) = detA\,detB$, *alors :*

$$(xz - yt)^2 + (yz + xt)^2 = (x^2 + y^2)\,(z^2 + t^2)$$

Exercice 0.6. *Montrer que pour toute matrice* $A \in \mathcal{M}_n(I\!R)$, $det(A\ {}^tA)$ *est positif ou nul.*
Montrer que si A *est antisymétrique, alors* $det(A) = 0$.

Solution. *:*
Comme pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(I\!R)$, $det\ {}^tA = det\,A$, *alors :*

$$det(A\ {}^tA) = det(A)\,det(\ {}^tA) = (det(A))^2 \geq 0$$

Si la matrice A *est antisymétrique alors* ${}^tA = -A$, *par suite* $det\ {}^tA = -det\,A$, *et comme* $det\ {}^tA = det\,A$, *alors* $det\,A = -det\,A$ *et donc* $det\,A\ =\ 0$.

Exercice 0.7. *Résoudre avec la méthode de Cramer le système :* $(S)\left\{\begin{array}{l}3x+2y+z=1\\ x+2z=2\\ y+3z=1\end{array}\right.$

Solution. *:*

Écriture matricielle du système (S) *:*

$$\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$$

Calculons le déterminant du système

$$\Delta=\begin{vmatrix}3 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 2 & -5\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 3\end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix}2 & -5\\ 1 & 3\end{vmatrix}$$

donc $\Delta=-1(6+5)=-11\neq 0$*, le système est de Cramer.*

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 0 & -5\\ 2 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 3\end{vmatrix}=-8$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}3 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & -5 & -5\\ 1 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 3\end{vmatrix}=-1(-15+5)=10$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}3 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=-1(6+1)=-7$$

Alors

$$x=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{8}{11}\ ,\ y=\frac{\Delta_2}{\Delta}=-\frac{10}{11}\quad et\quad z=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{7}{11}$$

donc

$$\mathcal{S}\{\,(\frac{8}{11},-\frac{10}{11},\frac{7}{11})\,\}$$