Université Moulay Ismail
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année universitaire 20-21
Filière : SMA
AlgV, (S_4)

Corrigé de la série 1

Exercice 1 :
Enoncé :

Soit $q : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ **l'application definie par,** $\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

$$q(M) = \mathbf{tr}(M^2) - \mathbf{tr}(M)^2.$$

1) Montrer que q **est une forme quadratique.**
2) Donner la matrice de q **dans la base canonique de** $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$**.**
3) Donner la forme polaire associée à q**.**

Corrigé :

1. **Soient** $M, N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$**. Posons** $\phi(M,N) = \frac{1}{2}(q(M+N) - q(M) - q(N))$**.**
   Vérifions que $\forall M, N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \forall \lambda \in \mathbb{R}$

   i) $q(\lambda M) = (\lambda)^2 q(M)$,

   ii) ϕ **est une forme bilinéaire symétrique.**

   En utilisant les propriétés de l'application "Trace" sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$**, la condition** $i)$ **est simple à vérifier; et pour** $ii)$**, on calcule** $\phi(M,N) = Tr(MN) - Tr(M)Tr(N)$ **et on vérifie que** ϕ **est une f.b.s sur** $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$**. Donc** q **est une forme quadratique sur** $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$**.**

2. **Rappelons que la base canonique de** $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ **est** $b = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ **où** $E_{ij} = (\delta_{ik}\delta_{lj})_{1\leq k,l\leq 2}$ **c'est à dire** $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$**. La matrice de** q **dans la base** b **est par définition**

$$M(q,b) = \begin{pmatrix} \phi(E_{11},E_{11}) & \phi(E_{11},E_{12}) & \phi(E_{11},E_{21}) & \phi(E_{11},E_{22}) \\ \phi(E_{12},E_{11}) & \phi(E_{12},E_{12}) & \phi(E_{12},E_{21}) & \phi(E_{12},E_{22}) \\ \phi(E_{21},E_{11}) & \phi(E_{21},E_{12}) & \phi(E_{21},E_{21}) & \phi(E_{21},E_{22}) \\ \phi(E_{22},E_{11}) & \phi(E_{22},E_{12}) & \phi(E_{22},E_{21}) & \phi(E_{22},E_{22}) \end{pmatrix}.$$

   En utilisant $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$**, on obtient**

$$M(q,b) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. **Soient** $M = x_1E_{11}+x_2E_{12}+x_3E_{21}+x_4E_{22}$, $N = y_1E_{11}+y_2E_{12}+y_3E_{21}+y_3E_{22}$ **deux éléments de** $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. **Alors**

$$\phi(M,N) = \begin{pmatrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \end{pmatrix} M(q,b) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = -x_1y_4 + x_2y_3 + x_3y_2 - x_4y_1.$$

Exercice 2. (Facultatif)

Soit $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. On considère la forme bilinéaire symétrique $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(P,Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$, $\forall P,Q \in \mathbb{R}_2[X]$.

1) Calculer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

2) Déterminer le noyau de φ.

2) φ est-elle non dégénérée?

Exercice 3 :

Enoncé :

On considère la forme quadratique $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definie par

$$q(x,y,z) = y^2 - 2xz, \forall x,y,z \in \mathbb{R}.$$

1) Donner la matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

2) Donner le noyau de q.

3) q est-elle non dégénérée?

4) Soient $e_1 = (1,1,0), e_2 = (0,1,1)$ et $e_3 = (1,1,1)$ et soit $B' = \{e_1,e_2,e_3\}$.

a) Vérifier que B' est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Donner la matrice de q dans B'.

Corrigé :

1. **On a** $q(x,y,z) = y^2 - 2xz, \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. **Donc**

$$A = M(q,b) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. $\ker q = \ker A = \{(0,0,0)\}$.

3. q **est non dégénérée.**

4. $B^{'}$ **est une base de** $\mathbb{R}^3$ **car elle est libre.**

5. **Notons** $A^{'} = M(q,B^{'})$. **Alors** $A^{'} = t_P AP$ **où** P **est la matrice de passage de** b **à** $B^{'}$.

Exercice 4 :

Enoncé :

Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ définie par

$$q(x,y,z) = x^2 + 3y^2 - 8z^2 - 4xy + 2xz - 10yz.$$

1) Déterminer le noyau de q.
2) Vérifier que $q(x,y,z) = (x-3y-2z)(x-y+4z)$.
3) Montrer que le cône isotrope de q est une réunion de deux plans vectoriels dont on donnera les équations cartésiennes.
4) Soit $v = (1,1,1)$. Déterminer l'orthogonal $v^\perp$ de v pour q.

Corrigé :

On a $q(x,y,z) = x^2 + 3y^2 - 8z^2 - 4xy + 2xz - 10yz$

1. $\ker q = \ker A$ **où**
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -5 \\ 1 & -5 & -8 \end{pmatrix}.$$
Alors $\ker q = vect\{(-7,-3,1)\}$

2. **On vérifie que** $q(x,y,z) = (x-3y-2z)(x-y+4z)$**.**

3. $C(q)$ **est la réunion de deux plans** $P_1 = \{(x,y,z) : x-3y-2z = 0\}$ **et** $P_2 = \{(x,y,z) : x-y+4z = 0\}$.

4. **Soit** $v = (1,1,1)$**. Alors l'orthogonal de** v **est** $vect\{(1,0,0),(0,-3,1)\}$.

Exercice 5.

Enoncé :

On considère la forme quadratique q sur $E = \mathbb{R}^3$ par

$$q(x,y,z) = xy + yz.$$

1) Donner la matrice de q par rapport à la base canonique B de $\mathbb{R}^3$.
2) Déterminer le noyau et le rang de q.
3) Trouver le cône isotrope de q et montrer que $C(q)$ n'est pas un sous espace vectoriel de E.
4) Soit p un entier tel que $0 \leq p \leq 3$. Etudier l'existence d'un sous espace F totalement isotrope de dimension p pour $p = 0,1,2,3$.
5) En déduire tous les sous espaces totalement isotropes de E pour q.
6) Déterminer $A^\perp$, où $A = \textbf{Vect}\{(1,1,0),(1,0,1)\}$.

Corrigé :

On a $q(x,y,z) = xy + yz$.

1. **La matrice de q dans la base canonique B est:**
$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

2. $\ker q = \ker M = vect\{(1,0,-1),(0,1,0)\}$**. Ces deux vecteurs sont linéairement indépendants. Le rang de q est** $\dim E - \dim\ker q = 1$**.**

3. $C(q) = \{(x,y,z) \in E : q(x,y,z) = 0\} = \{(x,y,z) \in E : y(x+z) = 0\}$
$= \{(x,y,z) \in E : y = 0$ **ou** $x+z = 0\} = vect\{(1,0,0),(0,0,1)\} \cup vect\{(1,0,-1),(0,1,0)\}$**.**
$C(q)$ **n'est pas un sous espace vectoriel de** E**.**

4. Rappelons qu'un sous-espace vectoriel F de E est totalement isotrope si $F \subseteq F^{\perp}$. Soit $p \in \{0, 1, 2, 3\}$. On distingue alors quatre cas:

- **Si $p = 0$, alors F est un sous-espace de dimension 0 si et seulement si $F = \{0\}$. Comme $\{0\}^{\perp} = E$, donc $F \subseteq F^{\perp}$. Par suite $\{0\}$ est totalement isotrope.**
- **Si $p = 1$, alors notons $F = vect\{(a, b, c)\}$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. On a $F^{\perp} = \{(x, y, z) \in E : bx + (a + c)y + bz = 0\}$. Ainsi F est totalement isotrope ssi $(a, b, c) \in F^{\perp}$ ssi $ab + bc = 0$ ssi $(a, b, c) \in C(q)$. Donc les droites vectorielles sont totalement isotropes ssi elles sont engendrées par un vecteur $v \in C(q)$.**
- **Si $p = 2$, alors on vérifie, en suivant la méthode du cas précédent, que $F = vect\{(a, b, c), (d, e, f)\}$ est totalement isotrope ssi $(a, b, c), (d, e, f) \in C(q)$ et sont linérement indépendants.**
- **Si $p = 3$, alors $F = E$ et par suite $F^{\perp} = \ker q$. Or $\dim \ker p = 2$, donc F n'est pas un sous-espace totalement isotrope de E.**

5. C'est déja fait dans la question précédente.

6. $A^{\perp} = \{(1, 1, 0)\}^{\perp} \cap \{(1, 0, 1)\}^{\perp} = vect\{(1, 0, -1)\}$.