# Chapitre III

# Formes différentielles

## 1 Formes différentielles de degré 1

Soient $n \geq 1$ un entier et $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ l'ensemble des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire l'espace dual de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $1 \leq i \leq n$, on note $\mathrm{d}x_i$ la forme linéaire

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{d}x_i & : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (v_1, \cdots, v_n) & \longrightarrow & v_i \end{array}$$

**Proposition 1.1**
$\{\mathrm{d}x_1, \cdots, \mathrm{d}x_n\}$ est une base de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ (c'est la base duale de la base canonique de $\mathbb{R}^n$). $\diamond$

Ainsi, pour tout $\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, il existe $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ (uniques) tels que $\Phi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathrm{d}x_i$.

**Exemple 1.1**
1) $\{\mathrm{d}x, \mathrm{d}y\}$ est une base de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, on écrit $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ au lieu de $\mathrm{d}x_1$, $\mathrm{d}x_2$.
2) $\{\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z\}$ est une base de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$.

$\diamond$

**Définition 1.1**
Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
- On appelle forme différentielle de degré 0 toute fonction $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$.
- On appelle forme différentielle de degré 1 sur $U$ toute application $\omega : U \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Cela signifie qu'il existe des fonctions $f_i : U \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que, pour tout $x \in U$, $\omega(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x)\mathrm{d}x_i$.

On dit que $\omega$ est de classe $C^k$ sur $U$ si les fonctions $f_i$ sont de classe $C^k$ sur $U$. ◇

**Exemple 1.2**
1) Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^k$ sur $U \subset \mathbb{R}^n$ avec $k \geq 1$.
On sait que pour tout $x \in U$, la différentielle de $f$ au point $x$ est définie par: $\forall h = (h_1, \cdots, h_n) \in \mathbb{R}^n$
$\mathrm{d}_x f(h) = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x)h_1 + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x)h_n$
D'où: $\mathrm{d}_x f = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x)\mathrm{d}x_1 + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x)\mathrm{d}x_n$
Comme les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ sont de classe $C^{k-1}$, alors la différentielle de $f$ définit une forme différentielle de degré 1 et de classe $C^{k-1}$ sur $U$:

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n.$$

2) Soit $\omega(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}\mathrm{d}x - \dfrac{y}{x^2 + y^2}\mathrm{d}y$
c'est une forme différentielle de degré 1 sur $U = \mathbb{R}^2 - (0, 0)$.
3) Soit $\omega(x, y) = (x - y)cosz\mathrm{d}x + xe^{-y^2}\mathrm{d}y + (x - yz)\mathrm{d}z$.
c'est une forme différentielle de degré 1 sur $\mathbb{R}^3$. ◇

# 2 Formes différentielles de degré 2

## 2.1 Formes 2-linéaires alternées

**Définition 2.1**
**1)**- Une forme bilinéaire $f$ sur $\mathbb{R}^n$ est une application $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

linéaire par rapport à chacune de ses variables. C'est-à-dire: $\forall u, v \in \mathbb{R}^n$,
les applications $f_1 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $X \longrightarrow f(X, v)$
et $f_2 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $Y \longrightarrow f(u, Y)$ sont $\mathbb{R}$-linéaires.

**2)**- Une forme bilinéaire $f$ sur $\mathbb{R}^n$ est dite alternée si:
$\forall u, v \in \mathbb{R}^n$, $f(v, u) = -f(u, v)$
- On note par $\Lambda^2(\mathbb{R}^n)^*$ l'ensemble des forme bilinéaires alternées sur $\mathbb{R}^n$. ◇

**Exemple 2.1**
1) Pour $n = 2$, l'application $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par
$f(a, b) = a_1b_2 - a_2b_1$ est une forme bilinéaire alternée sur $\mathbb{R}^2$.
2) Pour $n = 3$, l'application $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par
$f(u, v) = u_1v_3 - u_3v_1$ est une forme bilinéaire alternée sur $\mathbb{R}^3$. ◇

- On munit l'ensemble des formes bilinéaires sur $\mathbb{R}^n$ des opérations suivantes suivantes.
Soient $f, g$ deux formes bilinéaires et $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit les formes bilinéaires $f + g$ et $\lambda f$ par:
$(f + g)(v_1, \cdots, v_p) = f(v_1, \cdots, v_p) + g(v_1, \cdots, v_p)$
$(\lambda f)(v_1, \cdots, v_p) = \lambda.f(v_1, \cdots, v_p)$
On a alors :

**Proposition 2.1**
1) L'ensemble des formes bilinéaires sur $\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2) L'ensemble des formes bilinéaires alternées $\Lambda^2(\mathbb{R}^n)^*$ est un sous-espace vectoriel de l'espace des formes bilinéaires. ◇

## 2.2 Produit exterieur des formes linéaires

**Définition 2.2**
Soient $f, g$ deux formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$.
Soit l'application $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ , définie par: $h(v_1, v_2) = \begin{vmatrix} f(v_1) & f(v_2) \\ g(v_1) & g(v_2) \end{vmatrix}$
$h$ est donc une forme bilinéaire alternée sur $\mathbb{R}^n$.
On l'appelle le produit exterieur de $f_1, f_2$, et on le note $f_1 \wedge f_2$ ◇

**Cas particulier**:

- Soit $(i, j)$ tel que $1 \leq i < j \leq n$. On a:
$(\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j)(v_1, v_2) = \begin{vmatrix} \mathrm{d}x_i(v_1) & \mathrm{d}x_i(v_2) \\ \mathrm{d}x_j(v_1) & \mathrm{d}x_j(v_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_{1,i} & v_{2,i} \\ v_{1,j} & v_{2,j} \end{vmatrix} = v_{1,i}v_{2,j} - v_{2,i}v_{1,j}$.
où $v_1 = (v_{1,1}, \cdots, v_{1,n})$ et $v_2 = (v_{2,1}, \cdots, v_{2,n})$.
- Il est clair que si $i = j$, alors $\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_i = 0$.

**Exemple 2.2**

1) Soit $n = 2$, soient $u = (u_1, u_2)$ et $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$. On a la forme bilinéaire $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ telle que:
$\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y\ (u, v) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} = u_1 v_2 - u_2 v_1$. (on note $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ au lieu de $\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$)
c'est la forme bilinéaire de l'exemple 2.1(1). On a $\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x = -\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$

2) Soit $n = 3$.
- Soient $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$. On a les biformes linéaires:

$$\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y\ (a, b) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1,$$

$$\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z\ (a, b) = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = a_2 b_3 - a_3 b_2$$

et $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z\ (a, b) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = a_1 b_3 - a_3 b_1$ (c'est la forme bilinéaire de l'exemple 2.1(2)).

- On a aussi, $\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x = -\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$
$\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}y = -\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$
$\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z = -\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x$. ◇

**Proposition 2.2**

Les formesbi-linéaires $\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2}$ où $1 \leq i_1 < i_2 \leq n$ forment une base de l'espace vectoriel des formes bilinéaires alternées sur $\mathbb{R}^n$.
En particulier, sa dimension est égal à $\mathrm{C}_n^2 = \dfrac{n!}{(n-2)!2!} = \dfrac{n(n-1)}{2}$. ◇

Preuve: On montre que $B = \{\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2}\}_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n}$ est une famille libre de l'ensemble des formes bilinéaires alternées sur $\mathbb{R}^n$.
Soit $\displaystyle\sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \alpha_{i_1, i_2}\ \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} = 0$ où $\alpha_{i_1, i_2} \in \mathbb{R}$

On commence par remarquer que pour $1 \leq j_1 < j_2 \leq n$,
- si $(j_1, j_2) = (i_1, i_2)$, alors $\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2}(e_{j_1}, e_{j_2}) = 1$
- si $(j_1, j_2) \neq (i_1, i_2)$, alors $\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2}(e_{j_1}, e_{j_2}) = 0$.

D'où: pour tout $1 \leq j_1 < j_2 \leq n$,
$\sum\limits_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \alpha_{i_1,i_2} \, \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \, (e_{j_1}, e_{j_2}) = \alpha_{j_1,j_2} = 0$

Donc, $B$ est un système libre.

On montre maintenant que $B$ est un système générateur. Soit $G$ une forme bilinéaire alternée. Pour tout $1 \leq i_1 < i_2 \leq n$ on pose $b_{i_1,i_2} = G(e_{i_1}, e_{i_2})$.

Montrons que $G = \sum\limits_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} b_{i_1,i_2} \, \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2}$.

On a: $G(e_{j_1}, e_{j_2}) = \sum\limits_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} b_{i_1,i_2} \, \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2}(e_{j_1}, e_{j_2}) = b_{j_1,j_2}$.

Donc, $B$ est un système générateur, et par conséquent c'est une base de l'ensemble des formes bilinéaires alternées sur $\mathbb{R}^n$.

**Exemple 2.3**

1) $\{\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y\}$ est une base de l'espace des formes bilinéaires alternées sur $\mathbb{R}^2$.
2) $\{\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y, \, \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z, \, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z\}$ est une base de l'espace des formes bilinéaires alternées sur $\mathbb{R}^3$.

◇

## 2.3 Formes différentielles de degré 2

**Définition 2.3**

Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

On appelle forme différentielle de degré 2 sur $U$ toute application
$\omega : U \longrightarrow \Lambda^2(\mathbb{R}^n)^*$. Cela signifie qu'il existe des fonctions $f_i : U \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que, pour tout $x \in U$, $\omega(x) = \sum\limits_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} f_{i_1,i_2} \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2}$.

On dit que $\omega$ est de classe $C^k$ sur $U$ si les fonctions $f_i$ sont de classe $C^k$ sur $U$. ◇

**Exemple 2.4**

Soit $\omega(x, y, z) = cos(xz) \, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y - (x^2 - z) \, \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + siny \, \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x$
c'est une forme différentielle de degré 2 sur $\mathbb{R}^3$. ◇

**Proposition 2.3**
Soient $\omega$ et $\omega'$ deux formes différentielles de degré 1 sur $U$.
1) la somme $\omega + \omega'$ définie par: $\forall x \in U$, $(\omega + \omega')(x) = \omega(x) + \omega'(x)$ est une forme différentielle de degré 1 sur $U$.
2) le produit extérieur $\omega \wedge \omega'$ définie par: $\forall x \in U$, $(\omega \wedge \omega')(x) = \omega(x) \wedge \omega'(x)$ est une forme différentielle de degré 2 sur $U$. $\diamond$

Preuve:
1) $\omega+\omega'$ est une forme différentielle de degré 1 sur $U$, car $\forall x \in U$, $\omega(x)+\omega'(x)$ est une forme linéaire sur $U$.
2) $\omega\wedge\omega'$ est une forme différentielle de degré 2 sur $U$ car $\forall x \in U$, $\omega(x)\wedge\omega'(x)$ est une forme bilinéaire alternée sur $U$.

# 3 Différentielle extérieure

**Définition 3.1**
- Soit $\omega$ une forme différentielle de degré 1 et de classe $C^1$ sur un ouvert $U$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i \mathrm{d}x_i$.
On appelle différentielle extérieure de $\omega$ et on note $\mathrm{d}\omega$ la forme différentielle de degré 2 sur $U$ définie par: $\mathrm{d}\omega = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}f_i \wedge \mathrm{d}x_i$.
- Soit $\omega = f$ une forme différentielle de degré 0 et de classe $C^1$ sur $U$. Sa différentielle extérieure est $\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}f$ (la différentielle de $f$). $\diamond$

**Exemple 3.1**
1) Soit $\omega$ une forme différentielle de degré 1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$
$\omega(x,y,z) = f(x,y,z)\mathrm{d}x + g(x,y,z)\mathrm{d}y + h(x,y,z)\mathrm{d}z$ où $f$, $g$ et $h$ sont des fonctions de classe $C^1$ sur U.
On a, $\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}x + \mathrm{d}g \wedge \mathrm{d}y + \mathrm{d}h \wedge \mathrm{d}z$

$$
\begin{aligned}
&= \Big(\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z\Big)\wedge\mathrm{d}x + \Big(\frac{\partial g}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial g}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial g}{\partial z}\mathrm{d}z\Big)\wedge\mathrm{d}y \\
&\quad + (\frac{\partial h}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial h}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial h}{\partial z}\mathrm{d}z\Big)\wedge\mathrm{d}z \\
&= \Big(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\Big)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y + \Big(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\Big)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + \Big(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial z}\Big)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z.
\end{aligned}
$$

2) Soit $\omega = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \mathrm{d}x_i$ une forme différentielle de degré 1 sur $\mathbb{R}^n$. De la même façon que dans $\mathbb{R}^3$ on vérifie que : $\mathrm{d}\omega = \sum\limits_{1\leq i<j\leq n} \Big(\frac{\partial a_j}{\partial x_i} - \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\Big)\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j$ $\diamond$

**Proposition 3.1**
Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\omega$ et $\omega'$ deux formes différentielles de degré 1 et de classe $C^1$ sur $U$, alors:
1) $\mathrm{d}(\omega + \omega') = \mathrm{d}\omega + \mathrm{d}\omega'$
2) si $f$ est une fonction $C^1$ sur $U$, alors $\mathrm{d}(f\omega) = \mathrm{d}f \wedge \omega + f\mathrm{d}\omega$. $\diamond$

**Définition 3.2**
Soit $\omega$ une forme différentielle de degré 1 et de classe $C^1$ sur un ouvert $U$ de $\mathbb{R}^n$.
- On dit que $\omega$ est fermée si $\mathrm{d}\omega = 0$.
- On dit que $\omega$ est exacte s'il existe une fonction $f$ définie et de classe $C^2$ sur $U$ telle que $\omega = \mathrm{d}f$. $\diamond$

**Remarque 3.1**
Soit $\omega = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i \mathrm{d}x_i$.
D'après l'exemple précedent, on a:
$\omega$ est fermée si et seulement si pour tout $1 \leq i < j \leq n$, $\dfrac{\partial a_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial a_j}{\partial x_i}$. $\diamond$

**Exemple 3.2**
Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^3$ tel que $U \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y + z = 0\} = \emptyset$
On considère la forme différentielle $\omega(x, y, z) = \dfrac{(y + z)dx + (z - x)dy - (x + y)dz}{(y + z)^2}$
définie sur $U$.
1)Montrons que $\omega$ est fermée.

On a : $\dfrac{\partial}{\partial y}\Big(\dfrac{1}{y+z}\Big) = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big(\dfrac{z-x}{(y+z)^2}\Big) = \dfrac{-1}{(y+z)^2}$,

$$\frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{z-x}{(y+z)^2}\Big) = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{-(x+y)}{(y+z)^2}\Big) = \frac{2x+y-z}{(y+z)^3}$$

et $\dfrac{\partial}{\partial z}\Big(\dfrac{1}{y+z}\Big) = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big(\dfrac{-(x+y)}{(y+z)^2}\Big) = \dfrac{-1}{(y+z)^2}$
donc, $\omega$ est fermée.

2) Montrons que $\omega$ est exacte.
On cherche une fonction $f$ telle que $\omega = \mathrm{d}f$. Pour cele, on doit avoir

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{y+z} & (1) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{z-x}{(y+z)^2} & (2) \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = -\dfrac{x+y}{(y+z)^2} & (3) \end{cases}$$

D'après (1), on a $f(x,y,z) = \dfrac{y}{y+z} + \phi(y,z)$
en dérivant par rapport à $y$ et en remplaçant dans (2), on obtient:
$-\dfrac{x}{(y+z)^2} + \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = \dfrac{z-x}{(y+z)^2}$, d'où, $\dfrac{\partial \phi}{\partial y} = \dfrac{z}{(y+z)^2}$
et donc $\phi(y,z) = -\dfrac{z}{y+z} + \psi(z)$
on dérive maintenant par rapport à $z$ et on remplace dans (3); on obtient alors $\psi'(z) = 0$, et donc $\psi(z) = c^{te}$
Finalement, $f(x,y,z) = \dfrac{x-z}{y+z} + c^{te}$ et $\omega = \mathrm{d}f$. ◇

**Proposition 3.2**
Soit $\omega$ une forme différentielle de degré 1 et de classe $C^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. Si $\omega$ est exacte alors elle est fermée. ◇

Preuve:
Comme $\omega$ est exacte, alors il existe une fonction $f$ définie et de classe $C^2$ sur $U$ telle que $\omega = \mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_i$
d'où : $\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}(\mathrm{d}f) = d\Big(\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}\Big(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\Big)\wedge \mathrm{d}x_i$
$= \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\mathrm{d}x_j\Big)\wedge \mathrm{d}x_i$
$= \sum_{i,j} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_i = 0$ d'après le théorème de Schwartz.

Donc : $\omega$ est fermée.

Avant d'énoncer le théorème suivant, on rappelle qu'un ouvert $U$ de $\mathbb{R}^n$ est dit **étoilé** s'il existe un point $a$ de $U$ tel que pour tout $x \in U$, le segment $[a, x]$ est inclus dans $U$. Pour la réciproque de la Proposition précedente, on a **le théorème de Poincaré** :

**Théorème 3.1**
Soit $\omega$ une forme différentielle de degré 1 et de classe $C^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$. Si $\omega$ est fermée et $U$ est étoilé, alors $\omega$ est exacte. $\diamond$

Preuve:
Quitte à faire une translation, on peut supposer que $U$ est étoilé par rapport à l'origine $O$. Ainsi, $\forall x \in U$, $\forall t \in [0, 1]$, $tx \in U$.
Soit $\omega = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \mathrm{d}x_i$. Le but est de déterminer une fonction $f$ telle que $\omega = \mathrm{d}f$, c'est-à-dire $\forall 1 \leq i \leq n$, $a_i = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$.
- Pour cela, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \sum_{i=1}^{n} a_i(tx)x_i \mathrm{d}t$
ceci a un sens car $\forall x \in U$, $[O, x] \subset U$.
La fonction $g : [0, 1] \times U \longrightarrow \mathbb{R}$, $(t, x) \longrightarrow \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i(tx)x_i$ est continue et a des dérivées partielles en les $x_j$ qui sont continues, car
$\dfrac{\partial g}{\partial x_j} = a_j(tx) + \sum\limits_{i=1}^{n} tx_i \dfrac{\partial a_i}{\partial x_j}$. Donc $f$ est de classe $C^1$.
On a donc, $\dfrac{\partial f}{\partial x_j} = \displaystyle\int_0^1 \Big(a_j(tx) + t \sum_{i=1}^{n} tx_i \frac{\partial a_i}{\partial x_j}(tx)\Big)\mathrm{d}t$
$= \displaystyle\int_0^1 \Big(a_j(tx) + t \sum_{i=1}^{n} tx_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i}(tx)\Big)\mathrm{d}t$ car $\omega$ est fermée.
$= \displaystyle\int_0^1 \frac{d}{dt}\Big(ta_j(tx)\Big)\mathrm{d}t = \Big[ta_j(tx)\Big]_{t=0}^{1} = a_j(x)$.
Par conséquent, $\omega = \mathrm{d}f$.