Département des Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Moulay Ismail
Année Universitaire 2020-2021

S4 : Mathématiques
Module: Algèbre 5

Série 3

Exercice 1.

Soit $E = C([0,1], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe C^1 sur $[0,1]$. On définit l'application $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ par, $\forall f, g \in E$,

$$\varphi(f,g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt.$$

1) Montrer que φ est un produit scalaire sur E.
2) Calculer le produit scalaire (cos| sin) = $\varphi(cos, sin)$ et (Id| Exp).
3) Calculer les normes ||cos||, ||sin|| et ||Exp||.
4) Vérifier l'inégalité de Cauchy-Schwartz pour ce produit scalaire.

Exercice 2.

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.
1) Montrer que $(x + 2y + 3z)^2 \leq 14$.
2) Etudier le cas d'égalité.

Exercice 3.

Soit E un espace préhilbertien réel. Soient $u, v \in E$ vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{R}, ||u + tv|| \geq ||u||.$$

Montrer que u et v sont orthogonaux.

Exercice 4.

Soit E un espace euclidien. Soit f une application linéaire sur E et soit $\lambda > 0$. On dit que f est une similitude de rapport λ si

$$\forall x \in E, ||f(x)|| = \lambda ||x||.$$

1) Soient $u, v \in E$ tel que $u + v \perp u - v$. Montrer que $||u|| = ||v||$.
2) Montrer que f est une similitude de rapport λ si et seulement si $\forall x, y \in E$, $(f(x)|f(y)) = \lambda^2 (x|y)$.
3) On souhaite montrer que f est une similitude si et seulement si $f \neq 0$ et $\forall x \perp y$, on a $f(x) \perp f(y)$ (c'est à dire f conserve l'orthogonalité).
   a) Montrer que si f est une similitude, alors $\forall x \perp y$, on a $f(x) \perp f(y)$.

b) On suppose que f conserve l'orthogonalité. Soit $\{e_1, \cdots, e_n\}$ une base orthonormale de E. Montrer que $\|f(e_i)\| = \|f(e_j)\|$ pour tout $i, j \in \{1, \cdots, n\}$.

c) Montrer alors que si $f \neq 0$ et f conserve l'orthogonalité, alors f est une similitude.