Chapitre IV: Espaces vectoriels euclidiens

Dans tout ce chapitre E désigne un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geq 1$.

1-Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Théorème.
Soient $p \in \mathbb{N}^*$ un entier et $(u_1, u_2, \cdots, u_p)$ une famille libre de E. Alors il existe une famille orthonormale $(v_1, v_2, \cdots, v_p)$ de E telle que $\forall k \in \{1, 2, \cdots, p\}$,

$$\text{vect}(u_1, u_2, \cdots, u_k) = \text{vect}(v_1, v_2, \cdots, v_k).$$

Lemme.
Soit $(u_1, u_2, \cdots, u_p)$ une famille orthogonale et $v \in E$. Soit $u \in E$ tel que

$$u = v - \sum_{i=1}^{p} \frac{(v|u_i)}{||u_i||^2} u_i.$$

Alors:
1) $u \perp u_1, u_2, \cdots, u_p$.
2) $\text{vect}\{u, u_1, \cdots, u_p\} = \text{vect}\{v, u_1, \cdots, u_p\}$.
3) $u = 0 \Leftrightarrow v \in \text{vect}\{u_1, \cdots, u_p\}$.

Preuve.
1) Soit $k \in \{1, \cdots, p\}$. Alors, puisque la famille $\{u_1, \cdots, u_p\}$ est orthogonale,

$$\begin{aligned} u|u_k &= v|u_k - \sum_{i=1}^{p} \frac{(v|u_i)}{||u_i||^2}(u_i|u_k) \\ &= v|u_k - \frac{(v|u_k)}{||u_k||^2}(u_k|u_k) \\ &= v|u_k - v|u_k \\ &= 0. \end{aligned}$$

2) On a $u \in \text{vect}\{u_1, \cdots, u_p, v\}$, d'ou $\text{vect}\{u, u_1, \cdots, u_p\} \subseteq \text{vect}\{v, u_1, \cdots, u_p\}$. De même $v = u + \sum_{i=1}^{p} \frac{(v|u_i)}{||u_i||^2}(u_i|u_k)$, d'ou $v \in \text{vect}\{u_1, \cdots, u_p, u\}$ et par suite $\text{vect}\{v, u_1, \cdots, u_p\} \subseteq \text{vect}\{u, u_1, \cdots, u_p\}$. Par conséquent, $\text{vect}\{u, u_1, \cdots, u_p\} = \text{vect}\{v, u_1, \cdots, u_p\}$.

3) On a $u = 0 \Leftrightarrow v = \sum_{i=1}^{p} \frac{(v|u_i)}{||u_i||^2} u_i \Rightarrow v \in \text{vect}\{u_1, \cdots, u_p\}$. Inversement, supposons que $v \in \text{vect}\{u_1, \cdots, u_p\}$, d'ou $u \in \text{vect}\{u_1, \cdots, u_p\}$ et par suite $u = a_1 u_1 + \cdots + a_p u_p$ pour $a_1, \cdots, a_p \in \mathbb{R}$. On a, d'après (1), $0 = u|u_k = a_k ||u_k||^2$ et par suite $a_k = 0$ pour tout k. Par conséquent $u = 0$. D'ou le résultat.

Preuve du théorème.

On construit par récurrence une famille orthogonale $\{v_1, \cdots, v_p\}$ telle que, pour tout $k = 1, \cdots, p$

$$\text{vect}(u_1, u_2, \cdots, u_k) = \text{vect}(v_1, v_2, \cdots, v_k).$$

Soit $v_1 = u_1$. On considère $v_2 = u_2 - \frac{(u_2|u_1)}{||u_1||^2} u_1$. Il est facile de voir que $v_2 | v_1 = 0$, c'est à dire que $v_2 \perp v_1$. On suppose qu'il existe $v_1, \cdots, v_k \in E$, $1 \leq k \leq p-1$, telle que $\{v_1, \cdots, v_k\}$ soit orthogonale et $\text{vect}\{v_1, \cdots, v_k\} = \text{vect}\{u_1, \cdots, u_k\}$. Soit $v_{k+1} = u_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{(u_{k+1}|v_i)}{||v_i||^2} u_i$. D'après le lemme, on a $v_{k+1} \perp v_1, \cdots, v_k$ et $\text{vect}\{v_1, \cdots, v_k, v_{k+1}\} = \text{vect}\{v_1, \cdots, v_k, u_{k+1}\}$. Par suite la famille $\{v_1, \cdots, v_k, v_{k+1}\}$ est orthogonale et $\text{vect}\{v_1, \cdots, v_k, v_{k+1}\} = \text{vect}\{u_1, \cdots, u_k, u_{k+1}\}$. Par conséquent il existe une famille orthogonale $\{v_1, v_2, \cdots, v_p\}$ telle que $\text{vect}\{v_1, \cdots, v_k\} = \text{vect}\{u_1, \cdots, u_k\}$ pour tout $k \in \{1, \cdots, p\}$. Par suite la famille $\left\{\frac{v_1}{||v_1||}, \cdots, \frac{v_p}{||v_p||}\right\}$ est une famille orthonormale vérifiant les conditions du théorème. D'ou le résultat.

<u>**Corollaire.**</u>
Soit $\{u_1,\cdots,u_p\}$ une famille libre de E. On construit une famille orthogonale $\{v_1,\cdots,v_p\}$ à partir de $\{u_1,\cdots,u_p\}$ en suivant les étapes suivantes:

1) On prend $v_1 = u_1$,
2) $v_2 = u_2 - \dfrac{(u_2|v_1)}{||v_1||^2}v_1$,
3) $v_3 = u_3 - \dfrac{(u_3|v_1)}{||v_1||^2}v_1 - \dfrac{(u_3|v_2)}{||v_2||^2}v_2$,

ainsi de suite jusqu'à

p) $v_p = u_p - \dfrac{(u_p|v_1)}{||v_1||^2}v_1 - \dfrac{(u_p|v_2)}{||v_2||^2}v_2 - \cdots - \dfrac{(u_p|v_{p-1})}{||v_{p-1}||^2}v_{p-1}$.

<u>**Corollaire.**</u>
Dans espace euclidien E, toute famille orthonormale (respéctivement orthogonale) peut être complétée en une base orthonormale (respéctivement orthogonale).

Preuve.
Soit $(u_1,\cdots,u_p)$ une famille orthonormale de E. On compléte cette famille en une base $(u_1,\cdots,u_n)$ de E. Le procédé de Gram-Schmidt permet de donner une nouvelle base $(v_1,\cdots,v_n)$ de E qui est orthonormale et telle que $v_i = u_i$ pour $i = 1,\cdots,p$.

<u>**Corollaire.**</u>
Soit A une matrice symétrique définie positive. Alors il existe une matrice inversible P telle que $A = {}^tPP$.

Preuve.
Notez que A est la matrice d'un produit scalaire $.|.$ sur E. Soit $B = (u_1,\cdots,u_n)$ une base de E telle que $A = M(.|.,B)$. Il existe une base orthonormale $B' = (v_1,\cdots,v_n)$ de E. Soit Q la matrice de passage de B à B'. D'ou $M(.|.,B') = I_n =$

${}^tPAP$. Par suite $A = {}^tQQ$ avec $Q = P^{-1}$.

Théorème.
Soit E un espace euclidien. Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormale de E. Alors, $\forall x \in E$,

$$x = (x|e_1)e_1 + (x|e_2)e_2 + \cdots + (x|e_n)e_n.$$

Preuve.
Soit $x = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$. D'ou, $\forall i \in \{1, \cdots, n\}$,

$$x|e_i = \alpha_1(e_1|e_i) + \cdots + \alpha_n(e_n|e_i) = \alpha_i.$$

D'ou le résultat.

Corollarie.
Soit E un espace euclidien. Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormale de E. Soient $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$ et $y = y_1e_1 + \cdots + y_ne_n$. Alors,

$$||x|| = \sqrt{x_i^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

et

$$x|y = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n.$$

Dans le théorème suivant on rassemble des propriétés des espaces euclidiens qui étaient déja vu pour les espaces préhilbertiens.

Théorème.
soit E un espace euclidien et F un sous espace de E. Alors,
1) $F \oplus F^\perp = E$.
2) $\dim(F) + \dim(F^\perp) = \dim(E)$.
3) $F^{\perp\perp} = F$.
4) Si $(e_1, \cdots, e_p)$ est une base orthonormale de F, alors la projection orthogonale p_F existe et, pour tout $x \in E$, on a

$$p_F(x) = (x|e_1)e_1 + (x_2|e_2)e_2 + \cdots + (x|e_p)e_p.$$

5) $\forall a \in E$, la distance de a à F est

$$d(a,F) = \|a - p_F(a)\|.$$

2- Groupe orthogonal

Théorème.

Soit E un espace euclidien de dimension n et $u : E \longrightarrow E$ un endomorphisme de E. Soit A la matrice de u dans une **base orthonormale** $(e_1, \cdots, e_n)$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes:

1) u est un automorphisme orthogonal;
2) u conserve le produit scalaire;
3) u conserve la norme;
4) ${}^tAA = I_n$.
5) Il existe une base orthonormale $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ de E telle que $(u(e_1), u(e_2), \cdots, u(e_n))$ est une base orthonormale de E.
6) Pour toute base orthonormale $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ de E, $(u(e_1), u(e_2), \cdots, u(e_n))$ est une base orthonormale de E.

Preuve.

Supposons que u conserve la norme. Montrons que u est un automorphisme de E. En effet, soit $x \in E$ tel que $u(x) = 0$. D'ou $\|u(x)\| = \|x\| = 0$. D'ou $x = 0$. Par suite u est injectif et donc u est un automorphisme de E. Par conséquent, on a 1) $\Leftrightarrow$ 2) $\Leftrightarrow$ 3).

3) $\Leftrightarrow$ 4) Soit $x \in E$. Notez que la matrice du produit scalaire dans une base orthonormale est I_n. D'ou, pour tout $x \in E$, $\|u(x)\|^2 = \|x\|^2$ si et seulement si ${}^t(AX)I_n(AX) = {}^tXI_nX$ pour tout X si et seulement si ${}^tX({}^tAA)X = {}^tXX$, pour tout X (avec ${}^tAA$ est une matrice symétrique) si et seulement si ${}^tAA = I_n$.

2) $\Rightarrow$ 5) est claire.

5) $\Rightarrow$ 3) Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormale de E telle

que $(u(e_1), \cdots, u(e_n))$ soit une base orthonormale de E. Soit $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$. D'ou $u(x) = x_1u(e_1) + \cdots + x_nu(e_n)$ et par suite $u(x)|u(x) = x_1^2 + \cdots + x_n^2 = x|x$. D'ou $||u(x)|| = ||x||$.
2) $\Leftrightarrow$ 6) est claire aussi.

Corollaire.
Soit $u : E \longrightarrow E$ un endomorphisme de E. Soit A la matrice de u dans une base orthonormale. Alors les assertions suivantes sont équivalentes:
1) u est un automorphisme orthogonal;
2) u^{-1} est un automorphisme orthogonal;
3) $A^{-1} = {}^tA$.

Preuve.
1) $\Leftrightarrow$ 2) Supposons que u est un automorphisme orthogonal. Soit $x \in E$. D'ou $||u^{-1}(x)|| = ||u(u^{-1}(x))|| = ||x||$ et par suite u^{-1} conserve la norme. Par conséquent, d'après le théorème précédent, u^{-1} est un automorphisme orthogonal.
1) $\Rightarrow$ 3) Supposons que A est orthogonale. D'ou, d'après le théorème précédent, ${}^tAA = I_n$. Aussi, comme u^{-1} est orthogonal, ${}^tA^{-1}A^{-1} = I_n$. D'ou $(A^tA)^{-1} = I_n$ ce qui donne que $A^tA = I_n$. Par suite $A^{-1} = A$.
3) $\Rightarrow$ 1) Voir Théorème.

Definition.
Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifie ${}^tAA = A^tA = I_n$, c'est à dire que A est inversible et $A^{-1} = {}^tA$, s'appelle **une matrice orthogonale**.

Corollaire.
Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes:
1) A est orthogonale;

2) ${}^tA$ est orthogonale;

3) A est la matrice d'un automorphisme orthogonale u dans une base orthonormale;

4) Les vecteurs colonnes de A forment une base orthonormale;

5) Les vecteurs lignes de A forment une base orthonormale.

6) A est la matrice de passage d'une base orthonormale à une base orthonormale.

Preuve.
1) $\Leftrightarrow$ 2) Par définition.
1) $\Leftrightarrow$ 3) Voir le corollaire précédent.
3) $\Rightarrow$ 4) Voir Théorème puisque l'image d'une base orthonormale par un automorphisme orthogonal est une base orthonormale.
4) $\Leftrightarrow$ 5) Remarquez que A est orthogonale si et seulement si A^{-1} est orthogonale.
4) $\Leftrightarrow$ 6) Elle est vraie d'après le théorème précédent.