Département des Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Moulay Ismail
Année Universitaire 2020-2021

S4 : Mathématiques
Module: Algèbre 5

Série 4

Exercice 1.
On considère $\mathbb{R}^3$ munit de son produit scalaire canonique. Orthonormaliser la base de $\mathbb{R}^3$ suivante: $u = (1,0,1)$, $v = (1,1,1)$, $w = (-1,-1,0)$.

Exercice 2.
Soit $E = \mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique et soit $B = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ sa base canonique. On considère le sous espace vectoriel G de E défini par les equations:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_3 + x_4 &= 0 \end{cases}$$

1) Donner une base orthonormale de G.
2) Déterminer la matrice dans B de la projection orthogonale p_G sur G.
3) Déterminer la distance du point $M = (1,1,1,1)$ à G.

Exercice 3.
Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique. Soit $M = (3,4,5)$ et soit P l'hyperplan d'equation $2x + y - z + 2 = 0$. Déterminer la distance de M à P.

Exercice 4.
Calculer

$$\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx.$$

Exercice 5.
Soit E un espace euclidien et p un projecteur de E. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si $\|p(x)\| \leq \|x\|$, $\forall x \in E$.