# Chapitre IV

# TD. Applications linéaires

**Exercice 0.1.** *Parmi les applications ci-dessous, trouver celles qui sont linéaires :*
*i)* $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *définie par :* $f(x,y,z) = (x+y, y+z, x-z)$.
*ii)* $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *définie par :* $f(x,y,z) = (x+y, x-y, xz)$.
*iii)* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *définie par :* $f(x,y) = (5x+2y, 2x-3y)$.

**Exercice 0.2.** *Soient* $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^3$ *et* $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *une application linéaire définie par :* $f(e_1) = 4e_1 + e_2$ , $f(e_2) = -4e_1 - e_2$ , $f(e_3) = 4e_3$.
*i) Déterminer la matrice* $A$ *de* $f$ *dans la base canonique.*
*ii) Calculer* $f(x,y,z)$.
*iii) Déterminer le rang de* $f$ *et une base de* $Im\, f$.
*iv) Déterminer la dimension et une base de* $\ker f$.

**Exercice 0.3.** *:*
*oit* $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *l'endomorphisme défini par :* $f(x,y,z) = (x+y, y+z, x-z)$.
*Soit* $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^3$.
*i) Calculer* $f(e_1)$, $f(e_2)$*et* $f(e_3)$. *En déduire la matrice de* $f$ *dans la base canonique.*
*ii) Déterminer le rang de* $f$ *et une base de* $Im\, f$.
*iii) Déterminer la dimension et une base de* $\ker f$.
*iv) Déterminer le sous espace* $Im\, f \cap \ker f$ .

**Exercice 0.4.** *:*
*Soit* $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *l'endomorphisme défini par :*

$$f(x,y,z) = (x+2y+5z, 2x-y+5z, x-3y)$$

*i) Déterminer la matrice* $A$ *de* $f$ *dans la base canonique* $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ *de* $\mathbb{R}^3$.

*ii) Trouver une réduite de Gauss de la matrice*

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & x \\ 2 & -1 & 5 & y \\ 1 & -3 & 0 & z \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad u = (x, y, z) \in \mathbb{R}$$

*iii) Déterminer le rang de* $f$ *et une base de* $Im\, f$.

*iv) Déterminer la dimension et une base de* $\ker f$.

*v) Déterminer la condition nécessaire et suffisante pour que le vecteur* $u = (x, y, z)$ *soit un élément de* $Im\, f$.

**Exercice 0.5.** .

*Soit* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *une application linéaire. Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ *la matrice de* $f$ *dans la base canonique* $B = \{e_1, e_2\}$ *de* $\mathbb{R}^2$.

*Soit* $B' = \{u_1, u_2\}$ *une famille de* $\mathbb{R}^2$ *où* $u_1 = (1, 1)$ *et* $u_2 = (1, -1)$.

*i) Montrer que* $B'$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$ *et donner la matrice* $P$ *de passage de la base* $B$ *à la base* $B'$.

*ii) Soit* $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *les composantes de* $u \in \mathbb{R}^2$ *dans la base* $B$ *et soit* $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ *les composantes de* $u$ *dans la base* $B'$. *Trouver une relation entre* $X$ *et* $X'$.

*iii) Vérifier que* $f(u_1) = 0$ *et* $f(u_2) = 2u_2$ *et donner la matrice* $D$ *de* $f$ *dans la base* $B'$.

*iv) Trouver une relation entre les matrice* $A$ *et* $D$.

**Exercice 0.6.** .

*Soit* $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *une application linéaire. Soit* $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ *la matrice de* $f$ *dans la base canonique* $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ *de* $\mathbb{R}^3$.

*Soient* $u_1 = -4e_1 + 3e_2 + 2e_3$ , $u_2 = -4e_1 + e_3$ , $u_3 = 2e_1 + e_2$.

*i) Montrer que* $B' = \{u_1, u_2, u_3\}$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$ *et donner la matrice* $P$ *de passage de la base* $B$ *à la base* $B'$.

*ii) Calculer* $P^{-1}$.

*iii) Déterminer la matrice* $D$ *de l'application linéaire* $f$ *dans la base* $B'$.