Université M. Ismail – Faculté des Sciences – Département de Mathématiques

Travaux Dirigés d'Algèbre 6 - S4 / Série 4 – 2020-2021

Exercice 1. Soit G unn groupe commutatif et H un sous-groupe de G.

1. Vérifier que l'ensemble des endomorphismes de G, noté $End(G)$, muni de l'addition et de la composition est un anneau non commutatif d'élément neutre 0.
2. On considère les ensembles suivants :
   $I_d = \{u \in End(G) \,:\, u(G) \subseteq H\}; I_g = \{u \in End(G) \,:\, u(G) \subseteq \{0\}\}$
   Montrer que I_d, I_g sont respectivement un idéal à droite, à gauche de $End(G)$.

Exercice 2. Soit p un nombre premier et
$\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q} \,:\, \exists (m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*,\, pgcd(n,p) = 1,\, x = \frac{m}{n}\}$

1. Montrer que $\mathbb{Z}_p$ est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$ contenant $\mathbb{Z}$. Déterminer $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_p)$.
2. Montrer que pout tout $x \in \mathbb{Z}p$ non nul, il existe un unique $(r,u) \in \mathbb{N} \times \mathcal{U}(\mathbb{Z}_p)$ tel que $x = up^r$.
3. Montrer que tout idéal de $\mathbb{Z}_p$ non nul est de la forme $p^r\mathbb{Z}_p$ où $r \in \mathbb{N}$. En déduire que l'ensemble des idéaux de $\mathbb{Z}_p$ est totalement ordonné par l'inclusion.

Exercice 3. Soit A un anneau commutatif et I, J deux idéaux de A. On considère :
$(I : J) = \{a \in A \,:\, aJ \subseteq I\}$

1. Montrer que $(I : J)$ est un idéal de A contenant I.
2. Montrer que $(I : J)J \subseteq I$.
3. Montrer que si K est un idéal de A, alors $(I \cap J : K) = (I : K) \cap (J : K)$ et $(I : J + K) = (I : J) \cap (I : K)$.

Exercice 4. Soit A un anneau unitaire commutatif.

1. Montrer que pour tout idéal I de A, l'ensemble $\sqrt{I} = \{x \in A \,/\, \exists n \in \mathbb{N}; x^n \in I\}$ est un idéal de A qui contient I. On dit que $\sqrt{I}$ est le radical de I.
2. Que vaut $\sqrt{\{0\}}$?
3. Soit I et J deux idéaux de A. Montrer que
   $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$ et $\sqrt{I + J} \supset \sqrt{I} + \sqrt{J}$.
4. Exemple : $A = \mathbb{Z}$.
   Soit $p \geq 2$ un nombre premier. Que vaut $\sqrt{p\mathbb{Z}}$?
   Soit $n \geq 2$ un entier naturel. Que vaut $\sqrt{n\mathbb{Z}}$?
   Pour $I = 3648\mathbb{Z}$. Trouver $\sqrt{I}$.

Exercice 5. Soit A un anneau, I, J, P et M des idéaux de A où P un idéal premier et M un idéal maximal.

1. Montrer que :
   si $IJ \subseteq P$, alors $I \subseteq P$ ou $J \subseteq P$
   si $I \cap J = P$ alors $P = I$ ou $P = J$.
2. En déduire que le seul idéal premier de A qui contient M^2 est l'idéal M.

Exercice 6. Soit R un anneau commutatif unitaire.

1. Montrer que l'ensemble des éléments nilpotents de R forme un idéal (qu'on note *nilrad(R)*.
2. Montrer que $nilrad(R)$ est l'intersection de tous les idéaux premiers de R.
3. L'intersection de tous les idéaux maximaux de R est appeléée le radical de Jacobson de R et est noté $J(R)$. Montrer que :
   $x \in J(R) \Leftrightarrow 1 - rx \in \mathcal{U}(R)$, $\forall r \in R$.

Exercice 7. Soit $f : A \to B$ un épimorphisme d'anneaux commutatifs unitaires.

1. Montrer que si P est un idéal premier de A contenant $ker(f)$, alors $f(P)$ est un idéal premier de B.
2. Montrer que si Q est un idéal premier de B, alors $f^{-1}(Q)$ est un idéal premier de A contenant $ker(f)$.
3. Montrer que l'application $\varphi : Q \longrightarrow f^{-1}(Q)$ est une bijection de l'ensemble des idéaux premiers de B sur l'ensemble des idéaux premiers de A contenant $ker(f)$.
4. Soit I un idéal de A. Montrer que tout idéal premier de A/I est de la forme P/I avec P un idéal premier de A contenant I.
5. Traiter les questions précédentes dans le cas des idéaux maximaux.
6. On note $Z(A)$ l'ensemble des diviseurs de zéro de A. Montrer que $Z(A)$ contient au moins un idéal premier.

Exercice 8. Soit A et B deux anneaux unitaires non nuls.

1. Montrer que $Car(A \times B) = Car(A) \vee Car(B)$, (le ppcm de $Car(A)$ et $Car(B)$). On suppose désormais A intègre et fini.
2. Montrer que l'application : $\times : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times A \to A; (\overline{k}, a) \mapsto ka$ est une loi externe sur A et que $(A, +, \times)$ est un $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} - espace$ vectoriel.
3. En déduire que $card(A) = p^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Montrer que tout anneau intègre fini est un corps.

Exercice 9. Soit A un anneau et $a, b \in A$ non nuls et non inversibles.

1. Montrer que si $a = up_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m}$ où $u \in \mathcal{U}(A)$, les $p_1, p_2, \cdots, p_m \in \mathcal{P}$ sont distincts et $\alpha_i \in \mathbb{N}^*, \forall i \in \{1, 2, \cdots, m\}$, alors les diviseurs de a sont les éléments de la forme $d = vp_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_m^{\beta_m}$ où $v \in \mathcal{U}(A)$ et $\beta_i \in \mathbb{N}$, $\beta_i \leq \alpha_i, \forall 1 \leq i \leq m$.
2. En déduire que si $a = up_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m}$ et $b = vp_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_m^{\beta_m}$ où les $p_1, p_2, \cdots, p_m \in \mathcal{P}$ sont distincts, $u, v \in \mathcal{U}(A)$ et $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m \in \mathbb{N}$, alors $d = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \cdots p_m^{\gamma_m}$ est un pgcd de a et b où $\gamma_i = inf(\alpha_i, \beta_i), \forall 1 \leq i \leq m$ et $\mu = p_1^{\delta_1} p_2^{\delta_2} \cdots p_m^{\delta_m}$ est un ppcm de a et b où $\delta_i = sup(\alpha_i, \beta_i), \forall 1 \leq i \leq m$.

Exercice 10. Soit A un anneau commutatif unitaire.

1. Généraliser le théorème "Chinois" à une famille finie $(I_j)_{1 \leq j \leq r}$ d'idéaux de A.
2. Soit p un nombre premier et $\alpha \geq 1$ un entier. Déterminer l'ensemble $(\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z})^*$ des éléments inversibles de $(\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z})$ ainsi que son cardinal.
3. Enoncer le théorème des restes chinois dans le cas particulier $A = \mathbb{Z}, I_j = p_j^{\alpha_j}$, où pour tout $1 \leq j \leq r, \alpha_j \geq 1$ est un entier et les p_j sont des nombres premiers deux-à-deux distincts.
4. Soit n un entier et $n = \prod_{j=1}^r p_j^{\alpha_j}$ sa décomposition en facteurs premiers. On note $\varphi(n)$ le cardinal de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$. Déduire de ce qui précède que :
$\varphi(n) = n \prod_{j=1}^r (1 - \frac{1}{p_j})$.

Exercice 11. Soit I et J deux idéaux d'un anneau principal. Dans quel cas a-t-on $IJ = I \cap J$?

Exercice 12.

1. Soit
$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{Z}[X] & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ P = \sum_{i=0}^n a_i X^i & \longmapsto & a_0 \end{array}$$
Montrer que f est un homomorphisme d'anneaux de noyau l'idéal engendré par X. Que peut-on conclure ?
2. Soit A un anneau de Boole et I un idéal de A. Montrer que I est premier si et seulement si I est maximal.

Exercice 13.

1. Montrer que $\mathbb{Z}[X]$ n'est pas principal (utiliser un raisonnement par l'absurde appliqué à l'idéal $I = 2A + XA$).
2. Montrer que si $\mathbb{K}$ est un corps alors $\mathbb{K}[X]$ est principal (montrer que tout idéal propre I de $\mathbb{K}[X]$ est engendré par un polynôme de plus bas degré appartenant à I).
3. Un sous-anneau d'un anneau principal est-il un anneau principal ?