Chapitre IV

TD. Applications linéaires

Exercice 0.1. *Parmi les applications ci-dessous, trouver celles qui sont linéaires :*
i) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *définie par :*

$$f(x, y, z) = (x + y, y + z, x - z)$$

ii) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *définie par :*

$$f(x, y, z) = (x + y, x - y, xz)$$

iii) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *définie par :*

$$f(x, y) = (5x + 2y, 2x - 3y)$$

Solution. *:*
i) Soient $u = (x, y, z)$ *et* $u' = (x', y', z')$ *de* $\mathbb{R}^3$ *et soit* $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$u + \lambda u' = (x + \lambda x', y + \lambda y', z + \lambda z')$$

alors :

$$f(u + \lambda u') = (x + \lambda x' + y + \lambda y', x + \lambda x' - y - \lambda y', x + \lambda x' - z - \lambda z')$$

Donc

$$f(u + \lambda u') = (x + y, y + z, x - z) + \lambda(x' + y', y' + z', x' - z') = f(u) + \lambda f(u')$$

f est linéaire.

ii) On a : $u = (1,0,1)$ $f(u) = (1,1,1)$ et $f(2u) = (2,2,4)$ donc $f(2u) \neq 2f(u)$, f est non linéaire.

iii) Soient $u = (x,y)$ et $u' = (x',y')$ de $\mathbb{R}^2$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$u + \lambda u' = (x + \lambda x', y + \lambda y')$ alors :

$$f(u + \lambda u') = (5(x + \lambda x') + 3(y + \lambda y'), 2(x + \lambda x') - 3(y + \lambda y'))$$

Donc

$$f(u + \lambda u') = (5x + 2y, 2x - 3y) + \lambda(5x' + 2y', 2x' - 3y') = f(u) + \lambda f(u')$$

f est linéaire.

Exercice 0.2. *Soient $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une application linéaire définie par : $f(e_1) = 4e_1 + e_2$, $f(e_2) = -4e_1 - e_2$, $f(e_3) = 4e_3$.*

i) Déterminer la matrice A de f dans la base canonique.

ii) Calculer $f(x,y,z)$.

iii) Déterminer le rang de f et une base de $Im\, f$.

iv) Déterminer la dimension et une base de $\ker f$.

***Solution.** :*

i) La matrice de f : $A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

ii)

$$(x',y',z') = f(x,y,z) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 4x - 4y \\ x' = x - y \\ z' = 4z \end{cases}$$

Donc

$$f(x,y,z) = (\ 4x - 4y\ ,\ x - y\ ,\ 4z\ )$$

iii) Cherchons une réduite de Gauss de A, on a :

$$A \sim \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow 4L_2 - L_1 \\ L_3 \end{matrix} \sim R = \begin{pmatrix} \boxed{4} & -4 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftrightarrow L_3 \\ L_3 \leftrightarrow L_2 \end{matrix}$$

La réduite de Gauss R admet deux pivots donc rang$(f) = \dim Im\, f = 2$ *et les vecteurs* $\{f(e_1),\ f(e_3)\}$ *correspondant aux pivots, forment une base de* $Im\, f$.
iv) D'après le théorème du rang : $\dim I\!R^3 = rang(f) + \dim \ker f$, *donc* $\dim \ker f = 1$.
D'autre part $f(e_1) = -f(e_2)$ *donc* $f(e_1 - e_2) = 0$, *par suite :*

$$u_0 = e_1 - e_2 = (1,\ -1,\ 0) \in \ker f \quad et \quad \ker f = vect\,\{u_0\}$$

Exercice 0.3. *:*
Soit $f : I\!R^3 \longrightarrow I\!R^3$ *l'endomorphisme défini par :* $f(x, y, z) = (x + y, y + z, x - z)$.
Soit $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ *la base canonique de* $I\!R^3$.
i) Calculer $f(e_1)$, $f(e_2)$*et* $f(e_3)$. *En déduire la matrice de* f *dans la base canonique.*
ii) Déterminer le rang de f *et une base de* $Im\, f$.
iii) Déterminer la dimension et une base de $\ker f$.
iv) Déterminer le sous espace $Im\, f \cap \ker f$.

Solution. *:*
i) On a : $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ *et* $e_3 = (0, 0, 1)$, *alors* $f(e_1) = (1, 0, 1) = e_1 + e_3$, $f(e_2) = (1, 1, 0) = e_1 + e_2$ *et* $f(e_3) = (0, 1, -1) = e_1 + e_3$.
Par suite $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ *est la matrice de* f *dans la base canonique.*
ii) Cherchons une réduite de Gauss de A, on a :

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} \quad \sim R = \begin{pmatrix} \boxed{1} & -4 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{matrix}$$

La réduite de Gauss R admet deux pivots donc rang$(f) = \dim Im\, f = 2$ *et les vecteurs* $\{f(e_1),\ f(e_2)\}$ *correspondant aux pivots, forment une base de* $Im\, f$.
iii) D'après le théorème du rang : $\dim I\!R^3 = rang(f) + \dim \ker f$, *donc* $\dim \ker f = 1$.
Cherchons $u = (x, y, z) \in I\!R^3$ *tel que :* $f(u) = 0_{I\!R^3}$
alors

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

alors x, y *sont les inconnues principales et* z *est l'inconnue secondaire.*
Donc

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ y = -z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -z \end{cases} \quad z \in I\!R.$$

Par suite $u = (z, -z, z) = z(1, -1, 1) \quad z \in I\!R$.

Posons $u_0 = (1, -1, 1) = e_1 - e_2 + e_3$, *alors* $\ker f = vect\{u_0\}$, $\{u_0\}$ *est une base de* $\ker f$.

Exercice 0.4. *:*

Soit $f : I\!R^3 \longrightarrow I\!R^3$ *l'endomorphisme défini par :*

$$f(x, y, z) = (x + 2y + 5z, 2x - y + 5z, x - 3y)$$

i) Déterminer la matrice A *de* f *dans la base canonique* $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ *de* $I\!R^3$.

ii) Trouver une réduite de Gauss de la matrice

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & x \\ 2 & -1 & 5 & y \\ 1 & -3 & 0 & z \end{pmatrix} \quad où \quad u = (x, y, z) \in I\!R$$

iii) Déterminer le rang de f *et une base de* $Im\, f$.

iv) Déterminer la dimension et une base de $\ker f$.

v) Déterminer la condition nécessaire et suffisante pour que le vecteur $u = (x, y, z)$ *soit un élément de* $Im\, f$.

Solution. *:*

i) On a : $f(e_1) = (1, 2, 1)$, $f(e_2) = (2, -1, -3)$ *et* $f(e_3) = (5, 5, 0)$.

Par suite $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ *est la matrice de* f *dans la base canonique.*

ii) Pour tous x, y, z *dans* $I\!R$ *:*

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & x \\ 0 & -5 & -5 & y - 2x \\ 0 & -5 & -5 & z - x \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \sim R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & x \\ 0 & 5 & 5 & y - 2x \\ 0 & 0 & 0 & x - y + z \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array}$$

iii) La réduite de Gauss de A *admet deux pivots donc rang*$(f) = \dim Im\, f = 2$ *et les vecteurs* $\{f(e_1),\ f(e_2)\}$ *correspondant aux pivots, forment une base de* $Im\, f$.

iv) D'après le théorème du rang : $\dim I\!R^3 = rang(f) + \dim \ker f$, *donc* $\dim \ker f = 1$.

Cherchons $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ *tel que :* $f(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$
On a :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

alors x, y *sont les inconnues principales et* z *est l'inconnue secondaire.*
Donc

$$\begin{cases} x + 2y + 5z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3z \\ y = -z \end{cases} \quad z \in \mathbb{R}.$$

Par suite $u = (-3z, -z, z) = z(-3, -1, 1) \quad z \in \mathbb{R}$.
Posons $u_0 = (-3, -1, 1)$, *alors* $\ker f = vect\{u_0\}$, $\{u_0\}$ *est une base de* $\ker f$.
v) On a :

$$u = (x, y, z) \in Im_{,}f = vect\{f(e_1),\ f(e_2)\} \Leftrightarrow rang\{f(e_1),\ f(e_2), u\} = rang\{f(e_1),\ f(e_2)\}$$

Donc

$$u = (x, y, z) \in Im_{,}f \Leftrightarrow rang\{f(e_1),\ f(e_2), u\} = 2 \Leftrightarrow rang\, X = 2$$

Alors
$u = (x, y, z) \in Im_{,}f$ *ssi la réduite de Gauss* R *de* X *admet deux pivots ssi* $x - y + z = 0$.
Par suite $Im_{,}f = \{\ u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ :\ x - y + z = 0\ \}$.

Exercice 0.5. .
Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *une application linéaire. Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ *la matrice de* f *dans la base canonique* $B = \{e_1, e_2\}$ *de* $\mathbb{R}^2$.
Soit $B' = \{u_1, u_2\}$ *une famille de* $\mathbb{R}^2$ *où* $u_1 = (1, 1)$ *et* $u_2 = (1, -1)$.
i) Montrer que B' *est une base de* $\mathbb{R}^3$ *et donner la matrice* P *de passage de la base* B *à la base* B'.
ii) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *les composantes de* $u \in \mathbb{R}^2$ *dans la base* B *et soit* $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ *les composantes de* u *dans la base* B'. *Trouver une relation entre* X *et* X'.
iii) Vérifier que $f(u_1) = 0$ *et* $f(u_2) = 2u_2$ *et donner la matrice* D *de* f *dans la base* B'.
iv) Trouver une relation entre les matrice A *et* D.

Solution. .

i) La matrice repésentant la famille B' dans la base B :

$$P = \mathcal{M}at_B\, B' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

B' est une base de $\mathbb{R}^3$ ssi $\det P \neq 0$.

On a $\det P = -2$ donc B' est une base de $\mathbb{R}^3$ et la matrice de passage P de la base B à la base B' est inversible.

ii)

$$u = xe_1 + ye_2 = x'u_1 + y'u_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathcal{M}at_B\, B' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Donc $X = PX'$ et on a :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' + y' \\ y = x' - y' \end{cases}$$

iii) On a :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ donc } f(u_1) = 0$$

et

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ donc } f(u_2) = 2u_2$$

Par suite

$$D = \mathcal{M}at_{B'}\, f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

iv) Soient $u \in \mathbb{R}^2$ et $v = f(u)$.

Soient X et Y les composantes de u et v réspectivement dans la base B et Soient X' et Y' les composantes de u et v réspectivement dans la base B'.

On a :

$$Y = AX \;,\; X = PX' \;,\; Y = PY' \;\text{ et }\; Y' = DX'$$

Alors

$$Y = AX \Leftrightarrow PY' = APX' \Leftrightarrow Y' = P^{-1}APX' \Leftrightarrow D = P^{-1}AP \Leftrightarrow A = PDP^{-1}$$

Exercice 0.6. .

Soit $f : I\!R^3 \longrightarrow I\!R^3$ *une application linéaire. Soit* $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ *la matrice de* f *dans la base canonique* $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ *de* $I\!R^3$.

Soient $u_1 = -4e_1 + 3e_2 + 2e_3$, $u_2 = -4e_1 + e_3$, $u_3 = 2e_1 + e_2$.

i) Montrer que $B' = \{u_1, u_2, u_3\}$ *est une base de* $I\!R^3$ *et donner la matrice* P *de passage de la base* B *à la base* B'.

ii) Calculer P^{-1}.

iii) Déterminer la matrice D *de l'application linéaire* f *dans la base* B'.

Solution. :

i) La matrice repésentant la famille B' *dans la base* B :

$$P = \mathcal{M}at_B\, B' = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

B' *est une base de* $I\!R^3$ *ssi* $det\, P \neq 0$.

On a $det\, P = 2$ *donc* B' *est une base de* $I\!R^3$ *et* P *est inversible.*

ii) Calculons P^{-1} :

$$com(P) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & -4 \\ -4 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

alors

$$P^{-1} = \frac{1}{det\, P}\, {}^t com(P) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 10 \\ 3 & -4 & 12 \end{pmatrix}$$

iii) On a : $D = \mathcal{M}at_{B'}\, f = P^{-1} A\, P$ *est la matrice de l'application linéaire* f *dans la base* B'

$$A\, P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = P^{-1}(A\, P) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 10 \\ 3 & -4 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$