Chapitre 2 : Distributions

I - Fonctions test :

Soit X un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
on appelle fonction test sur X une fonction $C^\infty(X, \mathbb{K})$ à support compact. L'espace vectoriel des fonctions test est noté C_0^∞.

Convergence dans C_0^∞ :

Soit (φ_j) une suite dans $C_0^\infty(X)$ et $\varphi \in C_0^\infty(X)$. on dit que φ_j converge vers φ dans $C_0^\infty(X)$ ssi :

(i) il existe K compact de X et $N \geq 0$ tel que pour tout $j \geq N$

$$\operatorname{supp} \varphi_j \subset K$$

(ii) pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\partial^\alpha \varphi_j$ c.u. vers $\partial^\alpha \varphi$ sur K

Notation : c.u veut dire converge uniformément

Suite régularisante :

on appelle suite régularisante dans $C_0^\infty(X)$ une suite (φ_j) de C_0^∞ telle que pour tout j, $\varphi_j \geq 0$, $\int \varphi_j = 1$, $\operatorname{supp} \varphi_j \subset B(0, \frac{1}{j})$

Théorème : Soit φ_j une suite régularisante et $f \in C_0^k(\mathbb{R}^n)$
alors $f * \varphi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et pour tout $|\alpha| \leq k$,

$$\partial^\alpha (f * \varphi_j) \text{ c.u vers } \partial^\alpha f$$

Démonstration : par définition $f * \varphi_j(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\varphi_j(y)\,dy$

pour $|\alpha| = 0$

$$f * \varphi_j(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\varphi_j(y)\,dy - f(x)\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_j(y)\,dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \big(f(x-y) - f(x)\big)\varphi_j(y)\,dy$$

donc

$$|f * \varphi_j(x) - f(x)| \leq \sup_{|y| \leq \frac{1}{j}} |f(x-y) - f(x)| \underbrace{\int |\varphi_j(y)|\,dy}_{=1}$$

or f est continue et à support compact donc uniformément continue

donc $\sup_{|y| \leq \frac{1}{j}} |f(x-y) - f(x)| \xrightarrow[j \to +\infty]{} 0$

pour $|\alpha| \leq k$ $\partial^\alpha(f * \varphi_j) = (\partial^\alpha f) * \varphi_j$; et on utilise l'uniforme continuité de $\partial^\alpha f$ sur $B(0, \frac{1}{j})$.

<u>Corollaire</u>: Si $f \in C_0^\infty$ alors $f * \varphi_j$ c.u. vers f dans C_0^∞.

<u>Lemme</u>: Soit $a \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$, il existe $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\operatorname{supp} \varphi \subset B(a, 2r)$, $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi/_{B(a,r)} \equiv 1$.

<u>Définition</u>: Soit K un compact de X, U un recouvrement ouvert de K. Une partition de l'unité subordonnée à U est une suite de fonction $\psi_1, \dots, \psi_\ell$ dans $C_0^\infty(X)$, positives telles que

- $\sum_{j=1}^{\ell} \psi_j = 1$ sur K
- pour tout j, $\operatorname{supp} \psi_j \subset U_j$ où $U = \bigcup_{j=1,\dots,\ell} U_j \supset K$.

<u>Rq</u>① une telle partition de l'unité existe pour tout compact K de X.

<u>Rq</u>② Pour tout compact K de X, il existe $\psi \in C_0^\infty(X)$ telle que $\psi \equiv 1$ sur K et $0 \leq \psi \leq 1$.

<u>Rq</u>③ si $f \in L^1_{loc}$ et $g \in C_0^\infty$ alors $f * g \in C^\infty$ et $\operatorname{supp} f*g \subset \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$
si de plus f est à support compact alors $f * g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

En effet: fg est intégrable puisque $\operatorname{supp} g \subset K$ compact de $\mathbb{R}^n$
et $\int |fg| \leq \int_K |fg| \leq \sup_K |g| \int_K |f| < +\infty$

Posons $h(x,y) = f(y) g(x-y)$ c'est une fonction C^∞ et
$\partial_x^\alpha h = f(y) \partial_x^\alpha g(x-y)$ est intégrable car f l'est et g est à support compact. Par dérivation sous l'intégrale, on a le résultat.

I Distributions

Soit X un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On appelle distribution sur X une forme linéaire séquentiellement continue de $C_0^\infty(X)$.

On note $\mathcal{D}'(X)$ leur espace.

Si $u \in \mathcal{D}'(X)$ et $\varphi \in C_0^\infty(X)$ on note $u(\varphi)$ ou $\langle u, \varphi \rangle$.

Exemples :

1) Distribution de Dirac : $\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$
elle est continue car si $\varphi_j \longrightarrow \varphi$ unif alors $\varphi_j(a) \longrightarrow \varphi(a)$

2) Si $f \in L^1_{loc}(X)$, on définit une distribution T_f sur X

par $\langle T_f, \varphi \rangle = \int_X f\varphi$

En effet T_f est bien une ~~fonction~~ forme linéaire. Si φ est à support dans K, on a $\left| \int_X f\varphi \right| \leq \sup_K |\varphi| \int_K |f|$

donc si $\varphi_j \xrightarrow{c.u} \varphi$ alors $\varphi_j - \varphi$ c.u vers 0

d'où $\left| \int f(\varphi_j - \varphi) \right| \leq C_K \sup_K |\varphi_j - \varphi| \longrightarrow 0$.

donc T_f est continue.

Remarque : $f \longmapsto T_f$ est injective de $C^0(X) \longrightarrow \mathcal{D}'(X)$
on peut donc considérer les fonctions continues comme des distributions.

En effet on suppose que $f \neq 0$. Par continuité, il existe $x, (\varepsilon > 0)$ tel que $f/_{]x-\varepsilon, x+\varepsilon[} > \alpha > 0$ et $f/_{]x-2\varepsilon, x+2\varepsilon[} > 0$.

on prend $\varphi = 1$ sur $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ et à support dans $]x-2\varepsilon, x+2\varepsilon[$
on a bien $\int f\varphi > 0$. (~~on a supposé f > 0 sur]x~~ on a supposé $n = 1$)

Corollaire : $f \longmapsto T_f$ est injective de $L^1_{loc}(X) \longrightarrow \mathcal{D}'(X)$.

Remarque : Certains distributions ne sont pas des fonctions

Ex : δ_a : si $\delta_a = T_f$ alors $\int f\varphi = \varphi(a)$

Soit $\chi \in C_0^\infty$ tq $a \notin \operatorname{supp} \chi$ alors $\int f\chi = \chi(a) = 0$

et $\int f\chi\varphi = 0$ donc $f\chi = 0$ par le corollaire et $f = 0$
Alors $T_f = 0$ mais $\delta_a \neq 0$. Contradiction.

Théorème : $u \in \mathcal{D}'(X)$ ssi (*) pour tout compact $K \subset X$

$$\exists\, C_K,\ k_K \in \mathbb{N} : |\langle u,\varphi\rangle| \leq C_K \|\varphi\|_{C^{k_K}} \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(K)$$

où $C_K \geq 0$ une constante dépendante de K.

et $k_K \in \mathbb{N}$

$$\|\varphi\|_{C^{k_K}} = \sup_{\substack{x\in K\\ |\alpha|\leq k_K}} |\partial^\alpha \varphi(x)|$$

on appelle ordre de u le plus petit entier $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$|\langle u,\varphi\rangle| \leq C_K \|\varphi\|_{C^k}$$
$$\leq C_K \sup_{\substack{x\in K\\ |\alpha|\leq k}} |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

Exemples :

- δ_a est d'ordre 0 : $|\langle \delta_a,\varphi\rangle| = |\varphi(a)| \leq \sup_{x\in K} |\varphi(x)|$

- $vp\left(\frac{1}{x}\right)$ est d'ordre 1 :

$$\left|\left\langle vp\left(\tfrac{1}{x}\right),\varphi\right\rangle\right| \leq \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} \left|\frac{\varphi(x)}{x}\right| dx \leq \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{|x|\geq\varepsilon} |\psi(x)|\,dx$$

où $\varphi(x) = \varphi(0) + x\,\psi(x)$: Formule de Taylor à l'ordre 1

ainsi $\left|\left\langle vp\left(\frac{1}{x}\right),\varphi\right\rangle\right| \leq \int_K |\psi(x)|\,dx \leq C_K \sup_{x\in K} |\varphi'(x)|$

- $\langle u,\varphi\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \varphi^{(k)}(k)$

Soit $\varphi \in C_0^\infty$; $\operatorname{supp}\varphi \subset [-M,M]$

$$|\langle u,\varphi\rangle| \leq \sum_{k=0}^{j} |\varphi^{(k)}(k)| \qquad \text{où } j = E(M)+1$$

$E(M)$ partie entière de M

$$\leq j \sup_{x\in[-M,M]} |\partial^{(k)}\varphi(x)|$$

on remarque que u est une distribution d'ordre $+\infty$.

Dérivées de distributions :

si $f \in C^1(X)$, on peut voir f comme une distribution.
$\frac{\partial f}{\partial x_j}$ est continue donc c'est une distribution et

$$\langle f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \rangle = -\langle \frac{\partial f}{\partial x_j}, \varphi \rangle \quad \text{"intégration par parties"}$$

Définition : Soit $u \in \mathcal{D}'(X)$. On définit $\frac{\partial u}{\partial x_j} \in \mathcal{D}'(X)$ par :

$$\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi \rangle = -\langle u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \rangle$$

Rq ① si $f \in C^1$, la dérivée au sens distribution de f coïncide avec la distribution associée à la dérivée usuelle de f.
(c.a.d $(T_f)' \equiv f'$)

Rq ② La fonction $x \mapsto |x|$ est continue donc définit une distribution sur $\mathbb{R}$, sa dérivée au sens distribution

$$\langle \frac{\partial}{\partial x}|x|, \varphi \rangle = -\langle |x|, \frac{\partial \varphi}{\partial x} \rangle = -\int_{-M}^{M} |x| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x)\,dx \; ; \; \operatorname{Supp}\varphi \subset [-M, M]$$

$$= \int_{-M}^{0} x \frac{\partial \varphi}{\partial x}\,dx - \int_{0}^{M} x \frac{\partial \varphi}{\partial x}\,dx$$

$$= -\int_{-M}^{0} \varphi(x)\,dx + \int_{0}^{M} \varphi(x)\,dx = \int_{-M}^{M} \operatorname{sgn}(x)\varphi(x)\,dx$$

Rq ③ $\langle (\operatorname{sgn})', \varphi \rangle = -\langle \operatorname{sgn}, \varphi' \rangle = +\int_{-M}^{0} \varphi'(x)\,dx - \int_{0}^{M} \varphi'(x)\,dx$

$$= \varphi(x)\Big]_{-M}^{0} - \Big[\varphi(x)\Big]_{0}^{M} = 2\varphi(0) = \langle 2\delta_0, \varphi \rangle$$

d'où $(\operatorname{sgn})' = 2\delta_0$.

Convergence des distributions :

Définition : Soit (u_j) une suite dans $\mathcal{D}'(X)$ et $u \in \mathcal{D}'(X)$.
On dit que (u_j) tend vers u au sens de $\mathcal{D}'$ si pour tout $\varphi \in C_0^\infty(X)$

$$\langle u_j, \varphi \rangle \longrightarrow \langle u, \varphi \rangle.$$

Exemples :

1) si $f_j \to f$ en norme L^1 sur tout compact alors $f_j \to f$ dans $\mathcal{D}'$

En effet $\langle f_j, \varphi \rangle \to \langle f, \varphi \rangle$ $\forall \varphi \in C_0^\infty$, supp $\varphi \subset K$

alors $\left| \int_K (f_j - f)\varphi \right| \leq \sup_{x\in K} |\varphi| \underbrace{\int_K |f_j - f|}_{\to 0 \text{ d'après l'hypothèse}}$

2) si φ_j est une suite régularisante alors $\varphi_j \mapsto \delta_0$ dans $\mathcal{D}'$

c.a.d $\langle \varphi_j, \varphi \rangle \to \varphi(0)$, $\forall \varphi \in C_0^\infty$

$$\left| \int \varphi_j(x)\varphi(x)\, dx - \varphi(0)\int \varphi_j(x)\, dx \right| = \left| \int \varphi_j(x)\left(\varphi(x) - \varphi(0)\right) dx \right|$$

$$\leq \sup_{|x|\leq 1/j} |\varphi(x) - \varphi(0)| \underbrace{\int |\varphi_j(x)|\, dx}_{=1} \xrightarrow[\text{qd } j \to +\infty]{} 0$$

Car φ est uniformement continue sur la boule $B(0,1)$.

Localisation :

Soit $U \subset X$ deux ouverts. L'injection canonique $C_0^\infty(U) \to C_0^\infty(X)$ est continue. on a donc une injection continue $\mathcal{D}'(X) \to \mathcal{D}'(U)$

Théorème : Soit X un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $u \in \mathcal{D}'(X)$. on suppose que pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert de x tel que $u = 0$ sur U_x alors $u = 0$

Démonstration : Soit $\varphi \in C_0^\infty(X)$, $\{U_x, x \in \text{supp}\,\varphi\}$ est un recouvrement ouvert de $K = \text{supp}\,\varphi$. Il existe un sous recouvrement fini $K \subset \bigcup_{j\in J} U_{x_j}$, J fini. Pour tout $j \in J$, $\exists \varphi_j \in C_0^\infty(X)$ à support dans U_{x_j} telle que $\sum_{j\in J} \varphi_j = 1$ sur K. on a $\langle u, \varphi \rangle = \sum_{j\in J} \langle u, \varphi_j \varphi \rangle = 0$.

Car supp $\varphi_j \varphi \subset U_{x_j}$ et $u = 0$ sur U_{x_j}.

Définition : Le support de $u \in \mathcal{D}'(X)$ noté $\operatorname{supp} u$ est le complémentaire des points $x \in X$ au voisinage desquels il n'existe pas d'ouverts U_x contenant x tel que $u/_{U_x} = 0$.

Autrement dit, $x \notin \operatorname{supp} u$ si $\exists U_x$ contenant x tel que $u/_{U_x} = 0$

Exemples :

① si $u \in C_0^0(X)$ le support de u vue comme distribution coïncide avec le support de u habituel : $\{x / u(x) \neq 0\}$.

② $\operatorname{supp} \delta_0 = \{0\}$

③ $\operatorname{supp} H = [0, +\infty[$ où H est la distribution d'Heaviside $H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

④ $\operatorname{supp} vp(\frac{1}{x}) = \mathbb{R}$ où $\langle vp(\frac{1}{x}), \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}$

Définition : Soit $u \in \mathcal{D}'(X)$, le support singulier de u est l'ensemble des $x \in X$ qui ne possèdent pas de voisinage U_x sur lequel u est $C^\infty(U_x)$

Le complémentaire du support singulier est le plus grand ouvert de X sur lequel u est C^∞.

Exemples :

① $\operatorname{supp\,sing} \delta_0 = \{0\}$ car $\delta_0/_{\mathbb{R}^n_*} = 0$ donc C^∞ sur $\mathbb{R}^n_*$

② $\operatorname{supp\,sing} H = \{0\}$ car $H/_{]-\infty,0[} = 0$ et $H/_{]0,+\infty[} = 1$

③ $\operatorname{supp\,sing} vp(\frac{1}{x}) = \{0\}$ donc C^∞ sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

Proposition : $\operatorname{supp\,sing} u \subset \operatorname{supp} u$

Dém : si $x \notin \operatorname{supp} u$ alors $\exists U_x$ tq $u/_{U_x} = 0$ donc u est C^∞ au voisinage de x donc $x \notin \operatorname{supp\,sing} u$.

Exercice : Distribution de Fourier

Soit $a(x,\theta) \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$; $\varphi(x,\theta) \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ vérifiant

$\varphi(x, \lambda\theta) = \lambda \varphi(x,\theta) \quad \forall \lambda > 0$ (fonction phase)

on suppose $\exists m \in \mathbb{R} : \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N} : |\partial_x^\alpha \partial_\theta^\beta a(x,\theta)| \leq C_{\alpha,\beta}(1+|\theta|)^{m-\beta}$

on pose $u(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\varphi(x,\theta)}\, a(x,\theta)\, d\theta$

1°/ montrer que si $m < -1$ alors u est continue sur $\mathbb{R}$

2°/ montrer que $\operatorname{supp\,sing} u \subset C_\varphi = \{ (x,\theta) \,/\, \varphi'_\theta(x,\theta) = 0 \}$.

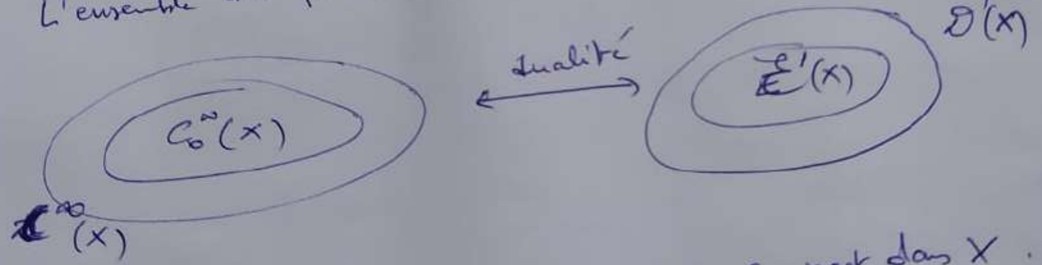
Distributions à support compact

si $u \in L^1_{loc}$ on peut définir $\langle u,\varphi \rangle = \int_X u(x)\varphi(x)\,dx$ si φ est à support compact. Mais si le support de u est compact, on pourrait prendre $u \in C^\infty(X)$.

Définition : Soit $\varphi_j \in C^\infty(X)$ et $\varphi \in C^\infty(X)$. on dit que $\lim_{j \to +\infty} \varphi_j = \varphi$ si pour tout multi-indice α et pour tout compact $K \subset X$, la suite $\partial_x^\alpha \varphi_j$ c.u. sur K vers $\partial^\alpha \varphi$.

Définition : Une forme linéaire sur $C^\infty(X)$ est continue si $u(\varphi_j) \longmapsto u(\varphi)$ qd $\varphi_j \longrightarrow \varphi$.

L'ensemble des formes linéaires continues sur $C^\infty(X)$ est noté



Théorème : $u \in \mathcal{E}'(X)$ ssi supp u est compact dans X.

Si c'est le cas, alors u est d'ordre fini et il existe $C > 0$, tel que $|\langle u,\varphi \rangle| \leq C \| \chi\varphi \|_{C^\infty}$ pour tout $\varphi \in C^\infty(X)$ et $\chi \in C_0^\infty$ valant 1 sur $K = \operatorname{supp} u$.

Multiplication par des fonctions

Pour $u \in \mathcal{D}'(X)$ et $\psi \in C^\infty(X)$. on définit $\psi u \in \mathcal{D}'(X)$ par

$$\langle \psi u, \varphi \rangle = \langle u, \psi \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(X).$$

Lemme: $\operatorname{supp}(\psi u) \subset (\operatorname{supp} \psi) \cap (\operatorname{supp} u)$

Exemples: i) $\psi \delta_a = \psi(a) \delta_a$ car $\langle \psi \delta_a, \varphi \rangle = \langle \delta_a, \psi \varphi \rangle = \psi(a)\varphi(a)$

ii) $Id.\delta_0 = 0$ car $\langle id.\delta_0, \varphi \rangle = \langle \delta_0, x\varphi(x) \rangle = 0.\varphi(0) = 0$

iii) $Id.vp(\frac{1}{x}) = 1$ car $\langle id\, vp(\frac{1}{x}), \varphi \rangle = \langle vp(\frac{1}{x}), x\varphi(x) \rangle$
$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{x\varphi(x)}{x} dx = \langle 1, \varphi \rangle$

Proposition ① $\mathcal{E}'(X)$ est dense dans $\mathcal{D}'(X)$

Dém: Soit (K_j) une suite de compact de X tel que $X \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} K_j$ et $K_j \subset K_{j+1}$

Soit $\chi_j \in C_0^\infty$ valant 1 sur K_j

Pour tout $u \in \mathcal{D}'(X)$ on pose $v_j = \chi_j u \in \mathcal{D}'(X)$ à support compact donc dans $\mathcal{E}'(X)$.

montrons que $\langle v_j, \varphi \rangle \longrightarrow \langle u, \varphi \rangle$ pour tout $\varphi \in C_0^\infty(X)$ (Convergence dans $\mathcal{D}'$)

~~Comme $\langle v_j, \varphi \rangle \longrightarrow$~~ Comme $\chi_j \varphi \longrightarrow \varphi$ dans C_0^∞ et

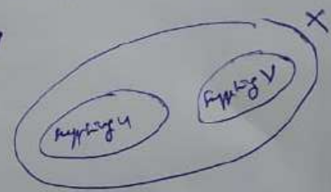
$\langle v_j, \varphi \rangle = \langle \chi_j u, \varphi \rangle = \langle u, \chi_j \varphi \rangle$ on a le résultat.

Proposition ②: Soient u et $v \in \mathcal{D}'(X)$ tel que $\operatorname{supp\,sing} u \cap \operatorname{supp\,sing} v = \emptyset$ alors le produit uv peut être défini raisonnablement par :

$$\langle uv, \varphi \rangle = \langle u, v\varphi_2 \rangle + \langle v, u\varphi_1 \rangle \quad \text{où}$$

$\varphi \in C_0^\infty(X)$: $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ $\quad \operatorname{supp} \varphi_1 \subset U$, $\operatorname{supp} \varphi_2 \subset V$

avec $U = X \setminus \operatorname{supp\,sing} u$ et $V = X \setminus \operatorname{supp\,sing} v$



Dém: $X = U \cup V$ on peut donc décomposer φ en $\varphi_1 + \varphi_2$ avec $\operatorname{supp} \varphi_1 \subset U$ et $\operatorname{supp} \varphi_2 \subset V$.

$\langle u, v\varphi_2 \rangle$ a un sens car $v\varphi_2 \in C_0^\infty$ puisque $v \in C^\infty$ sur $\operatorname{supp} \varphi_2$

$\langle v, u\varphi_1 \rangle$ a un sens car $u\varphi_1 \in C_0^\infty$ puisque $u \in C^\infty$ sur $\operatorname{supp} \varphi_1$

Rq: Le produit $\delta_0 H$ n'a pas de sens puisque $\operatorname{supp\,sing} \delta_0 \cap \operatorname{supp\,sing} H = \{0\}$.

Convolution des distributions

Si $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ (si $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in C^\infty$)

on note $u * \varphi$ la fonction :

$$x \longmapsto \langle u, y \mapsto \varphi(x-y) \rangle$$

Exemple : $\delta_0 * \varphi(x) = \langle \delta_0, y \mapsto \varphi(x-y) \rangle = \varphi(x)$

Théorème : Soit $u \in \mathcal{D}'$ et $\varphi \in C^\infty$. si supp u ou supp φ est compact alors $u * \varphi \in C^\infty$.

de plus supp $u * \varphi \subset$ supp u + supp φ

En fait, supp $u * \varphi \subset \overline{\text{supp } u + \text{supp } \varphi}$ mais comme l'un des deux support est compact alors supp u + supp φ est fermé.

Notation : $S : x \longmapsto -x$ (la symetrie)

Si $u \in \mathcal{D}'$ et $v \in \mathcal{E}'$ on définit $u * v \in \mathcal{D}'$ par

$$\langle u * v, \varphi \rangle = \langle u, (Sv) * \varphi \rangle = \langle u(x), \langle v(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle .$$

~~on $Sv = S_* v$: $Sv(x) =$~~

Solution fondamentale d'un opérateur

pour $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ $\quad \partial^\alpha u = \partial^\alpha(\delta_0 * u) = (\partial^\alpha \delta_0) * u$.

pour $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ $\quad (\partial^\alpha u) * \varphi = u * (\delta_0 * \partial^\alpha \varphi)$

$$= u * (\partial^\alpha \delta_0) * \varphi$$

pour $u_1, u_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n$ (l'une à support compact)

$$\partial^\alpha(u_1 * u_2) = (\partial^\alpha u_1) * u_2 = u_1 * (\partial^\alpha u_2)$$

Pour $P = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha \partial^\alpha$ $\quad (a_\alpha \in \mathbb{C})$ est un opérateur aux dérivées partielles

on a $\quad Pu = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha \partial^\alpha u = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha (\partial^\alpha \delta_0 * u) = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha \partial^\alpha \delta_0 \right) * u$

$= (P\delta_0) * u$ pour tout $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

et $P(u_1 * u_2) = (Pu_1) * u_2 = u_1 * (Pu_2)$ pour tout $u_1 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et $u_2 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$

Définition: si $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ vérifie $PE = \delta_0$ alors
E est dite solution fondamentale de P.

Conséquence: (i) $E * (Pu) = u$, $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$

(ii) $P(E * f) = f$; $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$

(ii) entraine que l'éq $Pu = f$ admet une solution pour tout $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$.

Exemples:

1) $P = \frac{d}{dx}$; $\frac{d}{dx} E = \delta \Rightarrow E = H =$ distribution d'Heaviside

2) $P = \sum_{j=1}^{n} \partial_j^2$; $E(x) = \frac{1}{2\pi} \ln|x|$ si $x \in \mathbb{R}^2_*$

$$E(x) = -\frac{\|x\|^{2-n}}{(n-2)c_n} \quad \text{si } x \in \mathbb{R}^n_* \ (n > 2)$$
$c_n =$ aire de la boule unité

3) $P = \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{j=1}^{n} \partial_j^2$; $E(x,t) = (4\pi t)^{-n/2} e^{-|x|^2/4t}$ $t > 0$

$= 0$ si $t \leq 0$

Rq: $P = \sum_{j=1}^{n} \partial_j^2$ le Laplacien

$P = \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{j=1}^{n} \partial_j^2$ l'opérateur de la chaleur.

Exercices:

① Montrer que la partie finie de $\frac{1}{x^2}$, notée $Pf \frac{1}{x^2}$, définie par

$$\langle Pf \tfrac{1}{x^2}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx - \frac{2\varphi(0)}{\varepsilon} \right\}, \ \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$$

est une distribution d'ordre 2.

② Montrer que $\partial^k \left(x_+^{k-1} / (k-1)! \right) = \delta_0$ où $k = 1, 2, 3, \ldots$

où $x_+ = x H(x)$, $x \in \mathbb{R}$ c.à.d $x_+ = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$

et donc $E = \frac{x_+^{k-1}}{(k-1)!}$ est une solution fondamentale pour l'opérateur

$$P = (\partial)^k = \frac{d^k}{(dx)^k}.$$