Chapitre 3 : Transformées de Fourier

I) Introduction : Ce chapitre a pour but de décrire la transformée de Fourier. Cette notion nécessite une bonne maîtrise de questions de base telle que les définitions et propriétés des espaces $L^1, L^2, \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et de distributions comme $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, il existe différentes conventions pour la définition de sa transformée de Fourier, nous allons adopter la suivante : pour $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\mathcal{F}(f)(\xi) \equiv \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi} f(x)\, dx \quad \text{où } x.\xi = \sum_{j=1}^{n} x_j \xi_j$$

Des exemples explicites de calcul de transformées de Fourier (T.F) comme la gaussienne ou $(1+x^2)^{-1}$ paraissent nécessaires. Dans le contexte des distributions l'exemple de la valeur principale sera traité.

L'extension de la T.F à l'espace $L^2(\mathbb{R}^n)$ par Fourier Plancherel et l'envoie de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même avec de bonnes estimations de semi-normes seront faits.

Le cours se termine par la résolution des équations aux dérivées partielles (edp) telle que par exemple l'équation des ondes, de la chaleur, ...

II Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^n)$:

Si $u \in L^1$ alors $\mathcal{F}u$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^n$ et tend vers 0 qd $|\xi| \to +\infty$

Ainsi $\mathcal{F}u$ est bornée sur $\mathbb{R}^n$ et $\forall \xi \in \mathbb{R}^n \ |\mathcal{F}u(\xi)| \leq \|u\|_{L^1}$.

Dém : La continuité de $\mathcal{F}u$ résulte du th de continuité sous le signe intégral : $\mathcal{F}u(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} u(x)\, dx$

(i) pour $u \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$

(ii) par densité de $C_c^0(\mathbb{R}^n)$ dans $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Pour montrer que $\lim_{|\xi| \to +\infty} \mathcal{F}u(\xi) = 0$; remarquer que

$$\mathcal{F}u(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} u(x)\, dx = -\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi - i\pi \frac{\xi}{|\xi|^2}\cdot\xi} u(x)\, dx$$

où $|\xi|^2 = \sum_{j=1}^{n} \xi_j^2$. on pose $y = x + \frac{\pi \xi}{|\xi|^2} = x + h$

on a $|h| \to 0$ qd $|\xi| \to +\infty$.

$$\mathcal{F}u(\xi) = -\int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy\xi} u(y-h)\, dy = -\mathcal{F}(\tau_h u)(\xi)$$

où τ_h est la translation de $-h$: $\tau_h u(x) = u(x-h)$.

La linéarité de $\mathcal{F}$ permet d'écrire :

$$2\mathcal{F}u(\xi) = \mathcal{F}u(\xi) - \mathcal{F}(\tau_h u)(\xi) = \mathcal{F}(u - \tau_h u)(\xi)$$

La continuité de la translation en norme L^1 montre que $\|u - \tau_h u\|_{L^1} \to 0$ qd $h \to 0$ "Exercice !".

On déduit alors $\mathcal{F}u(\xi) \to 0$ qd $|\xi| \to +\infty$ car

$$|\mathcal{F}u(\xi)| \leq \frac{1}{2}\|u - \tau_h u\|_{L^1} \xrightarrow[h \to 0]{} 0.$$

3. Fourier dans l'espace de Schwartz : $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

on rappelle que $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ " à décroissance rapide " si $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$: $x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}^n$.

<u>Exemple</u> : $\varphi(x) = P(x)\, e^{-a|x|^2}$ où $a > 0$ et $P(x)$ un polynôme.

<u>Remarque</u> : aucune fraction rationnelle (autre que la fraction nulle) n'est dans l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

<u>Remarque</u> : $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$ avec injections continues et $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.
$C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

<u>Topologie de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$</u> :

La topologie de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ n'est pas définie à partir d'une norme mais à partir d'une famille dénombrable de semi-normes (en fait des normes) sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

$$\|\varphi\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

on considère la suite filtrante de semi-normes associée

$$\|\varphi\|_N = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq N} \|\varphi\|_{\alpha,\beta}$$

ainsi que la distance définie par :

$$d(\varphi, \psi) = \sum_N 2^{-N} \frac{\|\varphi - \psi\|_N}{1 + \|\varphi - \psi\|_N}$$

Pour cette distance un système fondamental de voisinages de 0 est donné par $U_{\varepsilon,N} = \{ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : \|\varphi\|_N \leq \varepsilon \}$.

Enfin, une forme linéaire $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ est continue ssi $\exists N \in \mathbb{N}, \exists C > 0$ tels que $|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \|\varphi\|_N \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

4. Fourier dans $\mathcal{S}'$

On est tenté de définir la T.F d'une distribution $T\in\mathcal{D}'$

par : $\langle \mathcal{F}T, \varphi\rangle = \langle T, \mathcal{F}\varphi\rangle$ pour $\varphi\in C_0^\infty$

Cette définition ne peut être retenue car $\mathcal{F}(\varphi)\in C_0^\infty$ pour $\varphi\in C_0^\infty$ et donc $\langle T, \mathcal{F}\varphi\rangle$ n'aura pas de sens.

Si on se restreint à $\mathcal{S}'$ = espace des distributions tempérées alors pour tout $\varphi\in\mathcal{S}$ on a $\mathcal{F}\varphi\in\mathcal{S}$ et donc l'égalité ci-dessus a bien un sens.

En effet d'après les résultats ci-dessous :

<u>Lemme</u> ① Pour tout $1\leq p\leq +\infty$, $\mathcal{S}\subset L^p\subset\mathcal{S}'$

Dém : $\mathcal{S}\subset L^p$ évident (décroissance rapide)

Pour montrer que $L^p\subset\mathcal{S}'$ on considère q le conjugué de p

pour $\varphi\in L^q$ $\|\varphi\|_q\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n}(1+|x|)^{-Nq}dx\right)^{1/q}\sup\left((1+|x|)^N|\varphi|\right)\leq C\|\varphi\|_{N,0}$

pour N choisi tq $-Nq>n$

$|\langle u,\varphi\rangle|\leq \|u\|_p\|\varphi\|_q\leq C'\|\varphi\|_N$.

si $p=1$ $|\langle u,\varphi\rangle|\leq\|u\|_1\|\varphi\|_\infty\leq C\|\varphi\|_{0,0}$

<u>Lemme</u> ② si $\varphi,\psi\in\mathcal{S}$ alors $\langle\varphi,\mathcal{F}\psi\rangle = \langle\mathcal{F}\varphi,\psi\rangle$

<u>Dém</u> $\langle\mathcal{F}\varphi,\psi\rangle = \int\mathcal{F}\varphi(\xi)\psi(\xi)d\xi = \iint e^{-ix\xi}\varphi(x)\psi(\xi)\,dx\,d\xi = \int\varphi(x)\mathcal{F}\psi(x)dx$
$= \langle\varphi,\mathcal{F}\psi\rangle$.

<u>Déf</u> : Soit $u\in\mathcal{S}'$, on définit $\mathcal{F}u\in\mathcal{S}'$ par $\langle\mathcal{F}u,\varphi\rangle = \langle u,\mathcal{F}\varphi\rangle$ pour tout $\varphi\in\mathcal{S}$.

<u>Théorème</u> : $\mathcal{F}:\mathcal{S}'\to\mathcal{S}'$ étend les transformations (isomorphisme) $\mathcal{F}:\mathcal{S}\to\mathcal{S}$ et $\mathcal{F}:L^1\to C_0^0$.

<u>Remarque</u> : des dérivées par rapport à x ou à ξ on retiendra en particulier :

(i) Plus $f(x)$ est dérivable, plus $\hat{f}(\xi)$ décroît à l'∞.

- car $\hat{f}(\xi) = \int e^{-ix\xi} f(x)\,dx$ $\begin{cases} e^{-ix\xi} \xrightarrow{\text{intég}} \dfrac{e^{-ix\xi}}{-i\xi} \\ f(x) \xrightarrow{\text{dérivée}} f'(x) \end{cases}$

(ii) Plus $f(x)$ décroît à l'∞, plus $\hat{f}(\xi)$ est dérivable

- car $D^\alpha \hat{f}(\xi) = \mathcal{F}(x^\alpha f(x))$ (Exercice !)

<u>Théorème 1</u> : Pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}\varphi)(x) = \varphi(-x) = \check{\varphi}(x)$$

c.a.d $\quad \varphi(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(\varphi)(\xi)\, e^{ix\xi}\, d\xi$

c.a.d

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \text{ bijection linéaire}$$

d'inverse donné par

$$\mathcal{F}^{-1}(\varphi)(x) = \mathcal{F}(\varphi)(-x)$$

Théorème 2 Th d'inversion de Fourier version distribution

$$\mathcal{F}(1) = (2\pi)^n \delta_0$$

<u>Dém</u> : Le th 1 se déduit du th 2

En effet $\mathcal{F}(1) = \delta_0$ signifie que $\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(\varphi)(\xi)\, d\xi = \varphi(0)$, $\forall \varphi \in \mathcal{S}$

Soit $a \in \mathbb{R}^n$, on applique cette formule à $\tau_a \varphi$ la translatée de φ par $-a$: $\tau_a \varphi(y) = \varphi(y-a)$

on obtient $\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(\tau_a \varphi)(\xi)\, d\xi = \tau_a \varphi(0)$

Comme d'une part $\tau_a \varphi(0) = \varphi(-a) = \check{\varphi}(a)$

et d'autre part $\mathcal{F}(\tau_a \varphi)(y) = e^{-iya} \mathcal{F}\varphi(y)$ (vérification facile) on obtient $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-iya} \mathcal{F}(\varphi)(y)\,dy = \check{\varphi}(a)$

c.a.d $\mathcal{F}(\mathcal{F}\varphi)(a) = \check{\varphi}(a)$

Réciproquement le th ② se déduit immédiatement du th ①

$$< \mathcal{F}(1), \varphi > = \underset{\mathbb{R}^n}{\int} < 1, \mathcal{F}\varphi > = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(\varphi)(y)\,dy$$

$$= \mathcal{F}(\mathcal{F}\varphi)(0) = \check{\varphi}(0) = \varphi(0) = < \delta, \varphi >.$$

<u>Corollaire</u> : une conséquence importante du th ①

est le th de Plancherel :

Pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ on a :

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}\varphi|^2(\xi)\, d\xi .$$

A l'aide de cette formule et de la densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$

$\mathcal{F}$ se prolonge en une isométrie bijective $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$

<u>Corollaire</u> : $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est continue.

<u>Preuve</u> : $\|\mathcal{F}\varphi\|_{\alpha,\beta} = \sup_{y\in\mathbb{R}^n} | y^\alpha D^\beta \mathcal{F}\varphi)(y)|$

$$= \sup_{y\in\mathbb{R}^n} | \mathcal{F}(D^\alpha (x^\beta \varphi)(y)|$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} | D^\alpha (x^\beta \varphi)(x)|\,dx < +\infty$$

donc $\mathcal{F}\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

La même inégalité montre que pour $k > n$

$$\|\mathcal{F}\varphi\|_{\alpha,\beta} \leq \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{-k} \underbrace{(1+|x|)^{k} \, |D^\alpha(x^\beta \varphi)(x)|}_{< +\infty \text{ car } \varphi \in \mathcal{S}} \, dx$$

$$\leq C \|\varphi\|_{\alpha',\beta'} \quad \text{où} \quad C = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{-k} dx$$

<u>Dém du th ②</u> : $\mathcal{F}(1) = (2\pi)^n \delta_0$

poser $v = \mathcal{F}(1) \in \mathcal{S}'$ (remarquer que $1 \notin L^1(\mathbb{R}^n)$)

Pour tout $j = 1, \ldots, n$ $\quad \xi_j v = \mathcal{F}(D_j 1) = \mathcal{F}(0) = 0$

Soit $\varphi \in C_0^\infty$ par la formule de Taylor à l'ordre 1, on a :

$$\varphi(\xi) = \varphi(0) + \sum_{j=1}^{n} \xi_j \, \partial_j \varphi(\xi_1, \ldots, \theta_j \xi_j, \ldots, \xi_n)$$

$$= \varphi(0) + \sum_{j=1}^{n} \xi_j \, g_j(\xi) .$$

Soit $\chi \in C_0^\infty$ valant 1 sur supp φ,

$$\varphi(\xi) = \varphi(0) \chi(\xi) + \sum_{j=1}^{n} \xi_j \chi(\xi) g_j(\xi)$$

on a

$$\langle v, \varphi \rangle = \varphi(0) \langle v, \chi \rangle + \langle v, \sum_{j=1}^{n} \xi_j \chi(\xi) g_j(\xi) \rangle$$

or $\langle v, \sum_{j=1}^{n} \xi_j \chi(\xi) g_j(\xi) \rangle = \langle \mathcal{F}(1), \sum_{j=1}^{n} \xi_j \chi(\xi) g_j(\xi) \rangle$

$$= \langle 1, \sum_{j=1}^{n} \mathcal{F}(\xi_j \chi(\xi) g_j(\xi)) \rangle = \langle 1, \sum_{j=1}^{n} D_j \mathcal{F}(\chi(\xi) g_j(\xi)) \rangle$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} D_j \mathcal{F}(\chi(\xi) g_j(\xi)) \, d\xi = \sum_{j=1}^{n} \lim_{|\xi| \to \infty} \mathcal{F}(\underbrace{\chi(\xi) g_j(\xi)}_{\in L^1}) = 0$$

$< \mathcal{F}(1), \varphi > = c < \delta_0, \varphi >$

pour calculer c on utilise la T.F de $\varphi(x) = e^{-|x|^2/2}$;

$$\hat{\varphi}(\xi) = (2\pi)^{n/2} \varphi(\xi)$$

Alors d'une part $< \mathcal{F}1, \varphi > = c < \delta_0, \varphi > = c\, \varphi(0)$

et d'autre part $< \mathcal{F}1, \varphi > = < 1, \mathcal{F}\varphi > = \int \mathcal{F}(\varphi)\, d\xi$

$$= (2\pi)^{n/2} \int e^{-|\xi|^2/2}\, d\xi = (2\pi)^{n/2} \cdot (2\pi)^{n/2}$$
$$= (2\pi)^n .$$

d'où finalement $\mathcal{F}(1) = c\, \delta_0 = (2\pi)^n \delta_0$.

<u>Proposition</u> : Soit $u \in \mathcal{S}'$, en notant $D_j = \frac{1}{i} \partial_j$

Pour tout j, $\mathcal{F}(D_j u) = \xi_j \mathcal{F}(u)$ et $\mathcal{F}(x_j u) = -D_j \mathcal{F}(u)$

<u>Théorème</u> : $\mathcal{S}$ est stable par convolution, $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{S}$

$$\mathcal{F}(\varphi * \psi) = \mathcal{F}(\varphi) \cdot \mathcal{F}\psi$$

$$\text{et } \mathcal{F}(\varphi \psi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \mathcal{F}(\varphi) * \mathcal{F}\psi$$

<u>Applications</u> ① ~~Ap~~ Résolution du problème de Cauchy

Trouver $u \in C^2(\mathbb{R}^2) \cap L^1(\mathbb{R}^2)$ vérifiant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & \forall (t,x) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } \alpha > 0 \\ u(0,x) = \varphi(x) \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}) \end{cases}$$

② Pour $g \in L^1(\mathbb{R})$ trouver $u \in C^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$

vérifiant $y''(t) - y(t) = -g(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Exercices : (complément de cours)

① Translation dans $L^p(\mathbb{R}^n)$. Soit $a \in \mathbb{R}^n$ et $f \in L^p$ $(1 \leq p < +\infty)$

on définit $\tau_a f(x) = f(x-a)$ alors $\|\tau_a f\|_{L^p} = \|f\|_{L^p}$

et $\lim\limits_{a \mapsto 0} \|\tau_a f - f\|_{L^p} = 0$.

② Riemann - Lebesgue :

Pour tout $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ on a $\hat{u}(\xi) \longrightarrow 0$ qd $|\xi| \to +\infty$.

ind : utiliser la densité de $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ dans $L^1(\mathbb{R}^n)$.

③ Formule d'inversion de Fourier dans L^1 :

on suppose que u et $\hat{u}$ dans $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Alors $u(x) = \dfrac{1}{(2\pi)^n} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} \hat{u}(\xi)\, d\xi \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ pp.

autrement dit $\check{\hat{\hat{u}}} = (2\pi)^n u$ où $\check{v}(x) = v(-x)$.

En particulier La T.F est injective sur $L^1(\mathbb{R}^n)$.

④ La T.F n'est pas surjective sur $L^1(\mathbb{R}^n)$

ind : considérer la fonction $g(x) = \dfrac{\operatorname{Arctg} x}{\ln(2+x^2)} \in C_0^0(\mathbb{R})$

montrer qu'il n'existe aucune fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ tq $\hat{f} = g$.

⑤ Montrer que $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

⑥ Montrer que pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C^k(\mathbb{R}^n)$

$$D^\alpha \hat{f}(\xi) = \mathcal{F}(x^\alpha f(x)) \quad \text{pour tout multi-indice } \alpha \text{ tq } |\alpha| \leq k$$

⑦ Soit $P = \sum\limits_{|\alpha| \leq m} a_\alpha x^\alpha \in \mathbb{C}[x_1 \ldots x_n]$; $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$ polynôme

on pose $P(D) = \sum\limits_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$ $\qquad D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n} \qquad D_j = \dfrac{1}{i} \dfrac{\partial}{\partial x_j}$

Montrer que $\mathcal{F}(P(D)\varphi) = P(\mathcal{F}(\varphi))(D)$.

Exercices : (complément de cours)

① <u>Translation dans $L^p(\mathbb{R}^n)$</u> : Soit $a \in \mathbb{R}^n$ et $f \in L^p$ $(1 \le p < +\infty)$
on définit $\tau_a f(x) = f(x-a)$ alors $\|\tau_a f\|_{L^p} = \|f\|_{L^p}$
et $\lim\limits_{a \mapsto 0} \|\tau_a f - f\|_{L^p} = 0$.

② <u>Riemann - Lebesgue</u> :
Pour tout $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ on a $\hat{u}(\xi) \longrightarrow 0$ qd $|\xi| \to +\infty$.
<u>ind</u> : utiliser la densité de $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ dans $L^1(\mathbb{R}^n)$.

③ <u>Formule d'inversion de Fourier dans L^1</u> :
on suppose que u et $\hat{u}$ dans $L^1(\mathbb{R}^n)$.
Alors $u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} \hat{u}(\xi)\, d\xi \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ pp.
autrement dit $\check{\hat{\hat{u}}} = (2\pi)^n u$ où $\check{v}(x) = v(-x)$.
En particulier La T.F est injective sur $L^1(\mathbb{R}^n)$.

④ La T.F n'est pas surjective sur $L^1(\mathbb{R}^n)$
<u>ind</u> : considerer la fonction $g(x) = \dfrac{\operatorname{Arctg} x}{\ln(2+x^2)} \in C_0^0(\mathbb{R})$
montrer qu'il n'existe aucune fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ tq $\hat{f} = g$.

⑤ Montrer que $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

⑥ Montrer que pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C^k(\mathbb{R}^n)$
$D^\alpha \hat{f}(\xi) = \mathcal{F}(x^\alpha f(x))$ pour tout multi-indice α tq $|\alpha| \le k$

⑦ Soit $P = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha x^\alpha \in \mathbb{C}[X_1, \dots X_n]$; $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$ polynôme
on pose $P(D) = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha D^\alpha$ $\quad D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n} \quad D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}$

Montrer que $\mathcal{F}(P(D)\varphi) = P(\mathcal{F}(\varphi))(D)$.