Département des Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Moulay Ismail
Année Universitaire 2020-2021

S4 : Mathématiques
Module: Algèbre 5

Série 3

Exercice 1.

Soit $E = C([0,1],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe C^1 sur $[0,1]$. On définit l'application $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ par, $\forall f,g \in E$,

$$\varphi(f,g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt.$$

1) Montrer que φ est un produit scalaire sur E.
2) Calculer le produit scalaire (cos| sin) = $\varphi(cos,sin)$ et (Id| Exp).
3) Calculer les normes ||cos||, ||sin|| et ||Exp||.
4) Vérifier l'inégalité de Cauchy-Schwartz pour ce produit scalaire.

Correction.

1) φ est clairement une fbs. $q(f) = \varphi(f,f) = 0 \Rightarrow f(0)^2 + \int_0^1 f'^2(t)dt = 0$. D'où $f(0) = 0 = \int_0^1 f'^2(t)dt$. Comme f'^2 est continue et positive, on obtient $f'^2 = 0$ et par suite $f' = 0$ sur $[0,1]$. D'où f est constante sur $[0,1]$. Puisque $f(0) = 0$, on obtient $f = 0$ sur $[0,1]$. D'où φ est définie positive et par suite c'est un produit scalaire sur E.

2) $\varphi(cos,sin) = cos(0)sin(0) + \int_0^1 (-sin(t))cos(t)dt = -\frac{1}{2}\int_0^1 sin(2t)dt = \frac{1}{4}[cos(2t)]_0^1 = \frac{1}{4}(cos(2)-1)$.

3)$||cos||^2 = \varphi(cos,cos) = cos(0)^2 + \int_0^1 sin^2(t)dt = 1 + \int_0^1 \frac{1-cos(2t)}{2}dt = 1 + \frac{1}{2}[t - \frac{1}{2}\sin(2t)]_0^1 = 1 + \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2}sin(2))$. D'où $||cos|| = \sqrt{\frac{3}{2} - \frac{sin(2)}{4}}$.

4) $|\varphi(f,g)| = |f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt|$ et $||f||^2 = f(0)^2 + \int_0^1 f'(t)^2dt, ||g||^2 = g(0)^2 + \int_0^1 g'(t)^2dt$. D'où, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient

$$\left|f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt\right| \leq \sqrt{f(0)^2 + \int_0^1 f'(t)^2dt}\,\sqrt{g(0)^2 + \int_0^1 g'(t)^2dt}.$$

Exercice 2.
Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.
Montrer que $(x+2y+3z)^2 \leq 14$.

Correction.
Soit $u = (1,2,3)$. $< u,(x,y,z) >= x+2y+3z$ et $\|u\|^2 = 1+4+9 = 14$ et $\|(x,y,z)\|^2 = x^2+y^2+z^2 \leq 1$. D'où, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz, $< u,(x,y,z) >^2= (x+2y+3z)^2 \leq \|u\|^2\|(x,y,z)\|^2 \leq 14$.

Exercice 3.
Soit E un espace préhilbertien réel. Soient $u, v \in E$ vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{R}, \|u+tv\| \geq \|u\|.$$

Montrer que u et v sont orthogonaux.

Correction.
On a $\|u+tv\|^2 = \|u\|^2 + t^2\|v\|^2 + 2t < u,v >$. Alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $t(t\|v\|^2 + 2 < u,v >) \geq 0$. Alors t et $t\|v\|^2 + 2 < u,v >$ ont même signe. D'où $< u,v >\geq -\dfrac{1}{2}t\|v\|^2, \forall t > 0$ et $< u,v >\leq -\dfrac{1}{2}t\|v\|^2, \forall t < 0$. Si on fait tendre t vers 0, on obtient $< u,v >\geq 0$ et $< u,v >\leq 0$. Par suite $< u,v >= 0$ et donc $u \perp v$.

Exercice 4.
Soit E un espace euclidien. Soit f une application linéaire sur E et soit $\lambda > 0$. On dit que f est une similitude de rapport λ si

$$\forall x \in E, \|f(x)\| = \lambda\|x\|.$$

1) Soient $u, v \in E$ tel que $u+v \perp u-v$. Montrer que $\|u\| = \|v\|$.
2) Montrer que f est une similitude de rapport λ si et seulement si $\forall x, y \in E$, $(f(x)|f(y)) = \lambda^2(x|y)$.
3) On souhaite montrer que f est une similitude si et seulement si $f \neq 0$ et $\forall x \perp y$, on a $f(x) \perp f(y)$ (c'est à dire f conserve l'orthogonalité).
a) Montrer que si f est une similitude, alors $\forall x \perp y$, on a $f(x) \perp f(y)$.
b) On suppose que f conserve l'orthogonalité. Soit $\{e_1, \cdots, e_n\}$ une base orthonormale de E. Montrer que $\|f(e_i)\| = \|f(e_j)\|$ pour tout $i, j \in \{1, \cdots, n\}$.
c) Montrer alors que si $f \neq 0$ et f conserve l'orthogonalité, alors f est une similitude.

Correction.
1) $< u+v, u-v >= \|u\|^2 - \|v\|^2 = 0$ Alors $\|u\| = \|v\|$.

2) Supposons que f est une similitude, i.e., $< f(x), f(x) >= \lambda^2 < x, x >, \forall x \in E$. On a $< f(x+y), f(x+y) >= \|f(x)\|^2 + \|f(y)\|^2 + 2 < f(x), f(y) >= \lambda^2\|x+y\|^2 = \lambda^2\|x\|^2 + \lambda^2\|y\|^2 + 2\lambda^2 < x, y >, \forall x, y$. Par suite $< f(x), f(y) >= \lambda^2 < x, y >, \forall x, y$. Inversement, supposons que $< f(x), f(y) >= \lambda^2 < x, y >, \forall x, y$. En particulier, $\|f(x)\|^2 = \lambda^2\|x\|^2, \forall x$ et par suite f est une similitude de rapport λ.
3) a) Supposons que f est une similitude. Soit $x \perp y$. Alors, d'aprés (2), $f(x) \perp f(y)$.
b) On suppose que si $x \perp y$, alors $f(x) \perp f(y)$. Soit $\{e_1, \cdots, e_n\}$ une base orthonormale de E. On a $< e_i + e_j, e_i - e_j >= \|e_i\|^2 - \|e_j\|^2 = 0, \forall i, j$. Alors, $e_i + e_j \perp e_i - e_j \forall i, j$. Par suite $f(e_i + e_j) \perp f(e_i - e_j)$, c'est à dire que $< f(e_i) + f(e_j), f(e_i) - f(e_j) >= 0$. Alors, $\|f(e_i)\|^2 = \|f(e_j)\|^2$. Par conséquent, $\|f(e_i)\| = \|f(e_j)\|, \forall i, j$.
c) Supposons que $f \neq 0$ et $f(x) \perp f(y)$, $\forall x \perp y$. D'après (b), $\|f(e_i)\| = \|f(e_j)\|, \forall i, j$. Soit $x \in E$ et $x = a_1e_1 + \cdots + a_ne_n$. $\|f(x)\|^2 = a_1^2\|f(e_1)\|^2 + \cdots + a_n^2\|f(e_n)\|^2 = \lambda^2(a_1^2 + \cdots + a_n^2)$, avec $\lambda = \|f(e_1)\| = \cdots = \|f(e_n)\|$. Par suite $\|f(x)\|^2 = \lambda^2\|x\|^2$ et alors $\|f(x)\| = \lambda\|x\|$. Par conséquent f est une similitude sur E de rapport λ.