Université Moulay Ismail
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année universitaire 20-21
Filière : SMA
AlgV, (S_4)

Corrigé de la série 2

Exercice 1 :

Enoncé :

1) Déterminer la forme linéaire $f \in \mathbb{R}^{3^*}$ telles que $f(1,1,1)=0, f(2,0,1)=1$ et $f(1,2,3)=4$.
2) Donner une base du noyau de f.

Corrigé :

1. **Notons $b=\{e_1,e_2,e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $b^*=\{e_1^*,e_2^*,e_3^*\}$ sa base duale.**
   Soit $f \in \mathbb{R}^{3^*}$. Alors $f = ae_1^* + be_2^* + ce_3^*$. Déterminons $a,b,c \in \mathbb{R}$ tels que $f(1,1,1) = 0, f(2,0,1)=1$ et $f(1,2,3)=4$.
   Remarquons que $(1,1,1)=e_1+e_2+e_3, (2,0,1)=2e_1+e_3$ et $(1,2,3)=e_1+2e_2+3e_3$. Utilisons le fait que ${e_i}^*(e_j)=\delta_{ij}\ \forall i,j \in \{1,2,3\}$. On Obtient le système suivant:
   $$\begin{cases} a+b+c &= 0 \\ 2a+c &= 1 \\ a+2b+3c &= 4 \end{cases}$$
   Donc $a=-1, b=-2$ et $c=3$. D'où $f=-e_1^*-2e_2^*+3e_3^*$ ou encore $f(x,y,z)=-x-2y+3z$.
2. $\ker f = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+2y-3z=0\} = vect\{(-2,1,0),(3,0,1)\}$. **On vérifie que ces deux vecteurs sont linéairement indépendants.**

Exercice 2.

Enoncé :

Soient $f_1, f_2 \in \mathbb{R}^{2^*}$ définies par $f_1(x,y)=x+y$ et $f_2(x,y)=x-y$.
1) Montrer que $\{f_1,f_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^{2^*}$.
2) Exprimer la forme linéaire h définie par $h(x,y)=2x-6y$ dans cette base.

Corrigé :

On a $f_1=e_1^*+e_2^*$ et $f_2=e_1^*-e_2^*$ où $\{e_1^*,e_2^*\}$ est la base duale de la base canonique $\{e_1,e_2\}$ de $\mathbb{R}^2$.
1) Comme $\dim\mathbb{R}^{2^*}=2$, il suffit de vérifier que $\{f_1,f_2\}$ est libre.
2)On a $h=2e_1^*-6e_2^*$. Comme

$$\begin{cases} f_1 &= e_1^*+e_2^* \\ f_2 &= e_1^*-e_2^* \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} {e_1}^* &= \frac{1}{2}(f_1+f_2) \\ {e_2}^* &= \frac{1}{2}(f_1-f_2) \end{cases}$$

D'où $h=-2f_1+4f_2$.
On peut utiliser la matrice de passage P de $\{e_1^*,e_2^*\}$ à $\{f_1,f_2\}$ pour exprimer h dans la nouvelle base. Posons $h=af_1+bf_2$. On obtient

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 :
Enoncé :
Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ une base de E.
Soient $f_1, f_2, f_3 \in E^*$ tels que $f_1 = 2e_1^* + e_2^* + e_3^*, f_2 = -e_1^* + 2e_3^*, f_3 = e_1^* + 3e_2^*$.
Montrer que $\{f_1, f_2, f_3\}$ est une base de E^* et déterminer la base préduale de $\{f_1, f_2, f_3\}$.

Corrigé :
Il suffit de vérifier que $\{f_1, f_2, f_3\}$ est libre car $\dim E^* =$ card$\{f_1, f_2, f_3\}$.
Notons $\{u_1, u_2, u_3\}$ la base préduale de $\{f_1, f_2, f_3\}$. Déterminons $\{u_1, u_2, u_3\}$ par deux méthodes:
Méthode 1 :
Posons $u_1 = ae_1 + be_2 + ce_3$. Ce vecteur vérifie $f_1(u_1) = 1, f_2(u_1) = 0$ et $f_3(u_1) = 0$. Cela nous donne le système suivant:

$$\begin{cases} 2a + b + c &= 1 \\ -a + 2c &= 0 \\ a + 3b &= 0 \end{cases}$$

On aura donc (sauf erreur de calcul) $a = \frac{6}{13}, b = \frac{-2}{13}, c = \frac{3}{13}$. Par suite $u_1 = \frac{6}{13}e_1 - \frac{2}{13}e_2 + \frac{3}{13}e_3$.
On fait de même pour $u_2 = ae_1 + be_2 + ce_3$ avec les conditions $f_1(u_2) = 0, f_2(u_2) = 1$ et $f_3(u_2) = 0$. On obtient le système

$$\begin{cases} 2a + b + c &= 0 \\ -a + 2c &= 1 \\ a + 3b &= 0 \end{cases}$$

On aura donc (sauf erreur de calcul) $a = -\frac{3}{13}, b = \frac{1}{13}, c = \frac{5}{13}$.
On fait de même pour $u_3 = ae_1 + be_2 + ce_3$ avec les conditions $f_1(u_3) = 0, f_2(u_3) = 0$ et $f_3(u_3) = 1$
Méthode 2 :
Notons P la matrice de passage de B à $\{u_1, u_2, u_3\}$. Alors la matrice de passage de B^* à $\{f_1, f_2, f_3\}$ est $t_{P^{-1}}$ qui est égale à:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

On déduit alors P. Donc on aura u_1, u_2, u_3.
Exercice 4 :
Enoncé :

1. **On considère la forme quadratique q_1 dans l'espace $E = \mathbb{R}^3$ définie par**

   $$q_1(x_1, x_2, x_3) = {x_1}^2 + {x_2}^2 + 4{x_3}^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3$$

   Donner la décomposition de Gauss de q_1, sa signature et son rang. Construire une base orthogonale B_1 de E pour q_1.

2. **Même questions pour q_2 définie dans $E = \mathbb{R}^4$ par**

   $$q_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1x_2 + 2x_2x_3 - x_3x_4$$

Corrigé :

1. **Notons $b=\{e_1,e_2,e_3\}$ la base canonique de E et $\{e_1{}^*,e_2{}^*,e_3{}^*\}$ sa base duale.**
   On a $q_1(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_1(x_2+2x_3)+x_2^2+4x_3^2=(x_1-(x_2+2x_3))^2-(x_2+2x_3)^2+x_2^2+4x_3^2=(x_1-x_2-2x_3)^2-4x_2x_3=(x_1-x_2-2x_3)^2-(x_2+x_3)^2+(x_2-x_3)^2$.
   Posons $l_1=e_1{}^*-e_2{}^*-2e_3{}^*, l_2=e_2{}^*+e_3{}^*, l_3=e_2{}^*-e_3{}^*$. On vérifie que $B=\{l_1,l_2,l_3\}$ est libre dans E^*. B est une base de E^*
   Le rang de q_1 est 3 et sa signature est $(2,1)$.
   Construisons une base orthogonale pour q_1 de E: ça sera la base préduale, notée $B_1=\{f_1,f_2,f_3\}$ de B. Après calcul, on obtient:

   $$f_1=e_1, f_2=\frac{3}{2}e_1+\frac{1}{2}e_2+\frac{1}{2}e_3, f_3=-\frac{1}{2}e_1+\frac{1}{2}e_2-\frac{1}{2}e_3$$

   .

2. **Notons $b=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ la base canonique de E et $\{e_1{}^*,e_2{}^*,e_3{}^*,e_4{}^*\}$ sa base duale.**
   On a $q_1(x_1,x_2,x_3,x_4)=2(x_1+x_3)x_2-x_3x_4=\frac{1}{2}(x_1+x_2+x_3)^2-\frac{1}{2}(x_1-x_2+x_3)^2-\frac{1}{4}(x_3+x_4)^2+\frac{1}{4}(x_3-x_4)^2$.
   Posons $l_1=e_1{}^*+e_2{}^*+e_3{}^*, l_2=e_1{}^*-e_2{}^*+e_3{}^*, l_3=e_3{}^*+e_4{}^*, l_4=e_3{}^*-e_4{}^*$. On vérifie que $B=\{l_1,l_2,l_3,l_4\}$ est libre dans E^*. Donc c'est une base de E^*
   Le rang de q_2 est 4 et sa signature est $(2,2)$.
   Construisons une base orthogonale pour q_2 de E: ça sera la base préduale, notée $B_2=\{f_1,f_2,f_3,f_4\}$ de B. Après calcul, on obtient:

   $$f_1=\frac{1}{2}e_1+\frac{1}{2}e_2, f_2=\frac{1}{2}e_1-\frac{1}{2}e_2, f_3=-\frac{1}{2}e_1+\frac{1}{2}e_3+\frac{1}{2}e_4, f_4=-\frac{1}{2}e_1+\frac{1}{2}e_3-\frac{1}{2}e_4.$$