Chapitre IV

Applications linéaires

1 Espace vectoriel (rappels)

Définition 1.1 ***(combinaison linéaire)***
Soit $I\!K = I\!R$ ou $\mathbb{C}$, soit E un espace vectoriel sur $I\!K$.
Soit $\mathcal{S} = (u_1, \cdots, u_p)$ une famille de p vecteurs de E.
On appelle combinaison linéaire de ces p vecteurs, tout vecteur de la forme :

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_p u_p$$

Où $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ sont des scalaires dans $I\!K$.
Un vecteur w dans E est combinaison linéaire de ces p vecteurs $u_1, \cdots, u_p$, s'il existe des scalaires $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ dans $I\!K$ tels que : $w = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_p u_p$.

Définition 1.2 ***(Sous espace vectoriel engendré)***
On appelle sous espace vectoriel engendré par une famille finie $\mathcal{S} = (u_1, \cdots, u_p)$ de E, l'ensemble des combinaisons linéaires de ces p vecteurs et l'on note :

$$vect(\mathcal{S}) = vect\{u_1, \cdots, u_p\} = \{\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_p u_p \ : \ \lambda_1, \cdots, \lambda_p \in I\!K\}$$

Définition 1.3 ***(Familles libres - Indépendance linéaire)*** *Une famille finie $\{u_1, \cdots, u_p\}$ de p vecteurs de E est* ***libre*** *si et seulement si :*

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_p u_p = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$$

Les éléments d'une famille libre sont dits ***linéairement indépendants****.*
Une famille qui n'est pas libre est dite ***liée****, il existe $(\lambda_1, \cdots, \lambda_p) \neq (0, \cdots, 0)$ tel que : $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_p u_p = 0_E$.*
Une famille est ***liée*** *si et seulement si au moins l'un de ses éléments est une combinaison linéaire des autres éléments de la famille.*

Propriétés :
a) Toute famille non vide extraite d'une famille libre est libre.
b) Toute famille qui contient une famille liée est liée.
c) Si $\{u_1, \cdots, u_p\}$ est une famille libre et $\{u_1, \cdots, u_p, w\}$ est une famille liée, alors w est combinaison linéaire de $u_1, \cdots, u_p$.

Définition 1.4 ***(Familles génératrices)***
Soit F un sous espace vectoriel de E. Une famille finie $\mathcal{S} = (u_1, \cdots, u_p)$ de p vecteurs de E est une ***famille génératrice*** *de F si et seulement si vect$\{u_1, \cdots, u_p\} = F$, on dit que $\mathcal{S}$ engendre F*

Propriétés :
a) Toute famille qui contient une famille génératrice est génératrice.
b) Si $\mathcal{S} = (u_1, \cdots, u_p)$ est une famille génératrice et si u_p est combinaison linéaire de $u_1, \cdots, u_{p-1}$, alors $u_1, \cdots, u_{p-1}$ est génératrice.

Définition 1.5 ***(Bases)***
Soit F un sous espace vectoriel de E. Une famille finie $\mathcal{B} = \{u_1, \cdots, u_p\}$ de p vecteurs de E est une ***base*** *de F si et seulement si $\mathcal{B}$ est libre et génératrice de F.*

Proposition 1.1 .
Soit $\mathcal{B} = \{u_1, \cdots, u_p\}$ une famille de p vecteurs de F.

$$\mathcal{B} \text{ est une base de } F \Leftrightarrow \begin{cases} \forall\, u \in F\ \exists!(\lambda_1, \cdots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p\ : \\ u\ =\ \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots\ldots + \lambda_p u_p \end{cases}$$

Définition 1.6 ***(Espace vectoriel de dimension finie)***
On dit que l'espace vectoriel E est de dimension finie s'il possède une base finie, sinon on dit que E est espace de dimension infinie.

Théorème 1.1 ***(Théorème de la base imcomplète)***
Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ une base de E, si $\mathcal{S} = (w_1, \cdots, w_p)$ est une famille libre, alors $p \leq n$ et l'on peut compléter la famille $\mathcal{S}$ en une base de E en rajoutant $n-p$ vecteurs extraits de $\mathcal{B}$, (ie) il existe $\{w_1, \ldots, w_{n-p}\} \subset B$ tel que $\mathcal{S} \cup \{w_1, \ldots, w_{n-p}\}$ soit une base de E.

Théorème 1.2 ***(Théorème de la dimension)***
Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie toutes les bases ont le même nombre d'éléments. Ce nombre , noté $\dim E$, s'appelle la ***dimension*** *de E*

Théorème 1.3 .
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie avec $\dim E = n$.

$$\mathcal{B} \text{ est une base de } E \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{B} \text{ est composée de } n \text{ vecteurs} \\ \mathcal{B} \text{ est libre dans } E \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{B} \text{ est composée de } n \text{ vecteurs} \\ \mathcal{B} \text{ est génératrice de} E \end{cases}$$

Théorème 1.4 .
i) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension fini. Si F est un sous espace vectoriel de E, alors $\dim F \leq \dim E$.
ii) Soient F_1 et F_2 deux sous espaces vectoriels de E

$$\begin{cases} F_1 \subset F_2 \\ \dim F_1 = \dim F_2 \end{cases} \Rightarrow F_1 = F_2$$

2 Rang d'une famille de vecteurs

Définition 2.1 .
On appelle rang d'une famille $\mathcal{S}$ de vecteurs de E, noté $rang(\mathcal{S})$, la dimension du sous-espace $F = vect(\mathcal{S})$ engendré par $\mathcal{S}$: $rang(\mathcal{S}) = \dim vect(\mathcal{S})$
Le rang d'une famille $\mathcal{S}$ est le nombre maximum de vecteurs linéairement indépendants que l'on peut extraire de $\mathcal{S}$.

Propriétés :
Soit $\mathcal{S}$ une famille de p vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension finie n, alors :
a)

$$rang(\mathcal{S}) \leq \min(p, n)$$

b)

$$rang(\mathcal{S}) = p \Leftrightarrow \mathcal{S} \text{ est libre et } p \leq n$$

c)

$$rang(\mathcal{S}) = n \Leftrightarrow \mathcal{S} \text{ est génératrice de } E \text{ et } n \leq p$$

Définition 2.2 .
Soit $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ *et soit*

$$\mathcal{S} = \{C_i \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}) : \quad i = 1, \ldots, p\}$$

la famille des p *colonnes de la matrice* A *:* $A = (C_1, \ldots, C_p)$. *On appelle rang de la matrice* A *, noté* $rang(A)$ *la dimension du sous-espace* $F = vect(\mathcal{S})$ *de* $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ *engendré par* $\mathcal{S}$ *:*

$$rang(A) = rang(\mathcal{S}) = \dim vect(\mathcal{S})$$

Théorème 2.1 .
Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie* n *et* $\mathcal{B}$ *une base de* E.
Soient $\mathcal{S} = (u_1, \ldots, u_n)$ *est une famille de* n *vecteurs de* E, P *la matrice représentant* $\mathcal{S}$ *dans la base* $\mathcal{B}$ *et* R *sa réduite de Gauss, alors :*

$$\mathcal{S} \textit{ est une base de } E \Leftrightarrow P \textit{ inversible } \Leftrightarrow \textit{ la réduite de Gauss } R \textit{ admet } n \textit{ pivots}$$

Preuve :

$$\mathcal{S} \text{ est une base de } E \Leftrightarrow S \text{ est libre } \Leftrightarrow \begin{cases} \text{l'équation } \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = 0 \\ \text{admet l'unique solution } \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0 \end{cases}$$

donc $\mathcal{S}$ est une base de E si et seulement si le système :

$$P \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ admet l'unique solution } \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$$

D'après le thórème 7.1 et le corollaire 7.1 du chapitre II :

$$\mathcal{S} \text{ est une base de } E \Leftrightarrow P \text{ inversible } \Leftrightarrow R \text{ admet } n \text{ pivots}$$

Proposition 2.1 *(Méthode pratique de recherche du rang).*
Soit $\mathcal{S} = (u_1, \cdots, u_p)$ *une famille de* p *vecteurs d'un espace vectoriel* E *de dimension finie* n. *Soit* $\mathcal{B}$ *une base de* E
Soit A *la matrice représentant la famille* $\mathcal{S}$ *dans la base* $\mathcal{B}$. *Soient* R *une réduite de gauss de* A *et* r *le nombre de pivots non nuls de* R, *alors :*
Le rang de $\mathcal{S}$ *est égale au nombre de pivots de* R *non nuls,* $rang(\mathcal{S}) = r$.
Les vecteurs corespondants aux pivots forment une base du sous espace vectoriel $vect(\mathcal{S})$.

Preuve : On peut admettre le résultat.

Corollaire 2.1 ***(Famille libre de vecteurs)***
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n
et $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ une base de E.
Considérons la famille $\mathcal{S} = (u_1, \cdots, u_p)$ de p vecteurs de E.
Soient A la matrice de format (n,p) représentant la famille $\mathcal{S}$ dans la base $\mathcal{B}$ et R sa réduite de Gauss. Alors : ***la famille $\mathcal{S}$ est libre*** $\Leftrightarrow$ *R* ***admet*** *p* ***pivots***

Théorème 2.2 *Soit $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et R une réduite de Gauss de A. Alors :*
i) $rang(A) = r \Leftrightarrow R$ admet r pivots .
ii) $rang({}^tA) = rang(A)$

Preuve : On peut admettre le résultat.

Remarque 2.1 .
Le rang de la matrice A est égale au rang de sa transposée ${}^tA$, cela signifie que le rang des colonnes et le rang des lignes de la matrice A sont égaux.

Exemple 2.1 *Soit $\mathcal{S} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ une famille de $\mathbb{R}^4$ où*

$u_1 = (1, 3, -1, 2)$; $u_2 = (-1, 2, 1, 2)$; $u_3 = (3, -1, -3, -2)$ *et* $u_4 = (-1, 0, 1, 3)$.

La famille $\mathcal{S}$ est représentée par la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

La matrice $R = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & -10 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *est une réduite de Gauss de A.*

Montrons que $\{u_1, u_2, u_4\}$ est libre et une base de vect$\mathcal{S}$.

- $\{u_1, u_2, u_4\}$ *est libre :*

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_4) \in I\!R^3$ *tels que :* $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_4 u_4 = 0_E$.
donc

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}\{u_1, u_2, u_4\} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_4 = 0$$

- $\{u_1, u_2, u_4\}$ *est génératrice de vect*$\mathcal{S}$ *:*

Montrons que u_3 *est combinaison linéaire de* u_1, u_2, u_4.
Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in I\!R^4$ *tels que :* $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4 = 0_E$.

$$(\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}\,\mathcal{S}) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & -10 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ 5\lambda_2 - 10\lambda_3 = 0 \\ \lambda_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\lambda_3 \\ \lambda_2 = 2\lambda_3 \\ \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

Si on prend $\lambda_3 = 1$ *on obtient* $-u_1 + 2u_2 + u_3 = 0_E \Rightarrow u_3 = u_1 - 2u_2$.
Donc vect$\mathcal{S} =$ *vect* $\{u_1, u_2, u_4\}$.

3 Applications linéaires

3.1 Définitions et propriétés

Définition 3.1 *(Rappel)*
Soit $f : E \longrightarrow F$ *une application.*
i) On dit que f *est injective si*

$$\forall\, x, x' \in E, \quad f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'$$

ii) On dit que f *est surjective si*

$$\forall\, y \in F,\ \exists\, x \in E\ \ f(x) = y$$

iii) on dit que f *est bijective si* f *est injective et surjective.*

$$\forall\, y \in F,\ \exists !\ x \in E\ \ f(x) = y$$

Définition 3.2 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Une application $f : E \to F$ est une application linéaire si pour tous u et v dans E et tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$,*

$$f(u + \lambda v) = f(u) + \lambda f(v)$$

Remarque 3.1 .
i) $f : E \to F$ est une application linéaire ssi :

$$\begin{cases} \forall\, u \in E \;\; et \;\forall\, \lambda \in \mathbb{K} \;\; f(\lambda\, u) \;=\; \lambda\, f(u) \\ \forall\, u,\, v \,\in E \;\; f(u \,+\, v) \;=\; f(u) \,+\, f(v) \end{cases}$$

ii) $f(0_E) = 0_F$

Notation :
On note $L(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.
Si $f \in L(E, F)$ est bijective, on dit que f est un isomorphisme de E dans F.
Si $f \in L(E, E)$, on dit que f est un endomorphisme de E, $L(E, F) = End(E)$.
Si $f \in End(E)$ est bijective, on dit que f est un automorphisme de E.

Proposition 3.1 .
$(\,L(E, F), +, .\,)$ muni de l'addition et la multiplication par un scalaire de $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Si f , $g \in L(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $f + \lambda\, g \in L(E, F)$.

Proposition 3.2 .
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et soit $f \in L(E, F)$ une application linéaire. Soient G un sous-espace vectoriel de E et H un sous-espace vectoriel de F, alors :
i) $f(G) = \{\ f(u) \in F \ :\ u \in G\ \}$ est un sous-espace vectoriel de F.
ii) $f^{-1}(H) = \{\ u \in E \ :\ f(u) \in H\ \}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Preuve :
i) Soient $v_1, v_2 \in f(G)$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Il existe $u_1, u_2 \in G$ tels que : $f(u_1) = v_1$ et $f(u_1) = v_2$. Alors $u_1 + \lambda u_2 \in G$ et $w = v_1 + \lambda v_2 = f(u_1 + \lambda u_2) \in f(G)$, d'où $f(G)$ est sous espace vectoriel de F.
ii) Soient $u_1, u_2 \in f^{-1}(H)$ alors $f(u_1) + \lambda f(u_2) \in H$, donc $f(u_1 + \lambda u_2) \in H$. D'où $u_1 + \lambda u_2 \in f^{-1}(H)$ et $f^{-1}(H)$ est sous espace vectoriel de F.

Définition 3.3 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et soit $f \in L(E,F)$ une application linéaire.*
i) On appelle image de f, noté $Im(f)$, le sous-espace vectoriel de F :

$$Im(f) = f(E) = \{\ f(u) \in F\ :\ \ u \in E\ \}$$

On appelle rang de f, noté $rang(f)$, la dimension de $Im(f)$

$$rang(f) = \dim Im(f)$$

ii) On appelle noyau de f, noté $ker(f)$, le sous-espace vectoriel de E :

$$ker(f) = f^{-1}(\{O_F\}) = \{\ u \in E\ :\ \ f(u) = O_F\ \}$$

Proposition 3.3 .
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et soit $f \in L(E,F)$ une application linéaire.
i)

$$f \text{ est injective} \iff ker(f) = \{O_E\}$$

ii)

$$f \text{ est surjective} \iff Im(f) = F$$

Preuve : Exercice.

Proposition 3.4 *Soit $f \in L(E,F)$ une application linéaire et $\mathcal{S} = \{u_1, \ldots, u_p\}$ une famille de vecteurs de E.*
i) $f(vect\{u_1, \ldots, u_p\}) = vect\{f(u_1), \ldots, f(u_p)\}$.
En particulier si $\mathcal{S} = \{u_1, \ldots, u_p\}$ est une base de E alors $Im(f) = vect\{f(u_1), \ldots, f(u_p)\}$.
ii) Si f est injective alors :

$$\mathcal{S} = \{u_1, \ldots, u_p\} \text{ est libre} \implies f(\mathcal{S}) = \{f(u_1), \ldots, f(u_p)\} \text{ est libre}$$

iii) Si f est un isomorphisme alors :

$$\mathcal{S} = \{u_1, \ldots, u_p\} \text{ est une base de } E \implies f(\mathcal{S}) = \{f(u_1), \ldots, f(u_p)\} \text{est une base de } F$$

Preuve : Exercice.

Proposition 3.5 .
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels où l'espace E est de dimension finie, $\dim E = n$.
Soient $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E.
Soit $\{w_1, \ldots, w_n\}$ une famille de n vecteurs de F, alors il existe une unique application linéaire $f \in L(E, F)$ telle que $f(e_1) = w_1, \ldots, f(e_n) = w_n$.
Une application linéaire f est entièrement déterminée par les images des vecteurs d'une base, $f(\mathcal{B}) = \{f(e_1), \ldots, f(e_p)\}$.

Preuve :
Soit $u = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n \in E$, comme f est linéaire, alors :

$$f(u) = f(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n) = \lambda_1 f(e_1) + \cdots + \lambda_n f(e_n)$$

Donc f est entièrement déterminée par la donnée des vecteurs $f(e_1), \ldots, f(e_p)$.

3.2 Théorème du rang et conséquences

Théorème 3.1 *(Théorème du rang).*
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels où l'espace E est de dimension finie n.
Soient $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire, alors :

$$\dim E = \dim ker(f) + rang(f)$$

Où $rang(f) = \dim Im(f) = rang\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$

Preuve : $ker(f) \subset E$ donc $\dim ker(f) \leq \dim E = n$.
Soient $q = \dim ker(f)$ et $\mathcal{S} = \{v_1, \ldots, v_q\}$ une base de $\dim ker(f)$.
$\mathcal{S}$ est libre alors, d'après le théorème de la base imcomplète, on peut compléter la famille $\mathcal{S}$ en une base de E en rajoutant $n - q$ vecteurs extraits de $\mathcal{B}$, il existe $\{w_1, \ldots, w_{n-q}\} \subset B$ tel que $\mathcal{B}' = \mathcal{S} \cup \{w_1, \ldots, w_{n-q}\}$ soit une base de E.

En particulier $ker(f) \cap vect\{w_1, \ldots, w_{n-q}\}\} = \{O_E\}$.
Par suite

$$Im(f) = vect f(\mathcal{B}') = vect\{f(w_1), \ldots, f(w_{n-q})\}$$

Vérifions que $\{f(w_1), \ldots, f(w_{n-q})\}$ est libre. Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-q}$ dans $I\!\!K$ tels que :

$$\alpha_1 f(w_1) + \cdots + \alpha_{n-q} f(w_{n-q}) = O_F, \text{ alors } f(\alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_{n-q} w_{n-q}) = O_F.$$

Par suite

$$\alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_{n-q} w_{n-q} \in ker(f) \cap vect\{w_1, \ldots, w_{n-q}\}\} = \{O_E\}$$

Comme $\alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_{n-q} w_{n-q} = 0_E$ et $\{w_1, \ldots, w_{n-q}\}$ est libre alors $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{n-q} = 0$.
Donc $\{f(w_1), \ldots, f(w_{n-q})\}$ est une base de $Im(f)$ et

$$\dim Im(f) = n - q = \dim E - \dim ker(f)$$

D'où $\dim E = \dim ker(f) + rang(f)$.

Corollaire 3.1 .
Soient E et F deux $I\!\!K$-espaces vectoriels de même dimension n.
Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire, alors :

$$f \text{ est injective} \Longleftrightarrow f \text{ est surjective} \Longleftrightarrow f \text{ est bijective}$$

3.3 Matrice d'une application linéaire

Définition 3.4 *Soient E et F deux $I\!\!K$-espaces vectoriels de dimensions finies avec $\dim E = n$ et $\dim F = p$. Soient $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E et $\mathcal{C} = \{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_p\}$ une base de F. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire.*
On appelle matrice de f, notée $\mathcal{M}at_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$, la matrice repésentant la famille de vecteus $\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$ de F dans la base $\mathcal{C} = \{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_p\}$.
La matrice $\mathcal{M}at_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \mathcal{M}at_{\mathcal{C}}\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$ est de format (p, n).

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & \cdots & f(e_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \epsilon_1 \\ \vdots \\ \epsilon_p \end{array}$$

Si $E = F$ et $\mathcal{B} = \mathcal{C}$, on note : $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f) = \mathcal{M}at_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$, on dit que $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f)$ est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

Propriétés :

Soient $u = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n \in E$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ses composantes dans la base $\mathcal{B}$.

Soient $v = f(u) = y_1\epsilon_1 + \cdots + y_p\epsilon_p \in F$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$ ses composantes dans la base $\mathcal{C}$.

Pour tout $j = 1, \ldots, n$, soient $f(e_j) = a_{1j}\epsilon_1 + \cdots + a_{pj}\epsilon_p \in F$ et $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{pj} \end{pmatrix}$ ses composantes dans la base $\mathcal{C}$.

Posons $A = \mathcal{M}at_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$, Alors :

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & \cdots & f(e_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \epsilon_1 \\ \vdots \\ \epsilon_p \end{array}$$

Ecriture analytique

$$v = f(u) = x_1 f(e_1) + \cdots + x_n f(e_n) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{p1} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{pn} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_n \\ \vdots \\ y_p = a_{p1}x_1 + \cdots + a_{pn}x_n \end{cases}$$

Ecriture matricielle

$$v = f(u) \Leftrightarrow Y = A\,X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Comment déterminer le noyau et l'image d'une application linéaire f

• Pour déterminer la dimension et une base de $Im\,f$ par la méthode de la proposition 2.1. Il suffit de chercher une réduite de Gauss R de la matrice A associée f qui fournit rapidement une base de $Im\,f$ et sa dimension.

• On utilise le théorème du rang pour déterminer la dimension du noyau.

• Déterminer le noyau de f consiste à chercher les vecteurs $u \in E$ de composnates X tels que :

$$f(u) = O_F \Leftrightarrow A\,X = O \Leftrightarrow R\,X = O$$

Exemple 3.1 *Soit* $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ *un endomorphisme.*
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

la matrice de f *dans la base canonique* $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$
La matrice

$$R = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & -10 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est une réduite de Gauss de A *de rang* 3 *(cf. exemple 2.1).*

$Im\, f = vect\{f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)\}$, *alors* $\dim Im\, f = 3$ *et* $\{f(e_1), f(e_2), f(e_4)\}$ *est une base de* $Im\, f$.

D'après le théorème du rang, on a : $\dim ker\, f = 1$.
Comme (cf. exemple 2.1)

$$f(e_1) - 2f(e_2) - f(e_3) = O$$

donc

$$f(e_1 - 2e_2 - e_3) = O$$

par suite $u_0 = e_1 - 2e_2 - e_3 \in ker\, f$ *et* $ker\, f = vect\{u_0\}$

Opérations sur les applications linéaires et leurs matrices correspondantes

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies et soient $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{C}$ une base de F.
Soient f, $g \in L(E,F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors :
La matrice de la somme $f+g$ est la somme de la matrice de f et de la matrice de g .

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f+g) = \mathcal{M}at_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) + \mathcal{M}at_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(g)$$

La matrice du produit λf d'une application linéaire par un scalaire est le produit de la matrice de f par ce scalaire.

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\ (\lambda f) = \lambda\ \mathcal{M}at_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\ (f)$$

Proposition 3.6 *(Matrice de la composée de deux applications linéaires).*
Soient E, F et G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies et soient $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ leurs bases respectives.
Soient $f \in L(E,F)$ et $g \in L(F,G)$ alors $g\,o\,f \in L(E,G)$.

$$\underbrace{E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G}_{g\,o\,f}$$

De plus on a :

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{B},\mathcal{D}}\ (g\,o\,f)\ =\ \mathcal{M}at_{\mathcal{C},\mathcal{D}}\ (g)\quad \mathcal{M}at_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\ (f)$$

Si $\dim E = n$, $\dim F = p$ et $\dim G = q$ on a :

$\mathcal{M}at_{\mathcal{C},\mathcal{D}}\ (g) \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$, $\mathcal{M}at_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\ (f) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ *et* $\mathcal{M}at_{\mathcal{B},\mathcal{D}}\ (g\,o\,f) \in \mathcal{M}_{q,n}(\mathbb{K})$

Preuve : On peut admettre le résultat.

Proposition 3.7 *(Matrice d'un isomorphisme).*
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}$ une base de E.
Soit $f \in End(E)$ un endomorphisme de E, alors :

$$f \text{ est un isomorphisme} \Longleftrightarrow \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}\,(f) \text{ est inversible}$$

Dans ce cas on a :

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}\,(f^{-1}) = (\ \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}\,(f)\ )^{-1}$$

Preuve :
On a :

$$f \text{ est un isomorphisme} \Longleftrightarrow f^{-1}\,o\,f = f\,o\,f^{-1} = id_E \quad (*)$$

Alors :

$$(*) \quad \Longleftrightarrow \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}\,(f^{-1})\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}\,(f) = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}\,(f)\,\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}\,(f^{-1}) = I_n$$

Donc

$$(*) \quad \Longleftrightarrow \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}\,(f) \text{ est inversible et } \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}\,(f^{-1}) = (\ \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}\,(f)\ )^{-1}$$

3.4 Matrice de passage et Changement de base

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, où $\dim E = n$. Soient $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ et $\mathcal{B}' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ deux bases de E.

La base $\mathcal{B}'$ est entièrement caractérisée par la connaissance des composantes des vecteurs $e'_1, \ldots, e'_n$ dans la base $\mathcal{B}$

$$\begin{cases} e'_1 = \alpha_{11}e_1 + \cdots + \alpha_{1n}e_n \\ e'_2 = \alpha_{12}e_1 + \cdots + \alpha_{n2}e_n \\ \vdots \\ e'_n = \alpha_{1n}x_1 + \cdots + \alpha_{nn}e_n \end{cases}$$

Définition 3.5 *(Matrice de passage).*
On appelle matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, la matrice

$$P = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}\,\mathcal{B}'$$

représentant la famille $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e'_1 & e'_2 & \cdots & e'_n \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{array}$$

Proposition 3.8 .
La matrice de passage $P = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}\,\mathcal{B}'$ est inversible et son inverse

$$P^{-1} = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}'}\,\mathcal{B}$$

est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$.

Action d'un changement de base sur les composantes d'un vecteur.

Proposition 3.9 .

Pour tout vecteur u de E, soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *et* $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ *les composantes de u respectivement dans la base $\mathcal{B}$ et dans la base $\mathcal{B}'$. Soit*

$$P = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}\,\mathcal{B}'$$

la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, alors :

$$X = P\,X'$$

On a :

$$X' = P^{-1}\,X \quad \text{où} \quad P^{-1} = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}'}\,\mathcal{B}$$

Preuve :

On a :

$$u = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n = x'_1e'_1 + \cdots + x'_ne'_n \Longleftrightarrow X = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}\,\mathcal{B}'\;X' = P\;X'$$
$$\Longleftrightarrow \mathcal{M}at_{\mathcal{B}'}\,\mathcal{B}\;X = P^{-1}\,X = X'$$

D'ou le résultat.

Action d'un changement de base sur la matrice d'une application linéaire.

Proposition 3.10 .
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.
Soient $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases de E et

$$P = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}\mathcal{B}'$$

la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la nouvelle base $\mathcal{B}'$.
Soit $f : E \to E$ un endomorphisme de E. Soient $A = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f)$ la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ et $A' = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}'}(f)$ la matrice de f dans la nouvelle base $\mathcal{B}'$, alors :

$$A' = P^{-1} A P$$

Preuve :
Pour tout vecteur u de E, soit $v = f(u)$.
Soient $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ les composantes respectivement de u et v dans la base $\mathcal{B}$.
Soient $X' \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $Y' \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ les composantes respectivement de u et v dans la base $\mathcal{B}'$.
On a :

$$X = P\,X' \text{ et } Y = P\,Y', \text{ où } P = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}\mathcal{B}'$$

Alors :

$$v = f(u) \Leftrightarrow Y = A\,X \Leftrightarrow P\,Y' = A\,P\,X' \Leftrightarrow Y' = P^{-1} A\,P\,X' \Leftrightarrow A' = P^{-1} A\,P$$

Définition 3.6 *On dit que deux matrices A et A' de $\mathcal{M}_n$ sont semblables s'il existe une matrice P de $\mathcal{M}_n$ invesible tel que :*

$$A' = P^{-1} A\,P$$