DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
FACULTÉ DES SCIENCES
UNIVERSITÉ MOULAY ISMAÏL-MEKNÈS

Exercices résolus d'Algèbre 2

Filière : SMPC

(Semestre II)

(Ce document ne peut en aucun cas remplacer les séances de TD en présentiel)

Mohammed TAMEKKANTE & Mohamed ZITANE

Année universitaire :2019–2020

Table des matières

1

Matrices

Exercice 1

Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = (2 \ \ -1).$$

1. Calculer tous les produits possibles de deux de ces matrices.
2. Donner les matrices ${}^tA$, ${}^tB$, ${}^tC$ et ${}^tD$.

Solution. (1) Les produits AC, AD, DA, CB, BD, CD et DC sont impossibles. Pour les autres produits, on a :

$$AB = \begin{pmatrix} 26 & 3 & -9 \\ -14 & 1 & -3 \\ 8 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 12 & 20 \end{pmatrix}$$

$$CA = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 5 & -1 \\ 1 & -14 \end{pmatrix}$$

$$BC = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 16 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$DB = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

(2) Les matrices ${}^tA$, ${}^tB$, ${}^tC$ et ${}^tD$:

$${}^tA = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad {}^tB = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad {}^tC = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \text{ et } {}^tD = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

1. Chercher les rangs des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Chercher en fonction de $a \in \mathbb{R}$, le rang de la matrice $M_a = \begin{pmatrix} a & 1 & 5 \\ -1 & 4 & a \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

Solution. (1) Les rangs des matrices A, B et C :

Le rang de la matrice A est égal à la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ défini par $F = \text{Vect}\{(1,2),(2,1)\}$. Or, il est facile de vérifier que la famille $\{(1,2),(2,1)\}$ est libre, et donc $\dim(F) = 2$. Ainsi, $\text{rg}(A) = 2$.

Le rang de la matrice B est égal à la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ défini par $G = \text{Vect}\{u = (1,2,-3), v = (0,-1,2), w = (2,1,0)\}$. On remarque que $2u + 3v = w$. Donc, $G = \text{Vect}\{u = (1,2,-3), v =$

$(0,-1,2)\}$. De plus, la famille $\{u,v\}$ est libre (à vérifier), et donc $\dim(G)=2$. Ainsi, $\mathrm{rg}(B)=2$.

Le rang de la matrice C est égal à la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ défini par $H=\mathrm{Vect}\{a=(1,0,2), b=(-1,0,0), c=(0,1,1), d=(0,2,0)\}$. On sait que $\dim(H)\leq 3$. En outre, la famille $\{a,b,c\}$ est libre (facile à vérifier). Donc, $\dim(H)\geq 3$. Par suite, $\dim(H)=3$ et $\mathrm{rg}(C)=3$.

(2) Rang de la matrice M_a :

Le rang de la matrice M_a est égal à la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ défini par $K_a=\mathrm{Vect}\{u=(a,-1,3), v=(1,4,-1), w=(5,a,5)\}$. Soient $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$.

$$
\begin{aligned}
\alpha u+\beta v+\gamma w=(0,0,0) \quad &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a\alpha+\beta+5\gamma &=& 0\\ -\alpha+4\beta+a\gamma &=& 0\\ 3\alpha-\beta+5\gamma &=& 0\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \beta &=& 3\alpha+5\gamma\\ (a+3)\alpha+10\gamma &=& 0\\ 11\alpha+(a+20)\gamma &=& 0\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \beta &=& 3\alpha+5\gamma\\ \alpha &=& -\dfrac{a+20}{11}\gamma\\ (a^2+23a-50)\gamma &=& 0\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \beta &=& 3\alpha+5\gamma\\ \alpha &=& -\dfrac{a+20}{11}\gamma\\ (a+25)(a-2)\gamma &=& 0\end{array}\right.
\end{aligned}
$$

Si $a\in\mathbb{R}-\{-25,2\}$ alors

$$\alpha u+\beta v+\gamma w=(0,0,0)\Leftrightarrow \alpha=\beta=\gamma=0.$$

Ainsi, $\{u,v,w\}$ est libre et donc c'est une base de K_a. Par conséquent, $\mathrm{rg}(M_a)=\dim(K_a)=3$.

Si $a=2$ alors

$$\alpha u+\beta v+\gamma w=(0,0,0) \quad \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \beta &=& 3\alpha+5\gamma\\ \alpha &=& -2\gamma\end{array}\right.$$

En particulier, pour $\gamma = 1$, on a $\alpha = -2$ et $\beta = -1$ et donc $2u + v = w$. Donc, $K_2 = \text{Vect}\{u = (2, -1, 3), v = (1, 4, -1)\}$. La famille $\{u = (2, -1, 3), v = (1, 4, -1)\}$ est libre, et donc c'est une base de K_2. Par suite, $\text{rg}(M_2) = \dim(K_2) = 2$.

Si $a = -25$ alors

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = (0, 0, 0) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \beta &= 3\alpha + 5\gamma \\ \alpha &= \dfrac{5}{11}\gamma \end{cases}$$

En particulier, pour $\gamma = 11$, on a $\alpha = 5$ et $\beta = 70$ et donc $5u + 70v = -11w$. Donc, $K_{-25} = \text{Vect}\{u = (-25, -1, 3), v = (1, 4, -1)\}$. La famille $\{u = (-25, -1, 3), v = (1, 4, -1)\}$ est libre, et donc c'est une base de K_{-25}. Par suite, $\text{rg}(M_{-25}) = \dim(K_{-25}) = 2$.

Exercice 3

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $AB = AC$. A-t-on $A = C$? La matrice A peut-elle être inversible ?
2. Déterminer toutes la matrices F telles que $AF = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

Solution.

1. On a

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad AC = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Donc, $AB = AC$.

Si la matrice A est inversible, alors

$$B = A^{-1}AB = A^{-1}AC = C,$$

ce qu'est absurde. Donc, A n'est pas inversible.

2. Déterminons toutes la matrices F telles que $AF = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$:

Pour que l'écriture $AF = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$ ait un sens, il faut que $F \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Posons

$$F = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

Donc,

$$\begin{aligned} AF = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 = c_1 = 0 \\ a_2 = -a_3 \\ b_2 = -b_3 \\ c_2 = -c_3 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc,

$$AF = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \Leftrightarrow F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ -a_2 & -b_2 & -c_2 \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \quad a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = A - I_3$.

1. Calculer B^2 et B^3, en déduire une formule de récurrence que l'on démontrera pour B^n, pour tout entier $n \geq 2$.
2. Soit $n \geq 2$. Développer $(B + I_3)^n$ par la formule de binôme et simplifier.
3. En déduire A^n pour tout entier $n \geq 2$.

Solution.

1. On a :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

Montrons par récurrence que

$$(\forall n \geq 2), \quad B^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & (-2)^{n-2} \\ 0 & 0 & (-2)^{n-1} \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}.$$

Pour $n = 2$, on a $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & (-2)^{2-2} \\ 0 & 0 & (-2)^{2-1} \\ 0 & 0 & (-2)^2 \end{pmatrix}$.

Soit $n \geq 2$. Supposons que $B^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & (-2)^{n-2} \\ 0 & 0 & (-2)^{n-1} \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$ et montrons que $B^{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & (-2)^{n-1} \\ 0 & 0 & (-2)^n \\ 0 & 0 & (-2)^{n+1} \end{pmatrix}$.

On a

$$B^{n+1} = BB^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & (-2)^{n-2} \\ 0 & 0 & (-2)^{n-1} \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & (-2)^{n-1} \\ 0 & 0 & (-2)^n \\ 0 & 0 & (-2)^{n+1} \end{pmatrix}$$

Donc,

$$(\forall n \geq 2), \quad B^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & (-2)^{n-2} \\ 0 & 0 & (-2)^{n-1} \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}.$$

2. Développement de $(B + I_3)^n$ par la formule de binôme : On a $BI_3 = I_3B$. Donc, on peut utiliser la formule de binôme pour développer $(B + I_3)^n$. Pour tout $n \geq 2$.

$$\begin{aligned}
(B + I_3)^n &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k B^k I_3^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_n^k B^k \\
&= C_n^0 B^0 + C_n^1 B + \sum_{k=2}^{n} C_n^k B^k \\
&= I_3 + nB + \sum_{k=2}^{n} C_n^k B^k \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \sum_{k=2}^{n} C_n^k \begin{pmatrix} 0 & 0 & (-2)^{k-2} \\ 0 & 0 & (-2)^{k-1} \\ 0 & 0 & (-2)^k \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1-2n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sum_{k=2}^{n} C_n^k (-2)^{k-2} \\ 0 & 0 & \sum_{k=2}^{n} C_n^k (-2)^{k-1} \\ 0 & 0 & \sum_{k=2}^{n} C_n^k (-2)^k \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1-2n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} \sum_{k=2}^{n} C_n^k (-2)^k \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} \sum_{k=2}^{n} C_n^k (-2)^k \\ 0 & 0 & \sum_{k=2}^{n} C_n^k (-2)^k \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Or,

$$\sum_{k=2}^{n} C_n^k (-2)^k = \Big(\sum_{k=0}^{n} C_n^k (-2)^k \Big) - (1 - 2n) = (-2 + 1)^n - 1 + 2n = (-1)^n - 1 + 2n.$$

Donc,

$$(B+I_3)^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1-2n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{(-1)^n - 1 + 2n}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{(-1)^n - 1 + 2n}{2} \\ 0 & 0 & (-1)^n - 1 + 2n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{(-1)^n - 1 + 2n}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{(-1)^n - 1}{2} \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$$

3. Déduction : Pour tout $n \geq 2$, on a

$$A^n = (B+I_3)^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{(-1)^n - 1 + 2n}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{(-1)^n - 1}{2} \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$$

Par exemple,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^3 - A$. En déduire que A est inversible puis déterminer A^{-1}.

Solution. On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Donc,

$$A^3 - A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4I_3.$$

On en déduit alors que $\frac{1}{4}(A^2 - I_3)A = I_3 = A\Big(\frac{1}{4}(A^2 - I_3)\Big)$. Par suite, A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2 - I_3) = \frac{1}{4}\left(\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^3 - 3A^2 + 2A$.
2. Soit $n \geq 1$. Quel est le reste de la division euclidienne de X^n par $X^3 - 3X^2 + 2X$?
3. Calculer A^n pour tout entier $n \geq 1$.
4. A est-elle inversible ?

Solution.

1. Calculons $A^3 - 3A^2 + 2A$:

   On a

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & -3 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -8 & 1 & -7 \\ 8 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Donc,

$$A^3 - 3A^2 + 2A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -8 & 1 & -7 \\ 8 & 0 & 8 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & -3 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{M_3(\mathbb{R})}$$

2. Le reste de la division euclidienne de X^n par $X^3 - 3X^2 + 2X$:
   Le polynôme $X^3 - 3X^2 + 2X$ est de degré 3, et donc le reste doit être un polynôme de degré au plus 2. Écrivons la division euclidienne de X^n par $X^3 - 3X^2 + 2X$ comme suit :

$$X^n = (X^3 - 3X^2 + 2X)Q(X) + aX^2 + bX + c \quad \text{avec } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

   Pour $X = 0$, on obtient $c = 0$. Pour $X = 1$, on obtient $a + b = 1$, et pour $X = 2$, on obtient $2^n = 4a + 2b$. Ainsi, $a = 2^{n-1} - 1$, $b = 2 - 2^{n-1}$ et $c = 0$. Ainsi, le reste de la division euclidienne de X^n par $X^3 - 3X^2 + 2X$ est :

$$(2^{n-1} - 1)X^2 + (2 - 2^{n-1})X.$$

3. Calculons A^n pour tout entier $n \geq 1$: D'après la question (2), on a

$$A^n = (A^3 - 3A^2 + 2A)Q(A) + (2^{n-1} - 1)A^2 + (2 - 2^{n-1})A = (2^{n-1} - 1)A^2 + (2 - 2^{n-1})A.$$

   Donc,

$$A^n = (2^{n-1} - 1)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & -3 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} + (2 - 2^{n-1})\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2^n - 2^{n+1} & 1 & 1 - 2^n \\ 2^{n+1} - 2^n & 0 & 2^{n+1} - 2^n \end{pmatrix}$$

4. A est-elle inversible ? Si A est inversible alors

$$A^2 = A^{-1}A^3 = A^{-1}(3A^2 - 2A) = 3A - 2I_3 = 3\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -6 & 1 & -3 \\ 6 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

ce qu'est absurde car $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & -3 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Donc, A n'est pas inversible.

2

Déterminants

Exercice 1

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $\det(A)$, $\det(B)$ et $\det(A+B)$. Que remarquez-vous ?
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Calculer $\det(\lambda A)$. Que remarquez-vous ? Dans le cas général (c-à-d, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) quelle relation lie $\det(\lambda A)$ et $\det(A)$?

Solution.

1. Calculons $\det(A)$, $\det(B)$ et $\det(A+B)$:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5, \quad \det(B) = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5, \quad \det(A+B) = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

   On remarque que $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$. Cependant, cette relation n'est pas toujours vraie. En effet, pour $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, on a $\det(X) = \det(Y) = 1$ et $\det(X+Y) = 0$.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Calculons $\det(\lambda A)$:

$$\det(\lambda A) = \begin{vmatrix} \lambda & 2\lambda \\ 2\lambda & -\lambda \end{vmatrix} = -5\lambda^2 = \lambda^2 \det(A).$$

Dans le cas général, si $A \in M_n(\mathbb{R})$ alors $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

Exercice 2

Calculer les déterminants suivants :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Solution. On développe Δ_1 suivant la première ligne :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 0 - 5 \times (-11) + 0 \times (-22) = 55.$$

On développe Δ_2 suivant la deuxième colonne :

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 5 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -14 - 4 = -18.$$

En effectuant sur Δ_3 les opérations suivantes : $L_2 - L_1 \mapsto L_2$, $L_3 - L_1 \mapsto L_3$ et $L_4 - L_1 \mapsto L_4$, on obtient :

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

On développe maintenant suivant la première ligne :

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

Avec un calcul direct ou avec plus d'opérations élémentaire, on obtient : $\Delta_3 = 16$.

Exercice 3

Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on pose $A_m = \begin{pmatrix} 1-m & 2m+1 & 2m+2 \\ m & m & 0 \\ 2 & m+1 & m-1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $\det(A_m)$.
2. Déterminer suivant la valeur de m le rang de A_m. Pour quelles valeurs de m la matrice A_m est inversible ?

Solution.

1. Calculons $\det(A_m)$:

$$\begin{aligned} \det(A_m) &= \begin{vmatrix} 1-m & 2m+1 & 2m+2 \\ m & m & 0 \\ 2 & m+1 & m-1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1-m & 3m & 2m+2 \\ m & 0 & 0 \\ 2 & m-1 & m-1 \end{vmatrix} \\ &= -m \begin{vmatrix} 3m & 2m+2 \\ m-1 & m-1 \end{vmatrix} \\ &= -m(m-1)(m-2) \end{aligned}$$

2. Déterminer suivant la valeur de m le rang de A_m. Pour quelles valeurs de m la matrice A_m est

inversible ?

Si $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2\}$ le rang de A_m est 3 car $\det(A_m) \neq 0$.

Si $m = 0$ On a $\det(A_0) = 0$ et donc $\mathrm{rg}(A_0) < 3$. En plus, on peut extraire de

$$\det(A_0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

un déterminant non nul d'ordre 2 qu'est (par exemple)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Donc, $\mathrm{rg}(A_0) = 2$.

Si $m = 1$ On a $\det(A_1) = 0$ et donc $\mathrm{rg}(A_1) < 3$. En plus, on peut extraire de

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

un déterminant non nul d'ordre 2 qu'est (par exemple)

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

Donc, $\mathrm{rg}(A_1) = 2$.

Si $m = 2$ On a $\det(A_2) = 0$ et donc $\mathrm{rg}(A_2) < 3$. En plus, on peut extraire de

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} -1 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

un déterminant non nul d'ordre 2 qu'est (par exemple)

$$\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -12.$$

Donc, $\text{rg}(A_2) = 2$.

La conclusion est donc comme suit :

$m \in$	$\mathbb{R} \setminus \{0,1,2\}$	$\{0,1,2\}$
$\text{rg}(A_m)$	3	2

On en déduit alors que

$$A_m \text{ est inversible } \Leftrightarrow \det(A_m) \neq 0 \Leftrightarrow m \in \mathbb{R} - \{0,1,2\}.$$

Exercice 4

Calculer, si possible, l'inverse de chacune des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Solution. On a $\det(A) = -4 \neq 0$. Donc, A est inversible et Donc,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{com}(A)^T = \begin{pmatrix} -1/4 & -1/4 & 3/4 \\ -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ 3/4 & -1/4 & -1/4 \end{pmatrix}.$$

On a $\det(B) = 1 \neq 0$. Donc, B est inversible et Donc,

$$B^{-1} = \frac{1}{\det(B)}\operatorname{com}(B)^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On a $\det(C) = 0$. Donc, C n'est pas inversible.

3

Applications linéaires

Exercice 1

Vérifier si les applications suivantes sont linéaires.

1. $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f_1(x, y, z) = x + y + z$.
2. $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f_2(x, y) = xy$.
3. $f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f_3(x, y, z) = (x + 2y, x - y + z)$.
4. $f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f_4(x, y) = (x + y, x - 1)$.
5. $f_5 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f_5(x, y, z) = (x - y, x - y + z, y)$.
6. $f_6 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f_6(x, y) = (x^2, x - y)$.

Solution.

1. L'application $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f_1(x, y, z) = x + y + z$ est linéaire. En effet, pour tous $(x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} f_1\big((x, y, z) + (x', y', z')\big) &= f_1(x + x', y + y', z + z') \\ &= (x + x') + (y + y') + (z + z') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (x+y+z)+(x'+y'+z') \\ &= f_1(x,y,z)+f_1(x',y',z') \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f_1\Big(\lambda(x,y,z)\Big) &= f_1(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \\ &= \lambda x + \lambda y + \lambda z \\ &= \lambda(x+y+z) \\ &= \lambda f_1(x,y,z). \end{aligned}$$

2. L'application$f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f_2(x,y) = xy$ n'est pas linéaire. En effet, $f_2(1,1) = 1$ et

$$f_2\Big(2(1,1)\Big) = f_2(2,2) = 4 \neq 2f_2(1,1) = 2.$$

3. L'application $f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f_3(x,y,z) = (x+2y, x-y+z)$ est linéaire. En effet, pour tous $(x,y,z), (x',y',z') \in \mathbb{R}^3$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} f_3\Big((x,y,z)+(x',y',z')\Big) &= f_3(x+x', y+y', z+z') \\ &= \Big((x+x')+2(y+y'), (x+x')-(y+y')+(z+z')\Big) \\ &= (x+2y, x-y+z)+(x'+2y', x'-y'+z') \\ &= f_3(x,y,z)+f_3(x',y',z') \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f_3\Big(\lambda(x,y,z)\Big) &= f_3(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \\ &= (\lambda x + 2\lambda y, \lambda x - \lambda y + \lambda z) \\ &= \lambda(x+2y, x-y+z) \\ &= \lambda f_3(x,y,z). \end{aligned}$$

4. L'application $f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f_4(x, y) = (x + y, x - 1)$ n'est pas linéaire. En effet, $f_4(0, 0) = (0, -1) \neq (0, 0)$.

5. L'application $f_5 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f_5(x, y, z) = (x - y, x - y + z, y)$ est linéaire. En effet, pour tous $(x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned}
f_5\Big((x, y, z) + (x', y', z')\Big) &= f_5(x + x', y + y', z + z') \\
&= \Big((x + x') - (y + y'), (x + x') - (y + y') + (z + z'), z + z'\Big) \\
&= (x - y, x - y + z, y) + (x' - y', x' - y' + z', y') \\
&= f_5(x, y, z) + f_3(x', y', z')
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
f_5\Big(\lambda(x, y, z)\Big) &= f_5(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \\
&= (\lambda x - \lambda y, \lambda x - \lambda y + \lambda z, \lambda y) \\
&= \lambda(x - y, x - y + z, y) \\
&= \lambda f_5(x, y, z).
\end{aligned}$$

6. L'application $f_6 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f_6(x, y) = (x^2, x - y)$ n'est pas linéaire. En effet, $f_6(1, 0) = (1, 1)$ et

$$f_2\Big(2(1, 0)\Big) = f_2(2, 0) = (4, 2) \neq 2f_2(1, 0) = (2, 2).$$

Exercice 2

Donner une base du noyau et une base de l'image des applications linéaires suivantes :

1. $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f_3(x, y, z) = (x + y, x - z)$.
2. $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f_3(x, y, z) = (x + 2y, x - y + z, x - z)$.

Solution.

1. — $\ker(f_1)$: Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}(x, y, z) \in \ker(f_1) &\Leftrightarrow f_1(x, y, z) = (0, 0)\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}\\ &\Leftrightarrow x = z = -y\end{aligned}$$

Donc, $\ker(f_1) = \{(x, -x, x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\{(1, -1, 1)\}$. Par conséquent, $\{(1, -1, 1)\}$ est une base de $\ker(f_1)$.

— $\mathrm{Im}(f_1)$: On a

$$\mathrm{Im}(f_1) = \mathrm{Vect}\Big\{f_1(1, 0, 0), f_1(0, 1, 0), f_1(0, 0, 1)\Big\} = \mathrm{Vect}\Big\{(1, 1), (1, 0), (0, -1)\Big\}.$$

Or, $(1, 1) = (1, 0) - (0, -1)$. Donc, $\mathrm{Im}(f_1) = \mathrm{Vect}\Big\{(1, 0), (0, -1)\Big\}$. Il est facile de vérifier que la famille $\Big\{(1, 0), (0, -1)\Big\}$ est libre. Donc, c'est une base de $\mathrm{Im}(f_1)$.

2. — $\ker(f_2)$: Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}(x, y, z) \in \ker(f_2) &\Leftrightarrow f_2(x, y, z) = (0, 0, 0)\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}\\ &\Leftrightarrow x = z = y = 0.\end{aligned}$$

Donc, $\ker(f_1) = \{(0, 0, 0)\}$ (c'est à dire que f_2 est injective).

— $\mathrm{Im}(f_2)$: On a

$$\mathrm{Im}(f_2) = \mathrm{Vect}\Big\{f_2(1, 0, 0), f_2(0, 1, 0), f_2(0, 0, 1)\Big\} = \mathrm{Vect}\Big\{(1, 1, 1), (2, -1, 0), (0, 1, -1)\Big\}.$$

Il est facile de vérifier que la famille $\Big\{(1, 1, 1), (2, -1, 0), (0, 1, -1)\Big\}$ est libre. Donc, c'est une base de $\mathrm{Im}(f_2)$.

Notons ici qu'on peut utiliser le fait que, dans le cas d'un endomorphisme, on a l'équivalence entre l'injectivité et la surjectivité. Donc, on peut déduire directement que $\mathrm{Im}(f_2) = \mathbb{R}^3$.

Exercice 3

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (x+y, z-y, x+z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

1. Déterminer des bases de $\mathrm{Im}(f)$ et $\ker(f)$.
2. Vérifier que $\mathrm{Im}(f)$ et $\ker(f)$ sont supplémentaires.

Solution.

1. Déterminons des bases de $\mathrm{Im}(f)$ et $\ker(f)$:
   - $\ker(f)$: Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$
\begin{aligned}
(x, y, z) \in \ker(f) &\Leftrightarrow f(x, y, z) = (0, 0, 0) \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ z - y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow x = -z = -y.
\end{aligned}
$$

   Donc, $\ker(f) = \mathrm{Vect}\{(1, -1, -1)\}$. Donc, la famille $\mathcal{B}_1 = \{(1, -1, -1)\}$ est une base de $\ker(f)$.

   - $\mathrm{Im}(f)$: On sait, d'après le théorème du rang, que

$$\dim\left(\mathrm{Im}(f)\right) = \dim\left(\mathbb{R}^3\right) - \left(\ker(f)\right) = 3 - 1 = 2.$$

   On sait aussi que

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\Big\{f(1, 0, 0), f(0, 1, 0), f(0, 0, 1)\Big\} = \mathrm{Vect}\Big\{(1, 0, 1), (1, -1, 0), (0, 1, 1)\Big\}.$$

   Il suffit donc d'en extraire une famille libre à deux éléments de la famille

$$\Big\{(1, 0, 1), (1, -1, 0), (0, 1, 1)\Big\}.$$

Mais on vérifie immédiatement que $\mathcal{B}_2 = \left\{(1,0,1),(1,-1,0)\right\}$ est une telle famille. C'est donc une base de $\mathrm{Im}(f)$.

2. Vérifions que $\mathrm{Im}(f)$ et $\ker(f)$ sont supplémentaires : On sait que

$$\dim\left(\mathbb{R}^3\right) = \left(\ker(f)\right) + \dim\left(\mathrm{Im}(f)\right).$$

Donc, pour vérifier que $\mathrm{Im}(f)$ et $\ker(f)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$, il suffit de montrer que $\mathrm{Im}(f) \cap \ker(f) = \{(0,0,0\}$.

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \in \mathrm{Im}(f) \cap \ker(f) &\Leftrightarrow \begin{cases} f(x,y,z) = (0,0,0) \\ (x,y,z) = \alpha(1,0,1) + \beta(1,-1,0) \text{ avec } \alpha,\beta \in \mathbb{R} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = -z = -y \\ x = \alpha + \beta \\ y = -\beta \qquad \text{avec } \alpha,\beta \in \mathbb{R} \\ z = \alpha \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + \beta \\ y = -\beta \qquad \text{avec } \alpha,\beta \in \mathbb{R} \\ z = \alpha \\ \alpha + \beta = -\alpha = \beta \end{cases} \\
&\Leftrightarrow x = y = z = 0.
\end{aligned}$$

Donc, $\mathrm{Im}(f) \cap \ker(f) = \{(0,0,0\}$. D'où, $\mathrm{Im}(f)$ et $\ker(f)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4

Soient (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(e_1) = e_1 + e_2 - e_3$, $f(e_2) = -e_2$ et $f(e_3) = e_1 - 2e_2$.

1. Donner l'expression de $f(x,y,z)$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

2. Donner la matrice de f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Solution.

1. L'expression explicite de $f(x,y,z)$: Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1) = xe_1 + ye_2 + ze_3.$$

Donc,

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= f(xe_1 + ye_2 + ze_3) \\ &= xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) \\ &= x(e_1 + e_2 - e_3) + y(-e_2) + z(e_1 - 2e_2) \\ &= (x+z)e_1 + (x - y - 2z)e_2 + (-x)e_3 \\ &= (x+z, x-y-2z, -x). \end{aligned}$$

2. La matrice de f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$M(f,\mathcal{B}_c) = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Exercice 5

Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère f_m l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f_m(x,y,z) = (x - y + z, mx + y - z, x - y + mz).$$

1. Déterminer le rang de f_m suivant les valeurs du réel m.

2. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f_m)$ et une base de $\ker(f_m)$.
3. f_m est-elle injective ? surjective ? bijective ?
4. On pose $m = 1$.
   (a) Déterminer $\mathrm{Im}(f_1) \cap \ker(f_1)$.
   (b) Que peut-on déduire ?

Solution.

1. Le rang de f_m : On commence par calculer la matrice de f_m relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$: On a

$$f_m(1,0,0) = (1,m,1), \quad f_m(0,1,0) = (-1,1,-1), \quad \text{et} \quad f_m(0,0,1) = (1,-1,m).$$

Donc,

$$A_m = M(f_m, \mathcal{B}_c) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ m & 1 & -1 \\ 1 & -1 & m \end{pmatrix}.$$

Ensuite,

$$\det(A_m) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ m & 1 & -1 \\ 1 & -1 & m \end{vmatrix}.$$

En effectuant les opérations élémentaires $C_2 + C_1 \to C_2$ et $C_3 - C_1 \to C_3$, on obtient :

$$\det(A_m) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m & m+1 & -1-m \\ 1 & 0 & m-1 \end{vmatrix} = (m+1)(m-1).$$

Si $m \in \mathbb{R} \setminus \{1,-1\}$ le rang de A_m est 3 car $\det(A_m) \neq 0$. Donc, $\mathrm{rg}(f_m) = 3$.

Si $m = 1$ On a $\det(A_1) = 0$ et donc $\text{rg}(A_1) < 3$. En plus, on peut extraire de

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

un déterminant non nul d'ordre 2 qu'est (par exemple) $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2.$

Donc, $\text{rg}(f_1) = \text{rg}(A_1) = 2$.

Si $m = -1$ On a $\det(A_{-1}) = 0$ et donc $\text{rg}(A_{-1}) < 3$. En plus, on peut extraire de

$$\det(A_{-1}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}.$$

un déterminant non nul d'ordre 2 qu'est (par exemple) $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2.$

Donc, $\text{rg}(f_{-1}) = \text{rg}(A_{-1}) = 2$.

La conclusion est donc comme suit :

$m \in$	$\mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$	$\{1, -1\}$
$\text{rg}(f_m)$	3	2

2. Déterminons une base de $\text{Im}(f_m)$ et une base de $\ker(f_m)$:

Si $m \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$ On a $\text{rg}(f_m) = 3$, et donc $\dim(\text{Im}(f_m)) = 3$. Ainsi, $\text{Im}(f_m) = \mathbb{R}^3$. Donc, la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Maintenant, en utilisant le théorème du rang, on déduit que $\dim(\ker(f_m)) = 0$. Par suite, $\ker(f_m) = \{(0, 0, 0)\}$.

Si $m = 1$**,** on a $\dim(\text{Im}(f_1)) = \text{rg}(f_1) = 2$. En outre,

$$\text{Im}(f_1) = \text{Vect}\Big(f_1(1,0,0), f_1(0,1,0), f_1(0,0,1)\Big) = \text{Vect}\Big((1,1,1), (-1,1,-1), (1,-1,1)\Big).$$

Or, $(-1,1,-1) = -(1,-1,1)$ et donc,

$$\mathrm{Im}(f_1) = \mathrm{Vect}\Big((1,1,1),(-1,1,-1)\Big).$$

Vu que $\dim(\mathrm{Im}(f_1)) = 2$, la famille $\Big((1,1,1),(-1,1,-1)\Big)$ est une base de $\mathrm{Im}(f_1)$.

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \in \ker(f_1) \quad &\Leftrightarrow \quad f_1(x,y,z) = (0,0) \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ et } y = z.
\end{aligned}$$

Donc, $\ker(f_1) = \mathrm{Vect}\{(0,1,1)\}$. Donc, la famille $\mathcal{B}_1 = \{(0,1,1)\}$ est une base de $\ker(f_1)$.

Si $m = -1$ On a $\dim(\mathrm{Im}(f_{-1})) = \mathrm{rg}(f_{-1}) = 2$. En outre,

$$\mathrm{Im}(f_{-1}) = \mathrm{Vect}\Big(f_{-1}(1,0,0), f_{-1}(0,1,0), f_{-1}(0,0,1)\Big) = \mathrm{Vect}\Big((1,-1,1),(-1,1,-1),(1,-1,-1)\Big).$$

Or, $(1,-1,1) = -(-1,1,-1)$ et donc,

$$\mathrm{Im}(f_{-1}) = \mathrm{Vect}\Big((-1,1,-1),(1,-1,-1)\Big).$$

Vu que $\dim(\mathrm{Im}(f_1)) = 2$, la famille $\Big((-1,1,-1),(1,-1,-1)\Big)$ est une base de $\mathrm{Im}(f_{-1})$.

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \in \ker(f_{-1}) \quad &\Leftrightarrow \quad f_{-1}(x,y,z) = (0,0) \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - y + z = 0 \\ -x + y - z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad x = y \text{ et } z = 0.
\end{aligned}$$

Donc, $\ker(f_{-1}) = \text{Vect}\{(1,1,0)\}$. Donc, la famille $\mathcal{B}_{-1} = \{(1,1,0)\}$ est une base de $\ker(f_{-1})$.

3. f_m est-elle injective ? surjective ? bijective ?

   L'application f_m est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Donc,

$$f_m \text{ est injective} \Leftrightarrow f_m \text{ est surjective} \Leftrightarrow f_m \text{ est bijective} \Leftrightarrow \text{rg}(f_m) = 3 \Leftrightarrow m \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}.$$

4. On pose $m = 1$.

   (a) Déterminons $\text{Im}(f_1) \cap \ker(f_1)$: On a

$$\text{Im}(f_1) = \text{Vect}\Big((1,1,1), (-1,1,-1)\Big) \text{ et } \ker(f_1) = \text{Vect}\Big\{(0,1,1)\Big\}.$$

   Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \in \text{Im}(f) \cap \ker(f) \quad &\Leftrightarrow \begin{cases} (x,y,z) = \alpha(0,1,1) \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R} \\ (x,y,z) = a(1,1,1) + b(-1,1,-1) \text{ avec } a, b \in \mathbb{R} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} (x,y,z) = \alpha(0,1,1) \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R} \\ a - b = 0 \\ a + b = \alpha \qquad \text{avec } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\ a - b = \alpha \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a = b = \alpha = 0 \\ (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}
\end{aligned}$$

   Donc, $\text{Im}(f_1) \cap \ker(f_1) = \{(0,0,0)\}$.

   (b) Que peut-on déduire ? On déduit que $\text{Im}(f)$ et $\ker(f)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$ (car $\dim(\text{Im}(f)) + \dim(\ker(f)) = \dim(\mathbb{R}^3)$) .

Exercice 6

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Donner une base de $\ker(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$.

Solution. Donnons une base de $\ker(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$:

On va faire cet exercice sans passer par l'expression explicite de f.

$\ker(f)$: Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
(x, y, z) \in \ker(f) &\Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -x + 2y - 2z = 0 \\ 3y - z = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x + 4y = 0 \\ -x - 4y = 0 \\ z = 3y \end{cases} \\
&\Leftrightarrow x = -4y \text{ et } z = 3y.
\end{aligned}$$

Donc, $\ker(f) = \mathrm{Vect}\{(-4, 1, 3)\}$. Donc, la famille $\{(-4, 1, 3)\}$ est une base de $\ker(f)$.

$\mathrm{Im}(f)$: On a

$$f(1, 0, 0) = (1, -1, 0), \quad f(0, 1, 0) = (1, 2, 3) \quad \text{et} \quad f(0, 0, 1) = (1, -2, -1).$$

Donc,

$$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}\Big\{(1,-1,0),(1,2,3),(1,-2,-1)\Big\}.$$

Or,

$$(1,-1,0) = \frac{1}{4}\Big((1,2,3) + 3(1,-2,-1)\Big).$$

Ainsi,

$$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}\Big\{(1,2,3),(1,-2,-1)\Big\}.$$

En plus, le théorème du rang affirme que

$$\dim(\operatorname{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\ker(f)) = 2.$$

Donc, $\Big\{(1,2,3),(1,-2,-1)\Big\}$ est une base de $\operatorname{Im}(f)$.

Exercice 7

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(x,y,z) = (-x+y+z, -6x+4y+2z, 3x-y+z)$.

1. Déterminer la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Vérifier que $A^2 = 2A$.
3. Montrer que si $(x,y,z) \in \operatorname{Im}(f)$ alors $f(x,y,z) = 2(x,y,z)$.
4. En déduire que $\ker(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont supplémentaires.

Solution.

1. Déterminons A, la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -6 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Vérifions que $A^2 = 2A$:

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -6 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -6 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -12 & 8 & 4 \\ 6 & -2 & 2 \end{pmatrix} = 2A.$$

3. Montrons que si $(x, y, z) \in \operatorname{Im}(f)$ alors $f(x, y, z) = 2(x, y, z)$: La relation matricielle $A^2 = 2A$ veut dire que $f^2 = 2f$. Soit $(x, y, z) \in \operatorname{Im}(f)$. Il existe $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ tel que $(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0)$. Donc,

$$f(x, y, z) = f\Big(f(x_0, y_0, z_0)\Big) = f^2(x_0, y_0, z_0) = 2f(x_0, y_0, z_0) = 2(x, y, z).$$

4. Déduisons que $\ker(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont supplémentaires :

   D'après le théorème du rang, on a $\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f))$. Donc, pour démontrer que $\ker(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont supplémentaires, il suffit de montrer que $\ker(f) \cap \operatorname{Im}(f) = \{(0, 0, 0)\}$.

   Soit $(x, y, z) \in \ker(f) \cap \operatorname{Im}(f)$. Donc, $(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0)$ pour un certain $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ (car $(x, y, z) \in \operatorname{Im}(f)$) et $f(x, y, z) = (0, 0, 0)$ (car $(x, y, z) \in \ker(f)$). Donc,

$$(0, 0, 0) = f(x, y, z) = f^2(x_0, y_0, z_0) = 2f(x_0, y_0, z_0) = 2(x, y, z).$$

   Ainsi, $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Par conséquent, $\ker(f) \cap \operatorname{Im}(f) = \{(0, 0, 0)\}$.

Exercice 8

Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Soient $e'_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3$, $e'_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3$ et $e'_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$.

1. Montrer que $\mathcal{B}' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Calculer $f(e'_1)$, $f(e'_2)$ et $f(e'_3)$ et en déduire B la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.
3. Donner P la matrice passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, puis calculer P^{-1}.
4. Ecrire la formule générale reliant A, B et P, et faire la vérification de la formule obtenue.
5. Calculer B^4 et A^4.

Solution.

1. Montrons que $\mathcal{B}' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$:

   On a
$$\det(\mathcal{B}') = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 3 \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

   Donc, $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Calculons $f(e'_1)$, $f(e'_2)$ et $f(e'_3)$ et déduisons B la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$:

   — On a $e'_1 = (2, 3, 1)$. Donc,
$$f(e'_1) = (a, b, c) \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

   Par suite, $f(e'_1) = (2, 3, 1) = e'_1$.

   — On a $e'_2 = (3, 4, 1)$. Donc,
$$f(e'_2) = (a, b, c) \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

   Par suite, $f(e'_2) = (6, 8, 2) = 2(3, 4, 1) = 2e'_2$.

— On a $e'_3 = (1, 2, 2)$. Donc,

$$f(e'_3) = (a, b, c) \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Par suite, $f(e'_3) = (3, 6, 6) = 3(1, 2, 2) = 3e'_3$.

Donc,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Donnons P la matrice passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, puis calculer P^{-1}. :

   La matrice P est :

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

   On a $\det(P) = -1$. Donc,

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \mathrm{com}(P)^T = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 6 & -4 & -1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Écrivons la formule générale reliant A, B et P, et faisons la vérification de la formule obtenue :

   La matrice B est celle de f dans la base B', la matrice A est celle de f dans B et P est la matrice de passage de B à B'. Donc, la formule reliant A, B et P est las suivante :

$$B = P^{-1}AP.$$

   Vérification :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 3 & 8 & 6 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = B.$$

5. Calculons B^4 et A^4 :

   La matrice B est diagonale. Donc, pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$B^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

   En particulier,

$$B^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{pmatrix}.$$

   Ensuite, de la formule $B = P^{-1}AP$, on déduit que $A = PBP^{-1}$. Donc,

$$A^4 = PBP^{-1}PBP^{-1}PBP^{-1}PBP^{-1} = PBBBBP^{-1} = PB^4P^{-1}.$$

   Par suite,

$$A^4 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 261 & -215 & 125 \\ 400 & -339 & 220 \\ 220 & -205 & 176 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme dont la matrice relativement à la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} -8 & 9 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 9 & -9 & 7 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^3 - 3A + 2I_3$ où I_3 est la matrice unité d'ordre 3.
2. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.
3. Soient les vecteurs $e'_1 = (1, 1, -1)$, $e'_2 = (0, 1, 1)$, $e'_3 = (1, 1, 0)$ et $u = (1, 2, 4)$.
   (a) Montrer que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Donner la matrice passage P de la base B à la base B' et calculer son inverse P^{-1}.
   (c) Déterminer la matrice A' de f par rapport à la base $\mathcal{B}'$.
4. Déterminer les coordonnées des vecteurs u et $f(u)$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Solution.

1. Calculons $A^3 - 3A + 2I_3$:

   On a

   . $A^2 = \begin{pmatrix} -8 & 9 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 9 & -9 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -8 & 9 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 9 & -9 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -9 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -9 & 9 & -5 \end{pmatrix}$, et

   . $A^3 = \begin{pmatrix} 10 & -9 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -9 & 9 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -8 & 9 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 9 & -9 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -26 & 27 & -18 \\ 0 & 1 & 0 \\ 27 & -27 & 19 \end{pmatrix}$.

   Donc,

$$A^3 - 3A + 2I_3 = \begin{pmatrix} -26 & 27 & -18 \\ 0 & 1 & 0 \\ 27 & -27 & 19 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -8 & 9 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 9 & -9 & 7 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Déduisons que A est inversible et déterminons A^{-1} :

   On a $A^3 - 3A + 2I_3 = 0_3$. Donc, $(A^2 - 3I_3)A = -2I_3$. Ainsi, $\frac{-1}{2}(A^2 - 3I_3)A = I_3$. Par suite A est inversible et son inverse est :

$$A^{-1} = \frac{-1}{2}(A^2 - 3I_3) = \frac{-1}{2}\left(\begin{pmatrix} 10 & -9 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -9 & 9 & -5 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -7/2 & 9/2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 9/2 & -9/2 & 4 \end{pmatrix}$$

3. Soient les vecteurs $e'_1 = (1,1,-1)$, $e'_2 = (0,1,1)$, $e'_3 = (1,1,0)$ et $u = (1,2,4)$.

   (a) Montrons que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$:

   $$\det(\mathcal{B}') = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

   Donc, $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Donnons la matrice passage P de la base B à la base B' et calculons son inverse P^{-1} :

   La matrice P est :

   $$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   La matrice P^{-1} est :

   $$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)}\mathrm{com}(P)^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (c) La matrice A' de f par rapport à la base $\mathcal{B}'$:

   La formule reliant A', A et P est $A' = P^{-1}AP$. Donc,

   $$A' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -8 & 9 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 9 & -9 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -7 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & -2 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Les coordonnées des vecteurs u et $f(u)$ dans la base $\mathcal{B}'$: On pose

$$X = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}), \quad X' = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y' = \mathrm{Mat}(f(u), \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}.$$

On a $X = PX'$. Donc,

$$X' = P^{-1}X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Aussi,

$$Y' = A'X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & -2 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 16 \\ -11 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10

Soit $f_m : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme dont la matrice relativement à la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est $A_m = \begin{pmatrix} 2m-1 & 1-m & -m \\ 2m-2 & 2-m & 2-2m \\ 0 & 0 & m-1 \end{pmatrix}$ où $m \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer $f_m(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

2. Calculer $\det(A_m)$ et en déduire les valeurs de m pour lesquelles A_m est inversible.

3. Déterminer, suivant la valeur de m, le rang de A_m.
4. On pose $g = f_0$. Déterminer une base de $\ker(g)$ et une base de $\operatorname{Im}(g)$.
5. On pose $M = A_2$. Calculer $M^3 - 4M^2 + 5M - 2I_3$ et en déduire M^{-1} l'inverse de M.
6. Soient les vecteurs $u_1 = (1, 2, 0)$, $u_2 = (-1, -1, 0)$ et $u_3 = (1, 0, 1)$.
   (a) Montrer que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Donner la matrice passage P de la base B à la base B' et calculer son inverse P^{-1}.
   (c) Déterminer la matrice A'_m de f_m par rapport à la base $\mathcal{B}'$.
   (d) Déterminer les coordonnées des vecteurs w et $f_m(w)$ dans la base $\mathcal{B}'$ avec $w = (-2, 3, 4)$.

Solution.

1. Déterminons $f_m(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:
   Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a
   $$(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) = xe_1 + ye_2 + ze_3.$$
   En plus, d'après la matrice de f_m par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on a
   $$f_m(e_1) = (2m - 1, 2m - 2, 0), \quad f_m(e_2) = (1 - m, 2 - m, 0), \quad \text{et} \quad f_m(e_3) = (-m, 2 - 2m, m - 1).$$
   Donc,
   $$\begin{aligned} f_m(x, y, z) &= f_m(xe_1 + ye_2 + ze_3) \\ &= xf_m(e_1) + yf_m(e_2) + zf_m(e_3) \\ &= x(2m - 1, 2m - 2, 0) + y(1 - m, 2 - m, 0) + z(-m, 2 - 2m, m - 1) \\ &= \big((2m - 1)x + (1 - m)y - mz, (2m - 2)x + (2 - m)y + (2 - 2m)z, (m - 1)z\big). \end{aligned}$$
2. Caculons $\det(A_m)$ et en déduisons les valeurs de m pour lesquelles A_m est inversible :

$$\det(A_m) = \begin{vmatrix} 2m-1 & 1-m & -m \\ 2m-2 & 2-m & 2-2m \\ 0 & 0 & m-1 \end{vmatrix} = (m-1)\begin{pmatrix} 2m-1 & 1-m \\ 2m-2 & 2-m \end{pmatrix} = (m-1)m.$$

On a alors,

$$A_m \text{ est inversible } \Leftrightarrow \det(A_m) \neq 0 \Leftrightarrow m \in \mathbb{R} - \{0, 1\}.$$

3. Déterminons le rang de A_m :

Si $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ le rang de A_m est 3 car $\det(A_m) \neq 0$.

Si $m = 0$ On a $\det(A_0) = 0$ et donc $\mathrm{rg}(A_0) < 3$. En plus, on peut extraire de

$$\det(A_0) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

un déterminant non nul d'ordre 2 qu'est (par exemple)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

Donc, $\mathrm{rg}(A_0) = 2$.

Si $m = 1$ On a $\det(A_1) = 0$ et donc $\mathrm{rg}(A_1) < 3$. En plus, on peut extraire de

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

un déterminant non nul d'ordre 2 qu'est (par exemple)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Donc, $\text{rg}(A_1) = 2$.

La conclusion est donc comme suit :

$m \in$	$\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$	$\{0, 1\}$
$\text{rg}(A_m)$	3	2

4. On pose $g = f_0$. Déterminons une base de $\ker(g)$ et une base de $\text{Im}(g)$:

   Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$g(x, y, z) = (-x + y, -2x + 2y + 2z, -z).$$

   — $\ker(g)$: Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}(x, y, z) \in \ker(g) &\Leftrightarrow g(x, y, z) = (0, 0, 0)\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ -2x + 2y + 2z = 0 \\ -z = 0 \end{cases}\\ &\Leftrightarrow x = y \text{ et } z = 0.\end{aligned}$$

   Donc, $\ker(g) = \text{Vect}\{(1, 1, 0)\}$. Donc, la famille $\mathcal{B}_0 = \{(1, 1, 0)\}$ est une base de $\ker(g)$.

   — $\text{Im}(g)$: On sait, d'après le théorème du rang, que

$$\dim\left(\text{Im}(g)\right) = \dim\left(\mathbb{R}^3\right) - \left(\ker(g)\right) = 3 - 1 = 2.$$

   On sait aussi que

$$\begin{aligned}\text{Im}(g) &= \text{Vect}\left\{g(1, 0, 0), g(0, 1, 0), g(0, 0, 1)\right\}\\ &= \text{Vect}\left\{(-1, -2, 0), (1, 2, 0), (0, 2, -1)\right\}\\ &= \text{Vect}\left\{(1, 2, 0), (0, 2, -1)\right\}.\end{aligned}$$

   Donc, $\mathcal{B}_1 = \left\{(1, 2, 0), (0, 2, -1)\right\}$ est une base de $\text{Im}(g)$.

5. On pose $M = A_2$. Calculons $M^3 - 4M^2 + 5M - 2I_3$ et en déduisons M^{-1} l'inverse de M :

On a :

. $M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

. $M^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -6 \\ 6 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et

. $M^3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & -3 & -6 \\ 6 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -7 & -14 \\ 14 & -6 & -14 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Donc,

$$M^3-4M^2+5M-2I_3 = \begin{pmatrix} 15 & -7 & -14 \\ 14 & -6 & -14 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 7 & -3 & -6 \\ 6 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit ainsi que $\frac{1}{2}(M^2 - 4M + 5I_3)M = I_3$. Donc,

$$M^{-1} = \frac{1}{2}(M^2 - 4M + 5I) = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1 \\ -1 & 3/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Soient les vecteurs $u_1 = (1, 2, 0)$, $u_2 = (-1, -1, 0)$ et $u_3 = (1, 0, 1)$.

(a) Montrons que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$:

$$\det(\mathcal{B}') = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Donc, $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Donnons la matrice passage P de la base B à la base B' et calculer son inverse P^{-1} : On a

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec $\det(P) = 1$. Donc,

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)}\text{com}(P)^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Déterminons la matrice A'_m de f_m par rapport à la base $\mathcal{B}'$:

$$A'_m = P^{-1}A_mP = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2m-1 & 1-m & -m \\ 2m-2 & 2-m & 2-2m \\ 0 & 0 & m-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m-1 \end{pmatrix}.$$

(d) Déterminons les coordonnées des vecteurs w et $f_m(w)$ dans la base $\mathcal{B}'$ avec $w = (-2, 3, 4)$: On pose

$$X = \text{Mat}(w, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad X' = \text{Mat}(w, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y'_m = \text{Mat}(f_m(w), \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} \alpha_m \\ \beta_m \\ \gamma_m \end{pmatrix}.$$

On a $X = PX'$. Donc,

$$X' = P^{-1}X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 15 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Aussi,

$$Y'_m = A'_m X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 15 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 15m \\ 4m-4 \end{pmatrix}.$$

4

Systèmes linéaires

Exercice 1

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Le système ci-dessous est-il de Cramer ? Si oui, exprimer la solution de ce système.

$$(S) : \begin{cases} -x + 2y - 8z & = & a \\ 3x + y + 3z & = & b \\ 2x + 7z & = & c \end{cases}$$

Solution. Oui le système (S) est de Cramer. En effet,

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -8 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 7 \end{vmatrix} = -21.$$

En plus,

— $\Delta_x = \begin{vmatrix} a & 2 & -8 \\ b & 1 & 3 \\ c & 0 & 7 \end{vmatrix} = 7a - 14b + 14c,$

— $\Delta_y = \begin{vmatrix} -1 & a & -8 \\ 3 & b & 3 \\ 2 & c & 7 \end{vmatrix} = 15a + 9b - 21c$ et

— $\Delta_z = \begin{vmatrix} -1 & 2 & a \\ 3 & 1 & b \\ 2 & 0 & c \end{vmatrix} = -2a + 4b - 7c.$

Par conséquent,

$$S = \left\{ \left(\frac{7a - 14b + 14c}{-21}, \frac{15a + 9b - 21c}{-21}, \frac{-2a + 4b - 7c}{-21} \right) \right\}.$$

Exercice 2

Résoudre les systèmes linéaires suivants par les méthodes de Cramer et aussi de pivot de Gauss :

$$(S_1) : \begin{cases} x + y + 2z &= 3 \\ x + 2y + z &= 1 \\ 2x + y + z &= 0 \end{cases} \qquad (S_2) : \begin{cases} x + 2z &= 1 \\ -y + z &= 2 \\ x - 2y &= 1 \end{cases}$$

Solution. On va commencer par la méthode du pivot de Gauss :

Pour le système (S_1) :

$$(S_1) \iff \begin{cases} x + y + 2z &= 3 & \\ y - z &= -2 & L_2 - L_1 \to L_2 \\ -y - 3z &= -6 & L_3 - 2L_1 \to L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y + 2z &= 3 & \\ y - z &= -2 & \\ -4z &= -8 & L_3 + L_2 \to L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x &= -1 & \\ y &= 0 & \\ z &= 2 & L_3 + L_2 \to L_3 \end{cases}$$

Pour le système (S_2) :

$$
\begin{aligned}
(S_2) \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x+2z &= 1 \\ -y+z &= 2 \\ -2y-2z &= 0 \qquad L_3 - L_1 \to L_3 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x+2z &= 1 \\ -y+z &= 2 \\ -4z &= -4 \qquad L_3 - 2L_2 \to L_3 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x &= -1 \\ y &= -1 \\ z &= 1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

On va utiliser maintenant la méthode de Cramer :

Pour le système (S_1) : On a

$$
\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -8.
$$

Donc,

$$
x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = -1, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = 0, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = 2.
$$

Pour le système (S_1) : On a

$$
\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 4, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -4, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -4, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4.
$$

Donc,

$$
x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = -1, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = -1, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = 1.
$$

Exercice 3

Soit $m \in \mathbb{R}$. Résoudre le système suivant :

$$(S_m) : \begin{cases} x + my &= -3 \\ mx + 4y &= 6 \end{cases}$$

Quelle interprétation géométrique du résultat faites-vous ?

Solution.

$$\begin{cases} x + my &= -3 \\ mx + 4y &= 6 \end{cases} \iff \begin{cases} x + my &= -3 \\ (4 - m^2)y &= 6 + 3m \quad L_2 - mL_1 \to L_2 \end{cases}$$

Discutons alors suivant les valeurs de m.

— Si $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$, alors $y = \dfrac{6 + 3m}{4 - m^2} = \dfrac{3}{2 - m}$ et $x = \dfrac{-6}{2 - m}$. Ainsi,

$$S_m = \left\{ \left(\frac{-6}{2 - m}, \frac{3}{2 - m} \right) \right\}.$$

— Si $m = 2$, alors la deuxième ligne est $0 = 12$ ce qu'est absurde. Donc, $S_2 = \emptyset$.

— Si $m = -2$, la deuxième ligne est donc $0y = 0$. Ainsi, y est quelconque et $x = -3 + 2y$. Donc, $S_{-2} = \{(-3 + 2y, y) \mid y \in \mathbb{R})\}$.

Géométriquement, on peut en déduire que les deux droites $(D_m) : x + my = -3$ et $(\Delta_m) : mx + 4y = 6$ sont

— sécantes si $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$,

— parallèles strictement si $m = 2$ et

—

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, suivant les valeurs de $m \in \mathbb{R}$, le système suivant :

$$(S_m) : \begin{cases} x + my + mz &= 1 \\ mx + y + mz &= m \\ mx + my + z &= m^2 \end{cases}$$

Solution.

$$\begin{cases} x+my+mz &= 1 \\ mx+y+mz &= m \\ mx+my+z &= m^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x+my+mz &= 1 & \\ (1-m^2)y+m(1-m)z &= 0 & L_2-mL_1 \to L_2 \\ m(1-m)y+(1-m^2)z &= m^2-m & L_3-mL_1 \to L_3 \end{cases}$$

Si $m=1$, alors (S_m) est équivaut à l'équation $x+y+z=1$. Donc,

$$S_1 = \{(x,y,1-x-y) \mid x,y \in R\}.$$

Si $m \neq 1$ alors

$$(S_m) \iff \begin{cases} x+my+mz &= 1 \\ (1+m)y+mz &= 0 \\ my+(1+m)z &= -m \end{cases}$$

Si $m=-1$ alors

$$(S_{-1}) \iff \begin{cases} x-y-z &= 1 \\ -z &= 0 \\ -y &= 1 \end{cases}$$

Donc $S_{-1} = \{(0,-1,0)\}$.

Si $m=0$, alors

$$(S_0) \iff \begin{cases} x &= 1 \\ y &= 0 \\ z &= 0 \end{cases}$$

Donc $S_{-1} = \{(1,0,0)\}$.

Si $m \notin \{0, 1, -1\}$,

$$(S_m) \iff \begin{cases} x + my + mz = 1 \\ y + \dfrac{m}{m+1}z = 0 \\ y + \dfrac{1+m}{m}z = -1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + my + mz = 1 \\ y + \dfrac{m}{m+1}z = 0 \\ \dfrac{2m+1}{m(m+1)}z = -1 \qquad L_3 - L_2 \to L_3 \end{cases}$$

Si $m = -1/2$ alors $0 = -1$, ce qu'est absurde. Donc, $S_{-1/2} = \emptyset$.

Si $m \notin \{0, 1, -1, -1/2\}$, alors

$$(S_m) \iff \begin{cases} x = \dfrac{(m+1)^2}{2m+1} \\ y = \dfrac{m^2}{2m+1} \\ z = -\dfrac{m(m+1)}{2m+1} \end{cases}$$

Donc,

$$S_m = \left\{ \left(\frac{(m+1)^2}{2m+1}, \frac{m^2}{2m+1}, -\frac{m(m+1)}{2m+1} \right) \right\}.$$

Exercice 5

Résoudre le système suivant :

$$(S_{(a,b)}) : \begin{cases} x + by + az = 1 \\ x + aby + z = b \\ ax + by + z = 1 \end{cases}$$

Solution.

$$\begin{cases} x+by+az &= 1 \\ x+aby+z &= b \\ ax+by+z &= 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x+by+az &= 1 & \\ b(a-1)y+(1-a)z &= b-1 & L_2-L_1\to L_2 \\ b(1-a)y+(1-a^2)z &= 1-a & L_3-aL_1\to L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+by+az &= 1 & \\ b(a-1)y+(1-a)z &= b-1 & \\ (2-a-a^2)z &= b-a & L_3+L_2\to L_3 \end{cases}$$

Remarquons que $2-a-a^2=-(a-1)(a+2)$.

— Si $a\in\mathbb{R}\setminus\{-2,1\}$ alors $z=\dfrac{b-a}{2-a-a^2}$. En plus la deuxième ligne devient $b(a-1)y+\dfrac{b-a}{a+2}=b-1$. Si $b=0$ alors $\dfrac{-a}{a+2}=-1$. Donc, $-a=-a-2$, ce qu'est absurde. Ainsi, dans ce cas, $S_{(a,0)}=\emptyset$. Si $b\neq 0$, on a alors $y=\dfrac{ab+b-2}{b(a-1)(a+2)}$. Ensuite, $x=1-by-az=\dfrac{2a^2+a-2ab-b}{a^2+a-2}$. Enfin,

$$S_{(a,b)}=\left\{\left(\frac{2a^2+a-2ab-b}{a^2+a-2},\frac{ab+b-2}{b(a-1)(a+2)},\frac{b-a}{2-a-a^2}\right)\right\}.$$

— Si $a=1$, le système devient :

$$\begin{cases} x+by+z &= 1 \\ 0 &= b-1 \\ 0 &= b-1 \end{cases}$$

Donc, si $b\neq 1$, on a immédiatement $S_{(1,b)}=\emptyset$. En revanche, si $b=1$ le système est équivaut à l'équation $x+y+z=1$. Dans ce cas,

$$S_{(1,1)}=\{(x,y,1-x-y)\mid x,y\in\mathbb{R}\}.$$

— Si $a=-2$, le système devient :

$$\begin{cases} x+by-2z &= 1 \\ -3by+3z &= b-1 \\ 0 &= b+2 \end{cases}$$

Donc, si $b \neq -2$ alors $S_{(-2,b)} = \emptyset$. Si maintenant $b = -2$ le système devient

$$\begin{cases} x - 2y - 2z & = & 1 \\ 6y + 3z & = & -3 \end{cases}$$

Donc, $y = \dfrac{-1-z}{2}$ et $x = 1 + 2y + 2z = z$. Ainsi, $S_{(-2,-2)} = \left\{ \left(z, \dfrac{-1-z}{2}, z \right) \mid z \in \mathbb{R} \right\}$.

Conclusion :

— Si $a \neq 1$ et $a \neq -2$ et $b \neq 0$, le système admet une unique solution.

— Si $a = 1$ et $b \neq 1$, il n'y a pas de solution (le système n'est pas compatible).

— Si $a = 1$ et $b = 1$, il y a une infinité de solutions.

— Si $a = -2$ et $b \neq -2$, il n'y a pas de solution.

— Si $a = -2$ et $b = -2$, il y a une infinité de solutions.

— Si $b = 0$ il n'y a pas de solution.

Exercice 6

Déterminer tous les triplets $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que le polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ vérifie

1. $P(-1) = 5$, $P(1) = 1$ et $P(2) = 2$.
2. $P(-1) = 4$ et $P(2) = 1$.

Solution.

1.

$$\begin{cases} P(-1) &= 5 \\ P(1) &= 1 \\ P(2) &= 2 \end{cases} \iff \begin{cases} a-b+c &= 5 \\ a+b+c &= 1 \\ 4a+2b+c &= 2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a-b+c &= 5 & \\ 2b &= -4 & L_2 - L_1 \to L_1 \\ 6b-3c &= -18 & L_3 - 4L_1 \to L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a-b+c &= 5 & \\ 2b &= -4 & \\ -3c &= -6 & L_3 - 3L_1 \to L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a &= 1 \\ b &= -2 \\ c &= 2 \end{cases}$$

Le seul triplet qui convient $(1, -2, 2)$. Donc, $P(X) = X^2 - 2X + 2$.

2.

$$\begin{cases} P(-1) &= 4 \\ P(2) &= 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a-b+c &= 4 \\ 4a+2b+c &= 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a-b+c &= 4 & \\ 6b-3c &= -15 & L_3 - 4L_1 \to L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a &= -b-1 \\ c &= 2b+5 \end{cases}$$

Les solutions de ce système sont $(-b-1, b, 2b+5)$ avec $b \in \mathbb{R}$. Par suite, $P(X) = -(b+1)X^2 + bX + 2b + 5$ avec $b \in \mathbb{R}$.

Exercice 7

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système suivant :

$$(S) : \begin{cases} x^3y^2z^6 & = & 1 \\ x^4y^5z^{12} & = & 2 \\ x^2y^2z^5 & = & 3 \end{cases}$$

Solution. De la première ligne, on remarque que x est strictement positif. De même de la deuxième et la troisième lignes on remarque que y et z sont strictement positifs. On pose $a = \ln x$, $b = \ln y$ et $c = \ln z$. La fonction logarithme étant bijective sur l'intervalle $]0, +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}
(S) \quad & \iff \begin{cases} 3a + 2b + 6c & = & 0 \\ 4a + 5b + 12c & = & \ln 2 \\ 2a + 2b + 5c & = & \ln 3 \end{cases} \\
& \iff \begin{cases} 3a + 2b + 6c & = & 0 & \\ 7b + 12c & = & 3\ln 2 & 3L_2 - 4L_1 \to L_2 \\ 2b + 3c & = & 3\ln 3 & 3L_3 - 2L_1 \to L_3 \end{cases} \\
& \iff \begin{cases} 3a + 2b + 6c & = & 0 & \\ 7b + 12c & = & 3\ln 2 & \\ -3c & = & 21\ln 3 - 6\ln 2 & 7L_3 - 2L_2 \to L_3 \end{cases} \\
& \iff \begin{cases} a & = & -2\ln 2 + 6\ln 3 \\ b & = & -3\ln 2 + 12\ln 3 \\ c & = & 2\ln 2 - 7\ln 3. \end{cases}
\end{aligned}$$

Ceci donne finalement comme unique solution

$$\begin{cases} x & = & 2^{-2}3^6 \\ y & = & 2^{-3}3^{12} \\ z & = & 2^2 3^{-7}. \end{cases}$$