UNIVERSITÉ MOULAY ISMAIL
FACULTÉ DES SCIENCES MEKNÈS
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Examens corrigés -Algèbre 2-
SMPC
2018-2019

Professeure : Mme Chahrazade BAKKARI

Examen (Faculté des sciences, Meknès, 2018/2019)

Exercice 1.
Résoudre, dans $\mathbb{R}^3$, le système linéaire suivant (où $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$) :

$$(S) : \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & y & + & 2z & = & 2 \\ x & - & 4y & + & 7z & = & \lambda. \end{array} \right.$$

Solution.
Soit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
Le système (S) peut être représenté matriciellement comme suit :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -4 & 7 & \lambda \end{array}\right) \curvearrowright \begin{array}{c} \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & -6 & 8 & \lambda - 1 \end{array}\right) \curvearrowright -\tfrac{1}{3}L_2 \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & -6 & 8 & \lambda - 1 \end{array}\right)$$

$$\curvearrowright \begin{array}{c} \\ \\ L_3 + 6L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - 1 \end{array}\right).$$

Le système devient :

$$(S) : \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ & & y & - & \frac{4}{3}z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & \lambda - 1 \quad \textit{impossible car } \lambda \neq 1. \end{array} \right.$$

Donc $S = \emptyset$.

Attention ! (Erreur à ne peut commettre).

La matrice associée au système (S) est de déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 7 \end{vmatrix} = 0$. Ceci n'implique pas que $S = \emptyset$. Mais ça implique que ce système est non de Cramer (*i.e* n'admet pas une solution unique), et donc on cherche le plus grand système de Cramer extrait de (S).

En effet : $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$. (S) devient : $\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x + 2y = 1 + z \\ 2x + y = 2 - 2z \end{array} \right. \\ x - 4y + 7z = \lambda \quad (E). \end{array} \right.$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1+z & 2 \\ 2-2z & 1 \end{vmatrix}}{-3} = 1 - \frac{5}{3}z.$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1+z \\ 2 & 2-2z \end{vmatrix}}{-3} = \frac{4}{3}z.$$

On remplace dans (E) : $1 - \frac{5}{3}z - \frac{16}{3}z + 7z = \lambda \Longleftrightarrow 1 = \lambda$ (impossible car $\lambda \neq 1$), donc (E) n'accepte pas la solution. Par suite $S = \emptyset$.

Exercice 2.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad f(x,y,z) = (x+2y-2z, 3x+y-3z, 3x+2y-4z).$$

1) Déterminer la matrice A de f relativement à la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

2) Déterminer $\operatorname{Ker} f$.

3) Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$.

4) f est-il bijectif ?

5) On considère les vecteurs $e'_1 = (0,1,1)$, $e'_2 = (1,0,1)$ et $e'_3 = (1,1,0)$.
Montrer que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

6) Donner la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

7) Calculer $P^2 - P$.

8) En déduire :

- **a)** L'inverse de P.
- **b)** La matrice A' de f relativement à la base $\mathcal{B}'$.

Solution.

1) Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$$A = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow e_1 \\ \leftarrow e_2 \\ \leftarrow e_3 \end{array}$$

En effet :

- $f(e_1) = f(1,0,0) = (1,3,3)$.
- $f(e_2) = f(0,1,0) = (2,1,2)$.
- $f(e_1) = f(0,0,1) = (-2,-3,-4)$.

2) $\operatorname{Ker} f = \{X \in \mathbb{R}^3 \ / \ f(X) = 0_{\mathbb{R}^3}\}$
$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ f(x,y,z) = (0,0,0)\}$.

On a $f(x,y,z) = (0,0,0) \Longleftrightarrow (x+2y-2z, 3x+y-3z, 3x+2y-4z) = (0,0,0)$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & 2z & = & 0 \\ 3x & + & y & - & 3z & = & 0 \\ 3x & + & 2y & - & 4z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$L_1 - L_3 : \ -2x + 2z = 0 \Longleftrightarrow x = z.$$
$$L_2 - L_3 : \ -y + z = 0 \Longleftrightarrow y = z.$$

On remplace dans L_1 : $z + 2z - 2z = 0 \Longrightarrow z = 0 \Longrightarrow x = y = z = 0$.
Donc $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0)\}$.

Autre méthode (méthode de Gauss)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right) \curvearrowright \begin{array}{c} \\ L_2 - 3L_1 \\ L_3 - 3L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \end{array}\right) \curvearrowright -\tfrac{1}{5}L_2 \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -\frac{3}{5} & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\curvearrowright \begin{array}{c} \\ \\ L_3 + 4L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -\frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{5} & 0 \end{array}\right).$$

Le système devient donc $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & 2z & = & 0 \\ & & y & - & \frac{3}{5}z & = & 0 \\ & & & - & \frac{2}{5}z & = & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0. \end{array}\right.$

3) D'après le théorème du rang, on a :

$$\underset{\underset{0}{\shortparallel}}{\dim \operatorname{Ker} f} + \dim \operatorname{Im} f = \underset{\underset{3}{\shortparallel}}{\dim \mathbb{R}^3}, \quad \text{donc} \quad \dim \operatorname{Im} f = 3.$$

Or $\operatorname{Im} f \subseteq \mathbb{R}^3$, par suite $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$. Dès lors, la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ sera aussi une base de $\operatorname{Im} f$.

Remarque.
On aurait du remarquer d'après **2)** que :

$$\operatorname{Ker} f = \{0_{\mathbb{R}^3}\} \Longleftrightarrow f \text{ est injectif} \Longleftrightarrow f \text{ est surjectif} \Longleftrightarrow f \text{ est bijectif}$$

(car f est un endomorphisme) et donc $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$.

4) $\operatorname{Ker} f = \{0_{\mathbb{R}^3}\} \Longleftrightarrow f$ est injectif et $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3 \Longleftrightarrow f$ est surjectif.
Par suite f est bijectif.

5) Soit $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ avec $e'_1 = (0,1,1)$, $e'_2 = (1,0,1)$ et $e'_3 = (1,1,0)$.

On a $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, donc $\mathcal{B}'$ est libre.

Or $Card\,\mathcal{B}' = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, donc $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

6) $$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = P = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} e'_1 & e'_2 & e'_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow e_1 \\ \leftarrow e_2 \\ \leftarrow e_3 \end{array} \end{array}.$$

7) $$P^2 = P.P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$P^2 - P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_3.$$

8) **a)** $P^2 - P = 2I_3 \Longleftrightarrow \frac{1}{2}(P^2 - P) = I_3 \Longleftrightarrow P\left[\frac{1}{2}(P - I_3)\right] = I_3$.

Donc P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{2}(P - I_3) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

b)

$$\begin{aligned} A' = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}') &= P^{-1}.A.P \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 3.
Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 9 & 7 \\ 0 & \sqrt{2} & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer $\det(A)$ et $\det(A^3)$. En déduire le rang de A et le rang de A^3.

2) Calculer le polynôme caractéristique de A et en déduire ses valeurs propres.

3) A est-elle diagonalisable ? Justifier votre réponse.

Solution.

1) A étant triangulaire, son déterminant est le produit des éléments diagonaux.
$\det(A) = 1 \times \sqrt{2} \times 2 \times (-1) = -2\sqrt{2} \neq 0$, donc $\mathrm{rg}(A) = 4$.
$\det(A^3) = (\det(A))^3 = (-2\sqrt{2})^3 = -16\sqrt{2} \neq 0$, donc $\mathrm{rg}(A^3) = 4$.

2)

$$P_A(X) = \det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} 1-X & 8 & 9 & 7 \\ 0 & \sqrt{2}-X & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 2-X & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1-X \end{vmatrix} = (1-X)(\sqrt{2}-X)(2-X)(-1-X).$$

1, $\sqrt{2}$, 2 et -1 sont les valeurs propres de A.

3) $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ admet quatre valeurs propres distinctes, donc A est diagonalisable.

Examen (Faculté des sciences, Meknès, rattrapage, 2018/2019)

Exercice 1.

1) Répondre par vrai ou faux et justifier votre réponse.
Soient A et B deux matrices quelconques à coefficients réels.

a) Si le produit AB existe, alors BA existe aussi.

b) Si $AB = O$ (la matrice nulle) alors $A = O$ ou $B = O$.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & - & 2z & = & -1 \\ 2x & + & y & - & 4z & = & 3 \\ x & + & 4y & - & 2z & = & 4 \\ 5x & + & 6y & - & 10z & = & 10. \end{array}\right.$$

Solution.

1) **a)** Si $A \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, alors $A.B \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ mais le produit $B.A$ est impossible. Donc **a)** est fausse.

b) Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A.B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Donc **b)** est fausse.

2)

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & - & 2z & = & -1 \\ 2x & + & y & - & 4z & = & 3 \\ x & + & 4y & - & 2z & = & 4 \\ 5x & + & 6y & - & 10z & = & 10 \end{array}\right. \curvearrowright \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 1 & 4 & -2 & 4 \\ 5 & 6 & -10 & 10 \end{array}\right)$$

$$\curvearrowright \begin{array}{c} \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - L_1 \\ L_4 - 5L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 7 & 0 & 5 \\ 0 & 7 & 0 & 5 \\ 0 & 21 & 0 & 15 \end{array}\right).$$

On peut remarquer que $L_2 = L_3 \Leftrightarrow L_4$, et on peut supprimer donc L_3 et L_4, sinon on poursuit le calcul et on obtient :

$$\begin{array}{c} \\ \frac{1}{7}L_2 \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -3 & -2 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{5}{7} \\ 0 & 7 & 0 & 5 \\ 0 & 21 & 0 & 15 \end{array}\right) \curvearrowright \begin{array}{c} \\ \\ L_3 - 7L_2 \\ L_4 - 21L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -3 & -2 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Le système devient :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & 3y & - & 2z & = & -1 \\ & & y & & & = & \frac{5}{7} \end{array}\right. \Longrightarrow \begin{cases} x = -1 + 3y + 2z \\ y = \frac{5}{7} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \frac{8}{7} + 2z \\ y = \frac{5}{7}. \end{cases}$$

Donc $S = \left\{ \left(\frac{8}{7} + 2z, \frac{5}{7}, z \right) / \, z \in \mathbb{R} \right\}$.

Exercice 2. Soit $f \, : \, \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par :

$$f(x, y, z, t) = (x + y + z + t, x - y - z + t).$$

1) Trouver une base de $\operatorname{Ker} f$. f est-elle injective ?

2) Trouver une base de $\operatorname{Im} f$. f est-elle surjective ?

Solution.

1) $\operatorname{Ker} f = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \; / \; f(x, y, z, t) = (0, 0)\}$.

• On a :

$$\begin{aligned} f(x,y,z,t) = (0,0) &\Longleftrightarrow (x+y+z+t, x-y-z+t) = (0,0) \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} x + y + z + t = 0 & (L_1) \\ x - y - z + t = 0 & (L_2) \end{cases} \end{aligned}$$

$$L_1 + L_2 : \quad 2x + 2t = 0 \Longrightarrow x = -t.$$

$$L_1 - L_2 : \quad 2y + 2z = 0 \Longrightarrow y = -z.$$

Donc $(x, y, z, t) = (-t, -z, z, t) = (-t, 0, 0, t) + (0, -z, z, 0) = t\underset{\overset{\shortparallel}{u_1}}{(-1, 0, 0, 1)} + z\underset{\overset{\shortparallel}{u_2}}{(0, -1, 1, 0)}$.

Par suite : $\operatorname{Ker} f = < u_1, u_2 >$.

• On vérifie aisément que (u_1, u_2) est libre dans $\mathbb{R}^4$.

$$(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \alpha u_1 + \beta u_2 = 0_{\mathbb{R}^4} \Longrightarrow \alpha = \beta = 0).$$

Dès lors, (u_1, u_2) est une base de $\operatorname{Ker} f$ et $\dim \operatorname{Ker} f = 2$.

• f est non injective car $\operatorname{Ker} f \neq \{0_{\mathbb{R}^4}\}$.

2) • D'après le théorème du rang :

$$\underset{\overset{\shortparallel}{2}}{\dim \operatorname{Ker} f} + \dim \operatorname{Im} f = \underset{\overset{\shortparallel}{4}}{\dim \mathbb{R}^4}.$$

On a $\dim \operatorname{Im} f = 2$. Or $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$, par suite $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$. Par conséquent, la base canonique $\mathcal{B} = \big((1, 0), (0, 1)\big)$ est aussi une base de $\operatorname{Im} f$.

• f est surjective car $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$.

Exercice 3.

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (i, j, k)$ est :

$$A = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

1) Soit la famille $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ telle que : $u = i + j,\ v = j + k$ et $w = 2i$.

a) Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Déterminer la matrice C de f relativement à la base $\mathcal{B}'$.

c) Calculer C^n pour tout entier naturel n.

2) Ecrire la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et calculer son inverse P^{-1}.
En déduire A^n.

3) Soient a_0, b_0 et c_0 trois nombres réels, et soient les trois suites réelles $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ et $(c_n)_n$ définies par les relations de récurrence :

$$\begin{cases} a_n = \qquad b_{n-1} - c_{n-1} \\ 2b_n = -a_{n-1} + 3b_{n-1} - c_{n-1} \\ 2c_n = a_{n-1} - b_{n-1} + 3c_{n-1}. \end{cases}$$

On écrit le vecteur (a_n, b_n, c_n) sous la forme matricielle $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

a) Exprimer X_n en fonction de A et X_0.

b) En déduire les expressions de $a_n,\ b_n$ et c_n en fonction de $a_0,\ b_0,\ c_0$ et n.

Solution.

1) Soit $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ telle que :

$$\begin{cases} u = i + j \\ v = j + k \\ w = 2i. \end{cases}$$

a) On a $Card\,\mathcal{B}' = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, il suffit donc de vérifier que $\mathcal{B}'$ est libre. En effet : $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \alpha u + \beta v + \gamma w = 0_{\mathbb{R}^3} &\iff \alpha(i + j) + \beta(j + k) + \gamma(2i) = 0 \\ &\iff (\alpha + 2\gamma)i + (\alpha + \beta)j + \beta k = 0 \\ &\Longrightarrow \begin{cases} \alpha + 2\gamma = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ \qquad \beta = 0 \end{cases} \qquad \text{car } (i, j, k) \text{ est libre} \\ &\Longrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0. \end{aligned}$$

<u>ou bien :</u>

$$\begin{aligned} u &= (1, 0, 0) + (0, 1, 0) = (1, 1, 0). \\ v &= (0, 1, 1). \\ w &= (2, 0, 0). \end{aligned}$$

On a $\det(u, v, w) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$. Donc (u, v, w) est libre.

b)

$$C = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}') = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(u) & f(v) & f(w) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow u \\ \leftarrow v \\ \leftarrow w \end{array}$$

En effet :

- $f(u) = f(i+j) = f(i) + f(j) = \left(-\frac{1}{2}j + \frac{1}{2}k\right) + \left(i + \frac{3}{2}j - \frac{1}{2}k\right) = i + j = u.$
- $f(v) = f(j+k) = f(j) + f(k) = \left(i + \frac{3}{2}j - \frac{1}{2}k\right) + \left(-i - \frac{1}{2}j + \frac{3}{2}k\right) = j + k = v.$
- $f(w) = f(2i) = 2f(i) = 2\left(-\frac{1}{2}j + \frac{1}{2}k\right) = -j + k = \alpha u + \beta v + \gamma w.$

Cherchons α, β et γ ?

$$-j + k = \alpha(i+j) + \beta(j+k) + \gamma(2i) = (\alpha + 2\gamma)i + (\alpha + \beta)j + \beta k.$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha + 2\gamma = 0 \\ \alpha + \beta = -1 \\ \beta = 1 \end{cases} \qquad \text{puisque } (i,j,k) \text{ est libre}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \gamma = -\frac{\alpha}{2} = 1 \\ \alpha = -1 - \beta = -2 \\ \beta = 1. \end{cases}$$

Donc $f(w) = -2u + v + w.$

<u>Remarque :</u> Pour calculer $f(u)$, on peut procéder comme suit :

$$f(u) = f(i+j) = f(1,1,0) \curvearrowright \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\curvearrowright f(u) = i + j.$$

c) $C = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I_3} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N}.$

On a $I_3.N = N.I_3$, donc on peut appliquer la formule du binôme de Newton.

$$C^n = (I_3 + N)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k I_3^{n-k} N^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k N^k.$$

Or,

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc $N^k = 0, \quad \forall k \geq 2$. Par suite,

$$\begin{aligned} C^n &= C_n^0 N^0 + C_n^1 N + \underbrace{C_n^2 N^2}_{=0} + \cdots \\ &= I_3 + nN \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2n \\ 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

ou bien :
On remarque que

$$C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2.2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2.3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Et on montre par récurrence que $C^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2) $\rightarrow P = P_{\mathcal{B}\rightarrow\mathcal{B}'} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u & v & w \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow i \\ \leftarrow j \\ \leftarrow k \end{array}$.

$\rightarrow P^{-1} = \frac{1}{\det P}\,{}^t Com\, P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Notons que l'expression $P^{-1} = P_{\mathcal{B}'\rightarrow\mathcal{B}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} i & j & k \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow u \\ \leftarrow v \\ \leftarrow w \end{array}$, nous permet d'écrire les vecteurs i, j et k en fonction de u, v et w.

$\rightarrow$

$$\begin{tikzcd} f\ :\ \underset{\mathcal{B}}{\mathbb{R}^3} \arrow[r, "A = \mathcal{M}(f,\mathcal{B})"] & \underset{\mathcal{B}}{\mathbb{R}^3} \arrow[d, "P^{-1}"] \\ \underset{\mathcal{B}'}{\mathbb{R}^3} \arrow[u, "P"] \arrow[r, dashed, "C"'] & \underset{\mathcal{B}'}{\mathbb{R}^3} \end{tikzcd}$$

On a $C = P^{-1}AP$, donc $A = PCP^{-1} \Longrightarrow A^n = PC^nP^{-1}$.

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2n+2 \\ 1 & 0 & -n \\ 0 & 1 & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -n+1 & n & -n \\ -\frac{n}{2} & 1+\frac{n}{2} & -1-\frac{n}{2} \\ \frac{n}{2} & -\frac{n}{2} & 1+\frac{n}{2} \end{pmatrix}.$$

3) On a :

$$\begin{cases} a_n = & b_{n-1} - c_{n-1} \\ b_n = -\frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{3}{2}b_{n-1} - \frac{1}{2}c_{n-1} \\ c_n = \frac{1}{2}a_{n-1} - \frac{1}{2}b_{n-1} + \frac{3}{2}c_{n-1}. \end{cases}$$

Sous la forme d'une écriture matricielle, on trouve :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}}_{X_n} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{pmatrix}}_{X_{n-1}}$$

a) On a : $X_n = A.X_{n-1}$.
$$X_{n-1} = A.X_{n-2}.$$
$$\vdots$$

On obtient $X_n = A^2X_{n-2} = A^3X_{n-3} = \cdots = A^nX_{n-n} = A^nX_0$.

b)

$$X_n = A^nX_0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -n+1 & n & -n \\ -\frac{n}{2} & 1+\frac{n}{2} & -1-\frac{n}{2} \\ \frac{n}{2} & -\frac{n}{2} & 1+\frac{n}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-n+1)a_0 + nb_0 - nc_0 \\ -\frac{n}{2}a_0 + \left(1+\frac{n}{2}\right)b_0 - \left(1+\frac{n}{2}\right)c_0 \\ \frac{n}{2}a_0 - \frac{n}{2}b_0 + \left(1+\frac{n}{2}\right)c_0 \end{pmatrix}.$$

Par suite,

$$\begin{cases} a_n = (-n+1)a_0 + nb_0 - nc_0 \\ b_n = -\frac{n}{2}a_0 + \left(1+\frac{n}{2}\right)b_0 - \left(1+\frac{n}{2}\right)c_0 \\ c_n = \frac{n}{2}a_0 - \frac{n}{2}b_0 + \left(1+\frac{n}{2}\right)c_0. \end{cases}$$

Examen (Faculté des sciences, Meknès, 2017/2018)

Exercice 1.
Résoudre, dans $\mathbb{R}^4$, le système linéaire suivant :

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & 2z & + & 2t & = & -2 \\ 2x & + & 3y & - & z & + & t & = & 1 \\ x & + & 2y & - & 3z & + & t & = & 0 \end{array}\right.$$

Solution.
Méthode de Gauss :

$$(S) \curvearrowright \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \curvearrowright \begin{array}{c} \\ L_3 \\ L_2 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \curvearrowright \begin{array}{c} \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - 2L_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -5 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & -3 & 5 \end{array}\right)$$

$$\curvearrowright \begin{array}{c} \\ \\ L_3 - L_2 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & -5 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 3 \end{array}\right) \curvearrowright \begin{array}{c} \\ \\ -\frac{1}{2}L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & -5 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -\frac{3}{2} \end{array}\right)$$

$$(S) \text{ devient : } \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & 2z & + & 2t & = & -2 \\ & & y & - & 5z & - & t & = & 2 \\ & & & & & & t & = & -\frac{3}{2} \end{array}\right. \iff \begin{cases} x = -7z + \frac{1}{2} \\ y = 5z + \frac{1}{2} \\ t = -\frac{3}{2}. \end{cases}$$

D'où $S = \{\left(-7z + \frac{1}{2}, 5z + \frac{1}{2}, z, -\frac{3}{2}\right) \ / \ z \in \mathbb{R}\}$ est une infinité de solutions de (S).

<u>Méthode de Cramer</u> : (s'applique aux systèmes dont la matrice associée est carrée et inversible)

On choisit un déterminant non nul ; $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2.$

Considérons donc le système de Cramer à trois variables x, y et t.

$$(S) : \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & 2t & = & -2 - 2z \\ 2x & + & 3y & + & t & = & 1 + z \\ x & + & 2y & + & t & = & 3z. \end{array}\right. \qquad \text{Et} \qquad \begin{cases} x = \frac{\Delta x}{\Delta} \\ y = \frac{\Delta y}{\Delta} \\ t = \frac{\Delta t}{\Delta} \end{cases} \qquad \text{où}$$

- $\Delta x = \begin{vmatrix} -2-2z & 1 & 2 \\ 1+z & 3 & 1 \\ 3z & 2 & 1 \end{vmatrix} = -14z + 1.$
- $\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & -2-2z & 2 \\ 2 & 1+z & 1 \\ 1 & 3z & 1 \end{vmatrix} = 10z + 1.$
- $\Delta t = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2-2z \\ 2 & 3 & 1+z \\ 1 & 2 & 3z \end{vmatrix} = -3.$

D'où $S=\{(-7z+\frac{1}{2},5z+\frac{1}{2},z,-\frac{3}{2})\ /\ z\in\mathbb{R}\}$.

Remarque.

On peut choisir un autre déterminant : $\Delta=\begin{vmatrix}1&2&2\\2&-1&1\\1&-3&1\end{vmatrix}=-10$. Et la solution sera en fonction de y.

(S) devient : $\left\{\begin{array}{ccccccc} x&+&2z&+&2t&=&-2-y\\ 2x&-&z&+&t&=&1-3y\\ x&-&3z&+&t&=&-2y\end{array}\right.$

$$\begin{cases}\Delta x=14y-12\\ \Delta z=-2y+1\\ \Delta t=15.\end{cases}$$

D'où $S=\{(-\frac{7}{5}y+\frac{6}{5},y,\frac{1}{5}y-\frac{1}{10},-\frac{3}{2})\ /\ y\in\mathbb{R}\}$.

Exercice 2.

Soit $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère l'endomorphisme f dont la matrice relativement à $\mathcal{B}$ est :

$$A=\mathcal{M}(f,\mathcal{B})=\begin{pmatrix}8&9&6\\-6&-7&-6\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

1) Calculer le déterminant de A. En déduire si f est un automorphisme.

2) Calculer le polynôme caractéristique P_A de A.

3) En déduire que -1 et 2 sont les valeurs propres de f.

4) Déterminer des bases des sous-espaces propres de f.

5) f est-il diagonalisable ?

6) Soit la famille $\mathcal{B}'=(u,v,w)$ telle que : $u=(1,-1,0)$, $v=(1,0,-1)$ et $w=(0,2,-3)$.

- **a)** Vérifier que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
- **b)** Déterminer la matrice D de f relativement à la base $\mathcal{B}'$.
- **c)** Calculer D^n pour tout entier naturel n.

7) Ecrire la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et calculer son inverse P^{-1}.

8) En déduire A^n.

9) Vérifier que $D^2-D=2I_3$. En déduire D^{-1} en fonction de D.

10) En déduire A^{-1}.

Solution.

1) $\det(A)=\begin{vmatrix}8&9&6\\-6&-7&-6\\0&0&2\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}8&9\\-6&-7\end{vmatrix}=2(-56+54)=-4.$

$\det(A)\neq 0\Longleftrightarrow A=\mathcal{M}(f,\mathcal{B})$ est inversible $\Longleftrightarrow f$ est bijectif.
Donc f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

2)

$$P_A(X) = \det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} 8-X & 9 & 6 \\ -6 & -7-X & -6 \\ 0 & 0 & 2-X \end{vmatrix} = (2-X)\begin{vmatrix} 8-X & 9 \\ -6 & -7-X \end{vmatrix}$$
$$= (2-X)(X^2 - X - 2) = (2-X)(X-2)(X+1) = -(X-2)^2(X+1).$$

3) Les racines de $P_A(X)$ sont les valeurs propres de f, qui sont -1 et 2.

4) $\rightarrow\ E_{-1} = \mathrm{Ker}(f + id_{\mathbb{R}^3}) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ (A+I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$

On a $$(A+I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 9 & 9 & 6 \\ -6 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 9x & + & 9y & + & 6z & = & 0 \\ -6x & - & 6y & - & 6z & = & 0 \\ & & & & 3z & = & 0 \end{array} \right.$$
$$\iff \begin{cases} y = -x \\ z = 0. \end{cases}$$

Donc $(x,y,z) = (x,-x,0) = x(1,-1,0)$. Par suite $E_{-1} =< (1,-1,0) >$. Notons que la famille $\{(1,-1,0)\}$ est formée par un seul vecteur non nul, donc elle est libre, par conséquent c'est une base de E_{-1}. On peut en déduire que $\dim E_{-1} = 1$.

$\rightarrow\ E_2 = \mathrm{Ker}(f - 2Id_{\mathbb{R}^3}) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ (A-2I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$

On a $$(A-2I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 6 & 9 & 6 \\ -6 & -9 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 6x & + & 9y & + & 6z & = & 0 \\ -6x & - & 9y & - & 6z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right.$$
$$\iff 6x + 9y + 6z = 0$$
$$\iff 2x + 3y + 2z = 0$$
$$\iff x = -\frac{3}{2}y - z$$

(ou $y = -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}z$ ou $z = -x - \frac{3}{2}y$).

Donc,

$$(x,y,z) = (-\frac{3}{2}y - z, y, z) = (-\frac{3}{2}y, y, 0) + (-z, 0, z)$$
$$= y(-\frac{3}{2}, 1, 0) + z(-1, 0, 1).$$

Par suite $E_2 =< (-\frac{3}{2}, 1, 0), (-1, 0, 1) >$.

On vérifie aisément que le système $\left((-\frac{3}{2},1,0),(-1,0,1)\right)$ est libre, par conséquent il forme une base de E_2. On en déduit que $\dim E_2 = 2$.

Remarque.
Pour éviter les quotients, on note que $< u >=< \alpha u >$ où α est un scalaire non nul et u est un vecteur. E_2 peut devenir donc : $E_2 =< (-3,2,0),(-1,0,1) >$.

5)

$$\begin{cases} \dim E_{-1} = 1 = \text{l'ordre de multiplicité de } -1 \\ \dim E_2 = 2 = \text{l'ordre de multiplicité de } 2\,, \end{cases}$$

donc f est diagonalisable.

6) Soit $\mathcal{B}' = (u,v,w)$ avec $u = (1,-1,0),\ v = (1,0,-1)$ et $w = (0,2,-3)$.

a) On a $Card\,\mathcal{B}' = 3 = \dim \mathbb{R}^3$. Il suffit donc de vérifier que $\mathcal{B}'$ est libre. En effet :

$$\det(u,v,w) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

ou $\quad \forall \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R} : \quad \alpha u + \beta v + \gamma w = 0_{\mathbb{R}^3} \overset{?}{\Longrightarrow} \alpha = \beta = \gamma = 0.$

$$\begin{aligned} \alpha u + \beta v + \gamma w = 0 &\iff \alpha(1,-1,0) + \beta(1,0,-1) + \gamma(0,2,-3) = (0,0,0) \\ &\iff (\alpha+\beta, -\alpha+2\gamma, -\beta-3\gamma) = (0,0,0) \\ &\iff \begin{cases} \alpha+\beta = 0 \\ -\alpha+2\gamma = 0 \\ -\beta-3\gamma = 0 \end{cases} \\ &\iff \alpha = \beta = \gamma = 0. \end{aligned}$$

b)

$$D = \mathcal{M}(f,\mathcal{B}') = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(u) & f(v) & f(w) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ u \\ v \\ w \end{array}$$

En effet :

$\rightarrow$ $f(u) = f(1,-1,0) \curvearrowright A.\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 6 \\ -6 & -7 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

Donc $f(u) = (-1,1,0) = -(1,-1,0) = -u.$

$\rightarrow$ $f(v) = f(1,0,-1) \curvearrowright A.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 6 \\ -6 & -7 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$

Donc $f(v) = (2,0,-2) = 2(1,0,-1) = 2v.$

$\rightarrow$ De même $f(w) = 2w.$

Remarque importante !

En cherchant une base de E_2 en **4)**, si on avait choisit d'écrire z en fonction de x et y : $z = -x - \frac{3}{2}y$, on aurait dû trouver $\Big((1,0,-1),(0,2,-3)\Big)$ comme base de E_2 qui est exactement (v,w). Par suite $\mathcal{B}' = (u,v,w)$ serait une base formée de vecteurs propres.

$u \in E_{-1} \Longrightarrow u$ est un vecteur propre associé à -1. Donc $f(u) = -1.u = -u$.
v *et* $w \in E_2 \Longrightarrow v$ *et* w sont deux vecteurs propres associés à la valeur propre 2. Donc $f(v) = 2v$ et $f(w) = 2w$.

Par suite :

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

c) D est diagonale, donc $D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

7) $\rightarrow P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u & v & w \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \leftarrow e_1 \\ \leftarrow e_2 \\ \leftarrow e_3 \end{array}.$

$\rightarrow P^{-1} = \frac{1}{\det P}\, {}^t Com\, P = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -2 \\ 3 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$

Remarque.

$$P^{-1} = P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} -2 & -3 & -2 \\ 3 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \leftarrow u \\ \leftarrow v \\ \leftarrow w \end{array}$$

8)

$$\begin{tikzcd} f \; : \; \underset{(\mathcal{B})}{\mathbb{R}^3} \arrow[r, "A = \mathcal{M}(f,\mathcal{B})"] & \underset{(\mathcal{B})}{\mathbb{R}^3} \arrow[d, "P^{-1}"] \\ \underset{(\mathcal{B}')}{\mathbb{R}^3} \arrow[u, "P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}"] \arrow[r, dashed, "D = \mathcal{M}(f,\mathcal{B}')"] & \underset{(\mathcal{B}')}{\mathbb{R}^3} \end{tikzcd}$$

On a : $D = P^{-1}AP \Longrightarrow A = PDP^{-1} \Longrightarrow A^n = PD^nP^{-1}$.

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -3 & -2 \\ 3 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (-1)^n & 2^n & 0 \\ (-1)^{n+1} & 0 & 2^{n+1} \\ 0 & -2^n & -3.2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -3 & -2 \\ 3 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \Big(\text{Notons que } (-1)^{n+2} = (-1)^n\Big)$$

$$= \begin{pmatrix} (-1)^{n+1}.2 + 3.2^n & (-1)^{n+1}.3 + 3.2^n & (-1)^{n+1}.2 + 2^{n+1} \\ (-1)^n.2 - 2^{n+1} & (-1)^n.3 - 2^{n+1} & (-1)^n.2 - 2^{n+1} \\ 0 & 0 & -2^{n+1} + 3.2^n \end{pmatrix}.$$

Application :

$$A^8 = \begin{pmatrix} -2 + 3.2^8 & -3 + 3.2^8 & -2 + 2^9 \\ 2 - 2^9 & 3 - 2^9 & 2 - 2^9 \\ 0 & 0 & -2^9 + 3.2^8 \end{pmatrix}.$$

9) $D^2 - D = \begin{pmatrix} (-1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_3$.

On a : $D^2 - D = 2I_3 \Longleftrightarrow D(D - I_3) = 2I_3 \Longleftrightarrow D.\frac{1}{2}(D - I_3) = I_3$.

Donc D est inversible et $D^{-1} = \frac{1}{2}(D - I_3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

10) On a : $A = PDP^{-1} \Longrightarrow A^{-1} = (PDP^{-1})^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$.
Donc,

$$A^{-1} = P\left[\frac{1}{2}(D - I_3)\right]P^{-1} = \frac{1}{2}\left[P(D - I_3)P^{-1}\right] = \frac{1}{2}\left[PDP^{-1} - PI_3P^{-1}\right]$$

$$= \frac{1}{2}(A - I_3) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7 & 9 & 6 \\ -6 & -8 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque. On pourrait faire le calcul $PD^{-1}P^{-1}$ directement.

Examen (Faculté des sciences, Meknès, rattrapage, 2017/2018)

Exercice 1. Soit

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & & (x,y,z) & \longmapsto & (0,0,y-z) \end{array}$$

un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

1) Trouver une base de $\operatorname{Ker} f$.

2) Trouver une base de $\operatorname{Im} f$.

3) f est-il injectif ? surjectif ? bijectif ?

4) Montrer que $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$.

Solution.

1) $\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \, f(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^3}\}$.

$$\text{on a :} \quad f(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^3} \Longleftrightarrow (0,0,y-z) = (0,0,0) \Longleftrightarrow y - z = 0 \Longleftrightarrow y = z.$$

Par suite $\operatorname{Ker} f =< (1,0,0), (0,1,1) >$.
On vérifie que $\big((1,0,0),(0,1,1)\big)$ est un système libre de $\mathbb{R}^3$, en effet,

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,1) = (0,0,0) \Longrightarrow \alpha = \beta = 0.$$

D'où $\big((1,0,0),(0,1,1)\big)$ est une base de $\operatorname{Ker} f$ et $\dim \operatorname{Ker} f = 2$.

2) <u>Méthode 1 :</u> D'après le théorème du rang :

$$\underset{\overset{\shortparallel}{2}}{\dim \operatorname{Ker} f} + \dim \operatorname{Im} f = \underset{\overset{\shortparallel}{3}}{\dim \mathbb{R}^3}.$$

Donc $\dim \operatorname{Im} f = 1$.
Toute famille formée par un vecteur non nul de $\operatorname{Im} f$ sera une base de $\operatorname{Im} f$, soit par exemple $f(0,1,0) = (0,0,1)$.

<u>Méthode 2 :</u>

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f &= \{f(x,y,z) / \, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{(0,0,y-z) / \, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{(y-z)(0,0,1) / \, y,z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\alpha(0,0,1) / \, \alpha \in \mathbb{R}\} \\ &=< (0,0,1) > . \end{aligned}$$

Or, le vecteur $(0,0,1) \neq (0,0,0) \Longrightarrow (0,0,1)$ est libre.
Donc $\{(0,0,1)\}$ est une base de $\operatorname{Im} f$.

<u>**Remarque.**</u>

$$(0,0,y-z) = y(0,0,1) - z(0,0,1) \Longrightarrow \operatorname{Im} f =< (0,0,1), (0,0,1) >=< (0,0,1) > .$$

3) • $\operatorname{Ker} f \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\} \Longleftrightarrow f$ est non injectif.

• $\operatorname{Im} f \neq \mathbb{R}^3 \Longleftrightarrow f$ est non surjectif.

• f est non bijectif car il n'est pas injectif (ou il n'est pas surjectif).

Remarque.

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} f \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\} &\Longleftrightarrow f \text{ est non injectif} \\ &\Longleftrightarrow f \text{ est non surjectif} \quad (\text{car } f \text{ est un endomorphisme}). \end{aligned}$$

4) Montrons que la réunion d'une base de $\operatorname{Ker} f$ et d'une base de $\operatorname{Im} f$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Ceci revient à montrer que : $\mathcal{B} = \big((1,0,0),(0,1,1),(0,0,1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
Or, $Card\,\mathcal{B} = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, il suffit de vérifier que $\mathcal{B}$ est un système libre de $\mathbb{R}^3$.
En effet :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Exercice 2. Soient $\mathcal{B} = (i,j,k)$ la base canonique du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathcal{M}(f,\mathcal{B}) = A = \begin{pmatrix} 9 & -6 & 10 \\ -5 & 2 & -5 \\ -12 & 6 & -13 \end{pmatrix}.$$

1) Soient les vecteurs $e_1 = (2,-1,-2)$, $e_2 = (1,0,-1)$ et $e_3 = (-2,1,3)$.

a) Montrer que $S = (e_1,e_2,e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Déterminer la matrice D de f dans la base S.

c) Calculer D^n pour tout entier naturel n.

2) **a)** Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à S.

b) Calculer P^{-1}.

c) En déduire A^n pour tout entier naturel n.

Solution.

1) Soient $e_1 = (2,-1,-2)$, $e_2 = (1,0,-1)$, $e_3 = (-2,1,3)$ et $S = (e_1,e_2,e_3)$.
a) On a $Card\,S = 3 = \dim \mathbb{R}^3$. Il suffit donc de vérifier que S est libre. En effet :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix} \underset{L_3+L_1}{=} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1.$$

(ou, $\forall \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Longrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$).
b)

$$D = \mathcal{M}(f,S) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow e_1 \\ \leftarrow e_2 \\ \leftarrow e_3 \end{array}$$

En effet :

- $f(e_1) = f(2,-1,-2) \curvearrowright \mathcal{M}(f,\mathcal{B})\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9 & -6 & 10\\-5 & 2 & -5\\-12 & 6 & -13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-2\\-4\end{pmatrix}$.
  $f(e_1) = (4,-2,-4) = 2(2,-1,-2) = 2e_1$.

- $f(e_2) = f(1,0,-1) \curvearrowright \mathcal{M}(f,\mathcal{B})\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9 & -6 & 10\\-5 & 2 & -5\\-12 & 6 & -13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.
  $f(e_2) = (-1,0,1) = -(1,0,-1) = -e_2$.

- $f(e_3) = f(-2,1,3) \curvearrowright \mathcal{M}(f,\mathcal{B})\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9 & -6 & 10\\-5 & 2 & -5\\-12 & 6 & -13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\-3\\-9\end{pmatrix}$.
  $f(e_3) = (6,-3,-9) = -3(-2,1,3) = -3e_3$.

c) D étant diagonale, on a $D^n = \begin{pmatrix}2^n & 0 & 0\\0 & (-1)^n & 0\\0 & 0 & (-3)^n\end{pmatrix}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2) a) $P = P_{\mathcal{B}\to S} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\-1 & 0 & 1\\-2 & -1 & 3\end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow i\\ \leftarrow j\\ \leftarrow k \end{array}$

b) <u>Méthode des cofacteurs :</u>

$\to$ $P^{-1} = \frac{1}{\det P}\,{}^t Com\, P$.

$\to$ On a $\det P = 1$ (déjà calculé en **1) a)**).

$\to$ $Com\, P = \begin{pmatrix}+1 & -(-1) & +1\\-1 & +2 & -0\\+1 & -0 & +1\end{pmatrix} \Longrightarrow {}^t Com\, P = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\1 & 2 & 0\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

$\to$ Donc $P^{-1} = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\1 & 2 & 0\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

<u>Méthode de pivot de Gauss :</u>

$(P\,|\,I_3)$: $\left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0\\-1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\-2 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \curvearrowright \begin{array}{c}-L_2\\L_1\\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0\\2 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0\\-2 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$

$\curvearrowright \begin{array}{c} \\ L_2 - 2L_1\\L_3 + 2L_1\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}\boxed{1} & 0 & -1 & 0 & -1 & 0\\0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0\\0 & -1 & 1 & 0 & -2 & 1\end{array}\right) \curvearrowright \begin{array}{c} \\ \\ L_3 + L_2\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}\boxed{1} & 0 & -1 & 0 & -1 & 0\\0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 2 & 0\\0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1\end{array}\right)$

$$\curvearrowright \quad \begin{matrix} L_1+L_3 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c)

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=large] f : \underset{\mathcal{B}}{\mathbb{R}^3} \arrow[r, "A=\mathcal{M}(f,\mathcal{B})"] & \underset{\mathcal{B}}{\mathbb{R}^3} \arrow[d, "P^{-1}"] \\ \underset{S}{\mathbb{R}^3} \arrow[u, "P=P_{\mathcal{B}\to S}"] \arrow[r, dashed, "D=\mathcal{M}(f,S)"'] & \underset{S}{\mathbb{R}^3} \end{tikzcd}$$

On a $D = P^{-1}AP \Longrightarrow PDP^{-1} = \underbrace{PP^{-1}}_{I_3} \, A \, \underbrace{PP^{-1}}_{I_3} = A$.

Donc $A = PDP^{-1} \Longrightarrow A^n = PD^nP^{-1}$.
Par suite,

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n+1} & (-1)^{n+1} & (-2)(-3)^n \\ -2^n & 0 & (-3)^n \\ -2^{n+1} & (-1)^{n+1} & 3(-3)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n+1}+(-1)^{n+1}-2(-3)^n & -2^{n+1}+2(-1)^{n+1} & 2^{n+1}-2(-3)^n \\ -2^n+(-3)^n & 2^n & -2^n+(-3)^n \\ -2^{n+1}+(-1)^{n+1}+3(-3)^n & 2^{n+1}+2(-1)^{n+1} & -2^{n+1}+3(-3)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 3.
Discuter les valeurs du paramètre réel m pour résoudre, par la méthode de Gauss, le système linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & - & 2y & - & z & + & t & = & 1 \\ 2x & - & y & - & 2z & - & t & = & 0 \\ x & - & 3y & & & + & 2t & = & -1 \\ x & - & 4y & - & 2z & + & 3t & = & m. \end{array} \right.$$

Solution.

$$(S) \curvearrowright \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & -2 & 3 & m \end{array}\right) \curvearrowright \begin{array}{c} \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - L_1 \\ L_4 - L_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & m-1 \end{array}\right)$$

$$\curvearrowright \begin{array}{c} \\ -L_3 \\ L_2 \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & m-1 \end{array}\right) \curvearrowright \begin{array}{c} \\ \\ L_3 - 3L_2 \\ L_4 + 2L_2 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & m+3 \end{array}\right).$$

On peut faire $L_3 + L_4$, sinon on poursuit la méthode de Gauss :

$$\curvearrowright \begin{array}{c} \\ \\ \frac{1}{3}L_3 \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -\frac{8}{3} \\ 0 & 0 & -3 & 0 & m+3 \end{array}\right) \curvearrowright \begin{array}{c} \\ \\ \\ L_4 + 3L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -\frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m-5 \end{array}\right).$$

<u>Si $m \neq 5$</u> $(m - 5 \neq 0)$, alors $S = \emptyset$.

<u>Si $m = 5$</u> $(m - 5 = 0)$, alors le système devient :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & - & 2y & - & z & + & t & = & 1 \\ & & y & - & z & - & t & = & 2 \\ & & & & z & & & = & -\frac{8}{3} \\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2y + z - t = t - 3 \\ y = 2 + z + t = 2 - \frac{8}{3} + t = t - \frac{2}{3} \\ z = -\frac{8}{3}. \end{cases}$$

Par suite $S = \left\{\left(t - 3, t - \frac{2}{3}, -\frac{8}{3}, t\right) \ / \ t \in \mathbb{R}\right\}$, il y a une infinité de solutions pour le système (S) si $m = 5$.

<u>**Remarque :**</u> On pourrait remarquer que x, y et z sont des inconnues principales pendant que t est une variable secondaire. Par suite x, y et z seront exprimées en fonction de t.

Examen (Faculté des sciences Dhar El Mehraz, Fès, 2014/2015)

Exercice 1.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad f(x,y,z) = (3x-2y-2z, 5x-3y-4z, x-y).$$

1) Ecrire la matrice A de f par rapport à la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

2) Déterminer $\operatorname{Ker} f$, une base de $\operatorname{Ker} f$ et la dimension de $\operatorname{Ker} f$. En déduire le rang de f.

3) Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$.

4) Soit $e'_1 = (0,1,1)$, $e'_2 = (1,1,0)$, $e'_3 = (2,2,1)$ et $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de colonnes e'_1, e'_2, e'_3. Montrer que P est inversible et calculer son inverse P^{-1}.

5) En déduire $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

6) En remarquant que P est la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, déterminer la matrice A' de f par rapport à la base $\mathcal{B}'$.

Solution.

1) La matrice A de f par rapport à la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est :

$$A = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}') = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 5 & -3 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow e_1 \\ \leftarrow e_2 \\ \leftarrow e_3 \end{array}$$

2) $\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ f(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^3}\}$.

$$\begin{aligned} f(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^3} &\iff (3x-2y-2z, 5x-3y-4z, x-y) = (0,0,0) \\ &\iff \begin{cases} 3x-2y-2z = 0 \\ 5x-3y-4z = 0 \\ x-y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x-2z = 0 \\ 2x-4z = 0 \\ x = y \end{cases} \\ &\iff x = y = 2z. \end{aligned}$$

Donc $(x,y,z) = (2z, 2z, z) = z(2,2,1)$. Par suite $\operatorname{Ker} f =< (2,2,1) >$. Or, le vecteur $(2,2,1) \neq (0,0,0) \implies \{(2,2,1)\}$ est libre. Donc $\{(2,2,1)\}$ est une base de $\operatorname{Ker} f$.
D'après le théorème du rang, on a :

$$\underset{\underset{1}{\shortparallel}}{\dim \operatorname{Ker} f} + \operatorname{rg} f = \underset{\underset{3}{\shortparallel}}{\dim \mathbb{R}^3}, \quad \text{donc} \quad \operatorname{rg} f = 3 - 1 = 2.$$

3) Cherchons une base de $\operatorname{Im} f$:
$\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3 \implies (f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ est un système générateur de $\operatorname{Im} f$. Or, $\dim \operatorname{Im} f = 2$. On choisit donc deux vecteurs libres, qui seront par la

suite une base de $\operatorname{Im} f$.
Soit par exemple $f(e_1) = (3,5,1)$ et $f(e_2) = (-2,-3,-1)$. En effet :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \alpha(3,5,1)+\beta(-2,-3,-1) = (0,0,0) \Longleftrightarrow \begin{cases} 3\alpha - 2\beta = 0 \\ 5\alpha - 3\beta = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases} \Longrightarrow \alpha = \beta = 0.$$

Donc $(f(e_1), f(e_2)) = \big((3,5,1),(-2,-3,-1)\big)$ est une base de $\operatorname{Im} f$.

4) • Calculons P^{-1} par la méthode de Pivot de Gauss :

$$(P \,|\, I_3) \curvearrowright \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \curvearrowright \begin{array}{c} L_3 \\ \\ L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\curvearrowright \begin{array}{c} \\ L_2 - L_1 \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \curvearrowright \begin{array}{c} \\ \\ L_3 - L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\curvearrowright \begin{array}{c} L_1 - L_3 \\ L_2 - L_3 \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Donc P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

• Calculons P^{-1} par la méthode des cofacteurs :

$\rightarrow \det P = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. Donc P est inversible.

$\rightarrow Com\, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

$\rightarrow {}^t Com\, P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$\rightarrow P^{-1} = \frac{1}{\det P}\, {}^t Com\, P = -\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

5) Puisque e'_1, e'_2, e'_3 sont les colonnes de P et puisque P est inversible alors $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est libre dans $\mathbb{R}^3$. Or, $Card\, \mathcal{B}' = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, donc $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

6) On a $A' = P^{-1}AP$. Donc,

$$\begin{aligned} A' &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 5 & -3 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ -7 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -8 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 2.
Soit (Σ_m) le système d'équations linéaires suivant :

$$(\Sigma_m) : \begin{cases} x + 2y + 3mz = 1 \\ x + (m+1)y + (3m+1)z = 2 \\ x + 2y + 2mz = 0 \end{cases}$$

1) Donner la matrice A_m du système (Σ_m) et écrire (Σ_m) sous sa forme matricielle $A_m X = B$ (où $B \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ qu'il faut déterminer et $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est l'inconnue).

2) Montrer que $\det(A_m) = m(1-m)$.

3) Quand est ce que (Σ_m) est un système de Cramer ?

4) Résoudre le système (Σ_m) pour $m \neq 0$ et $m \neq 1$.

Solution.

1) (Σ_m) est représenté sous la forme matricielle comme suit :

$$(\Sigma_m) \curvearrowright \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3m \\ 1 & (m+1) & (3m+1) \\ 1 & 2 & 2m \end{pmatrix}}_{\substack{\shortparallel \\ A_m}} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\substack{\shortparallel \\ X}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\shortparallel \\ B}}.$$

2) Calculons $\det(A_m)$ en fonction de m.

$$\det(A_m) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3m \\ 1 & (m+1) & (3m+1) \\ 1 & 2 & 2m \end{vmatrix} = \begin{matrix} \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - L_1 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3m \\ 0 & (m-1) & 1 \\ 0 & 0 & -m \end{vmatrix}$$
$$= -m(m-1) = m(1-m).$$

3) (Σ_m) est un système de Cramer $\Longleftrightarrow m(m-1) \neq 0 \Longleftrightarrow m \neq 0$ et $m \neq 1$.

4) On suppose que $m \neq 0$ et $m \neq 1$.

$$\to \Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3m \\ 2 & (m+1) & (3m+1) \\ 0 & 2 & 2m \end{vmatrix} = L_2 - 2L_1 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3m \\ 0 & (m-3) & (1-3m) \\ 0 & 2 & 2m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (m-3) & (1-3m) \\ 2 & 2m \end{vmatrix}$$
$$= 2m(m-3) - 2(1-3m) = 2m^2 - 6m - 2 + 6m = 2m^2 - 2 = 2(m^2 - 1).$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3m \\ 1 & 2 & (3m+1) \\ 1 & 0 & 2m \end{vmatrix} \begin{array}{c} L_1 - L_3 \\ = L_2 - L_3 \\ \end{array} \begin{vmatrix} 0 & 1 & m \\ 0 & 2 & (m+1) \\ 1 & 0 & 2m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & m \\ 2 & (m+1) \end{vmatrix} = 1 - m.$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & (m+1) & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{c} L_1 - L_3 \\ = \\ \end{array} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & (m+1) & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & (m+1) \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 - m.$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\Delta_x}{\det(A_m)} = \dfrac{2(m-1)(m+1)}{m(1-m)} = -\dfrac{2(m+1)}{m} \\ y = \dfrac{\Delta_y}{\det(A_m)} = \dfrac{1-m}{m(1-m)} = \dfrac{1}{m} \\ z = \dfrac{\Delta_z}{\det(A_m)} = \dfrac{1-m}{m(1-m)} = \dfrac{1}{m}\ . \end{cases}$$

Donc $\left(-\dfrac{2(m+1)}{m}, \dfrac{1}{m}, \dfrac{1}{m}\right)$ est la seule solution du système (Σ_m) lorsque $m \notin \{0, 1\}$.

Exercice 3.

Soient $A = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 6 \\ -8 & 1 & 6 \\ -12 & 0 & 10 \end{pmatrix}$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à $\mathcal{B}$ est A.

1) Déterminer le rang de A.

2) **a)** Déterminer le polynôme caractéristique de f.

b) En déduire que 1 et 2 sont les valeurs propres de f.

3) Déterminer les sous-espaces propres de f et leur dimension. En déduire que f est diagonalisable.

4) Soit P la matrice de colonnes $u = (3, 2, 4)$, $v = (0, 1, 0)$ et $w = (-2, -2, -3)$.

a) Calculer P^2. En déduire que P est inversible et donner P^{-1} (sans calcul).

b) En déduire que $\mathcal{S} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

5) Montrer que $\mathcal{S}$ est formée de vecteurs propres de f et donner la matrice D de f par rapport à la base $\mathcal{S}$.

6) Calculer A^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Solution.

1) On rappelle que le rang de A est l'ordre du plus grand déterminant non nul extrait de A.

$$\det A = \begin{vmatrix} -7 & 0 & 6 \\ -8 & 1 & 6 \\ -12 & 0 & 10 \end{vmatrix} \begin{array}{c} L_1 - L_2 \\ = \\ \end{array} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -8 & 1 & 6 \\ -12 & 0 & 10 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \\ \end{array}\begin{array}{ccc} & C_2 + C_1 & \\ \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -8 & -7 & 6 \\ -12 & -12 & 10 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -7 & 6 \\ -12 & 10 \end{vmatrix} = -70 + 72 = 2 \neq 0.$$

Donc $\operatorname{rg} A = 3$.

2) **a)** $P_f(X) = P_A(X) = \begin{vmatrix} -7-X & 0 & 6 \\ -8 & 1-X & 6 \\ -12 & 0 & 10-X \end{vmatrix} = (1-X)\begin{vmatrix} -7-X & 6 \\ -12 & 10-X \end{vmatrix}$

$$= (1-X)\big[(-7-X)(10-X)+72\big] = (1-X)(-70+7X-10X+X^2+72)$$
$$= (1-X)(X^2-3X+2) = (1-X)(1-X)(2-X)$$
$$= (1-X)^2(2-X).$$

b) Les valeurs propres de f sont 1 et 2 (car 1 et 2 sont les racines du polynôme $P_A(X)$).

3) • $E_1 = \mathrm{Ker}(f - id_{\mathbb{R}^3})$

$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ (f - id_{\mathbb{R}^3})(x,y,z) = (0,0,0)\}$$
$$= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ (A - I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

On a :

$$(A - I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -8 & 0 & 6 \\ -8 & 0 & 6 \\ -12 & 0 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{cases} -8x + 6z = 0 \\ -8x + 6z = 0 \\ -12x + 9z = 0 \end{cases}$$
$$\iff z = \frac{4}{3}x.$$

Donc $(x,y,z) = \left(x, y, \frac{4}{3}x\right) = x\left(1, 0, \frac{4}{3}\right) + y\,(0,1,0)$.
Par suite $E_1 = <\left(1, 0, \frac{4}{3}\right), (0,1,0)> = <(3,0,4), (0,1,0)>$. (Notons que $<u> = <\lambda u>, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}^*$).
Vérifions que le système $\big((3,0,4), (0,1,0)\big)$ est libre. En effet, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\alpha(3,0,4) + \beta(0,1,0) = (0,0,0) \iff (3\alpha, \beta, 4\alpha) = (0,0,0) \Longrightarrow \alpha = \beta = 0.$$

Donc $\big((3,0,4), (0,1,0)\big)$ est une base de E_1. Ce qui montre que $\dim E_1 = 2$.

• $E_2 = \mathrm{Ker}(f - 2id_{\mathbb{R}^3})$

$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ (f - 2id_{\mathbb{R}^3})(x,y,z) = (0,0,0)\}$$
$$= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ (A - 2I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

On a :

$$(A-2I_3)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Longleftrightarrow\begin{pmatrix}-9&0&6\\-8&-1&6\\-12&0&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases}-9x+6z=0\\-8x-y+6z=0\\-12x+8z=0\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases}z=\frac{3}{2}x\\-8x-y+6z=0\\z=\frac{3}{2}x\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}y=x\\z=\frac{3}{2}x.\end{cases}$$

Donc $(x,y,z)=\left(x,x,\frac{3}{2}x\right)=x\left(1,1,\frac{3}{2}\right)$. Par suite $E_2=<\left(1,1,\frac{3}{2}\right)>=<(2,2,3)>$. Le vecteur $(2,2,3)$ est non nul, donc il est libre. Dès lors, $\{(2,2,3)\}$ est une base de E_2. Ce qui montre que $\dim E_2=1$.

• Puisque $\dim E_1+\dim E_2=3=\dim\mathbb{R}^3$, alors f est diagonalisable.
On peut le voir aussi puisque la dimension de chaque sous-espace propre E_λ coïncide avec l'ordre de multiplication de λ.

4) **a)** $P^2=\begin{pmatrix}3&0&-2\\2&1&-2\\4&0&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0&-2\\2&1&-2\\4&0&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I_3.$

Donc P est inversible et $P^{-1}=P=\begin{pmatrix}3&0&-2\\2&1&-2\\4&0&-3\end{pmatrix}$.

b) Puisque la matrice P de colonnes u,v et w est inversible, alors $\det P\neq 0$, par suite $\mathcal{S}=(u,v,w)$ est un système libre de $\mathbb{R}^3$. Or $Card\,\mathcal{S}=3=\dim\mathbb{R}^3$, donc $\mathcal{S}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

5) **Méthode 1 :**

Puisque $u,v\in E_1\setminus\{(0,0,0)\}$ alors u et v sont des vecteurs propres de f associés à 1.
Puisque $w\in E_2\setminus\{(0,0,0)\}$ alors w est un vecteur propre de f associé à 2.
Ce qui montre que $\mathcal{S}$ est formée de vecteurs propres de f. Par suite,

$$D=\mathcal{M}(f,\mathcal{S})=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

Méthode 2 :

$$f(u)=f(3,2,4)\curvearrowright\mathcal{M}(f,\mathcal{B})\begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7&0&6\\-8&1&6\\-12&0&10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}\Longrightarrow f(u)=u.$$

Donc u un vecteur propre de f associé à 1.

$$f(v)=f(0,1,0)\curvearrowright\mathcal{M}(f,\mathcal{B})\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7&0&6\\-8&1&6\\-12&0&10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\Longrightarrow f(v)=v.$$

Donc v un vecteur propre de f associé à 1.

$$f(w) = f(-2,-2,-3) \curvearrowright \mathcal{M}(f,\mathcal{B}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 6 \\ -8 & 1 & 6 \\ -12 & 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow f(w) = 2w.$$

Donc w un vecteur propre de f associé à 2.
Ce qui montre que $\mathcal{S}$ est formée de vecteurs propres de f et on a :

$$D = \mathcal{M}(f,\mathcal{S}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

6) $D = P^{-1}AP \Longrightarrow A = PDP^{-1} \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\quad A^n = PD^nP^{-1}.$

$$A^n = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2^{n+1} \\ 2 & 1 & -2^{n+1} \\ 4 & 0 & -3.2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 9 - 2^{n+3} & 0 & 6(2^n - 1) \\ 8 - 2^{n+3} & 1 & 6(2^n - 1) \\ 12(1 - 2^n) & 0 & 9.2^n - 8 \end{pmatrix}.$$

Examen (Faculté des sciences Aïn Chock, Casablanca, 2012/2013)

Exercice 1.

Soit $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par : $f(x,y,z)=(x+y,2x-y+z,x+z)$.

1) Ecrire la matrice M de cette application linéaire dans la base canonique $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

2) Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.

3) Soit $v_1=(1,1,0),\ v_2=(1,2,1)$ et $v_3=(1,3,1)$.
Montrer que la famille $\mathcal{B}'=(v_1,v_2,v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

4) Calculer $f(v_1)$ en fonction de $v_1,\ v_2,\ v_3$. On admettra que $f(v_2)=v_1+6v_2-4v_3$ et $f(v_3)=2v_1+8v_2-6v_3$.

5) Ecrire la matrice N de f dans la base $\mathcal{B}'$.

6) Déterminer la matrice P de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et calculer son inverse P^{-1}.

7) Ecrire l'expression qui permet de retrouver N en fonction de M, P et P^{-1}.

Solution.

1) La matrice de f dans la base canonique est :

$$M=\mathcal{M}(f,\mathcal{B})=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow e_1 \\ \leftarrow e_2 \\ \leftarrow e_3 \end{array}$$

En effet :

$f(e_1)=f(1,0,0)=(1,2,1)=1e_1+2e_2+1e_3.$
$f(e_2)=f(0,1,0)=(1,-1,0).$
$f(e_3)=f(0,0,1)=(0,1,1).$

2) $\rightarrow \operatorname{Ker} f=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ /\ f(x,y,z)=0_{\mathbb{R}^3}\}$.
On a :

$$\begin{aligned} f(x,y,z)=0_{\mathbb{R}^3} &\Longleftrightarrow (x+y,2x-y+z,x+z)=(0,0,0) \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ 2x-y+z=0 \\ x+z=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ 2x-y+z=0 \\ z=-x \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ 2x+x-x=0 \\ z=-x \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ x=0 \\ z=-x \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow (x,y,z)=(0,0,0). \end{aligned}$$

Donc $\operatorname{Ker} f=\{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

D'après le théorème du rang, on a :

$$\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\dim \operatorname{Ker} f}+\dim \operatorname{Im} f=\underset{\overset{\shortparallel}{3}}{\dim \mathbb{R}^3}, \quad \text{donc} \quad \dim \operatorname{Im} f=3=\dim \mathbb{R}^3.$$

Or $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, par suite $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$.

3) On a $Card\,\mathcal{B}' = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, il suffit donc de vérifier que $\mathcal{B}'$ est libre. En effet, $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0_{\mathbb{R}^3} &\Longleftrightarrow \alpha(1,1,0) + \beta(1,2,1) + \gamma(1,3,1) = (0,0,0)\\
&\Longleftrightarrow (\alpha+\beta+\gamma, \alpha+2\beta+3\gamma, \beta+\gamma) = (0,0,0)\\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = 0\\ \alpha+2\beta+3\gamma = 0\\ \beta+\gamma = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = 0\\ 2\beta+3\gamma = 0\\ \beta = -\gamma \end{cases}\\
&\Longrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0.
\end{aligned}$$

(ou bien, il suffit de remarquer que $\det(v_1, v_2, v_3) \neq 0$).

4) $\to f(v_1) = f(1,1,0) = (2,1,1) = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$. Cherchons α, β et γ.
On a :

$$\begin{aligned}
\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = (2,1,1) &\Longleftrightarrow \alpha(1,1,0) + \beta(1,2,1) + \gamma(1,3,1) = (2,1,1)\\
&\Longleftrightarrow (\alpha+\beta+\gamma, \alpha+2\beta+3\gamma, \beta+\gamma) = (0,0,0)\\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = 2\\ \alpha+2\beta+3\gamma = 1\\ \beta+\gamma = 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Résolvons ce système par la méthode de Gauss, On obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \curvearrowright \begin{array}{c} \\ L_2 - L_1 \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 2\\ 0 & \boxed{1} & 2 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \curvearrowright \begin{array}{c} \\ \\ L_3 - L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 2\\ 0 & \boxed{1} & 2 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\curvearrowright \begin{array}{c} \\ \\ -L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 2\\ 0 & \boxed{1} & 2 & -1\\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 \end{array}\right).$$

Le système devient donc :

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = 2\\ \beta+2\gamma = -1\\ \gamma = -2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2-\beta-\gamma = 1\\ \beta = -1-2\gamma = 3\\ \gamma = -2. \end{cases}$$

Par suite $f(v_1) = v_1 + 3v_2 - 2v_3$.
$\to$ On admet que $f(v_2) = v_1 + 6v_2 - 4v_3$ et $f(v_3) = 2v_1 + 8v_2 - 6v_3$.

5) $$N = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}') = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(v_1) & f(v_2) & f(v_3)\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}\\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2\\ 3 & 6 & 8\\ -2 & -4 & -6 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow v_1\\ \leftarrow v_2\\ \leftarrow v_3 \end{array}.$$

6) $P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow e_1 \\ \leftarrow e_2 \\ \leftarrow e_3 \end{array}.$

7) • Calculons P^{-1} par la méthode de Pivot de Gauss :

$$(P\,|\,I) \curvearrowright \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \curvearrowright \begin{array}{r} \\ L_2 - L_1 \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\curvearrowright \begin{array}{r} L_1 - L_2 \\ \\ L_3 - L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \curvearrowright \begin{array}{r} \\ \\ -L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\curvearrowright \begin{array}{r} L_2 + L_3 \\ L_2 - 2L_3 \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

D'où $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$

• Calculons P^{-1} par la méthode des cofacteurs :

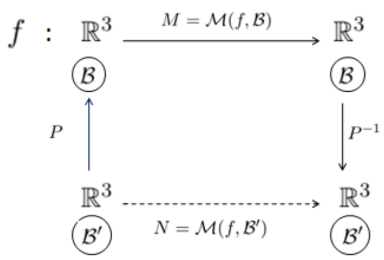
$\rightarrow \det P = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right. = (2+1) - (3+1) = -1.$

$\rightarrow Com\, P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$

$\rightarrow {}^t Com\, P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$

$\rightarrow P^{-1} = \frac{1}{\det P}\, {}^t Com\, P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$

7) On a $N = P^{-1}MP$.



Remarque : On vérifie que :

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 8 \\ -2 & -4 & -6 \end{pmatrix} = N.$$

Exercice 2.

Soit $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1) Vérifier qu'on peut écrire $M = 3I + N$ où N est une matrice à déterminer et I est la matrice unité d'ordre 3.

2) Calculer N^2, N^3 puis N^p pour $p \geq 3$.

3) On rappelle la formule du binôme : $(A+B)^p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} C_p^k A^{p-k} B^k$.

Expliquer pourquoi on peut utiliser cette formule pour calculer M^p. Puis calculer M^p pour $p \geq 1$.

4) Soient $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ et $(z_n)_n$ trois suites réelles telles que : $x_0 = 1$, $y_0 = 2$ et $z_0 = 7$ et vérifiant les relations de récurrence :

$$\begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + y_n \\ y_{n+1} = 3y_n + 2z_n \\ z_{n+1} = 3z_n. \end{cases}$$

On considère $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

a) Trouver une matrice A telle que $X_{n+1} = AX_n$. En déduire que $X_n = A^n X_0$.

b) Calculer A^n.

c) En déduire l'expression de x_n, y_n et z_n en fonction de n.

Solution.

1) $M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\shortparallel \\ I}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\shortparallel \\ N}} = 3I + N.$

2) • $N^2 = N.N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

• $N^3 = N^2.N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

• Soit $p \geq 3$, $N^p = N^{p-3}.N^3 = N^{p-3}.O = O$.

3) Soit $p \geq 1$ un entier.

$$M^p = (3I + N)^p = \sum_{k=0}^{p} C_p^k (3I)^{p-k} N^k.$$

On a appliqué la formule du binôme puisque les matrices $3I$ et N commutent ($3I.N = 3N = N.3I$). On obtient donc :

$$\begin{aligned} M^p &= \sum_{k=0}^{p} C_p^k 3^{p-k} \underbrace{I^{p-k}}_{=I} N^k = \sum_{k=0}^{p} C_p^k 3^{p-k} N^k \\ &= C_p^0 3^p N^0 + C_p^1 3^{p-1} N + C_p^2 3^{p-2} N^2 + C_p^3 3^{p-3} \underbrace{N^3}_{=0} + \cdots \end{aligned}$$

Or, $N^k = 0, \quad \forall k \geq 3$. Par suite,

$$\begin{aligned} M^p &= 3^p I + p 3^{p-1} N + \frac{p(p-1)}{2} 3^{p-2} N^2 \\ &= 3^p \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + p.3^{p-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{p(p-1)}{2} 3^{p-2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3^p & p.3^{p-1} & p(p-1)3^{p-2} \\ 0 & 3^p & 2p3^{p-1} \\ 0 & 0 & 3^p \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4) **a)** $X_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}}_{=X_n} = A.X_n$. On a : $X_n = AX_{n-1}$

$$\begin{aligned} &= A.AX_{n-2} = A^2 X_{n-2} \\ &= A.A^2 X_{n-3} = A^3 X_{n-3} \\ &\vdots \\ &= A^n X_{n-n} = A^n X_0. \end{aligned}$$

b) $A = M$ la matrice considérée en hypothèses.

$$A^n = M^n = \begin{pmatrix} 3^n & n.3^{n-1} & n(n-1)3^{n-2} \\ 0 & 3^n & 2n.3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}, \quad \forall n \geq 2.$$

c) On a :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3^n & n.3^{n-1} & n(n-1)3^{n-2} \\ 0 & 3^n & 2n.3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3^n x_0 + n.3^{n-1} y_0 + n(n-1)3^{n-2} z_0 \\ 3^n y_0 + 2n.3^{n-1} z_0 \\ 3^n z_0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{cases} x_n = 3^n x_0 + n.3^{n-1} y_0 + n(n-1)3^{n-2} z_0 \\ y_n = 3^n y_0 + 2n.3^{n-1} z_0 \\ z_n = 3^n z_0. \end{cases}$$

Exercice 3.
Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1) Montrer que les valeurs propres de A sont $-1; 1$ et 2.

2) Déterminer une base de vecteurs propres de $\mathbb{R}^3$ puis la matrice D de f dans cette nouvelle base.

Solution.

1) Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme caractéristique de A.

$$\begin{aligned} P_A(X) = \det(A - XI_3) &= \begin{vmatrix} -3-X & 1 & 4 \\ 0 & 2-X & 0 \\ -2 & 1 & 3-X \end{vmatrix} \\ &= (2-X) \begin{vmatrix} -3-X & 4 \\ -2 & 3-X \end{vmatrix} \\ &= (2-X)\big[-(3+X)(3-X)+8\big] \\ &= (2-X)\big[-(9-X^2)+8\big] = (2-X)(X^2-1) \\ &= (2-X)(X-1)(X+1). \end{aligned}$$

A admet trois valeurs propres réelles et distinctes : 1, -1 et 2. (A est donc diagonalisable).

2) $\rightarrow$ $E_1 = \mathrm{Ker}(f - id_{\mathbb{R}^3}) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; (A - I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$

$$\textit{On a} \qquad (A - I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -4 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -4x + y + 4z = 0 \\ y = 0 \\ -2x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = z \\ y = 0. \end{cases}$$

Donc $(x,y,z) = (x,0,x) = x(1,0,1)$. Par suite $E_1 =< u = (1,0,1) >$.
Notons que $\{u\}$ est une base de E_1 (puisque $u \neq 0$).

$\rightarrow\ E_{-1} = \text{Ker}(f + id_{\mathbb{R}^3}) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ (A + I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$

$$\textit{On a} \qquad (A+I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2x & + & y & + & 4z & = & 0 \\ & & 3y & & & = & 0 \\ -2x & + & y & + & 4z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = 2z \\ y = 0. \end{cases}$$

Donc $(x,y,z) = (2z,0,z) = z(2,0,1)$. Par suite $E_{-1} =< v = (2,0,1) >$.
Notons que $\{v\}$ est une base de E_{-1}.

$\rightarrow\ E_2 = \text{Ker}(f - 2id_{\mathbb{R}^3}) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ (A - 2I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$

$$\textit{On a} \qquad (A-2I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -5x & + & y & + & 4z & = & 0 \\ -2x & + & y & + & z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -5x & + & y & + & 4z & = & 0 \\ -3x & & & + & 3z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y = x \\ z = x. \end{cases}$$

Donc $(x,y,z) = (x,x,x) = x(1,1,1)$. Par suite $E_2 =< w = (1,1,1) >$.
Notons que $\{w\}$ est une base de E_2 (puisque $w \neq 0$).

Soit donc $\mathcal{B}' = (u,v,w)$ une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres.

$$D = \mathcal{M}(f,\mathcal{B}') = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(u) & f(v) & f(w) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow u \\ \leftarrow v \\ \leftarrow w \end{array}$$

En effet :

u est un vecteur propre associé à $1 \Longrightarrow f(u) = 1.u$.
v est un vecteur propre associé à $-1 \Longrightarrow f(v) = -1.u$.
w est un vecteur propre associé à $2 \Longrightarrow f(u) = 2.u$.

Examen (Faculté des sciences Aïn Chock, Casablanca, 2011/2012)

Exercice 1.
Soit A une matrice carrée d'ordre n. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p + A + I = 0$ où I est la matrice unité.
Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Solution.
On a :

$$\begin{aligned} A^p + A + I = 0 &\iff A^p + A = -I \\ &\iff -A(A^{p-1} + I) = I. \end{aligned}$$

Donc A est inversible et $A^{-1} = -(A^{p-1} + I)$.

Exercice 2.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & & (x,y,z) & \longmapsto & (2x+5y+5z, x+2y+2z, x+3y+3z). \end{array}$$

1) Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$. f est-il injectif ?

2) Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$. f est-il surjectif ?

3) Ecrire la matrice A de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

Solution.

1) $\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ f(x,y,z) = (0,0,0)\}$.

On a :

$$\begin{aligned} f(x,y,z) = (0,0,0) &\iff (2x+5y+5z, x+2y+2z, x+3y+3z) = (0,0,0) \\ &\iff \left\{ \begin{array}{ccccccc} 2x & + & 5y & + & 5z & = & 0 \\ x & + & 2y & + & 2z & = & 0 \\ x & + & 3y & + & 3z & = & 0 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{ccccccc} 2x & + & 5y & + & 5z & = & 0 \\ x & + & 2y & + & 2z & = & 0 \\ & & y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \qquad (L_3) - (L_2) \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ z = -y. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Donc $(x,y,z) = (0,y,-y) = y(0,1,-1)$. Par suite $\operatorname{Ker} f = < (0,1,-1) >$. Or, le vecteur $(0,1,-1) \neq (0,0,0) \Longrightarrow \{(0,1,-1)\}$ est libre. Donc $\{(0,1,-1)\}$ est une base de $\operatorname{Ker} f$.
On en déduit que f est non injectif puisque $\operatorname{Ker} f \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ (on peut déduire aussitôt que f est non surjectif car f est un endomorphisme).

2) D'après le théorème du rang, on a :

$$\underset{\overset{\shortparallel}{1}}{\dim \operatorname{Ker} f} + \dim \operatorname{Im} f = \underset{\overset{\shortparallel}{3}}{\dim \mathbb{R}^3}, \quad \text{donc} \quad \dim \operatorname{Im} f = 2.$$

Cherchons une base de $\operatorname{Im} f$:
$\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3 \Longrightarrow (f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ est un système générateur de $\operatorname{Im} f$.
On a $f(e_1) = (2,1,1)$, $f(e_2) = (5,2,3)$ et $f(e_3) = (5,2,3)$. On vérifie que $(f(e_1), f(e_2))$ est un système libre. En effet :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \alpha(2,1,1) + \beta(5,2,3) = (0,0,0) \Longleftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + 5\beta = 0 \\ \alpha + 2\beta = 0 \\ \alpha + 3\beta = 0 \end{cases} \Longrightarrow \alpha = \beta = 0.$$

$\mathcal{S} = (f(e_1), f(e_2)) = \big((2,1,1), (5,2,3)\big)$ est donc une base de $\operatorname{Im} f$ (car $\mathcal{S}$ est libre et $Card\,\mathcal{S} = \dim \operatorname{Im} f = 2$).
Aussi, f est non surjectif car $\operatorname{Im} f \neq \mathbb{R}^3$ (puisque $\dim \operatorname{Im} f \neq \dim \mathbb{R}^3$).

3)

$$\mathcal{M}(f, \mathcal{B}) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow e_1 \\ \leftarrow e_2 \\ \leftarrow e_3 \end{array}$$

En effet :
$f(e_1) = f(1,0,0) = (2,1,1) = 2(1,0,0) + 1(0,1,0) + 1(0,0,1) = 2e_1 + 1e_2 + 1e_3.$
$f(e_2) = f(0,1,0) = (5,2,3) = 5(1,0,0) + 2(0,1,0) + 3(0,0,1) = 5e_1 + 2e_2 + 3e_3.$
$f(e_3) = f(0,0,1) = (5,2,3) = 5(1,0,0) + 2(0,1,0) + 3(0,0,1) = 5e_1 + 2e_2 + 3e_3.$

Exercice 3.
Soit A la matrice représentant l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Montrer que les valeurs propres de A sont -2, -1 et 3. A est-elle diagonalisable ?

2) Montrer que $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de vecteurs propres de A où $v_1 = (-2,-2,3)$, $v_2 = (-3,1,1)$ et $v_3 = (1,1,1)$.

3) Ecrire la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

4) Calculer P^{-1}.

5) Montrer que $A = PDP^{-1}$ où D est une matrice diagonale à déterminer.

6) Calculer A^n.

7) On considère les suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies par leur premier terme u_0, v_0 et w_0 et les relations :

$$\begin{cases} u_{n+1} = v_n + 2w_n \\ v_{n+1} = u_n + 2w_n \\ w_{n+1} = u_n + 2v_n. \end{cases}$$

Pour $n \geq 0, \quad X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}.$

a) Exprimer X_{n+1} en fonction de A et de X_n.

b) En déduire $u_n,\ v_n$ et w_n en fonction de $n, u_0,\ v_0$ et w_0.

Solution.

1) Calculons le polynôme caractéristique de A :

$$P_A(X) = \det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} -X & 1 & 2 \\ 1 & -X & 2 \\ 1 & 2 & -X \end{vmatrix}$$

$$= L_2 - L_3 \begin{vmatrix} -X & 1 & 2 \\ 0 & -X-2 & 2+X \\ 1 & 2 & -X \end{vmatrix} \overset{C_2+C_3}{=} \begin{vmatrix} -X & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2+X \\ 1 & 2-X & -X \end{vmatrix}$$

$$= -(2+X)\big(-X(2-X)-3\big) = -(X+2)(X^2-2X-3)$$
$$= -(X+2)(X+1)(X-3).$$

A admet trois valeurs propres réelles distinctes $-2,\ -1$ et 3. On en déduit que A est diagonalisable.

2) • $E_{-2} = \text{Ker}(f + 2id_{\mathbb{R}^3})$
$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ (f + 2id_{\mathbb{R}^3})(x,y,z) = (0,0,0)\}$
$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ (A + 2I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$

On a :

$$(A+2I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ x + 2y + 2z = 0 \\ x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} z = -\frac{3}{2}y \\ x = y. \end{cases}$$

Donc $(x,y,z) = (y, y, -\frac{3}{2}y) = y(1, 1, -\frac{3}{2})$. Par suite $E_{-2} = <(1,1,-\frac{3}{2})> = <v_1 = (-2,-2,3)>$ (Notons que $<v_1> = <\lambda v_1>,\quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^*$).
Le vecteur $v_1 = (-2,-2,3)$ est non nul, donc il est libre. Dès lors, $\mathcal{B}_{-2} = \{v_1 = (-2,-2,3)\}$ est une base de E_{-2}.

• $E_{-1} = \text{Ker}(f + id_{\mathbb{R}^3})$
$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ (f + id_{\mathbb{R}^3})(x,y,z) = (0,0,0)\}$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ (A+I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

On a :

$$(A+I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x+y+2z=0 \\ x+y+2z=0 \\ x+2y+z=0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x+y+2z=0 \\ x+2y+z=0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x+y+2z=0 \\ y-z=0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x=-3y \\ z=y. \end{cases}$$

Donc $(x,y,z) = (-3y,y,y) = y(-3,1,1)$. Par suite $E_{-1} =< v_2 = (-3,1,1) >$.
Pour les mêmes raisons que celles de E_{-2}, $\mathcal{B}_{-1} = \{v_2 = (-3,1,1)\}$ est une base de E_{-1}.

• $E_3 = \mathrm{Ker}(f - 3id_{\mathbb{R}^3})$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ (f-3id_{\mathbb{R}^3})(x,y,z) = (0,0,0)\}$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ (A-3I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

On a :

$$(A-3I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -3x+y+2z=0 \\ x-3y+2z=0 \\ x+2y-3z=0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -3x+y+2z=0 \\ 5y-5z=0 \\ x-3y+2z=0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -3x+3z=0 \\ y=z \\ 0=0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x=z \\ y=z. \end{cases}$$

Donc $(x,y,z) = (z,z,z) = z(1,1,1)$. Par suite $E_3 =< v_3 = (1,1,1) >$.
Pour les mêmes raisons qu'auparavant, $\mathcal{B}_3 = \{v_3 = (1,1,1)\}$ est une base de E_3.

Donc $\mathcal{B}' = \mathcal{B}_{-2} \cup \mathcal{B}_{-1} \cup \mathcal{B}_3 = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f.

3) La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est :

$$P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \begin{array}{c} \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow e_1 \\ \leftarrow e_2 \\ \leftarrow e_3 \end{array}$$

4) $\to P^{-1} = \dfrac{1}{\det P}\, {}^t Com\, P$.

- $\det P = \begin{vmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{L_3 - L_2}{=} \begin{vmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -20.$
- $Com\, P = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -5 \\ 4 & -5 & -7 \\ -4 & 0 & -8 \end{pmatrix}$.
- ${}^t Com\, P = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 5 & -5 & 0 \\ -5 & -7 & -8 \end{pmatrix}$.
- $P^{-1} = -\dfrac{1}{20} \begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 5 & -5 & 0 \\ -5 & -7 & -8 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{20} \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \\ -5 & 5 & 0 \\ 5 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

5) Soit D la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}'$.

$$D = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}') = \begin{array}{c} \begin{matrix} f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow v_1 \\ \leftarrow v_2 \\ \leftarrow v_3 \end{array}$$

En effet :

- $v_1 \in E_{-2} \iff v_1$ est un vecteur propre associé à -2
$\iff f(v_1) = -2.v_1$.
- $v_2 \in E_{-1} \iff v_2$ est un vecteur propre associé à -1
$\iff f(v_2) = -1.v_2$.
- $v_3 \in E_3 \iff v_3$ est un vecteur propre associé à 3
$\iff f(v_3) = 3.v_3$.

$$f \;:\; \begin{tikzcd} \underset{\mathcal{B}}{\mathbb{R}^3} \arrow[r, "A = \mathcal{M}(f,\mathcal{B})"] & \underset{\mathcal{B}}{\mathbb{R}^3} \arrow[d, "P^{-1}"] \\ \underset{\mathcal{B}'}{\mathbb{R}^3} \arrow[u, "P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}"] \arrow[r, dashed, "D = \mathcal{M}(f,\mathcal{B}')"] & \underset{\mathcal{B}'}{\mathbb{R}^3} \end{tikzcd}$$

Donc, $D = P^{-1}.A.P \Longrightarrow A = P.D.P^{-1}$.

6) On a $A = PDP^{-1}$. Donc $A^n = PD^nP^{-1}$.

$$A^n = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \\ -5 & 5 & 0 \\ 5 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{20}\begin{pmatrix} (-2)^{n+1} & 3.(-1)^{n+1} & 3^n \\ (-2)^{n+1} & (-1)^n & 3^n \\ 3.(-2)^n & (-1)^n & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \\ -5 & 5 & 0 \\ 5 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 15.(-1)^n + 5.3^n & 2.(-2)^{n+2} + 15.(-1)^{n+1} + 7.3^n & 4.(-2)^{n+1} + 8.3^n \\ 5.(-1)^{n+1} + 5.3^n & 2.(-2)^{n+2} + 5.(-1)^n + 7.3^n & 4.(-2)^{n+1} + 8.3^n \\ 5.(-1)^{n+1} + 5.3^n & 6.(-2)^{n+1} + 5.(-1)^n + 7.3^n & (-6).(-2)^{n+1} + 8.3^n \end{pmatrix}.$$

7) **a)** En posant $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$, $\forall n \geq 0$. Donc, on obtient :

$$\begin{cases} u_{n+1} = v_n + 2w_n \\ v_{n+1} = u_n + 2w_n \\ w_{n+1} = u_n + 2v_n \end{cases} \Longleftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix}}_{X_{n+1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}}_{X_n} \Longleftrightarrow X_{n+1} = AX_n.$$

b) On a :

$$\begin{aligned} X_n &= AX_{n-1} \\ &= A.AX_{n-2} = A^2X_{n-2} \\ &= A^2.AX_{n-3} = A^3X_{n-3} \\ &\vdots \\ &= A^nX_{n-n} = A^nX_0. \end{aligned}$$

ce qui est équivaut à :

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15.(-1)^n + 5.3^n & 2.(-2)^{n+2} + 15.(-1)^{n+1} + 7.3^n & 4.(-2)^{n+1} + 8.3^n \\ 5.(-1)^{n+1} + 5.3^n & 2.(-2)^{n+2} + 5.(-1)^n + 7.3^n & 4.(-2)^{n+1} + 8.3^n \\ 5.(-1)^{n+1} + 5.3^n & 6.(-2)^{n+1} + 5.(-1)^n + 7.3^n & (-6).(-2)^{n+1} + 8.3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \big(15.(-1)^n + 5.3^n\big)u_0 + \big(2.(-2)^{n+2} + 15.(-1)^{n+1} + 7.3^n\big)v_0 + \big(4.(-2)^{n+1} + 8.3^n\big)w_0 \\ \big(5.(-1)^{n+1} + 5.3^n\big)u_0 + \big(2.(-2)^{n+2} + 5.(-1)^n + 7.3^n\big)v_0 + \big(4.(-2)^{n+1} + 8.3^n\big)w_0 \\ \big(5.(-1)^{n+1} + 5.3^n\big)u_0 + \big(6.(-2)^{n+1} + 5.(-1)^n + 7.3^n\big)v_0 + \big((-6).(-2)^{n+1} + 8.3^n\big)w_0 \end{pmatrix}.$$

Par suite,

$$\begin{cases} u_n = \big(15.(-1)^n + 5.3^n\big)u_0 + \big(2.(-2)^{n+2} + 15.(-1)^{n+1} + 7.3^n\big)v_0 + \big(4.(-2)^{n+1} + 8.3^n\big)w_0 \\ v_n = \big(5.(-1)^{n+1} + 5.3^n\big)u_0 + \big(2.(-2)^{n+2} + 5.(-1)^n + 7.3^n\big)v_0 + \big(4.(-2)^{n+1} + 8.3^n\big)w_0 \\ w_n = \big(5.(-1)^{n+1} + 5.3^n\big)u_0 + \big(6.(-2)^{n+1} + 5.(-1)^n + 7.3^n\big)v_0 + \big((-6).(-2)^{n+1} + 8.3^n\big)w_0. \end{cases}$$

Examen (Faculté des sciences Aïn Chock, Casablanca, rattrapage, 2011/2012)

Indiquer la ou les bonne(s) réponse(s) :

Pour les questions de **1)** à **5)** :
Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(x,y) = (x-2y, x+y, x+y).$$

1) Alors f est :

- **a)** une application linéaire.
- **b)** un endomorphisme.
- **c)** un automorphisme.

2) $\operatorname{Ker} f$ est :
a) $\{(0,0)\}$. **b)** $\operatorname{Vect}(1,1)$. **c)** $\operatorname{Vect}((1,2,1),(0,1,1))$.

3) f est :
a) injective. **b)** surjective. **c)** ni injective ni surjective. **d)** bijective.

4) $\operatorname{Im} f$ est :
a) $\mathbb{R}^2$. **b)** $\mathbb{R}^3$. **c)** $\operatorname{Vect}((1,1,1),(-2,1,1))$. **d)** $\operatorname{Vect}(0,1,0)$.

5) La matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ est :
a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. **b)** $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

6) La matrice inverse de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ est :
a) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. **b)** $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$. **c)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. **d)** n'existe pas.

7) A, B et C sont trois matrices carrées si $C \neq 0$ et $AC = BC$ alors $A = B$.
a) Vrai. **b)** Faux.

8) La somme de deux matrices inversibles est inversibles.
a) Vrai. **b)** Faux.

9) Si A et B sont deux matrices carrées, on peut toujours écrire :

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

a) Vrai. **b)** Faux.

10) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, alors les valeurs propres de A sont :

a) $1\,;2\,;3$. **b)** $1\,;2$. **c)** $1\,;3$. **d)** $0\,;1\,;2$.

Pour cette question faire apparaître le détail des calculs.

Solution.

1) **a)** Vraie. (**b)** et **c)** sont fausses car l'ensemble de départ $\mathbb{R}^2 \neq \mathbb{R}^3$ l'ensemble d'arrivée).
f est une application linéaire. En effet : soient $(x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
f(\alpha(x,y)+(x',y')) &= f(\alpha x + x', \alpha y + y') \\
&= \big((\alpha x + x') - 2(\alpha y + y'), (\alpha x + x') + (\alpha y + y'), (\alpha x + x') + (\alpha y + y')\big) \\
&= (\alpha x - 2\alpha y, \alpha x + \alpha y, \alpha x + \alpha y) + (x' - 2y', x' + y', x' + y') \\
&= \alpha(x - 2y, x + y, x + y) + (x' - 2y', x' + y', x' + y') \\
&= \alpha f(x,y) + f(x',y').
\end{aligned}$$

2) **a)** Vraie.
$\operatorname{Ker} f = \{(0,0)\}$. En effet :

$$\begin{aligned}
f(x,y) = (0,0,0) &\iff (x-2y, x+y, x+y) = (0,0,0) \\
&\iff \begin{cases} x - 2y = 0 \\ x + y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 3y = 0 \end{cases} \\
&\iff (x,y) = (0,0).
\end{aligned}$$

3) **a)** Vraie. En effet : $\operatorname{Ker} f = \{(0,0)\} \iff f$ est injective.

4) D'après le théorème du rang :

$$\underset{\substack{\shortparallel \\ 0}}{\dim \operatorname{Ker} f} + \dim \operatorname{Im} f = \underset{\substack{\shortparallel \\ 2}}{\dim \mathbb{R}^2}, \quad \text{donc} \quad \dim \operatorname{Im} f = 2,$$

donc **b)** et **d)** sont fausses. Aussi, $\operatorname{Im} f \subseteq \mathbb{R}^3$, alors **a)** est fausse. Reste donc **c)** qui est vraie (on peut le vérifier par calcul si nécessaire).

5) **b)** Vraie. En effet :

$$\mathcal{M}(f, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} f(1,0) & f(0,1) \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow (1,0,0) \\ \leftarrow (0,1,0) \\ \leftarrow (0,0,1) \end{array}$$

car $f(1,0) = (1,1,1)$ et $f(0,1) = (-2,1,1)$.

6) **c)** Vraie. En effet :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \curvearrowright \quad L_2 - 2L_1 \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \curvearrowright \quad -L_2 \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right).$$

7) **b)** Vraie. On choisit une matrice C non inversible $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
On a :

$$AC = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$BC = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Remarque : $AC = BC \Longrightarrow A = B$ si C est une matrice inversible.

8) **b)** Vraie. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Puisque $\det A = 1 \neq 0$ et $\det B = -1 \neq 0$, alors A et B sont inversibles. Par contre, $A + B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ est non inversible car $\det(A+B) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

9) **b)** Vraie.

$$\begin{aligned}(A+B)^2 = (A+B)(A+B) &= A.A + A.B + B.A + B.B \\ &= A^2 + A.B + B.A + B^2.\end{aligned}$$

Si $AB = BA$ alors $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.
En effet : le produit matriciel n'est pas (toujours) commutatif.
Par exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

10) **a)** Vraie. En effet :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}P_A(X) = \det(A - XI_3) &= \left|\begin{matrix} 3-X & -2 & 2 \\ 1 & 2-X & 0 \\ 1 & 1 & 1-X \end{matrix}\right| \begin{matrix} 3-X & -2 \\ 1 & 2-X \\ 1 & 1 \end{matrix} \\ &= (3-X)(2-X)(1-X) + 0 + 2 - \big(2(2-X) + 0 - 2(1-X)\big) \\ &= (3-X)(2-X)(1-X) + 2 - 2(2-X) + 2(1-X) \\ &= (2-X)\big[(3-X)(1-X) - 2\big] + 2 + 2(1-X) \\ &= (2-X)\big[(3-X)(1-X) - 2\big] + 2(2-X) \\ &= (2-X)\big[(3-X)(1-X) - 2 + 2\big] \\ &= (2-X)(3-X)(1-X).\end{aligned}$$

Les valeurs propres de A sont 1, 2 et 3.

Examen (Faculté des sciences Aïn Chock, Casablanca, 2010/2011)

Exercice 1.

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} \pi & 1 & 2 \\ 0 & \pi & 3 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}$.

1) A est-elle diagonalisable ? Justifier.

2) A est-elle inversible ? Justifier.

Solution.

1) Si A est diagonalisable, alors A est semblable à une matrice diagonale D, i.e. il existe une matrice inversible P telle que $D = P^{-1}AP$, et donc $A = PDP^{-1}$.
Cette matrice D aura les mêmes valeurs propres que A (car semblable à A) situées sur sa diagonale. Or, π est la seule valeur propre de A (car A est triangulaire), donc D sera de la forme

$$D = \begin{pmatrix} \pi & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix} = \pi I_3\,, \qquad \left(\text{où } I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

On aura alors :

$$A = P.\pi I_3.P^{-1} = \pi P I_3 P^{-1} = \pi I_3\,,$$

ce qui est absurde car $A \neq \pi I_3$.

2) On a $\det A = \pi^3$ (car A est triangulaire), donc $\det A \neq 0$. Par suite, A est inversible.

Exercice 2.

$\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$ sont munis de leur base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et $\mathcal{C} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$. On considère l'application linéaire

$$\begin{aligned} f \,:\, \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x + z, y - x, z + y, x + y + 2z). \end{aligned}$$

1) Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$.

2) Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$.

3) f est-elle injective ? surjective ?

4) Ecrire la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

Solution.

1) $\begin{aligned} \operatorname{Ker} f &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ f(x, y, z) = 0_{\mathbb{R}^4}\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ (x + z, y - x, z + y, x + y + 2z) = (0, 0, 0, 0)\}. \end{aligned}$

On a :

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y - x = 0 \\ z + y = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z = -x \\ y = x \\ -x + x = 0 \\ x + x - 2x = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z = -x \\ y = x. \end{cases}$$

Donc $(x, y, z) = (x, x, -x) = x(1, 1, -1)$. Par suite $\operatorname{Ker} f = \{x(1, 1, -1) \ / \ x \in \mathbb{R}\} = \ < (1, 1, -1) >$.
Le vecteur $(1, 1, -1)$ engendre $\operatorname{Ker} f$ et est libre (car $(1, 1, -1)$ est non nul), c'est donc une base de $\operatorname{Ker} f$ ($\Longrightarrow \dim \operatorname{Ker} f = 1$).

2) D'après le théorème du rang, on a :

$$\underset{\overset{\shortparallel}{1}}{\dim \operatorname{Ker} f} + \dim \operatorname{Im} f = \underset{\overset{\shortparallel}{3}}{\dim \mathbb{R}^3}, \quad \text{donc} \quad \dim \operatorname{Im} f = 2.$$

Cherchons une base de $\operatorname{Im} f$:

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3 \Longrightarrow (f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ est un système générateur de $\operatorname{Im} f$ (remarquons que si $\operatorname{Ker} f = \{0\}$, alors $(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ serait même une base de $\operatorname{Im} f$. Mais dans notre cas $\operatorname{Ker} f \neq \{0\}$).

On a $f(e_1) = (1, -1, 0, 1)$, $f(e_2) = (0, 1, 1, 1)$ et $f(e_3) = (1, 0, 1, 2)$. On vérifie que $(f(e_1), f(e_2))$ est un système libre. En effet :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \qquad \alpha(1, -1, 0, 1) + \beta(0, 1, 1, 1) = (0, 0, 0, 0) \Longrightarrow \alpha = \beta = 0.$$

$\mathcal{S} = (f(e_1), f(e_2)) = \big((1, -1, 0, 1), (0, 1, 1, 1)\big)$ est donc une base de $\operatorname{Im} f$ (car $\mathcal{S}$ est libre et $Card\,\mathcal{S} = \dim \operatorname{Im} f = 2$).

3) f est non injective car $\operatorname{Ker} f \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.
f est non surjective car $\operatorname{Im} f \neq \mathbb{R}^4$ (puisque $\underset{\overset{\shortparallel}{2}}{\dim \operatorname{Im} f} \neq \underset{\overset{\shortparallel}{4}}{\dim \mathbb{R}^4}$).

4)

$$\mathcal{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow u_1 \\ \leftarrow u_2 \\ \leftarrow u_3 \\ \leftarrow u_4 \end{array}$$

Exercice 3.

Soient a et b deux réels, $(u_n)_n$ la suite définie par : $u_0 = a$, $u_1 = b$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$.

On considère pour tout entier n positif ou nul, le vecteur colonne $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$.

1) Montrer que $X_{n+1} = AX_n$ où A est une matrice carrée d'ordre 2 à déterminer.

2) En déduire que $X_n = A^n X_0$, $\quad \forall n \in \mathbb{N}$.

3) Montrer que A est diagonalisable ; déterminer la matrice D diagonale et la matrice P inversible telles que $A = PDP^{-1}$.

4) Calculer A^n, $\;\; n \in \mathbb{N}$.

5) En déduire u_n en fonction de a, b et n.

Solution.

1) Montrons que $X_{n+1} = AX_n$, pour une certaine matrice carrée A d'ordre 2.
On a :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 0.u_n + 1.u_{n+1} \\ u_{n+2} = 2.u_n + 1.u_{n+1} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Donc $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2) En déduire que $X_n = A^n X_0\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}$. (Par récurrence sur n).

- <u>Pour $n = 1$:</u> On a $\begin{cases} u_1 = b \\ u_2 = u_1 + 2u_0 = b + 2a. \end{cases}$

Donc $X_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = AX_0$.

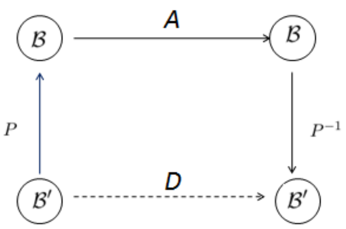
- Supposons que $X^n = A^n X_0$ et montrons que $X_{n+1} = A^{n+1} X_0$. En effet :

$$X_n = A^n X_0 \Longrightarrow \underbrace{A.X_n}_{\substack{\shortparallel \\ X_{n+1}}} = \underbrace{A.A^n X_0}_{\substack{\shortparallel \\ A^{n+1} X_0}} \Longrightarrow X_{n+1} = A^{n+1} X_0.$$

3) • $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable car :
le polynôme caractéristique $P_A(X)$ admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$ (à savoir l'ordre de A est 2).

$$\begin{aligned} P_A(X) = \det(A - XI_2) = \begin{vmatrix} -X & 1 \\ 2 & 1 - X \end{vmatrix} &= -X(1 - X) - 2 \\ = X^2 - X - 2 = (X + 1)(X - 2). \end{aligned}$$

-1 et 2 sont les valeurs propres de A.
• A est diagonalisable $\Longrightarrow$ A est semblable à une matrice D diagonale formée de valeurs propres à la diagonale. Alors, il existe une matrice inversible P telle que $D = P^{-1}AP$ et donc $A = PDP^{-1}$, où $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et P est la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}'$ formée de vecteurs propres.



Cherchons donc les vecteurs propres :
On a :

$$\begin{cases} E_{-1} = \operatorname{Ker}(A + I_2) = \left\{ (x, y) \;/\; (A + I_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ \\ E_2 = \operatorname{Ker}(A - 2I_2) = \left\{ (x, y) \;/\; (A - 2I_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}. \end{cases}$$

• $(A + I_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases} \Longrightarrow y = -x.$$

Donc $(x, y) = (x, -x) = x(1, -1)$ et $E_{-1} =< (1, -1) >$.
On choisit $u = (1, -1)$ (le vecteur $(1, -1)$ est non nul et engendre E_{-1}, c'est donc une base).
• De même pour E_2. On obtient $E_2 =< (1, 2) >$. Et on choisit $v = (1, 2)$.

• La base formée de vecteurs propres $\mathcal{B}' = (u, v) = \big((1,-1),(1,2)\big)$.

• Par suite, $\begin{array}{cc} u & v \\ \downarrow & \downarrow \end{array}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow (1,0) \\ \leftarrow (0,1) \end{array}$ et $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, car :

$$(P\,|\,I_2) : \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \curvearrowright \quad L_2 + L_1 \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \curvearrowright \quad \tfrac{1}{3}L_2 \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$\curvearrowright \quad L_1 - L_2 \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right).$$

Donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4) On a : $D = P^{-1}AP \Longrightarrow A = PDP^{-1} \Longrightarrow A^n = PD^nP^{-1}$. Donc,

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} (-1)^n & 2^n \\ (-1)^{n+1} & 2^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} (-1)^n 2 + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^n \\ (-1)^{n+1} 2 + 2^{n+1} & (-1)^n + 2^{n+1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

5) $X_n = A^n X_0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} (-1)^n 2 + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^n \\ (-1)^{n+1} 2 + 2^{n+1} & (-1)^n + 2^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \big((-1)^n 2 + 2^n\big)a + \big((-1)^{n+1} + 2^n\big)b \\ \big((-1)^{n+1} 2 + 2^{n+1}\big)a + \big((-1)^n + 2^{n+1}\big)b \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow u_n = \frac{1}{3}\Big(\big((-1)^n 2 + 2^n\big)a + \big((-1)^{n+1} + 2^n\big)b\Big).$$