Université Moulay Ismail
Faculté des Sciences Meknès
Département de Mathématiques

Année universitaire: 2019-2020
Filière: SMA S6
Module: Prob et Proc Stoch
Prof: Souhail Boumour

TD 3

Exercice 1

Soit X une v.a absolument continue de densité de probabilité f_X définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$f_X(x) = \frac{a}{(1+|x|)^2}.$$

1) Déterminer la constante a.
2) Calculer $E(X)$ et $V(X)$, (si ils existent).
3) Déterminer la densité de probabilité de $Y = \ln(1+|X|)$.
4) Reconnaître le nom de la loi de probabilité de Y.

Exercice 2

1) Soit $U \sim \mathcal{U}[0,1]$ la loi uniforme sur $[0,1]$. Déterminez la loi de $X = -\ln(U)$.
2) Déterminer la loi de $X = a + (b-a)U$ si $U \sim \mathcal{U}[0,1]$.
3) Montrer que si $U \sim \mathcal{U}[0,1]$ et $p \in (0,1)$ alors $Y = 1_{\{U \leq p\}} \sim \mathcal{B}(p)$.
4) En déduire la loi de $Z = \sum_{i=1}^{n} 1_{\{U_i \leq p\}}$ ou $U_1, ..., U_n$ sont n v.a i.i.d de loi $\mathcal{U}[0,1]$.

Exercice 3

Soit X une v.a.r de fonction de répartition F_X et de densité f_X.

1) Montrer que si $U \sim \mathcal{U}[0,1]$ alors $X = F_X^{-1}(U)$ possède la densité f_X.
2) Calculer la fonction de répartition de la loi $\mathcal{E}(\lambda)$.
3) En déduire que si $U \sim \mathcal{U}[0,1]$ alors $X = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-U) \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

Exercice 4

Soit X une v.a de loi exponentielle de paramètre 1. On pose : $Y = [X]$ la partie entière de X.

1) Calculer la fonction de répartition de X.

2) En déduire la loi de Y et que $Y+1$ suit une loi géométrique et déterminer son paramètre.

3) On note $Z = X - Y$. Quelle est sa fonction de répartition?

4) En déduire la densité de Z.

Exercice 5 : (Méthode de la fonction muette).

Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{\lambda}$.

1. Déterminer la loi de $Y = \lfloor X \rfloor$.
2. Déterminer la loi de $U_1 = X^2$.
3. Déterminer la loi de $U_2 = \ln(X)$.
4. (*) Déterminer la loi de la variable $Z = |X - 1|$.

Exercice 6

Fixons $p \in]-1, +\infty[$. Soit X une variable aléatoire de densité $f_X : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$f_X(x) = \frac{K_p|x|^p}{2} 1_{[-1,1]}(x), \text{ avec } K_p > 0.$$

1. Déterminer K_p.
2. Montrer que la variable aléatoire $Y = X^2$ est intégrable puis calculer son espérance.
3. (*) Déterminer la loi de $Z = e^{1/X}$ après avoir justifié que Z est une variable aléatoire définie presque sûrement.

Exercice 7

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

1. Donner la densité de la variable aléatoire $Y = X^2$.
2. Calculer l'espérance de Y.

Exercice 8

Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Nous rappelons que la fonction de répartition $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ de X est donnée dans le polycopié.

1. a. Vérifier que $Y = \ln(X)$ est bien définie presque sûrement.

   b. Calculer la fonction de répartition F_Y de Y puis déterminer la loi de Y.

2. a. Vérifier que $U = \lfloor \frac{1}{X} \rfloor$ est bien définie presque sûrement, où $\lfloor h \rfloor$ désigne la partie entière $h \in \mathbb{R}$.

   b. Déterminer la loi de U.

Exercice 9

Soit X une variable aléatoire de loi absolument continue de densité $f_X : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f_X(x) = \frac{e^{-|x|}}{2}.$$

1. Calculer F_X la fonction de répartition de X.
2. Déterminer la fonction de répartition puis la loi de $Z = |X|$.
3. Soit $a \geq 0$ et $V = \max(X, a)$.

   Calculer F_V la fonction de répartition de V.

4. (*) Même question avec $a < 0$.
5. (*) Déterminer la loi de

$$W = \begin{cases} \frac{\lfloor X \rfloor}{2} & \text{si } \lfloor X \rfloor \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x.

Exercice 10

Soit X une v.a absolument continue de densité de probabilité f_X. On appelle entropie de X la quantité suivante, (si elle existe): $h(X) = -\int_{\mathbb{R}} f_X(x) \ln(f_X(x)) dx$.

1) Calculer l'entropie de X si:

i) $X \sim \mathcal{U}[a, b]$,

ii) $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$,

iii) $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

2) On souhaite prouver que, parmi les v.a de variance donnée, les lois normales sont celles qui admettent une entropie maximale. On fixe donc X une v.a, de moyenne μ, de densité f_X et de variance σ^2, admettant une entropie $h(X)$. On note f_N la densité de la v.a $N \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. On supposera dans la suite que la fonction $x \mapsto f_X(x) \ln\left(\frac{f_N(x)}{f_X(x)}\right)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

i) Vérifier que: $h(X) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x) \ln\left(\frac{f_N(x)}{f_X(x)}\right) dx - \int_{\mathbb{R}} f_X(x) \ln(f_N(x)) dx$.

ii) Montrer que $\int_{\mathbb{R}} f_X(x) \ln\left(\frac{f_N(x)}{f_X(x)}\right) dx \leq 0$. (Utiliser: $\forall\, x > 0$, $\ln(x) \leq x - 1$).

iii) Calculer: $\int_{\mathbb{R}} f_X(x) \ln(f_N(x)) dx$, et déduire que $h(X) \leq h(N)$.

Exercice 11

1) Calculer la fonction caractéristique de X suivant la loi $\mathcal{P}(\lambda)$.

2) En déduire $E(X)$ et $V(X)$.

2) Déterminer la loi de $Z = X + Y$ si X et Y sont i.i.d de loi $\mathcal{P}(\lambda)$.

Exercice 12

Soit $U \sim \mathcal{N}(0,1)$ et φ_U sa fonction caractéristique.

1) Montrer que φ_U vérifie l'EDO: $\varphi_U'(t) = -t\varphi_U(t)$ et en déduire $\varphi_U(t)$.

2) Soit $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Écrire X en fonction de U.

3) En déduire $\varphi_X(t)$.

Exercice 13

Soit $c \in]0, +\infty[$. Considérons Z une variable aléatoire réelle de loi exponentielle symétrique de paramètre c, c'est-à-dire de loi absolument continue de densité f_c définie par:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_c(x) = \frac{1}{2c} e^{-|x|/c}.$$

Soit V une variable aléatoire réelle de loi absolument continue de densité g_c définie par :

$$\forall u \in \mathbb{R},\ g_c(u) = \frac{c}{\pi(1 + c^2u^2)}.$$

Notons φ_Z la fonction caractéristique de la variable aléatoire Z et φ_V celle de V.

1. Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}$:
$$\varphi_Z(u) = \frac{1}{1 + c^2u^2}.$$

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi_V(x) = 2cf_c(x)$.

3. Calculer la fonction caractéristique de aV pour $a \in \mathbb{R}^*$. En déduire la loi de aV pour $a \in \mathbb{R}^*$.

TD3 (SMA–S6)

EX1 1 $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{0} \frac{a}{(1-x)^2}\,dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{a}{(1+x)^2}\,dx = 1$$

$$\Rightarrow \left[\frac{a}{1-x}\right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{-a}{1+x}\right]_{0}^{+\infty} = 1$$

$$\Rightarrow (a-0)+(0-a)=1 \Rightarrow \boxed{a=\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{f_X(x) = \frac{1}{2(1+|x|)^2}}$$

2 $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{2(1+|x|)^2}\,dx = \boxed{0}$

fonction impair

$$V(X) = E(X^2) - \underbrace{E(X)^2}_{=0} = E(X^2)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{2(1+|x|)^2}\,dx = 2\int_{0}^{+\infty} \frac{x^2}{2(1+x)^2}\,dx$$

fonction pair

$$= \int_{0}^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x)^2}\,dx$$

on a : $\frac{x^2}{(1+x)^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^2}{x^2} = 1$ et $\int_0^{+\infty} 1\,dx = +\infty$

$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x)^2}\,dx$ diverge $\Rightarrow$ V(X) n'existe pas

$\{ 1+|x| \geq 1 \Rightarrow \{ \ln(1+|x|) \geq 0$

- Si $y<0 \Rightarrow F_Y(y) = 0$.
- Si $y>0 \Rightarrow F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\ln(1+|X|) \leq y)$

$$= P(1+|X| \leq e^y) = P(|X| \leq e^y - 1)$$

$$= P(-e^y+1 \leq X \leq e^y - 1)$$

$$\Rightarrow F_Y(y) = F_X(e^y - 1) - F_X(-e^y + 1)$$

On dérive $\Rightarrow \begin{cases} f_Y(y) = e^y f_X(e^y-1) + e^y f_X(-e^y+1) \\ \text{et } f_X(x) = \dfrac{1}{2(1+|x|)^2} \end{cases}$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \frac{e^y}{2e^{2y}} + \frac{e^y}{2e^{2y}} = e^{-y}$$

4

$\Rightarrow \boxed{f_Y(y) = e^{-y} \mathbb{1}_{(y>0)}} \Rightarrow \boxed{Y \sim \mathcal{E}xp(1)}$

EX 2 1 $U \sim U[0,1] \Rightarrow f_U(x) = \frac{1}{1-0} \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$.

$0 < U < 1 \Rightarrow -\infty < \ln(U) < 0 \Rightarrow 0 < -\ln(U) < +\infty$

$$\Rightarrow \boxed{x \in]0,+\infty[}$$

- $x<0 \Rightarrow F_X(x) = 0$
- $F_X(x) = P(X \leq x)$ (si $x>0$)

$$= P(-\ln(U) \leq x) = P(\ln(U) \geq -x)$$

$$= P(U \geq e^{-x})$$

$= 1 - P(U \leq e^{-x}) = 1 - F_U(e^{-x})$

on dérive $\Rightarrow f_X(x) = e^{-x} f_U(e^{-x})$

$= e^{-x} \mathbb{1}_{[0,1]}(e^{-x})$

et $\mathbb{1}_{[0,1]}(e^{-x}) = 1$ car : $0 < e^{-x} < 1$

$\Rightarrow \boxed{f_X(x) = e^{-x} \mathbb{1}_{[0,1)}(x)} \Rightarrow \boxed{X \sim \mathcal{E}xp(1)}$

2) $0 \leq u \leq 1 \Rightarrow 0 \leq (b-a) u \leq b-a$

$\Rightarrow a \leq a + (b-a) u \leq b$

$\Rightarrow \boxed{x \in [a, b]}$

- $x \notin [a,b] \Rightarrow F_X(x) = 0$
- $x \in [a,b] \Rightarrow F_X(x) = P(X \leq x)$

$= P(a + (b-a) U \leq x) = P\left(U \leq \frac{x-a}{b-a}\right)$

$= F_U\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$

$\Rightarrow f_X(x) = \frac{1}{b-a} f_U\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$

$= \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[0,1]}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$

$x \in]a,b[\Rightarrow \frac{x-a}{b-a} \in]0,1[$

$\Rightarrow \mathbb{1}_{[0,1]}\left(\frac{x-a}{b-a}\right) = 1$

$\Rightarrow f_X(x) = \frac{1}{b-a}$ si $x \in [a,b]$

$\Rightarrow \boxed{f_X(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x)} \Rightarrow \boxed{X \sim U[a,b]}$

3

... v.a discrète

$$P(Y=1) = P(\mathbb{1}(u \leq p) = 1) = P(u \leq p)$$

$$= F_u(p) = \int_{-\infty}^{p} \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\, dx$$

$$= \int_0^p 1\, dx = \boxed{p}$$

$$F_u(x) = \int_{-\infty}^{x} f_u(t)\, dt$$

$$\Rightarrow P(Y=0) = 1-p$$

$$\Rightarrow \boxed{Y \sim \mathcal{B}(p)}$$

4) on sait que la loi Binomiale est la somme de n.v.a. i.i.d (indépendes et de même loi) de loi Bernoulli.

on a : $Z = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}(u_i \leq p)$

$$\begin{cases} \mathbb{1}(u_i \leq p) \sim \mathcal{B}(p) \text{ d'après } 3 \\ u_i \text{ i.i.d} \Rightarrow \mathbb{1}(u_i \leq p) \text{ i.i.d} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{Z \sim \mathcal{B}(n,p)}$$

Ex 3 1 Il suffit de montrer que $\forall a < b$

$$P(a < X < b) = \int_a^b f_X(x)\, dx \quad ??$$

$$P(a < X < b) = P(a < F_X^{-1}(u) < b)$$

$$= P(F_X(a) < u < F_X(b))$$

$$= \int_{F_X(a)}^{F_X(b)} f_u(x)\, dx$$

4

$$= \int_{F_X(a)}^{F_X(b)} \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\, dx = \int_{F_X(a)}^{F_X(b)} 1\, dx = F_X(b) - F_X(a)$$

Car : $F_X(a)$ et $F_X(b) \in [0,1]$

par définition $F_X(x) = P(X \leq x)$

et $F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(x)\, dx$

$$\Rightarrow \boxed{P(a < X < b) = \int_a^b f_X(x)\, dx}$$

2) $\mathcal{E}(\lambda) = Exp(\lambda) \Rightarrow f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{(x>0)}$

$F(x) = 0$ si $x < 0$

$x > 0$; $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \lambda \int_0^x e^{-t}\, dt$

$$= [-\lambda e^{-t}]_0^x = \boxed{\lambda(1 - e^{-x}) \mathbb{1}_{(x>0)}}$$

3) $0 < u < 1 \Rightarrow 0 < 1-u < 1 \Rightarrow -\infty < \ln(1-u) < 0$

$\Rightarrow x = -\frac{\ln(1-u)}{\lambda} \in]0, +\infty[$

$x < 0 \Rightarrow F_X(x) = 0$

$x > 0$; $F_X(x) = P\left(-\frac{\ln(1-u)}{\lambda} \leq x\right)$

$= P(\ln(1-u) \geq -\lambda x)$

$= P(1-u \geq e^{-\lambda x})$

$$= P(U \leq 1 - e^{-\lambda x}) = F_U(1 - e^{-\lambda x})$$

$$\Rightarrow F_X(x) = F_U(1 - e^{-\lambda x}) = F_U \circ G(x)$$

avec $\boxed{G(x) = 1 - e^{-\lambda x}}$

d'après (1) ; $\boxed{F_X^{-1}(U) \text{ possède la densité } f_X}$

or : $F_X = F_U \circ G \Rightarrow F_X^{-1} = G^{-1} \circ F_U^{-1}$

$$y = 1 - e^{-\lambda x} \Rightarrow x = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-u) \Rightarrow \boxed{G^{-1}(x) = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-x)}$$

$$F_U(x) = \int_{-\infty}^{x} f_U(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} \mathbb{1}_{[0,1]}(t)\,dt$$

$$= \int_0^x 1\,dt = x \Rightarrow \boxed{F_U(x) = x\,\mathbb{1}_{[0,1)}(x)}$$

$$\Rightarrow \boxed{F_U^{-1}(x) = x}$$

$\Rightarrow F_X^{-1}(u) = G^{-1} \circ F_U^{-1}(u) = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-u) = X$ a pour densité f_X.

Autre méthode : par dérivation :

$x > 0$

$$F_X(x) = F_U(1 - e^{-\lambda x}) \Rightarrow f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} f_U(1 - e^{-\lambda x})$$

$$\Rightarrow f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}\,\mathbb{1}_{[0,1]}(1 - e^{-\lambda x})$$

$0 < 1 - e^{-\lambda x} < 1$ car $x > 0$

$$\Rightarrow \mathbb{1}_{[0,1]}(1 - e^{-\lambda x}) = 1$$

$$\Rightarrow f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}\,\mathbb{1}(x>0) \Rightarrow \boxed{X \sim \mathcal{E}xp(\lambda)}$$

Ex 4 1 $X \sim Exp(1) \Rightarrow F_X(x) = (1-e^{-x})\mathbb{1}_{(x>0)}$ ← Voir Ex 3

1. • $Y = [X] \Rightarrow Y(\Omega) = \mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$

Calculons $P(Y=n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$P(Y=n) = P([X]=n) = P(n \leq X < n+1)$$

$$= F_X(n+1) - F_X(n)$$

$$= (1-e^{-(n+1)}) - (1-e^{-n}) \text{ car } \begin{cases} n \geq 0 \\ n+1 > 0 \end{cases}$$

$$\boxed{P(Y=n) = e^{-n}(1-e^{-1})}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_Y = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n}(1-e^{-1})\delta_n}$$

• $Y+1 = [X]+1 \Rightarrow$ ses valeurs $= \mathbb{N}^* = \{1, \dots\}$

$$P(Y+1=n) = P(Y=n-1) = e^{-(n-1)}(1-e^{-1})$$

$$= (1-e^{-1}) \times (1-(1-e^{-1}))^{n-1}$$

$$= \boxed{p(1-p)^{n-1}} \Rightarrow \boxed{Y+1 \sim Geo(p = 1-e^{-1}) \text{ Géométrique.}}$$

3. $Z = X - Y = X - [X]$

$[X] \leq X < [X]+1 \Rightarrow 0 \leq X - [X] < 1$

$\Rightarrow Z(\Omega) = [0, 1[$

• $z \notin [0,1[\Rightarrow F_Z(z) = 0$

• $z \in [0,1[\Rightarrow F_Z(z) = P(Z \leq z)$

$=$

$$P(\ldots z) = P(X-[X] \le z), \quad \ldots = \bigcup_{n=1} ([X]=n)$$

$$= P\left(\exists n \in \mathbb{N}^* : (n-z \le X \le n)\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} (n-z \le X \le n)\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} P(n-z \le X \le n) = \sum_{n=1}^{+\infty} F_X(n) - F_X(n-z)$$

et $\boxed{F_X(x) = (1-e^{-x})\,\mathbb{1}(x>0) \text{ pour } \mathcal{E}xp(1)}$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n}(e^{z}-1) = (e^{z}-1)\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^{n}$$

$$= (e^{z}-1) \times \left(\frac{1}{1-1/e} - 1\right)$$

Série géométrique

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1$$

$$\Rightarrow \boxed{F_Z(z) = \frac{e^{z}-1}{e-1}\,\mathbb{1}_{[0,1[}(z)}$$

4) par dérivation :

$$\boxed{f_Z(z) = \frac{e^{z}}{e-1}\,\mathbb{1}_{[0,1[}(t)}$$

$[X]=n \Leftrightarrow n \le X < n+1$

Ex 5 1 $Y = [X]$. v.a.d $(Y(\Omega) = \mathbb{N})$

Calculons $P(Y=n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$P(Y=n) = P(n \le X < n+1) = \int_n^{n+1} f_X(x)\,dx$$

$$= \left[-\frac{e^{-x/\lambda}}{\lambda}\right]_0^{+\infty} = e^{-n/\lambda} - e^{-(n+1)/\lambda}$$

$$\boxed{P(Y=n) = e^{-n/\lambda}(1-e^{-1/\lambda}) \quad \Rightarrow \quad P_Y = \sum_{n=0}^{+\infty} P(Y=n)\,\delta_n}$$

② Méthode de la fonction muette g :

$$\boxed{E(g(X)) = \int_{\mathbb{R}} g(x)\, \underline{f_X(x)}\, dx}$$

$$E(g(U_1)) = E(g(X^2)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x^2)\, f_X(x)\, dx$$

$$= \int_{0}^{+\infty} g(x^2)\, \frac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda}\, dx \qquad \begin{cases} y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y} \\ x > 0 \quad dx = \frac{dy}{2\sqrt{y}} \end{cases}$$

$$= \int_{0}^{+\infty} g(y)\, \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{\sqrt{y}}{\lambda}}\, \frac{dy}{2\sqrt{y}}\, dy \qquad \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x \to +\infty \Rightarrow y \to +\infty \end{cases}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} g(y) \left(\frac{e^{-\frac{\sqrt{y}}{\lambda}}}{2\lambda\sqrt{y}}\, \mathbb{1}(y>0) \right) dy.$$

$$\Rightarrow \boxed{f_{U_1}(x) = \frac{e^{-\frac{\sqrt{x}}{\lambda}}}{2\lambda\sqrt{x}}\, \mathbb{1}(x>0)}$$

③ $E(g(U_2)) = E(g(\ln(X)))$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} g(\ln(x))\, f_X(x)\, dx$$

$$= \int_{0}^{+\infty} g(\ln(x))\, \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}}\, dx$$

$y = \ln(x) \Rightarrow x = e^y \Rightarrow dx = e^y dy$

$$\begin{cases} x \to 0 \Rightarrow y \to -\infty \\ x \to +\infty \Rightarrow y \to +\infty \end{cases}$$

$$\Rightarrow E(g(u_2)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\left(\frac{e^{-\frac{e^y}{\lambda}}\, e^{y}}{\lambda}\right) dy$$

$$\Rightarrow \boxed{f_{u_2}(y) = \frac{e^{-\frac{e^y}{\lambda}+y}}{\lambda} \;,\; y \in \mathbb{R}}$$

4) * $E(g(Z)) = E(g(|X-1|))$

$$= \int_0^{+\infty} g(|x-1|)\, \frac{e^{-x/\lambda}}{\lambda}\, dx$$

$y = x-1 \Rightarrow$ $$= \int_{-1}^{+\infty} g(|y|)\, \frac{e^{-\frac{y+1}{\lambda}}}{\lambda}\, dy$$

$$\begin{cases} x \to 0 \Rightarrow y \to -1 \\ x \to +\infty \Rightarrow y \to +\infty \end{cases}$$

$$= \int_{-1}^{0} g(-y)\, \frac{e^{-\frac{y+1}{\lambda}}}{\lambda}\, dy + \int_{1}^{+\infty} g(y)\, \frac{e^{-\frac{y+1}{\lambda}}}{\lambda}\, dy$$

$z = -y$: $$= \int_0^1 g(z)\, \frac{e^{-\frac{-z+1}{\lambda}}}{\lambda}\, dz + \int_0^1 g(y)\, \frac{e^{-\frac{y+1}{\lambda}}}{\lambda}\, dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} g(z)\left[\frac{e^{\frac{z-1}{\lambda}}}{\lambda}\, \mathbb{1}_{]0,1[}(z) + \frac{e^{\frac{-z-1}{\lambda}}}{\lambda}\, \mathbb{1}_{]1,+\infty[}(z)\right] dy$$

$$\Rightarrow \boxed{f_Z(z) = \frac{e^{\frac{z-1}{\lambda}}}{\lambda}\, \mathbb{1}_{(]0,1[)}(z) + e^{\frac{-z-1}{\lambda}}\, \mathbb{1}_{(]1,+\infty[)}(z)}$$

Ex 6 1 $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} \frac{k_p |x|^p}{2}\,dx = \cancel{2}\int_0^1 \frac{k_p x^p}{\cancel{2}}\,dx = 1 \left(\begin{array}{c}\text{fonction}\\ \text{pair}\end{array}\right)$$

$$= k_p \left[\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_0^1 = 1 \Rightarrow \boxed{k_p = p+1}$$

$$\Rightarrow \boxed{f_X(x) = \frac{p+1}{2} \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)}$$

2 $Y = X^2 \geq 0$ p.s $\Rightarrow E(Y)$ bien définie :

$$E(Y) = E(X^2) = \int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{p+1}{2} |x|^{p+2}\,dx \quad (\text{pair})$$

$$= \cancel{2}\int_0^1 \frac{p+1}{\cancel{2}} x^{p+2}\,dx = \left[\frac{p+1}{p+3} x^{p+3}\right]_0^1$$

$$\Rightarrow \boxed{E(Y) = \frac{p+1}{p+3} < +\infty \;;\; Y \text{ intégrable}\;\; Y \in L^1(\Omega)}$$

3 $P(X=0) = \int_{\{0\}} f_X(x)\,dx = 0$ $\boxed{\begin{array}{c}\lambda_1 = \text{mesure Lebesgue}\\ \lambda_1(\{0\}) = 0\end{array}}$

$$\Rightarrow P(X \neq 0) = 1 - P(X=0) = 1 - 0 = \boxed{1}$$

$\Rightarrow X \neq 0$ p.s $\Rightarrow \frac{1}{X}$ bien définie.

$\Rightarrow Z$ bien définie.

• $E(g(Z)) = E(g(e^{1/X})) = \int_{\mathbb{R}} g(e^{1/x}) f_X(x)\,dx$

$$= \int_{-1}^{0} \frac{p+1}{2}\, g(e^{1/x})\,|x|^p\,dx + \int_0^1 (\dots)\,dx$$

$$y = e^{1/x} \Rightarrow x = \frac{1}{\ln(y)} \Rightarrow dx = \frac{-dy}{y\ln(y)}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x=-1 \Rightarrow y = e^{-1} \\ x \to 0^- \Rightarrow y \to 0 \end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{l} x \to 0^+ \Rightarrow y \to +\infty \\ x = 1 \Rightarrow y = e \end{array}\right\}$$

$$= \frac{p+1}{2}\int_0^{e^{-1}} \frac{g(y)}{y|\ln(y)|^{p+2}}\,dy + \frac{p+1}{2}\int_e^{+\infty} \frac{g(y)}{y|\ln(y)|^{p+2}}\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\underbrace{\left(\frac{p+1}{2y|\ln(y)|^{p+2}}\,\mathbb{1}_{]0,\frac{1}{e}[\,\cup\,]e,+\infty[}\right)}_{= f_Z(y)} dy$$

Ex 7 $X \sim N(0,1) \Rightarrow E(X)=0$ et $V(X)=1$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}$$

$Y = X^2 \geq 0$ p.s

$$E(g(Y)) = E(g(X^2)) = \int_{\mathbb{R}} g(x^2)\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

$$= 2\int_0^{+\infty} g(x^2)\,\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx \quad \text{(pair)}$$

$y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y} \Rightarrow dx = \dfrac{dy}{2\sqrt{y}}$

$$\Rightarrow E(g(Y)) = \int_0^{+\infty} \frac{g(y)\, e^{-y/2}}{\sqrt{2\pi y}}\, dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} g(y) \underbrace{\left(\frac{e^{-y/2}}{\sqrt{2\pi y}} \mathbb{1}(y>0) \right)} dy$$

$\Rightarrow$ la densité : $f_Y(y)$

2 $$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_Y(y)\, dy$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{y\, e^{-y/2}}{\sqrt{2\pi y}}\, dy = 1 \quad (\text{I.P.P})$$

Autre méthode :

- $X \sim N(0,1) \Rightarrow V(X) = 1$ et $E(X) = 0$

$$\Rightarrow E(X^2) - (E(X))^2 = 1$$

$$\Rightarrow E(X^2) = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{E(Y = X^2) = 1}$$

Remarque : (la loi de Y) :

- $y < 0 \Rightarrow F_Y(y) = 0$
- $y > 0 \Rightarrow F_Y(y) = P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y})$
$= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$.

EX 8 1 a) $X \sim \mathcal{E}xp(\lambda) \Rightarrow f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{(x>0)}$

$\Rightarrow P(X>0) = \int_0^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$

$\Rightarrow X>0$ p.s $\Rightarrow Y = \ln(X)$ est bien définie

b) on sait que $F_X(x) = (1-e^{-\lambda x})\mathbb{1}_{(x>0)}$

$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\ln(X) \leq y)$

$= P(X \leq e^y) = F_X(e^y)$

$\Rightarrow f_Y(y) = e^y f_X(e^y)$

$\boxed{= (\lambda e^{-\lambda e^y}) e^y}$ $\boxed{\left(\text{car } e^y>0 \quad \mathbb{1}_{(e^y>0)} = 1\right.}$

2) a) $X>0$ p.s $\Rightarrow U = \left[\frac{1}{X}\right]$ bien définie.

b) $U(\Omega) = \mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$

$P(U=n) = P\left(\left[\frac{1}{X}\right]=n\right) = P\left(n \leq \frac{1}{X} < n+1\right)$

- si $n>0$: $P(U=n) = P\left(\frac{1}{n+1} < X \leq 1/n\right)$

$= F_X(1/n) - F_X\left(1/_{n+1}\right)$

$= \left(1-e^{-\lambda/n}\right) - \left(1-e^{-\lambda/n+1}\right)$

$\boxed{P(U=n) = e^{-\lambda/n+1} - e^{-\lambda/n}}$

- $n=0$: $P(U=0) = P\left(\left[\frac{1}{X}\right]=0\right)$

$=$

$$= P\left(0 \leq \frac{1}{X} < 1\right) = P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1)$$
$$= 1 - F_X(1)$$
$$= 1 - (1 - e^{-\lambda}) = \boxed{e^{-\lambda}}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_U = e^{-\lambda}\delta_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(e^{\frac{-\lambda}{n+1}} - e^{-\lambda/n}\right)\delta_n}$$

EX 9 1 $F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$

$x \geq 0$

$$= \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{t}}{2}\,dt + \int_{0}^{x} \frac{e^{-t}}{2}\,dt$$

$$= \left[\frac{e^{t}}{2}\right]_{-\infty}^{0} - \left[\frac{e^{-t}}{2}\right]_{0}^{x} = \boxed{\frac{2 - e^{-x}}{2}}$$

$x < 0$ $\quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt \quad (t < x < 0)$

$$= \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{t}}{2}\,dt = \left[\frac{e^{t}}{2}\right]_{-\infty}^{x}$$

$$= \frac{e^{x}}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{F_X(x) = \begin{cases} \frac{e^{x}}{2} & ; \ x < 0 \\ \frac{2 - e^{-x}}{2} & ; \ x \geq 0 \end{cases}}$$

2 $Z(\Omega) = [0, +\infty[$; $z < 0 \Rightarrow F_Z(z) = 0$

- $z \geq 0$; $F_Z(z) = P(Z \leq z)$
$$= P(|X| \leq z)$$

$$= P(-z \leq X \leq z) = F_X(z) - F_X(-z)$$

d'après ① $= \left(\frac{2-e^{-z}}{2}\right) - \left(\frac{e^{-z}}{2}\right) = 1 - e^{-z}$

$z \geq 0$ $\quad$ $(-z < 0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_Z(z) = (1-e^{-z})\,\mathbb{1}(z>0) \\ f_Z(z) = e^{-z}\,\mathbb{1}(z<0) \end{cases} \Rightarrow \boxed{Z \sim \mathcal{E}xp(1)}$$

ou bien

3) a) $a \geq 0$: $V = \max(X, a)$

$$F_V(v) = P(V \leq v) = P(\max(X,a) \leq v)$$
$$= P(X \leq v,\ a \leq v)$$
$$= \begin{cases} P(X \leq v) = F_X(v) & ; \text{si } a \leq v \\ P(\phi) = 0 & \text{si } a > v \end{cases}$$

$$\boxed{F_V(v) = \begin{cases} 0 & ; \quad v < a \\ \frac{2-e^{-v}}{2} & ; \quad v \geq a \quad (\text{car } a > 0 \rightarrow v > 0) \end{cases}}$$

4) (*) $a < 0$: $V = \max(X, a)$

$$F_V(v) = P(X \leq v,\ a \leq v)$$

d'après ① :
$$\boxed{= \begin{cases} P(\phi) = 0 & ; \quad v < a \\ e^{v}/2 & ; \quad a < v < 0 \\ \frac{2-e^{-v}}{2} & ; \quad v \geq 0 \end{cases}}$$

5) (*) $W(\Omega) = \mathbb{Z}$. $P(W=k) = ??$

$$P(W=k) = P(W=k, [X] \text{ pair}) + P(W=k, [X] \text{ impair})$$

$$= P([X] = 2k) + P(0 = k, [X] \text{ impair})$$

Si $k \neq 0 \Rightarrow P(0=k, [X] \text{ impair}) = P(\phi) = 0$

$$\Rightarrow P(W=k) = P([X]=2k)$$

$$= P(2k \leq X < 2k+1)$$

$$= F_X(2k+1) - F_X(2k)$$

d'après (1)

$$= \begin{cases} \dfrac{e^{2k+1} - e^{2k}}{2} \; ; \text{ si } k \leq -1 \\ \dfrac{e^{-2k} - e^{-(2k+1)}}{2} \; ; \text{ si } k \geq 1 \end{cases}$$

Car : $\begin{cases} 2k+1 < 0 \\ 2k < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k < -1/2 \\ k < 0 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{c} k \leq -1 \\ \text{car } k \in \mathbb{Z} \end{array} \right)$

$\left. \begin{array}{c} 2k+1 > 0 \\ 2k > 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} k > -1/2 \\ k > 0 \end{cases} \Rightarrow k > 0 \Rightarrow k \geq 1$

Si $k=0$ $P(W=0) = 1 - \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} P(W=k)$

$$= 1 - \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{-1} \left(e^{2k+1} - e^{2k}\right) - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(e^{-2k} - e^{-(2k+1)}\right)$$

$k' = -k$

$$= 1 - \frac{1}{2} \sum_{k'=1}^{+\infty} e^{-2k'}(e-1) - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-2k}(1 - e^{-1})$$

$$\left(\sum_{k=0} e^{-2k}\right) = \left(\sum_{k=0} e^{-2}\right)^k = \frac{1}{1-e^{-2}} \text{ géométrique}$$

17

$$= 1 - \frac{e-1}{2}\left(\frac{1}{1-e^{-2}} - 1\right) - \frac{1-e^{-1}}{2}\left(\frac{1}{1-e^{-2}}\right)$$

$$= \boxed{\frac{1-e^{-1}}{2}}$$

Ex 10 1) i) $X \sim U[a,b] \Rightarrow f_X(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x)$

$$\Rightarrow h(X) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x) \ln\left(\frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}(x)\right) dx$$

$$= -\int_a^b \frac{1}{b-a} \ln\left(\frac{1}{b-a}\right) dx$$

$$= -\frac{1}{b-a}\ln\left(\frac{1}{b-a}\right)[x]_a^b = \boxed{\ln(b-a)}$$

- si $X \sim U[0,1] \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{h(X)=0}$

ii) $X \sim \mathcal{E}xp(\lambda) \Rightarrow f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{(x>0)}$.

$$h(X) = -\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} \ln(\lambda e^{-\lambda x}) dx$$

$$= \int_0^{+\infty} (\lambda e^{-\lambda x})(-\ln(\lambda) + \lambda x) dx \qquad (I.P.P)$$

$$\begin{cases} u' = \lambda e^{-\lambda x} \\ v = \lambda x - \ln(\lambda) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = -e^{-\lambda x} \\ v' = \lambda \end{cases}$$

$$\Rightarrow h(X) = \left[-e^{-\lambda x}(\lambda x - \ln(\lambda))\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$= \left[-e^{-\lambda x}(\lambda x - \ln(\lambda))\right]_0^{+\infty} - \left[e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty}$$

$$\boxed{= -\ln(\lambda) + 1}$$

- $X \sim \mathcal{E}xp(1) \Rightarrow \boxed{h(X) = 1}$

iii) $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow E(X) = \mu$ et $V(X) = \sigma^2$

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = \int_{\mathbb{R}} (x-\mu)^2 f_X(x)\, dx$$

$$\int_{\mathbb{R}} f_X(x)\, dx = 1$$

$$\Rightarrow h(X) = -\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln(2\pi\sigma^2) \int_{\mathbb{R}} f_X(x)\, dx + \frac{1}{2\sigma^2} \int_{\mathbb{R}} (x-\mu)^2 f_X(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln(2\pi\sigma^2) \times 1 + \frac{1}{2\sigma^2} \times \sigma^2$$

$$\Rightarrow \boxed{h(X) = \frac{1 + \ln(2\pi\sigma^2)}{2}}$$

2) i) $\int_{\mathbb{R}} f_X(x) \ln\left(\frac{f_N(x)}{f_X(x)}\right) dx - \int_{\mathbb{R}} f_X(x) \ln(f_N(x))\, dx$

$$= \int_{\mathbb{R}} f_X(x) \ln\left(\frac{\cancel{f_N(x)}}{f_X(x)} \times \frac{1}{\cancel{f_N(x)}}\right) dx$$

$$= -\int_{\mathbb{R}} f_X(x) \ln(f_X(x))\, dx = h(X)$$

ii) $y = \frac{f_N(x)}{f_X(x)}$ et $\ln(y) \leq y - 1$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{f_N(x)}{f_X(x)}\right) \leq \frac{f_N(x)}{f_X(x)} - 1 = \frac{f_N(x) - f_X(x)}{f_X(x)}$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} f_X(x) \ln\left(\frac{f_N(x)}{f_X(x)}\right) dx \leq \int_{\mathbb{R}} \left(f_N(x) - f_X(x)\right) dx$$

$$= 1 - 1 = \boxed{0}$$

iii) • $\int_{\mathbb{R}} f_X(x) \ln(f_N(x))\, dx$

$$= \int_{\mathbb{R}} f_X(x) \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)\right) dx$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(2\pi\sigma^2)\int_{\mathbb{R}} f_X(x)\, dx - \frac{1}{2\sigma^2}\underbrace{\int_{\mathbb{R}} f_X(x)\,(x-\mu)^2\, dx}_{V(X)}$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(2\pi\sigma^2)\times 1 - \frac{1}{2\sigma^2}\times \sigma^2$$

$$= -\frac{(1+\ln(2\pi\sigma^2))}{2} = -h(N) \text{ d'après } 1)\, iii$$

• D'après 2) i) et 2) ii) :

$$h(X) = \underbrace{\int_{\mathbb{R}} f_X(x) \ln\left(\frac{f_N(x)}{f_X(x)}\right) dx}_{\leq 0} - \underbrace{\int_{\mathbb{R}} f_X(x)\ln(f_N(x))\, dx}_{-(-h(N))}$$

$$\Rightarrow \boxed{h(X) \leq h(N)}$$

EX 11 1) $X \sim \mathcal{P}(\lambda) \Rightarrow \begin{cases} X(\Omega) = \mathbb{N} \\ P(X=k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!} \end{cases}$

$\forall t \in \mathbb{R}$:

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{itk} P(X=k)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{e^{itk}\lambda^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{(\lambda e^{it})^k}{k!}$$

$$= e^{-\lambda}\times e^{\lambda e^{it}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi_X(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}}$$

2) $\varphi'_X(t) = i\lambda e^{it} e^{\lambda(e^{it}-1)}$

$$\boxed{\frac{\varphi^{(p)}(0)}{i^p} = E(X^p)}$$

$\Rightarrow E(X) = \dfrac{\varphi'_X(0)}{i} = \dfrac{\lambda i}{i} = \boxed{\lambda}$

$\varphi''_X(t) = -\lambda e^{it} e^{\lambda(e^{it}-1)} + (i\lambda e^{it})^2 e^{\lambda(e^{it}-1)}$

$\Rightarrow E(X^2) = \dfrac{\varphi''(0)}{i^2} = \dfrac{-\lambda-\lambda^2}{-1} = \lambda^2+\lambda$

$\Rightarrow V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \lambda^2+\lambda-\lambda^2 = \boxed{\lambda}$

3) $\begin{cases} X \sim \mathcal{P}(\lambda) \\ Y \sim \mathcal{P}(\lambda) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_X(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)} \\ \varphi_Y(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)} \end{cases}$

X et Y indépendantes $\Rightarrow \varphi_Z(t) = \varphi_{X+Y}(t)$

$= \varphi_X(t) \times \varphi_Y(t)$

$= e^{2\lambda(e^{it}-1)}$

$\Rightarrow \boxed{Z \sim \mathcal{P}(2\lambda)}$

Ex 12 1) $U \sim N(0,1) \Rightarrow f_U(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

$\varphi_U(t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{itx} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\, dx$

$\Rightarrow \varphi'_U(t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} ix\, e^{itx} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\, dx$

$\begin{cases} u' = x e^{-x^2/2} \\ v = \dfrac{i e^{itx}}{\sqrt{2\pi}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = -e^{-x^2/2} \\ v' = -\dfrac{t e^{itx}}{\sqrt{2\pi}} \end{cases}$

$$\Rightarrow \varphi_u'(t) = \underbrace{\left[-\frac{e^{-x^2/2}\, i\, e^{itx}}{\sqrt{2\pi}}\right]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} - \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t\, e^{itx} e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\, dx}_{}$$

Car : $\left|\frac{e^{-x^2/2}\, i\, e^{itx}}{\sqrt{2\pi}}\right| = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \xrightarrow[+\infty]{-\infty} 0$ $\qquad \underbrace{-t\int_{\mathbb{R}} e^{itx} f_u(x)\, dx}_{-t\,\varphi_u(t)}$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi_u'(t) = -t\,\varphi_u(t)} \quad \text{E.D.O linéaire.}$$

- $\begin{cases} \varphi_u(t) = k\, e^{-\int t\, dt} = k\, e^{-t^2/2} \\ \varphi_u(0) = 1 = k \end{cases} \Rightarrow \boxed{\varphi_u(t) = e^{-t^2/2}}$

2) $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2) \Rightarrow U = \frac{X-m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$\Rightarrow \boxed{X = U\sigma + m} = \boxed{aU + b}$$

3) D'après cours : $\varphi_X(t) = e^{itm}\, \varphi_u(\sigma t)$

$$\boxed{= e^{itm}\, e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}}$$

EX 13 1) $\varphi_Z(u) = E(e^{iuZ})$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{iux} f_c(x)\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{iux} \frac{1}{2c} e^{-|x|/c}\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{iux} e^{x/c}}{2c}\, dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{e^{iux} e^{-x/c}}{2c}\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{x(iu+1/c)}}{2c}\, dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{e^{x(iu-\frac{1}{c})}}{2c}\, dx$$

$$= \left[\frac{e^{x(iu+1/c)}}{2c(iu+\frac{1}{c})}\right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{e^{x(iu-1/c)}}{2c(iu-\frac{1}{c})}\right]_{0}^{+\infty}$$

or : $\left|e^{x(iu+1/c)}\right| = e^{x/c} \xrightarrow{-\infty} 0$

$\left|e^{x(iu-1/c)}\right| = e^{-x/c} \xrightarrow{+\infty} 0$

$$= \frac{-1}{2c(iu+\frac{1}{c})} + \frac{1}{2c(iu-\frac{1}{c})}$$

$$= \frac{-2c(iu-\frac{1}{c}) + 2c(iu+\frac{1}{c})}{4c^2\left((iu)^2+(\frac{1}{c})^2\right)}$$

$$= \frac{4}{4c^2(u^2+\frac{1}{c^2})} = \boxed{\frac{1}{1+c^2u^2}}$$

2 Rappel :

$$\boxed{\begin{array}{l} X \longrightarrow f_X \longrightarrow \varphi_X \\ \varphi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f_X(x)\, dx \\ f_X(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \varphi_X(x)\, dt \end{array}}$$

(2) Montrons $2c f_c(x) = \varphi_V(x)$

on remarque que : $\boxed{g_c(u) = \frac{c}{\pi} \varphi_Z(u)}$

$$2c f_c(x) = 2c \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \varphi_Z(x)\, dt \right)$$

$$= \cancel{2c} \left(\frac{1}{\cancel{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \frac{\cancel{\pi}}{\cancel{c}} g_c(x)\, dt \right)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} g_c(x)\, dt = \varphi_V(-x)$$

$\Rightarrow 2c f_c(x) = \varphi_V(-x)$

$\Rightarrow \begin{cases} 2c f_c(-x) = \varphi_V(x) \\ f_c(-x) = f_c(x) \quad (\text{pair}) \end{cases} \Rightarrow \boxed{2c f_c(x) = \varphi_V(x)}$

(3) d'après le cours : $\varphi_{aV}(t) = \varphi_V(at)$

et d'après (2) $\Rightarrow \quad = 2c f_c(at)$

$$= \cancel{2c} \frac{e^{-|a||t|/c}}{\cancel{2c}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi_{aV}(t) = e^{-|a||t|/c}}$$

$$\Rightarrow f_{aV}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \varphi_{aV}(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} e^{-\frac{|a||t|}{c}} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{0} e^{-itx} e^{\frac{|a|t}{c}} dt + \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{+\infty} e^{-itx} e^{-\frac{|a|t}{c}} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{0} e^{t(|a|/c - ix)} dt + \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{+\infty} e^{\left(-\frac{|a|}{c} - ix\right)} dt$$

$$= \left[\frac{e^{(|a|/c - ix)}}{2\pi\left(\frac{|a|}{c} - ix\right)} \right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{e^{(-|a|/c - ix)}}{2\pi\left(-\frac{|a|}{c} - ix\right)} \right]_{0}^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{2\pi\left(\frac{|a|}{c} - ix\right)} + \frac{1}{2\pi\left(\frac{|a|}{c} + ix\right)}$$

$$= \frac{2\pi\left(|a|/c + ix\right) + 2\pi\left(|a|/c - ix\right)}{4\pi^2\left(\frac{|a|^2}{c^2} + x^2\right)}$$

$$= \frac{\frac{|a|}{c}}{\pi} \frac{1}{\left(x^2 + \frac{|a|^2}{c^2}\right)} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} a v \sim \mathcal{C}\left(\frac{|a|}{c}\right) \\ \text{loi de Cauchy} \end{cases}}$$

FIN

25