UNIVERSITÉ MOULAY ISMAIL
FACULTÉ DES SCIENCES MEKNÈS
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Exercices corrigés d'Algèbre 2
SMPC
2017-2018

Professeure : Mme Chahrazade BAKKARI

Table des matières

Chapitre 1

Rappel sur les espaces vectoriels

Exercice 1

1) Soit $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ 2x - y + z - 3t = 4\}$.
   E est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$?
2) Soit $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y = x^2\}$.
   H est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$?
3) Soient $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y - z = 0\}$ et $G = \{(a - b, a + b, a - 3b) \ / \ a, b \in \mathbb{R}\}$.
   Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

Solution.

1) $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ 2x - y + z - 3t = 4\}$.
   • $E \subseteq \mathbb{R}^4$ qui est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
   • $0_{\mathbb{R}^4} \notin E$, donc E n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
2) $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y = x^2\}$.
   • $H \subseteq \mathbb{R}^2$ qui est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
   • $(0, 0) \in H$, donc $H \neq \emptyset$.
   • Mais H est non stable dans $\mathbb{R}^2$ puisque :

$$u = (1, 1) \in H, \ v = (-1, 1) \in H \ \text{ et } u + v = (0, 2) \notin H.$$

   Par suite H n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
3) $\rightarrow$ $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y - z = 0\}$.
   • $F \subseteq \mathbb{R}^3$ qui est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
   • $(0, 0, 0) \in F$, donc $F \neq \emptyset$.
   • On montre que F est stable dans $\mathbb{R}^3$ $(\forall X, Y \in F, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ \ \alpha X + \beta Y \in F)$ ou il suffit de trouver une famille génératrice de F.
   En effet :
   Soit $X = (x, y, z) \in F$. On a : $x + y - z = 0 \Longrightarrow z = x + y$. Donc $X = (x, y, x + y) = (x, 0, x) + (0, y, y) = x(1, 0, 1) + y(0, 1, 1)$. Par suite, $F = Vect\big((1, 0, 1), (0, 1, 1)\big)$ (ou $F =< (1, 0, 1), (0, 1, 1) >$) . Dès lors, F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

   $\rightarrow G = \{(a - b, a + b, a - 3b) \ / \ a, b \in \mathbb{R}\}$.

Soit $X \in G$. On a : $X = (a-b, a+b, a-3b)$
$= (a, a, a) + (-b, b, -3b)$
$= a(1,1,1) + b(-1,1,-3)$.

Par suite, $G = Vect\big((1,1,1), (-1,1,-3)\big)$. Dès lors, G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2

Dans $\mathbb{R}^4$ muni de sa base canonique, on considère les vecteurs :

$u_1 = (1,1,1,1),\ u_2 = (1,-1,1,-1)$ et $u_3 = (1,0,1,1)$.

$v_1 = (1,1,0,1),\ v_2 = (1,-1,1,0),\ v_3 = (2,0,1,1)$ et $v_4 = (0,0,0,0)$.

Les systèmes $S = (u_1, u_2, u_3)$ et $S' = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ sont-ils libres dans $\mathbb{R}^4$?

Solution.

$\rightarrow$ $S = (u_1, u_2, u_3)$.

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. $\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = 0_{\mathbb{R}^4} \overset{?}{\Longrightarrow} \alpha = \beta = \gamma = 0$.

On a :

$$\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = 0_{\mathbb{R}^4} \Longleftrightarrow \alpha(1,1,1,1) + \beta(1,-1,1,-1) + \gamma(1,0,1,1) = (0,0,0,0)$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} \alpha & + & \beta & + & \gamma & = & 0 \\ \alpha & - & \beta & & & = & 0 \\ \alpha & + & \beta & + & \gamma & = & 0 \\ \alpha & - & \beta & + & \gamma & = & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Donc S est libre dans $\mathbb{R}^4$.

$\rightarrow$ $S' = (v_1, v_2, v_3, 0_{\mathbb{R}^4})$ est non libre car il contient le vecteur nul $0_{\mathbb{R}^4}$.

Exercice 3

Les familles suivantes sont-elles des bases de $\mathbb{R}^3$?

a) $\mathcal{F} = (u_1, u_2)$ où $u_1 = (1,2,3)$ et $u_2 = (1,0,1)$.

b) $\mathcal{F}' = (u'_1, u'_2, u'_3)$ où $u'_1 = (1,0,1),\ u'_2 = (2,1,1)$ et $u'_3 = (1,1,1)$.

Solution.

a) $\mathcal{F} = (u_1, u_2)$. On a $Card(\mathcal{F}) = 2 < \dim \mathbb{R}^3 = 3$, donc $\mathcal{F}$ est une famille non génératrice. Par suite $\mathcal{F}$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$.

b) $\mathcal{F}' = (u'_1, u'_2, u'_3)$. On a $Card(\mathcal{F}') = 3 = \dim \mathbb{R}^3$. Pour montrer que $\mathcal{F}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$, il suffit de montrer que $\mathcal{F}'$ est libre dans $\mathbb{R}^3$ (ce qui équivaut à montrer que $\mathcal{F}'$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$).
En effet : $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R},\ \ \alpha u'_1 + \beta u'_2 + \gamma u'_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Longrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$. (Calcul facile à vérifier).

Exercice 4

Soient $E = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \, x + y + z = 0\big\}$ et $F = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \, x - y + 2z = 0\big\}$.

1) Montrer que E et F sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

2) Déterminer une base de E et une base de F.

3) Déterminer une base de $E \cap F$ et une base de $E + F$.

Solution.
$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y + z = 0\}$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x - y + 2z = 0\}$.

1) $\rightarrow$ Soit $X = (x, y, z) \in E$. On a : $x + y + z = 0$, donc $x = -y - z$. Par suite :

$$\begin{aligned} X &= (-y - z, y, z) = (-y, y, 0) + (-z, 0, z) \\ &= y(-1, 1, 0) + z(-1, 0, 1). \end{aligned}$$

Dès lors : $E =< (-1, 1, 0), (-1, 0, 1) >$ qui est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $\mathcal{B} = \big((-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\big)$.
Il est facile de vérifier que $\mathcal{B}$ est libre dans $\mathbb{R}^3$. Par conséquent, $\mathcal{B}$ est une base de E. (On en déduit que $\dim E = Card(\mathcal{B}) = 2$).
$\rightarrow$ Soit $X = (x, y, z) \in F$. On a : $x - y + 2z = 0$, donc $y = x + 2z$. Par suite :

$$\begin{aligned} X &= (x, x + 2z, z) = (x, x, 0) + (0, 2z, z) \\ &= x(1, 1, 0) + z(0, 2, 1). \end{aligned}$$

Dès lors : $F =< (1, 1, 0), (0, 2, 1) >$.
Il est facile de vérifier que $\mathcal{B}' = \big((1, 1, 0), (0, 2, 1)\big)$ est libre, et sera donc une base de F. (On en déduit que $\dim F = 2$).

2) $\rightarrow$ $E \cap F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y + z = 0$ et $x - y + 2z = 0\}$.
Soit $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & - & y & + & 2z & = & 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccc} 2x & + & 3z & = & 0 \\ 2y & - & z & = & 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \begin{cases} x = \frac{-3}{2} z \\ y = \frac{1}{2} z. \end{cases}$$

Donc $(x, y, z) = (\frac{-3}{2} z, \frac{1}{2} z, z) = z(\frac{-3}{2}, \frac{1}{2}, 1)$.

Par suite $E \cap F =< (\frac{-3}{2}, \frac{1}{2}, 1) >=< (-3, 1, 2) >$ (car $< u >=< \lambda u >$ où $\lambda \in \mathbb{R}^*$).
$\mathcal{B}'' = \{(-3, 1, 2)\}$ est une famille génératrice de $E \cap F$ formée par un seul vecteur non nul, elle est donc libre et par suite $\mathcal{B}''$ est une base de $E \cap F$. (On en déduit que $\dim (E \cap F) = 1$).
$\rightarrow$ On sait que :

$$\begin{aligned} \dim (E + F) &= \dim E + \dim F - \dim (E \cap F) \\ &= 2 + 2 - 1 \\ &= 3. \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{cases} E + F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3 \\ \text{et } \dim (E + F) = \dim \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

donc $E + F = \mathbb{R}^3$. Par suite, toute base de $\mathbb{R}^3$ sera aussi une base de $E + F$; en particulier la base canonique $\big((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\big)$.

Exercice 5
Soit E le sous $\mathbb{R}$-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $\big(e_1 = (1,2,0), e_2 = (0,1,1), e_3 = (1,1,1)\big)$.
Déterminer la dimension de E.
Solution.
Soit $E = Vect(e_1, e_2, e_3)$ où $e_1 = (1,2,0), e_2 = (0,1,1), e_3 = (1,1,1)$. Par construction, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une famille génératrice de E. Vérifions si $\mathcal{B}$ est libre dans $\mathbb{R}^3$.
En effet : $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$,

$$
\begin{aligned}
\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = 0_{\mathbb{R}^3} &\Longleftrightarrow (\alpha+\gamma, 2\alpha+\beta+\gamma, \beta+\gamma) = (0,0,0) \\
&\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} \alpha & + & \gamma & & & = & 0 \\ 2\alpha & + & \beta & + & \gamma & = & 0 \\ \beta & + & \gamma & & & = & 0 \end{array} \right. \\
&\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccc} \alpha & + & \gamma & = & 0 \\ \beta & + & \gamma & = & 0 \\ & & 2\alpha & = & 0 \end{array} \right. \\
&\Longleftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0.
\end{aligned}
$$

$\mathcal{B}$ est donc une base de E et par suite $\dim E = 3$.

Exercice 6
Soit $H = \{aX^2 + bX + c \ / \ a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

1) Vérifier que H est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

2) Soient P_1, P_2 et $P_3 \in H$ tels que $P_1(X) = X^2,\ P_2(X) = (X-1)^2$ et $P_3(X) = (X+1)^2$.

   a) Montrer que (P_1, P_2, P_3) est une base de H.

   b) Déterminer les coordonnées des vecteurs $R(X) = 12$ et $S(X) = 3X^2 - 1$ dans la base (P_1, P_2, P_3).

Solution.
$H = \{aX^2 + bX + c \ / \ a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

1) • $H \subseteq \mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$, qui est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de base canonique $(1, X, X^2, \ldots)$.
   • Soit $P \in H$; $P(X) = aX^2 + bX + c$.
   Il est clair de voir que $H = Vect(1, X, X^2)$ et de vérifier que $(1, X, X^2)$ est un système libre de $\mathbb{R}[X]$. Par suite $(1, X, X^2)$ est une base de H et $\dim H = 3$.

2) $P_1(X) = X^2,\ P_2(X) = (X-1)^2$ et $P_3(X) = (X+1)^2$.

   a) On a $Card\,(P_1, P_2, P_3) = 3 = \dim H$. Pour montrer que (P_1, P_2, P_3) est une base de H, il suffit donc de vérifier qu'elle est libre. En effet :

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\alpha P_1(X) + \beta P_2(X) + \gamma P_3(X) = 0 &\Longleftrightarrow \alpha X^2 + \beta(X-1)^2 + \gamma(X+1)^2 = 0 \\
&\Longleftrightarrow (\alpha+\beta+\gamma)X^2 + (-2\beta+2\gamma)X + (\beta+\gamma) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} \alpha & + & \beta & + & \gamma & = & 0 \\ & - & 2\beta & + & 2\gamma & = & 0 \\ & & \beta & + & \gamma & = & 0 \end{array}\right. \\
&\Longleftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0.
\end{aligned}$$

b) Soient $R(X) = 12$ et $S(X) = 3X^2 - 1$. Et soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ les coordonnées de $R(X)$ dans la base (P_1, P_2, P_3) et $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ celles de $S(X)$.
• On obtient :

$$\begin{aligned}
R(X) = \alpha_1 P_1(X) + \alpha_2 P_2(X) + \alpha_3 P_3(X) &\Longleftrightarrow 12 = \alpha_1 X^2 + \alpha_2(X-1)^2 + \alpha_3(X+1)^2 \\
&\Longleftrightarrow 12 = (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)X^2 + (-2\alpha_2+2\alpha_3)X \\
&\qquad + (\alpha_2+\alpha_3) \\
&\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} \alpha_1 & + & \alpha_2 & + & \alpha_3 & = & 0 \\ & - & 2\alpha_2 & + & 2\alpha_3 & = & 0 \\ & & \alpha_2 & + & \alpha_3 & = & 12 \end{array}\right. \\
&\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} \alpha_1 & + & \alpha_2 & + & \alpha_3 & = & 0 \\ & & & & \alpha_2 & = & \alpha_3 \\ & & & & 2\alpha_2 & = & 12 \end{array}\right. \\
&\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} \alpha_1 & = & -12 \\ \alpha_3 & = & 6 \\ \alpha_2 & = & 6. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Donc $12 = -12P_1(X) + 6P_2(X) + 6P_3(X)$.
• Aussi, on a :

$$\begin{aligned}
S(X) = \beta_1 P_1(X) + \beta_2 P_2(X) + \beta_3 P_3(X) &\Longleftrightarrow 3X^2 - 1 = (\beta_1+\beta_2+\beta_3)X^2 + (-2\beta_2+2\beta_3)X \\
&\qquad + (\beta_2+\beta_3) \\
&\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} \beta_1 & + & \beta_2 & + & \beta_3 & = & 3 \\ & - & 2\beta_2 & + & 2\beta_3 & = & 0 \\ & & \beta_2 & + & \beta_3 & = & -1 \end{array}\right. \\
&\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} \beta_1 & + & \beta_2 & + & \beta_3 & = & 3 \\ & & & & \beta_2 & = & \beta_3 \\ & & & & 2\beta_3 & = & -1 \end{array}\right. \\
&\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} \beta_1 & = & 4 \\ \beta_2 & = & -\frac{1}{2} \\ \beta_3 & = & -\frac{1}{2}. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Exercice 7
Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel défini par : $E = \{aX^3 + bX^2 + cX + d \ / \ a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ et soient $F = \{(X-1)^2(aX+b) \ / \ a, b \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(X+1)^2(aX+b) \ / \ a, b \in \mathbb{R}\}$.

1) Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E.

2) Donner une base $\mathcal{B}_1$ de F et une base $\mathcal{B}_2$ de G.

3) En déduire que $E = F \oplus G$.

Solution.
$E = \{aX^3 + bX^2 + cX + d \ / \ a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$.
On rappelle que le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E admet pour base canonique $(1, X, X^2, X^3)$ et $\dim E = 4$.
Soient $F = \{(X-1)^2(aX+b) \ / \ a, b \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(X+1)^2(aX+b) \ / \ a, b \in \mathbb{R}\}$.

1) $\rightarrow$ Montrons que F est un sous-espace vectoriel de E.
Soit $P(X) \in F$. $P(X) = (X-1)^2(aX+b)$.
• $deg(P) \leq 3$, donc $P(X) \in E$. Par suite $F \subseteq E$.
• $P(X) = (X^2 - 2X + 1)(aX + b) = aX^3 + bX^2 - 2aX^2 - 2bX + aX + b$
$= a(X^3 - 2X^2 + X) + b(X^2 - 2X + 1) = aP_1(X) + bP_2(X)$.
On obtient que $F = < P_1, P_2 >$.
On vérifie que (P_1, P_2) est libre. En effet : $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\alpha P_1(X) + \beta P_2(X) = 0 &\Longleftrightarrow \alpha(X^3 - 2X^2 + X) + \beta(X^2 - 2X + 1) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \alpha X^3 + (\beta - 2\alpha)X^2 + (\alpha - 2\beta)X + \beta = 0 \\
&\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcl}
 & & \alpha & = & 0 \\
-2\alpha & + & \beta & = & 0 \\
\alpha & - & 2\beta & = & 0 \\
 & & \beta & = & 0
\end{array}\right. \\
&\Longleftrightarrow \alpha = \beta = 0.
\end{aligned}$$

Dès lors $\mathcal{B}_1 = (P_1, P_2)$ est une base de F.
$\rightarrow$ De même : soit $Q(X) \in G$.
$Q(X) = (X+1)^2(aX+b) = a(\underbrace{X^3 + 2X^2 + X}_{= Q_1(X)}) + b(\underbrace{X^2 + 2X + 1}_{= Q_2(X)})$.
Donc $G = < Q_1, Q_2 >$.
On vérifie de la même manière que $\mathcal{B}_2 = (Q_1, Q_2)$ est libre et donc $\mathcal{B}_2$ est une base de G.

2) Montrons que $E = F \oplus G$. Pour cela, montrons que $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base de E.
En effet :
$Card\,(\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2) = Card\,(1, X, X^2, X^3) = 4 = \dim E$. Reste à vérifier donc que

(P_1, P_2, Q_1, Q_2) est libre. Pour cela, soient $\alpha, \beta, \gamma, \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\alpha P_1(X) + \beta P_2(X) + \gamma Q_1(X) + \lambda Q_2(X) = 0$$
$$\Longleftrightarrow \alpha(X^3 - 2X^2 + X) + \beta(X^2 - 2X + 1) + \gamma(X^3 + 2X^2 + X) + \lambda(X^2 + 2X + 1) = 0$$
$$\Longleftrightarrow (\alpha + \gamma)X^3 + (-2\alpha + \beta + 2\gamma + \lambda)X^2 + (\alpha - 2\beta + \gamma + 2\lambda)X + (\beta + \lambda) = 0$$
$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccccc} \alpha & & & + & \gamma & & & = & 0 \\ -2\alpha & + & \beta & + & 2\gamma & + & \lambda & = & 0 \\ \alpha & - & 2\beta & + & \gamma & + & 2\lambda & = & 0 \\ & & \beta & & & + & \lambda & = & 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} \alpha & = & -\gamma \\ \alpha & = & \gamma \\ \lambda & = & 0 \\ \beta & = & -\lambda \end{array} \right.$$
$$\Longrightarrow \alpha = \beta = \gamma = \lambda = 0.$$

Chapitre 2

Généralités sur les matrices

Exercice 1

Répondre par vrai ou faux et justifier :
Soient A et B deux matrices réelles quelconques.

1) Si le produit AB existe, alors BA existe également.
2) Si $AB = O$, alors $A = O$ ou $B = O$ (où O est la matrice nulle).

Solution.

1) Faux car si A est d'ordre $(3, 2)$ et B d'ordre $(2, 1)$, alors AB existe et est d'ordre $(3, 1)$ mais BA n'existe pas car $1 =$ nombre de colonnes de $B \neq$ nombre de lignes de $A = 3$.
2) Faux car : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 2

Soient A, B, C et D les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer le produit AB. Que pensez-vous du produit BA ?
2) Calculer le produit BC. Que pensez-vous du produit CB ?
3) Calculer $3C - 4D$.

Solution.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1)

$$AB = \underset{\substack{\downarrow \\ (2,3)}}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}} \underset{\substack{\downarrow \\ (3,2)}}{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} = \underset{\substack{\downarrow \\ (2,2)}}{\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}}.$$

$$BA = \underset{\underset{(3,2)}{\downarrow}}{\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}} \underset{\underset{(2,3)}{\downarrow}}{\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}} = \underset{\underset{(3,3)}{\downarrow}}{\begin{pmatrix}-3 & -3 & -3\\ 8 & 10 & 12\\ 5 & 7 & 9\end{pmatrix}}.$$

AB et BA n'ont pas la même taille (ne sont pas de même ordre).

2)

$$BC = \underset{\underset{(3,2)}{\downarrow}}{\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}} \underset{\underset{(2,2)}{\downarrow}}{\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}} = \underset{\underset{(3,2)}{\downarrow}}{\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 4 & -2\\ 2 & 0\end{pmatrix}}.$$

CB est impossible car C est de type $(2,2)$ et B est de type $(3,2)$

3)

$$3C - 4D = \begin{pmatrix}0 & 3\\ 6 & -3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}20 & 8\\ -4 & 12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-20 & -5\\ 10 & -15\end{pmatrix}.$$

Exercice 3

Soients

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Calculer $A^2 + B^2 + 2AB$, $(A+B)^2$, $A^2 - B^2$, et $(A-B)(A+B)$.
Que peut-on conclure ?.

Solution.

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

- $A^2 = A.A = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$

  $B^2 = B.B = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$

  $A.B = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$

  Donc $A^2 + B^2 + 2AB = \begin{pmatrix}2 & 2\\ -2 & 2\end{pmatrix}.$

  $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}.$

  On remarque que $(A+B)^2 \neq A^2 + B^2 + 2AB$ (ceci puisque $AB \neq BA$).

- $A^2 - B^2 = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$

  $(A-B)(A+B) = \begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}.$

  On remarque que $A^2 - B^2 \neq (A-B)(A+B)$. Et ceci est dû au fait que $AB \neq BA$.

Exercice 4
Soit $E = \{aI_2 + bK \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ a, b \in \mathbb{R}\}$, où

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer K^2.
2) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, donner une base de E et déduire sa dimension.
3) Soient A et B deux matrices de E. Comparer AB et BA. Que peut-on constater ?

Solution.
$E = \{aI_2 + bK \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ a, b \in \mathbb{R}\}$, où $K = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

1) $K^2 = K.K = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2) On rappelle que $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $2 \times 2 = 4$.
   • $E = Vect(I_2, K)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ engendré par (I_2, K).
   • (I_2, K) est libre dans E. En effet :
   Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \alpha I_2 + \beta K = O &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta & \beta \\ -\beta & -\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha + \beta & \beta \\ -\beta & \alpha - \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \alpha = \beta = 0. \end{aligned}$$

3) Soient $A, B \in E$. On peut écrire donc

$$A = aI_2 + bK \text{ et } B = cI_2 + dK \text{ où } a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned} AB = (aI_2 + bK)(cI_2 + dK) &= acI_2^2 + adI_2.K + bcK.I_2 + bdK^2 \\ &= acI_2 + adK + bcK + bd\,O \\ &= acI_2 + (ad + bc)K. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BA = (cI_2 + dK)(aI_2 + bK) &= caI_2^2 + cbK.I_2 + daI_2.K + dbK^2 \\ &= acI_2 + (ad + bc)K. \qquad (ac = ca \text{ car } a, c \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

On constate que le produit des matrices est commutatif dans l'espace vectoriel E. Ce qui n'est pas vrai en général dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 5
Soit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles carrées d'ordre 2. On désigne par E l'ensemble de toutes les matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ayant la forme particulière $A = \begin{pmatrix} a & a \\ a+b & b \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.
On considère ensuite les deux matrices de E données par : $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que toute matrice A de E s'écrit comme $A = aM + bN$.
2) En déduire que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
3) Montrer que $\mathcal{B} = (M, N)$ est une base de E puis donner $\dim E$.
4) En déduire que E n'est pas égal à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Solution.
$E = \left\{ A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ A = \begin{pmatrix} a & a \\ a+b & b \end{pmatrix} \ , a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

1) $A \in E \Longleftrightarrow A = \begin{pmatrix} a & a \\ a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & b \end{pmatrix} = aM + bN.$
2) On a $E \subseteq \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Donc il suffit de montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   - $E \neq \emptyset$ car $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in E$ ($a = 0$ et $b = 0$).
   - Si $A = aM + bN$ et $B = a'M + b'N$, alors

   $$\alpha A + \beta B = (\underbrace{\alpha a + \beta a'}_{a''})M + (\underbrace{\alpha b + \beta b'}_{b''})N \in E.$$

   <u>Autre méthode</u> (plus simple et plus bénéfique) :
   D'après 1), $E =< M, N >= Vect(M, N)$. E est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Par suite E est lui même un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

3) On a $\mathcal{B} = (M, N)$ est un système générateur de E. Il est facile de vérifier que $\mathcal{B}$ est libre ($\alpha M + \beta N = 0 \Longrightarrow \alpha = \beta = 0$).
   <u>Conclusion :</u> $\mathcal{B}$ est une base de E et $\dim E = Card\,(\mathcal{B}) = 2$.
4) On sait que $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ est de dimension $(2 \times 2) \Longrightarrow \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = 4$, et $\dim E = 2$. Par suite $E \neq \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 6
Soit E l'ensemble des matrices de la forme :

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a+b & 0 & -b \\ 0 & a+2b & 0 \\ -b & 0 & a+b \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et déterminer une base et la dimension de E.

Solution.

$$E = \left\{ M(a,b) = \begin{pmatrix} a+b & 0 & -b \\ 0 & a+2b & 0 \\ -b & 0 & a+b \end{pmatrix} \ / \ a,b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Soit $M(a,b) \in E$.

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 & -b \\ 0 & 2b & 0 \\ -b & 0 & b \end{pmatrix} = a \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\overset{\shortparallel}{I_3}} + b \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\overset{\shortparallel}{J}}.$$

Donc $E = Vect(I_3, J)$ qui est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par I_3 et J. Vérifions que (I_3, J) est libre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. En effet : $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\alpha I_3 + \beta J = O \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha+\beta & 0 & -\beta \\ 0 & \alpha+2\beta & 0 \\ -\beta & 0 & \alpha+\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta = 0 \\ -\beta = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \alpha = \beta = 0.$$

Par suite, (I_3, J) est une base de E et $\dim E = 2$.

Exercice 7

Montrer que :

1) Pour toute matrice A, le produit $A\,{}^tA$ est une matrice carrée symétrique.

2) Si A est une matrice symétrique ou antisymétrique, alors A^2 est symétrique.

3) Toute matrice carrée peut s'écrire comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Solution.

1) Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.
   • On a ${}^tA \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. Donc $\underset{(m,n)}{\underset{\downarrow}{A}} \, . \, \underset{(n,m)}{\underset{\downarrow}{{}^tA}}$ est de type (m,m), par suite $A\,.\,{}^tA$ est carrée.

   • ${}^t(A.{}^tA) = {}^t({}^tA).{}^tA = A.{}^tA$. Par suite, $A.{}^tA$ est symétrique puisqu'elle coïncide avec sa transposée.

2) • A est symétrique $\Longleftrightarrow$ ${}^tA = A$.
   Or ${}^t(A^2) = {}^t(A.A) = {}^tA.{}^tA = A.A = A^2$. Donc A^2 est symétrique.
   • A est antisymétrique $\Longleftrightarrow$ ${}^tA = -A$.
   Or ${}^t(A^2) = {}^t(A.A) = {}^tA.{}^tA = (-A).(-A) = A^2$. Donc A^2 est symétrique.

3) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\begin{aligned} A &= A + \frac{1}{2}\,{}^tA - \frac{1}{2}\,{}^tA \\ &= \frac{1}{2}\,A + \frac{1}{2}\,A + \frac{1}{2}\,{}^tA - \frac{1}{2}\,{}^tA \\ &= \left(\frac{1}{2}\,A + \frac{1}{2}\,{}^tA\right) + \left(\frac{1}{2}\,A - \frac{1}{2}\,{}^tA\right) \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}(A + {}^tA)}_{\substack{\shortparallel \\ S}} + \underbrace{\frac{1}{2}(A - {}^tA)}_{\substack{\shortparallel \\ U}} = S + U. \end{aligned}$$

Vérifions que S est symétrique et T est antisymétrique. En effet :

$${}^tS = {}^t\left(\frac{1}{2}(A + {}^tA)\right) = \frac{1}{2}\,{}^t(A + {}^tA) = \frac{1}{2}({}^tA + {}^t{}^tA) = \frac{1}{2}({}^tA + A) = S.$$

$${}^tU = {}^t\left(\frac{1}{2}(A - {}^tA)\right) = \frac{1}{2}\,{}^t(A - {}^tA) = \frac{1}{2}({}^tA - {}^t{}^tA) = -\frac{1}{2}(A - {}^tA) = -U.$$

Exercice 8
Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n. On suppose que A est inversible.
Montrer que : $(A+B)A^{-1}(A-B) = (A-B)A^{-1}(A+B)$.

Solution.
$A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que A est inversible.

- $$\begin{aligned} (A+B)A^{-1}(A-B) &= (A+B)(A^{-1}.A - A^{-1}.B) = (A+B)(I - A^{-1}.B) \\ &= A.I - A.A^{-1}.B + B.I - B.A^{-1}.B = A - B + B - B.A^{-1}.B \\ &= A - B.A^{-1}.B. \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} (A-B)A^{-1}(A+B) &= (A.A^{-1} - B.A^{-1})(A+B) = (I - B.A^{-1})(A+B) \\ &= I.A + I.B - B.A^{-1}.A - B.A^{-1}.B = A + B - B - B.A^{-1}.B \\ &= A - B.A^{-1}.B. \end{aligned}$$

Donc $(A+B)A^{-1}(A-B) = (A-B)A^{-1}(A+B)$.

Exercice 9
On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer $B^3 - 3B^2 + 2I_3$. En déduire que B est inversible et calculer B^{-1}.
2) Calculer $D = B^{-1}AB$. En déduire A^{-1} et A^n pour tout $n \geq 2$.

Solution.

1) $B^2 = B.B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

$B^3 = B^2.B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 18 & 12 & 10 \end{pmatrix}$.

$B^3 - 3B^2 + 2I_3 = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 18 & 12 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & 6 & 6 \\ 0 & 3 & 0 \\ 18 & 12 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On a :

$$\begin{aligned} B^3 - 3B^2 + 2I_3 = 0 &\iff B^3 - 3B^2 = -2I_3 \\ &\iff -\frac{1}{2}B^3 + \frac{3}{2}B^2 = I_3 \\ &\iff B\left(-\frac{1}{2}B^2 + \frac{3}{2}B\right) = I_3. \end{aligned}$$

Donc B est inversible et son inverse est :

$$\begin{aligned} B^{-1} &= -\frac{1}{2}B^2 + \frac{3}{2}B = \frac{1}{2}\left(-B^2 + 3B\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -6 & -4 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}\right] \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2) • $D = B^{-1}AB = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

• $D = B^{-1}AB \Longrightarrow D^{-1} = \left(B^{-1}AB\right)^{-1} = B^{-1}A^{-1}\left(B^{-1}\right)^{-1} = B^{-1}A^{-1}B$
$\Longrightarrow BD^{-1}B^{-1} = BB^{-1}A^{-1}BB^{-1} = IA^{-1}I = A^{-1}$.

Donc $A^{-1} = BD^{-1}B^{-1}$.

Or D est diagonale, donc $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Par suite,

$$\begin{aligned}
A^{-1} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -2 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 3 & 2 & -1\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{1}{3}\\ 0 & 1 & 0\\ 3 & 2 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -2 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 3 & 2 & -1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3}\\ 0 & 2 & 0\\ -2 & -\frac{4}{3} & \frac{8}{3}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3}\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

• On a $D = B^{-1}AB \Longrightarrow BDB^{-1} = BB^{-1}ABB^{-1} = IAI = A$.
Donc $A = BDB^{-1}$. Par suite, $\forall n \geq 2$

$$\begin{aligned}
A^n &= BD\underbrace{B^{-1}.B}_{\substack{\shortparallel\\ I}}D\underbrace{B^{-1}}_{\substack{\shortparallel\\ I}}\cdots BDB^{-1} \qquad \text{(n fois)}\\
&= BD^nB^{-1}.
\end{aligned}$$

Or $D^n = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3^n\end{pmatrix}$ puisque D est diagonale.
Dès lors,

$$\begin{aligned}
A^n &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -2 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 3 & 2 & -1\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -2 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 3^{n+1} & 2.3^n & -3^n\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1+3^{n+1} & -2+2.3^n & 1-3^n\\ 0 & 2 & 0\\ -3+3^{n+1} & -2+2.3^n & 3-3^n\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Exercice 10
Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = A - I_3.$$

1) Calculer B^n pour $n \geq 1$.
2) En déduire la valeur de A^n pour tout $n \geq 1$.

Solution.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Soit $n \geq 1$.

$$B^2 = B.B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$B^3 = B^2.B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(Notons que B est une matrice nilpotente).
Par suite, $\forall n \geq 3,\ \ B^n = B^3.B^{n-3} = O.B^{n-3} = O$.

2) On a : $B = A - I_3 \Longrightarrow A = B + I_3$.
Or $B.I_3 = I_3.B\,(= B)$, on peut donc appliquer la formule du binôme de Newton.
On obtient donc : $\forall n \geq 1$,

$$\begin{aligned} A^n = (B + I_3)^n &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k B^k I_3^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B^k I_3 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B^k \\ &= C_n^0 B^0 + C_n^1 B^1 + C_n^2 B^1 + \underbrace{C_n^3 B^3}_{\substack{\parallel \\ 0}} + \cdots \\ &= I_3 + nB + n(n-1)B^2. \end{aligned}$$

Par suite :

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + n(n-1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2n & 6n(n-1) \\ 0 & 1 & 3n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 11
Soient les matrices

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer $J^2,\ J^n$ pour tout $n \geq 3$.

2) En déduire A^n pour tout $n \geq 2$.

Solution.

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) $J^2 = J.J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3J.$

$J^3 = J^2.J = 3J.J = 3J^2 = 3.3J = 3^2 J.$

$J^4 = J^3.J = 3^2 J.J = 3^2 J^2 = 3^2.3J = 3^3 J.$

Montrons que $J^n = 3^{n-1} J \quad \forall n \geq 2$. (Par récurrence sur n).

- $n = 2 \quad J^2 = 3J^1 = J.$
- Supposons que $J^n = 3^{n-1} J.$
- Montrons que $J^{n+1} = 3^n J$. En effet :

$$J^{n+1} = J^n.J = 3^{n-1} J.J = 3^{n-1} J^2 = 3^{n-1}.3J = 3^n J.$$

2) On remarque que $A = J - I_3$.
Or $JI_3 = I_3 J = J$. On applique donc la formule du binôme de Newton. On obtient donc : $\forall n \geq 2$,

$$\begin{aligned} A^n = (J - I_3)^n &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k J^k (-1)^{n-k} I_3^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^{n-k} J^k \\ &= C_n^0 (-1)^n I_3 + \sum_{k=1}^{n} C_n^k (-1)^{n-k} J^k \\ &= (-1)^n I_3 + (-1)^{n-1} nJ + \sum_{k=2}^{n} C_n^k (-1)^{n-k} 3^{k-1} J. \end{aligned}$$

Exercice 12

1) Soit A une matrice carrée d'ordre n et à coefficients réels.
   a) On suppose que A est une matrice nilpotente. Montrer que A n'est pas inversible.
   b) On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p + A + I = 0$.
   Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}.
2) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.
   a) Montrer que $A^2 = -A + 2I$.
   b) Déterminer A^{-1}.

Solution.

1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) On suppose que A est nilpotente, alors il existe $p \in \mathbb{N}^* \ / \ A^p = 0$ et $A^{p-1} \neq 0$.
Supposons que A est inversible, donc A^{-1} existe.

$$A^p = 0 \Longrightarrow A^{p-1} = A^p.A^{-1} = 0.A^{-1} = 0.$$

Ce qui est absurde. Donc A est non inversible.

b) On suppose que $\exists p \in \mathbb{N}^* \ / \ A^p + A + I = 0$.
On a $-A^p - A = I \Longleftrightarrow A\left(-A^{p-1} - I\right) = I$. Donc A est inversible et son inverse est $A^{-1} = -\left(A^{p-1} + I\right)$.

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

a) $A^2 = A.A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ -6 & 10 & -12 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

$$-A + 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -6 \\ -6 & 8 & -12 \\ -3 & 3 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ -6 & 10 & -12 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

D'où l'égalité $A^2 = -A + 2I_3$.

b) $A^2 = -A + 2I_3 \Longleftrightarrow A^2 + A = 2I_3 \Longleftrightarrow \frac{1}{2}(A^2 + A) = I_3$
$\Longleftrightarrow A\left[\frac{1}{2}(A + I_3)\right] = I_3$.

A est donc inversible et son inverse est :

$$A^{-1} = \frac{1}{2}(A + I_3) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 6 & -7 & 12 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13 (Facultatif)

Soit $A = I_3 + B$, où I_3 est la matrice identité d'ordre 3 et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Calculer A^2 et A^3.
2) Montrer par récurrence que B^n est un multiple de B.
3) En déduire A^n.

Chapitre 3

Déterminants

Exercice 1
Trouver deux matrices A et B telles que :

$$\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B).$$

Solution.
Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On a $\det(A) = 0$, $\det(B) = 2$ et $\det(A+B) = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 2 = 4$.

Il est clair que $\det(A) + \det(B) \neq \det(A+B)$.

Exercice 2
Calculer les déterminants (où a, b et $c \in \mathbb{R}^*$).

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 3a \\ 10 & 9 & a^2 \\ 35 & 21 & 14a \end{vmatrix}$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & a & -b \\ -a & 1 & c \\ b & -c & 1 \end{vmatrix} \text{ et } \Delta_5 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \\ 1 & 5 & 15 & 35 \end{vmatrix}.$$

Solution. (Voit détails en cours)
Soient a, b et $c \in \mathbb{R}^*$.

- $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}\begin{matrix} 0 & a \\ a & 0 \\ b & c \end{matrix} = (0 + acb + bac) - (0 + 0 + 0)$

  $= 2abc.$

  (On rappelle que cette méthode dite de Sarrus n'est applicable qu'à l'ordre 3).

ou

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = -a\begin{vmatrix} a & c \\ b & 0 \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} a & 0 \\ b & c \end{vmatrix} = abc + bac = 2abc.$$

(on a développé le calcul suivant la première ligne).

- $$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{matrix} \\ \\ L_3+L_1 \\ L_4+2L_1 \end{matrix}\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{matrix} L_1+2L_3 \\ L_2+2L_3 \\ \\ \end{matrix}\begin{vmatrix} 0 & -1 & 9 \\ 0 & -4 & 13 \\ -1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} -1 & 9 \\ -4 & 13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 4 & 13 \end{vmatrix} = -23.$$

- $$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 3a \\ 10 & 9 & a^2 \\ 35 & 21 & 14a \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3a \\ 2 & 9 & a^2 \\ 7 & 21 & 14a \end{vmatrix} = 5\times 3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3a \\ 2 & 3 & a^2 \\ 7 & 7 & 14a \end{vmatrix} = 15a\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & a \\ 7 & 7 & 14 \end{vmatrix}$$

$$= 15a\times 7\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & a \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 105a\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & a \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 105a \begin{array}{ccc} {\scriptstyle C_1-C_2} & & \\ \end{array}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & a \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 105a\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -105a.$$

- $$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & a & -b \\ -a & 1 & c \\ b & -c & 1 \end{vmatrix} = \begin{matrix} \\ L_2+aL_1 \\ L_3-bL_1 \end{matrix}\begin{vmatrix} 1 & a & -b \\ 0 & 1+a^2 & c-ab \\ 0 & -c-ab & 1+b^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+a^2 & c-ab \\ -c-ab & 1+b^2 \end{vmatrix}$$

$$= (1+a^2)(1+b^2) + (c+ab)(c-ab) = 1 + a^2 + b^2 + c^2.$$

- $$\Delta_5 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \\ 1 & 5 & 15 & 35 \end{vmatrix} = \begin{matrix} \\ L_2-L_1 \\ L_3-L_1 \\ L_4-L_1 \end{matrix}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 7 & 16 \\ 0 & 3 & 12 & 31 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 7 & 16 \\ 3 & 12 & 31 \end{vmatrix} = \begin{matrix} \\ L_2-2L_1 \\ L_3-3L_1 \end{matrix}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 13 \end{vmatrix}$$

$$= 13 - 12 = 1.$$

Exercice 3

Calculer le déterminant d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans chacun des cas suivants, et en déduire si elle est inversible.

1) A est triangulaire.
2) A est diagonale.
3) A est nilpotente ($A^p = O_n$ pour $p \neq 0$).

4) A est idempotente ($A^2 = A$).
5) A est involutive ($A^2 = I_n$).
6) A est antisymétrique (${}^tA = -A$) d'ordre impair.

Solution.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Si A est triangulaire supérieure (ou inférieure), alors :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{(n-1)n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{(n-1)n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ 0 & a_{44} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{(n-1)n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = \cdots = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Par suite, A est inversible $\Longleftrightarrow \det(A) \neq 0 \Longleftrightarrow a_{ii} \neq 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

2) Si A est diagonale alors A est triangulaire. Par suite $\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$ et A est inversible $\Longleftrightarrow a_{ii} \neq 0 \quad \forall i \in \{1, ..., n\}$.

3) Si A est nilpotente alors $\exists p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = O$ et $A^{p-1} \neq O$.
$A^p = O \Longrightarrow \det A^p = \det O \Longleftrightarrow (\det A)^p = 0 \Longleftrightarrow \det A = 0$.
Donc, si A est nilpotente alors A est non inversible.

4) Si A est idempotente alors $A^2 = A$. Par suite $\det A = \det(A^2) = (\det A)^2$.
On obtient donc : $\det A - (\det A)^2 = 0 \Longrightarrow \det A\,(1 - \det A) = 0 \Longrightarrow \det A = 0$ ou $\det A = 1$.

5) Si A est involutive alors $A^2 = I_n$. Par suite $1 = \det I_n = \det(A^2) = (\det A)^2$. Ce qui implique que $\det A = -1$ ou $\det A = 1$. Donc A est involutive $\Longrightarrow A$ est inversible.

6) Si A est antisymétrique alors ${}^tA = -A$. Par suite $\det({}^tA) = \det(-A)$. Or $\det({}^tA) = \det A$ et $\det(-A) = (-1)^n \det A$. Donc $\det A = (-1)^n \det A$.
On en déduit que si n est impair alors $\det A = -\det A$; ce qui veut dire que $\det A = 0$, par suite A est non inversible.

Exercice 4
Soient a, b et c trois nombres réels. Et soient les systèmes de vecteurs $\mathbf{S} = (u_1, u_2, u_3)$ et $\mathbf{T} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ où $u_1 = (1, -a, b); u_2 = (a, 1, -c); u_3 = (-b, c, 1)$;
$v_1 = (a, b, b, a); v_2 = (0, b, a, b); v_3 = (b, 0, 0, 0)$ et $v_4 = (a, a, b, a)$.
En utilisant les déterminants et selon les valeurs de a, b et c, discuter quand le système :

1) $\mathbf{S}$ est libre dans $\mathbb{R}^3$.
2) $\mathbf{T}$ est libre dans $\mathbb{R}^4$.

Solution.
Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Et soient $\mathbf{S} = (u_1, u_2, u_3)$ et $\mathbf{T} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ où $u_1 = (1, -a, b); u_2 = (a, 1, -c); u_3 = (-b, c, 1); v_1 = (a, b, b, a); v_2 = (0, b, a, b); v_3 = (b, 0, 0, 0)$ et $v_4 = (a, a, b, a)$.

1) $\mathbf{S}$ est libre $\Longleftrightarrow \det \mathbf{S} \neq 0$
$\qquad\qquad\qquad \Longleftrightarrow 1 + a^2 + b^2 + c^2 \neq 0.$
(det $\mathbf{S} = \Delta_4$ de l'exercice 3).

2) $\mathbf{T}$ est libre $\Longleftrightarrow \det \mathbf{T} \neq 0$.
Or,

$$\det \mathbf{T} = \begin{vmatrix} a & 0 & b & a \\ b & b & 0 & a \\ b & a & 0 & b \\ a & b & 0 & a \end{vmatrix} = b \begin{vmatrix} b & b & a \\ b & a & b \\ a & b & a \end{vmatrix} = b \begin{vmatrix} \overset{C_1 - C_3}{b-a} & b & a \\ 0 & a & b \\ 0 & b & a \end{vmatrix}$$

$$= b(b-a) \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = b(b-a)(a^2 - b^2) = -b(a-b)(a-b)(a+b)$$

$$= -b(a-b)^2(a+b).$$

Donc $\mathbf{T}$ est libre dans $\mathbb{R}^4 \Longleftrightarrow b \neq 0,\ a \neq b$ et $a \neq -b$.

Exercice 5

Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Chercher A^2 en fonction de A et I_3. Déduire que A est inversible et calculer son inverse.

2) Calculer A^{-1} par la méthode des cofacteurs.

Solution.

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1) $A^2 = A.A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Donc $A^2 = 2I_3 + A$.

On a $A^2 - A = 2I_3 \Longleftrightarrow A\left[\frac{1}{2}(A - I_3)\right] = I_3$
$\qquad\qquad\qquad\qquad \Longleftrightarrow A$ est inversible et son inverse est $A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I_3)$

avec $A^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2) Calculons A^{-1} par la méthode des cofacteurs :

$\rightarrow \det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix} = 2 \neq 0$, A est donc inversible.

$$\rightarrow Com\,A = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\rightarrow {}^t Com\,A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,{}^t Com\,A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6

Soient $m \in \mathbb{R}$ et $A_m = \begin{pmatrix} m-1 & 2 & 2 \\ 2 & m+1 & 1 \\ -2 & -3 & m-3 \end{pmatrix}$.

1) Calculer le déterminant de A_m.
2) Pour quelles valeurs de m, A_m est inversible ?
3) Calculer le rang de A_m (selon les valeurs de m).

Solution.

Soient $m \in \mathbb{R}$ et $A_m = \begin{pmatrix} m-1 & 2 & 2 \\ 2 & m+1 & 1 \\ -2 & -3 & m-3 \end{pmatrix}$.

1) $\det A = \begin{vmatrix} m-1 & 2 & 2 \\ 2 & m+1 & 1 \\ -2 & -3 & m-3 \end{vmatrix} \underset{L_3+L_2}{=} \begin{vmatrix} m-1 & 2 & 2 \\ 2 & m+1 & 1 \\ 0 & m-2 & m-2 \end{vmatrix} \overset{C_2-C_3}{=} \begin{vmatrix} m-1 & 0 & 2 \\ 2 & m & 1 \\ 0 & 0 & m-2 \end{vmatrix}$

$= m\begin{vmatrix} m-1 & 2 \\ 0 & m-2 \end{vmatrix} = m(m-1)(m-2).$

Remarque : On a choisi cette méthode pour trouver $\det A_m$ sous forme de produit afin de répondre à la question suivante.

2) A_m est inversible $\Longleftrightarrow \det A_m \neq 0 \Longleftrightarrow m \in \mathbb{R} \setminus \{0,1,2\}$.

3) <u>Si $m \in \mathbb{R} \setminus \{0,1,2\}$</u>, alors $rg\,A_m = 3$.

<u>Si $m \in \{0,1,2\}$</u>, alors $rg\,A_m \neq 3 \Longrightarrow rg\,A_m \leq 2$.

$\rightarrow$ Si $m = 0$, alors on peut extraire de $A_0 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$ le déterminant d'ordre 2 : $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Donc $rg\,A_0 = 2$.

$\rightarrow$ Si $m = 1$, alors on peut extraire de $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ le déterminant d'ordre 2 : $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$. Donc $rg\, A_1 = 2$.

$\rightarrow$ Si $m = 2$, alors on peut extraire de $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ le déterminant d'ordre 2 : $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$. Donc $rg\, A_2 = 2$.

Exercice 7

Soit $D(X) = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & X & X^2 & X^3 \end{vmatrix}$ où a, b et c sont trois réels distincts.

1) Montrer que $D(X) \in \mathbb{R}[X]$ avec $\deg D(X) = 3$.

2) Montrer que $D(a) = 0$.
En déduire que : $\exists k \in \mathbb{R}$ / $D(X) = k(X-a)(X-b)(X-c)$.

3) Montrer que $D(X) = (b-a)(a-c)(b-c)(X-a)(X-b)(X-c)$.

Solution.

Soit $D(X) = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & X & X^2 & X^3 \end{vmatrix}$ où a, b et c sont trois réels distincts.

1) Pour répondre automatiquement à la question, on développe le calcul par rapport à L_4 (sinon, on effectue le calcul pour se ramener à la forme d'un polynôme).
En effet :

$$\begin{aligned} D(X) = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & X & X^2 & X^3 \end{vmatrix} &= -1 \begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 \\ b & b^2 & b^3 \\ c & c^2 & c^3 \end{vmatrix} + X \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} - X^2 \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} + X^3 \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \\ &= \lambda_0 + \lambda_1 X + \lambda_2 X^2 + \lambda_3 X^3 \end{aligned}$$

où $\lambda_0 = - \begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 \\ b & b^2 & b^3 \\ c & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$, $\lambda_1 = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$, $\lambda_2 = - \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix}$ et $\lambda_3 = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

sont tous des réels puisque a, b et c le sont. Par suite $D[X] \in \mathbb{R}[X]$.
Reste à vérifier que $D[X]$ est de degré 3 ; ce qui revient à vérifier que $\lambda_3 \neq 0$. En

effet :

$$\lambda_3 = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 - L_3 \\ = L_2 - L_3 \\ \end{matrix} \begin{vmatrix} 0 & a-c & a^2-c^2 \\ 0 & b-c & b^2-c^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a-c & a^2-c^2 \\ b-c & b^2-c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-c & (a-c)(a+c) \\ b-c & (b-c)(b+c) \end{vmatrix}$$

$$= (a-c)(b-c)\begin{vmatrix} 1 & (a+c) \\ 1 & (b+c) \end{vmatrix}$$

$$= (a-c)(b-c)(b+c-a-c)$$

$$= (a-c)(b-c)(b-a) \neq 0 \text{ puisque a, b et c sont tous distincts.}$$

2) $\rightarrow D(a) = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & a & a^2 & a^3 \end{vmatrix} = 0$ puisque $L_1 = L_4$.

$\rightarrow$ On aimerait déduire que : $\exists k \in \mathbb{R} \ / \ D(X) = k(X-a)(X-b)(X-c)$. Pour cela, il suffit de vérifier si a, b et c sont des racines de $D(X)$.
En effet : $D(a) = 0 \Longrightarrow a$ est une racine de $D(X)$.
Aussi, et pour les mêmes raisons de a, $D(b) = D(c) = 0$. Donc b et c sont des racines de $D(X)$. Par suite $D(X) = (X-a)(X-b)(X-c)Q(X)$, où $Q(X) \in \mathbb{R}[X]$. Or, $deg\, D(X) = 3 \Longrightarrow deg\, Q(X) = 0 \Longrightarrow Q = k \in \mathbb{R}$.

3) Montrons que : $D(X) = (b-a)(a-c)(b-c)(X-a)(X-b)(X-c)$. D'après (1), on a $D(X) = \lambda_0 + \lambda_1 X + \lambda_2 X^2 + \lambda_3 X^3$.
Or $\lambda_3 = (a-b)(a-c)(b-c)$ qui est le coefficient dominant de $D(X)$.

Exercice 8 (Facultatif)
En calculant le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \sin a & \cos a \\ 1 & \sin b & \cos b \\ 1 & \sin c & \cos c \end{vmatrix} \quad \text{où} \quad a, b, c \in \mathbb{R},$$

de deux façons différentes, montrer que :

$$D = \sin(a-b) + \sin(b-c) + \sin(c-a) = -4\sin\tfrac{a-b}{2}.\sin\tfrac{b-c}{2}.\sin\tfrac{c-a}{2}.$$

(Indication)

C. BAKKARI

Soient a, b et $c \in \mathbb{R}$.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \sin a & \cos a \\ 1 & \sin b & \cos b \\ 1 & \sin c & \cos c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \sin a - \sin c & \cos a - \cos c \\ 0 & \sin b - \sin c & \cos b - \cos c \\ 1 & \sin c & \cos c \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \sin a - \sin c & \cos a - \cos c \\ \sin b - \sin c & \cos b - \cos c \end{vmatrix}$$

$$= (\sin a - \sin c)(\cos b - \cos c) - (\sin b - \sin c)(\cos a - \cos c)$$

$$= (\sin a\, \cos b - \sin b\, \cos a) + (\sin b\, \cos c - \sin c\, \cos b) + (\sin c\, \cos a - \sin a\, \cos c)$$

$$= \sin(a-b) + \sin(b-c) + \sin(c-a).$$

(On rappelle que $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$).

Exercice 9 (Facultatif)

Résoudre l'équation $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & 0 & 0 \\ x & 0 & b & 0 \\ x & 0 & 0 & c \end{vmatrix} = 0$ où a, b et c sont des réels non nuls.

(Indication)
On développe le calcul par rapport à L_2. En effet :

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & 0 & 0 \\ x & 0 & b & 0 \\ x & 0 & 0 & c \end{vmatrix} &= -x \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & b & 0 \\ x & 0 & c \end{vmatrix} \\
&= -x \begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix} + a \left[-x \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & c \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & c \end{vmatrix} \right] \\
&= -xbc - axc + ab(c-x) \\
&= -x(bc + ac + ab) + abc.
\end{aligned}$$

Chapitre 4

Les applications linéaires

Exercice 1

Déterminer si les applications suivantes sont linéaires :

1) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y) = (2x+3y, 3x-5y, 0)$.
2) $s : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $s(x,y,z) = (ax+by+cz, a'x+b'y+c'z)$ où $a,b,c,a',b',c' \in \mathbb{R}$.
3) $g : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $g(x,y,z,t) = (2x+1, x-y, 2z)$.
4) $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $h(x,y) = (|x|, y)$.
5) $\ell : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X]$ définie par $\ell(P) = XP' + P$ où $\mathbb{R}_n[X]$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n et à coefficients réels.

Solution.

1) $$\begin{aligned} f\ :\ \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y) &\longmapsto (2x+3y, 3x-5y, 0). \end{aligned}$$

Soient $u=(x,y)$, $v=(x',y') \in \mathbb{R}^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

• $$\begin{aligned} f(u+v) &= f\big((x,y)+(x',y')\big) = f(x+x', y+y') \\ &= \big(2(x+x')+3(y+y'), 3(x+x')-5(y+y'), 0\big) \\ &= (2x+3y, 3x-5y, 0) + (2x'+3y', 3x'-5y', 0) \\ &= f(x,y) + f(x',y') \\ &= f(u)+f(v). \end{aligned}$$

• $$\begin{aligned} f(\alpha u) &= f\big(\alpha(x,y)\big) = (2\alpha x+3\alpha y, 3\alpha x - 5\alpha y, 0) \\ &= \alpha(2x+3y, 3x-5y, 0) \\ &= \alpha f(u). \end{aligned}$$

L'application f est bien linéaire. $\Big($On peut montrer aussi que $f(\alpha u+v) = \alpha f(u) + f(v)\Big)$.

2) $$\begin{aligned} s\ :\ \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) &\longmapsto (ax+by+cz, a'x+b'y+c'z). \end{aligned}$$

Soient $u=(x,y,z)$, $v=(x',y',z') \in \mathbb{R}^3$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$s(\alpha u+v) = s\big((\alpha x, \alpha y, \alpha z) + (x',y',z')\big)$

$$\begin{aligned}
&= s(\alpha x + x', \alpha y + y', \alpha z + z')\\
&= \big(a(\alpha x+x')+b(\alpha y+y')+c(\alpha z+z'), a'(\alpha x+x')+b'(\alpha y+y')+c'(\alpha z+z')\big)\\
&= (a\alpha x+b\alpha y+c\alpha z, a'\alpha x+b'\alpha y+c'\alpha z)+(ax'+by'+cz', a'x'+b'y'+c'z')\\
&= \alpha(ax+by+cz, a'x+b'y+c'z)+(ax'+by'+cz', a'x'+b'y'+c'z')\\
&= \alpha s(x,y,z)+s(x',y',z') = \alpha s(u)+s(v).
\end{aligned}$$

L'application s est bien linéaire.

3) $g : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$(x,y,z,t) \longmapsto (2x+1, x-y, 2z)$.

Notons que $g(0_{\mathbb{R}^4}) = g(0,0,0,0) = (1,0,0) \neq (0,0,0) = 0_{\mathbb{R}^3}$.
g est donc non linéaire.

4) $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$(x,y) \longmapsto (|x|, y)$.

Soient $u = (-1,1)$ et $v = (1,1) \in \mathbb{R}^2$.
$h(u+v) = h\big((-1,1)+(1,1)\big) = h(0,2) = (|0|,2) = (0,2)$.
Et $h(u)+h(v) = h(-1,1)+h(1,1) = (|-1|,1)+(|1|,1) = (2,2)$.

Notons que $h(u+v) \neq h(u)+h(v)$, h est donc non linéaire (même si on a $h(0_{\mathbb{R}^2}) = 0_{\mathbb{R}^2}$).

5) $\ell : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X]$
$P \longmapsto XP' + P$ (P' est le polynôme dérivé de P).

Soient $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

- $$\begin{aligned}
\ell(P+Q) &= X(P+Q)' + (P+Q)\\
&= X(P'+Q') + (P+Q)\\
&= XP' + XQ' + P + Q\\
&= (XP'+P) + (XQ'+Q)\\
&= \ell(P) + \ell(Q).
\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}
\ell(\alpha P) &= X(\alpha P)' + \alpha P\\
&= X\alpha P' + \alpha P\\
&= \alpha\,(XP'+P)\\
&= \alpha\,\ell(P).
\end{aligned}$$

ℓ est donc une application linéaire.

Exercice 2
On considère l'application f définie de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y,z,t) = (x+y+z+t, x-y-z+t).$$

1) Vérifier que f est une application linéaire.
2) Déterminer le noyau $\mathrm{Ker}(f)$ de f puis sa dimension.
3) L'application f est-elle surjective ?

Solution.
Soit $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$(x,y,z,t) \longmapsto (x+y+z+t, x-y-z+t)$.

1) Soient $u = (x, y, z, t)$, $v = (x', y', z', t') \in \mathbb{R}^4$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
f(\alpha u + v) &= f(\alpha x + x', \alpha y + y', \alpha z + z', \alpha t + t') \\
&= \big((\alpha x + x') + (\alpha y + y') + (\alpha z + z') + (\alpha t + t'), (\alpha x + x') - (\alpha y + y') \\
&\quad - (\alpha z + z') + (\alpha t + t')\big) \\
&= \alpha(x + y + z + t, x - y - z + t) + (x' + y' + z' + t', x' - y' - z' + t') \\
&= \alpha f(u) + f(v).
\end{aligned}$$

2) $\operatorname{Ker} f = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ f(x, y, z, t) = (0, 0)\}$.

• On a :

$$\begin{aligned}
f(x, y, z, t) = (0, 0) &\Longleftrightarrow (x + y + z + t, x - y - z + t) = (0, 0) \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} x + y + z + t = 0 & (1) \\ x - y - z + t = 0 & (2) \end{cases}
\end{aligned}$$

$$(1) + (2) : \qquad 2x + 2t = 0 \Longrightarrow x = -t.$$

On obtient :

$$\begin{cases} -t + y + z + t = 0 \\ x = -t \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = -z \\ x = -t. \end{cases}$$

Donc $(x, y, z, t) = (-t, -z, z, t) = (-t, 0, 0, t) + (0, -z, z, 0)$
$= t(-1, 0, 0, 1) + z(0, -1, 1, 0)$.

Par suite : $\operatorname{Ker} f =< (-1, 0, 0, 1), (0, -1, 1, 0) >$.

• On vérifie que le système $\big((-1, 0, 0, 1), (0, -1, 1, 0)\big)$ est libre dans $\mathbb{R}^4$, ce qui implique que c'est une base de $\operatorname{Ker} f$. Dès lors, $\dim \operatorname{Ker} f = 2$.

3) D'après le théorème du rang :

$$\underset{\overset{\shortparallel}{2}}{\dim \operatorname{Ker} f} + \dim \operatorname{Im} f = \underset{\overset{\shortparallel}{4}}{\dim} \mathbb{R}^4.$$

On a $\dim \operatorname{Im} f = 2$. Or $\operatorname{Im} f$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$, donc $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$. Par suite f est surjective.

Exercice 3

On considère les applications linéaires :

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \text{ définie par } f(x, y, z) = (x + y, x - z) \text{ et}$$
$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \text{ définie par } g(x, y) = (x + 2y, 3x - y, x + y).$$

1) Déterminer une base de $\operatorname{Ker}(f)$ et une base de $\operatorname{Im}(f)$.
2) Déterminer une base de $\operatorname{Ker}(g)$ et une base de $\operatorname{Im}(g)$.
3) En déduire si f et g sont injectives, surjectives, bijectives.

Solution.

Soient les applications linéaires suivantes :

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \text{ définie par } f(x, y, z) = (x + y, x - z) \text{ et}$$
$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \text{ définie par } g(x, y) = (x + 2y, 3x - y, x + y).$$

1) $\rightarrow$ $\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \ / \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ f(x,y,z) = (0,0)\}$.
On a : $f(x,y,z) = (0,0) \Longleftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x-z=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ z=x. \end{cases}$

Donc $(x,y,z) = (x,-x,x) = x(1,-1,1)$. Par suite $\operatorname{Ker} f =< (1,-1,1) >$. La famille $\{(1,-1,1)\}$ est formée par un seul vecteur non nul, donc elle est automatiquement libre, et c'est une base de $\operatorname{Ker} f$. (On en déduit que : $\dim \operatorname{Ker} f = 1$).

$\rightarrow$ D'après le théorème du rang, on a :

$$\underset{\overset{\shortparallel}{1}}{\dim \operatorname{Ker} f} + \dim \operatorname{Im} f = \underset{\overset{\shortparallel}{3}}{\dim} \mathbb{R}^3.$$

Donc $\dim \operatorname{Im} f = 3 - 1 = 2$. Or $\operatorname{Im} f$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. Par suite $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$. Et donc la base canonique $\{(1,0),(0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ sera aussi une base de $\operatorname{Im} f$.

2) $\rightarrow$ $\operatorname{Ker} f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ g(x,y) = (0,0,0)\}$.
On a :

$$g(x,y) = (0,0,0) \Longleftrightarrow (x+2y, 3x-y, x+y) = (0,0,0)$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x+2y=0 \\ 3x-y=0 \\ x+y=0 \end{cases} \Longleftrightarrow x=y=0.$$

Donc $\operatorname{Ker} g = \{(0,0)\}$. (On en déduit que $\dim \operatorname{Ker} g = 0$).

$\rightarrow$ D'après le théorème du rang, on a :

$$\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\dim \operatorname{Ker} g} + \dim \operatorname{Im} g = \underset{\overset{\shortparallel}{2}}{\dim} \mathbb{R}^2.$$

Donc $\dim \operatorname{Im} g = 2$.

Cherchons une famille génératrice de $\operatorname{Im} g$.
On a $\big((1,0),(0,1)\big)$ est un système générateur de $\mathbb{R}^2$, alors $\big(g(1,0), g(0,1)\big) = \big((1,3,1),(2,-1,1)\big)$ est un système générateur de $\operatorname{Im} f$. Or $\dim \operatorname{Im} g = 2$, par suite $\big((1,3,1),(2,-1,1)\big)$ est une base de $\operatorname{Im} g$.

3) $\rightarrow$ $\operatorname{Ker} f \neq \{(0,0,0)\}$. Donc f est non injective.
$\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$. Donc f est surjective.
Donc f est non bijective.

$\rightarrow$ $\operatorname{Ker} g = \{(0,0)\}$. Donc g est injective.
$\dim \operatorname{Im} g \neq \dim \mathbb{R}^3 \Longrightarrow \operatorname{Im} g \neq \mathbb{R}^3 \Longrightarrow g$ est non surjective.
Donc g est non bijective.

Exercice 4
Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Montrer que :

$$\dim E \neq \dim F \Longrightarrow f \text{ est non bijective.}$$

Solution.
Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Supposons que $\dim E \neq \dim F$.
Deux cas se présentent :

$\rightarrow$ Si f est non injective, alors f est non bijective.

$\rightarrow$ Si f est injective, alors : $\underbrace{\dim \operatorname{Ker} f}_{\overset{\shortparallel}{0}} + \dim \operatorname{Im} f = \dim E$. Ce qui implique que $\dim \operatorname{Im} f = \dim E \neq \dim F$. On obtient :

$$\dim \operatorname{Im} f \neq \dim F \Longrightarrow \operatorname{Im} f \neq F \Longrightarrow f \text{ est non surjective} \Longrightarrow f \text{ est non bijective.}$$

Exercice 5
Déterminer les matrices associées aux applications linéaires, relatives aux bases canoniques, de l'exercice 1.

Solution.
On rappelle que $\mathcal{B} = \big((1,0),(0,1)\big)$ et $\mathcal{B}' = \big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$ sont les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ (respectivement).

1) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$(x,y) \longmapsto (2x+3y, 3x-5y, 0)$.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} f(1,0) & f(0,1) \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \mathcal{M}(f,\mathcal{B},\mathcal{B}') = & \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow (1,0,0) \\ \leftarrow (0,1,0) \\ \leftarrow (0,0,1) \end{array} \end{array}$$

car :

$$f(1,0) = (2,3,0) = (2,0,0) + (0,3,0) + (0,0,0) = 2(1,0,0) + 3(0,1,0) + 0(0,0,1),$$
$$f(0,1) = (3,-5,0) = (3,0,0) + (0,-5,0) + (0,0,0) = 3(1,0,0) - 5(0,1,0) + 0(0,0,0).$$

2) $s : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$(x,y,z) \longmapsto (ax+by+cz, a'x+b'y+c'z)$ $(a,b,c,a',b',c' \in \mathbb{R})$.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} f(1,0,0) & f(0,1,0) & f(0,0,1) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \mathcal{M}(s,\mathcal{B}',\mathcal{B}) = & \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow (1,0) \\ \leftarrow (0,1) \end{array} \end{array}$$

En effet :

$$f(1,0,0) = (a,a') = a(1,0) + a'(0,1),$$
$$f(0,1,0) = (b,b') = b(1,0) + b'(0,1),$$
$$f(0,0,1) = (c,c') = c(1,0) + c'(0,1).$$

3) $\ell : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X]$
$P \longmapsto XP' + P.$

On rappelle que $\mathcal{C} = \big(1, X, X^2, \ldots, X^n\big)$ est la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

$$\mathcal{M}(\ell,\mathcal{C}) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \ell(1) & \ell(X) & \ell(X^2 & \cdots & \ell(X^{n-1}) & \ell(X^n) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n+1 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow 1 \\ \leftarrow X \\ \leftarrow X^2 \\ \vdots \\ \leftarrow X^{n-1} \\ \leftarrow X^n \end{array}$$

En effet :

$$\begin{aligned}
\ell(1) &= X.1' + 1 = X.0 + 1 = 1 = 1.1 + 0.X + 0.X^2 + \cdots + 0.X^{n-1} + 0.X^n, \\
\ell(X) &= X.X' + X = X.1 + X = 2X = 0.1 + 2.X + 0.X^2 + \cdots + 0.X^{n-1} + 0.X^n, \\
\ell(X^2) &= X.(X^2)' + X^2 = 2X.X + X^2 = 3X^2 = 0.1 + 0.X + 3.X^2 + \cdots + 0.X^{n-1} + 0.X^n, \\
&\vdots \\
\ell(X^{n-1}) &= X.(X^{n-1})' + X^{n-1} = (n-1)X.X^{n-2} + X^{n-1} = nX^{n-1} \\
&= 0.1 + 0.X + 0.X^2 + \cdots + n.X^{n-1} + 0.X^n, \\
\ell(X^n) &= X.(X^n)' + X^n = nX.X^{n-1} + X^n = (n+1)X^n \\
&= 0.1 + 0.X + 0.X^2 + \cdots + 0.X^{n-1} + (n+1).X^n.
\end{aligned}$$

Exercice 6

Soit l'application $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(Z) = \overline{Z}$; où $\overline{Z}$ est le conjugué de Z.

1) Montrer que f n'est pas un homomorphisme de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels.
2) Montrer que f est un homomorphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels qui est injectif. En déduire que f est un automorphisme.
3) Déterminer la matrice associée à f relativement à la base canonique de $\mathbb{C}$.

Solution.

Soit l'application

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & & Z & \longmapsto & \overline{Z} \quad \text{le conjugé de } Z. \end{array}$$

1) Notons que $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de base $\{1\}$.
Soient $Z, Z' \in \mathbb{C}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$.

$f(Z+Z') = \overline{Z+Z'} = \overline{Z} + \overline{Z'} = f(Z) + f(Z')$. Mais, $f(\alpha Z) = \overline{\alpha Z} \neq \alpha \overline{Z} = \alpha f(Z)$ si $\alpha \in i\mathbb{R}^*$. $\big($par exemple pour $\alpha = i$, $\overline{\alpha Z} = \overline{i(a+ib)} = \overline{ia-b} = -b-ia$ et $\alpha\overline{Z} = i\overline{(a+ib)} = i(a-ib) = ia+b = b+ia\big)$.
Dans ce cas, f est non linéaire.

2) Notons que $\mathbb{C}$ est aussi un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de base $\big(1, i\big)$.
• Soient $Z, Z' \in \mathbb{C}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} f(Z+Z') &= f(Z) + f(Z'). \\ f(\alpha Z) &= \overline{\alpha Z} = \overline{\alpha(a+ib)} = \alpha(a-ib) = \alpha a - i\alpha b = \alpha(a-ib) \\ &= \alpha\overline{(a+ib)} = \alpha f(Z). \end{aligned}$$

f est donc linéaire.
• $\operatorname{Ker} f = \{Z \in \mathbb{C} \ / \ f(Z) = 0\}$.
Soit $Z = a+ib$.

$$\begin{aligned} f(Z) = 0 &\Longleftrightarrow \overline{Z} = a - ib = 0 \Longleftrightarrow a = b = 0 \\ &\Longleftrightarrow Z = 0. \end{aligned}$$

Donc $\operatorname{Ker} f = \{0\} \Longrightarrow f$ est injective.
• f est un endomorphisme injectif, par suite f est surjectif. D'où f est un automorphisme.

3) On rappelle que $\mathcal{B} = (1, i)$ est la base canonique du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

$$\mathcal{M}(f,\mathcal{B}) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} f(1) & f(i) \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow 1 \\ \leftarrow i \end{array}$$

En effet :

$$\begin{aligned} f(1) &= \overline{1} = 1 = 1.1 + 0.i\,, \\ f(i) &= \overline{i} = -i = 0.i - 1.i\,. \end{aligned}$$

Exercice 7
Soit l'application

$$\begin{array}{rccc} f \ : & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ & M & \longmapsto & A.M \end{array}$$

où $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que f est linéaire.
2) Déterminer la matrice de f relativement à la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Solution.
Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et

$$\begin{array}{rccc} f \ : & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ & M & \longmapsto & A.M \end{array}$$

une application.

1) Montrons que f est linéaire :
Soient $M, M' \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
• $f(M+M') = A(M+M') = AM + AM' = f(M) + f(M')$.
• $f(\alpha M) = A.\alpha M = \alpha AM = \alpha(AM) = \alpha f(M)$.
Donc f est linéaire.

2) Remarque : On rappelle d'abord que la base canonique de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}$ est la suivante :

$$\mathcal{B} = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\underset{M_1}{\parallel}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\underset{M_2}{\parallel}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\underset{M_3}{\parallel}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\underset{M_4}{\parallel}} \right)$$

car toute matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est de la forme $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, donc :

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \\ &= a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aussi, il est facile de vérifier que (M_1, M_2, M_3, M_4) est libre.
On a :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} f(M_1) & f(M_2) & f(M_3) & f(M_4) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \mathcal{M}(f,\mathcal{B}) = & \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow M_1 \\ \leftarrow M_2 \\ \leftarrow M_3 \\ \leftarrow M_4 \end{array} \end{array}$$

En effet :

$$f(M_1) = A.M_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1.M_1 + 1.M_2 + 0.M_3 + 0.M_4\,,$$

$$f(M_2) = A.M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.M_1\,,$$

$$f(M_3) = A.M_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -1.M_3 + 1.M_4\,,$$

$$f(M_4) = A.M_4 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.M_3\,.$$

Exercice 8

Soit E un espace vectoriel réel de dimension 3. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On considère l'endomorphisme de E défini par :

$$f(e_1) = e_2 + e_3,\ f(e_2) = e_1 + e_3 \text{ et } f(e_3) = -e_1 + e_2.$$

1) Écrire M, la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
2) Soit la famille $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ telle que : $u_1 = e_1 - e_2 - e_3$, $u_2 = e_2 + e_3$ et $u_3 = e_1 + e_3$.
   a) Vérifier que $\mathcal{B}'$ est une base de E.
   b) Chercher M' la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}'$ en exprimant directement $f(u_i)$ en fonction de u_i, $i = 1, 2, 3$.
3) Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et calculer son inverse P^{-1}.
4) Retrouver M' en utilisant M, P et P'.

Solution.
Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel tel que $\dim E = 3$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Soit $f : E \longrightarrow E$ un endomorphisme défini par :

$$f(e_1) = e_2 + e_3, \quad f(e_2) = e_1 + e_3 \quad \text{et} \quad f(e_3) = -e_1 + e_2.$$

1) La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$M = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow e_1 \\ \leftarrow e_2 \\ \leftarrow e_3 \end{array}$$

2) Soit $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ telle que :

$$\begin{cases} u_1 = e_1 - e_2 - e_3 \\ u_2 = e_2 + e_3 \\ u_3 = e_1 + e_3. \end{cases}$$

   a) Une base est une famille qui est à la fois libre et génératrice. Mais, en remarquant que $Card\,(\mathcal{B}') = 3 = \dim E$, il suffit de montrer que $\mathcal{B}'$ est libre.
   En effet : soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = 0 &\Longleftrightarrow \alpha(e_1 - e_2 - e_3) + \beta(e_2 + e_3) + \gamma(e_1 + e_3) = 0 \\ &\Longleftrightarrow (\alpha + \gamma)e_1 + (-\alpha + \beta)e_1 + (-\alpha + \beta + \gamma)e_3 = 0 \\ &\Longrightarrow \begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ -\alpha + \beta = 0 \\ -\alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases} \qquad (\text{ car } (e_1, e_2, e_3) \text{ est libre}) \\ &\Longrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0. \end{aligned}$$

   Donc $\mathcal{B}'$ est libre. Par suite $\mathcal{B}'$ est une base de E.
   b) Exprimons $f(u_1)$, $f(u_2)$ et $f(u_3)$ en fonction de u_1, u_2 et u_3.
      - $$\begin{aligned} f(u_1) = f(e_1 - e_2 - e_3) &= f(e_1) - f(e_2) - f(e_3) \qquad (\text{ car } f \text{ est linéaire}) \\ &= e_2 + e_3 - e_1 - e_3 + e_1 - e_2 \\ &= 0 \ (= 0u_1 + 0u_2 + 0u_3). \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} f(u_2) = f(e_2+e_3) &= f(e_2)+f(e_3) \qquad (\text{ car } f \text{ est linéaire}) \\ &= e_1+e_3-e_1+e_2 = e_2+e_3 = u_2 \ (= 0u_1+1u_2+0u_3). \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} f(u_3) = f(e_1+e_3) &= f(e_1)+f(e_3) \qquad (\text{ car } f \text{ est linéaire}) \\ &= e_2+e_3-e_1+e_2 \\ &= -e_1+2e_2+e_3 (=?u_1+?u_2+?u_3). \end{aligned}$$

On cherche à écrire $f(u_3)$ comme $au_1+bu_2+cu_3$, on doit donc déterminer a, b et c.
On a : $f(u_3) = -e_1+2e_2+e_3 = au_1+bu_2+cu_3$

$$\begin{aligned} &\iff -e_1+2e_2+e_3 = a(e_1-e_2-e_3)+b(e_2+e_3)+c(e_1+e_3) \\ &\iff -e_1+2e_2+e_3 = (a+c)e_1+(-a+b)e_2+(-a+b+c)e_3 \\ &\iff (a+c+1)e_1+(-a+b-2)e_2+(-a+b+c-1)e_3 = 0 \\ &\iff \begin{cases} a+c+1=0 \\ -a+b-2=0 \\ -a+b+c-1=0 \qquad (\text{ car } (e_1,e_2,e_3) \text{ est libre}) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a+c=-1 \\ -a+b=2 \\ 2+c=1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a+c=-1 \\ -a+b=2 \\ c=-1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=2 \\ c=-1. \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $f(u_3) = 0u_1+2u_2-u_3$. Par suite,

$$M' = \mathcal{M}(f,\mathcal{B}') = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(u_1) & f(u_2) & f(u_3) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow u_1 \\ \leftarrow u_2 \\ \leftarrow u_3 \end{array}$$

3) • $$P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow e_1 \\ \leftarrow e_2 \\ \leftarrow e_3 \end{array}$$

• $P^{-1} = \frac{1}{\det P}\,{}^t Com\, P$.

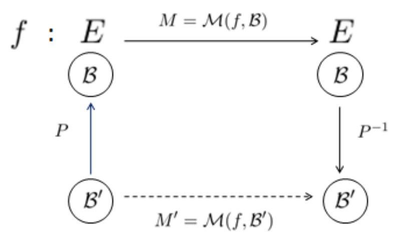
$$\det P = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right. = (1-1)-(-1) = 1.$$

$$Com\, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$^{t}Com\,P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

4)



On a :

$$M' = P^{-1}.M.P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9

Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. Soit f l'application définie sur E par :

$$f(P) = \frac{1}{2}(1 - X - X^3 + X^4)P'' + (1 - X^3)P' + (1 + X + X^2)P \quad \text{pour tout } P \in E.$$

1) Montrer que f est un endomorphisme de E.
2) Déterminer la matrice A de f relativement à la base canonique de E.

Solution.

Soit $E = \mathbb{R}^2[X] = \{P(X) = a_2X^2 + a_1X + a_0 \ / \ a_i \in \mathbb{R}\}$. Et soit

$$f(P) = \frac{1}{2}(1 - X - X^3 + X^4)P'' + (1 - X^3)P' + (1 + X + X^2)P.$$

1) Montrons que f est un endomorphisme de E (i.e. f est une application linéaire de E dans E).
   $\rightarrow$ Montrons que f est linéaire : Soient $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\bullet f(P+Q) = \frac{1}{2}(1 - X - X^3 + X^4)(P+Q)'' + (1 - X^3)(P+Q)' + (1 + X + X^2)(P+Q)$$
$$= \frac{1}{2}(1 - X - X^3 + X^4)(P'' + Q'') + (1 - X^3)(P' + Q') + (1 + X + X^2)(P+Q)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}(1-X-X^3+X^4)P'' + (1-X^3)P' + (1+X+X^2)P}_{\underset{f(P)}{\shortparallel}}$$
$$+ \underbrace{\frac{1}{2}(1-X-X^3+X^4)Q'' + (1-X^3)P' + (1+X+X^2)Q}_{\underset{f(Q)}{\shortparallel}}$$
$$= f(P) + f(Q).$$

$$\begin{aligned}\bullet f(\alpha P) &= \frac{1}{2}(1-X-X^3+X^4)(\alpha P)'' + (1-X^3)(\alpha P)' + (1+X+X^2)(\alpha P)\\ &= \frac{1}{2}(1-X-X^3+X^4)\alpha P'' + (1-X^3)\alpha P' + (1+X+X^2)\alpha P\\ &= \alpha\left[\frac{1}{2}(1-X-X^3+X^4)P'' + (1-X^3)P' + (1+X+X^2)P\right]\\ &= \alpha f(P).\end{aligned}$$

Donc f est linéaire.
$\rightarrow$ Montrons que $f : E \longrightarrow E$ (i.e. si $P \in E$ alors $f(P) \in E$).

Remarque : $f(P)$ est un polynôme qui contient X^3 et X^4. On veut montrer que $f(P)$ est de degré inférieur ou égal à 2. Pour cela, $f(P)$ doit se simplifier et ne pas contenir X^3 et X^4.
En effet :
Soit $P(X) = a_2X^2 + a_1X + a_0 \in \mathbb{R}_2[X]$. On a $P'(X) = 2a_2X + a_1$ et $P''(X) = 2a_2$.
Donc,

$$\begin{aligned}f(P) &= \frac{1}{2}(1-X-X^3+X^4)P'' + (1-X^3)P' + (1+X+X^2)P\\ &= \frac{1}{2}(1-X-X^3+X^4)2a_2 + (1-X^3)(2a_2X+a_1)' + (1+X+X^2)(a_2X^2+a_1X+a_0)\\ &= (a_2+a_1+a_0)X^2 + (a_2+a_1+a_0)X + (a_2+a_1+a_0).\end{aligned}$$

On obtient alors que $f(P) \in \mathbb{R}_2[X] = E$.

2) On rappelle que $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

$$\begin{array}{cccc} & f(1) & f(X) & f(X^2) \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \mathcal{M}(f,\mathcal{B}) = & \multicolumn{3}{c}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow 1 \\ \leftarrow X \\ \leftarrow X^2 \end{array}$$

En effet :

$$\begin{aligned}f(1) &= \frac{1}{2}(1-X-X^3+X^4).1'' + (1-X^3).1' + (1+X+X^2).1\\ &= (1+X+X^2).1 \qquad (\text{car } 1'' = 1' = 0)\\ &= 1+X+X^2 = 1.1 + 1.X + 1.X^2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(X) &= \frac{1}{2}(1-X-X^3+X^4)X'' + (1-X^3)X' + (1+X+X^2)X \\
&= (1-X^3) + (1+X+X^2)X \qquad (\text{car } X' = 1 \text{ et } X'' = 0) \\
&= 1 - X^3 + X + X^2 + X^3 \\
&= 1 + X + X^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(X^2) &= \frac{1}{2}(1-X-X^3+X^4)(X^2)'' + (1-X^3)(X^2)' + (1+X+X^2)X^2 \\
&= (1-X-X^3+X^4) + (1-X^3)2X + (1+X+X^2)X^2 \qquad (\text{car } (X^2)' = 2X \text{ et } (X^2)'' = 2) \\
&= 1 + X + X^2.
\end{aligned}$$

Exercice 10

Donner l'expression des endomorphismes f et g de $\mathbb{R}^3$ suivants définis par leurs matrices respectives :

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & -1 & -4 \\ -1 & 8 & -4 \\ -4 & -4 & -7 \end{pmatrix}.$$

Solution.

$\rightarrow$ Soit $A = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ relativement à la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{array}{rcl} f \ : \ \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ x = (x_1, x_2, x_3) & \longmapsto & f(x) = y = (y_1, y_2, y_3) = ? \end{array}$$

On va traduire cette écriture vectorielle recherchée en une écriture matricielle pour utiliser la matrice A.

Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ les coordonnées des vecteurs x et $y = f(x)$ dans la base $\mathcal{B}$.

$$\begin{aligned}
y = f(x) \Longleftrightarrow (y_1, y_2, y_3) = f(x_1, x_2, x_3) \curvearrowright \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} &= \mathcal{M}(f, \mathcal{B}).\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - x_3 \\ 2x_2 + 4x_2 - 2x_3 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Donc $\begin{cases} y_1 = \frac{1}{6}(x_1 + 2x_2 - x_3) \\ y_2 = \frac{1}{6}(2x_2 + 4x_2 - 2x_3) \\ y_3 = \frac{1}{6}(-x_1 - 2x_2 + x_3). \end{cases}$

Par suite, $\begin{array}{rcl} f \ : \ \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2, x_3) & \longmapsto & \left(\frac{1}{6}(x_1 + 2x_2 - x_3), \frac{1}{6}(2x_2 + 4x_2 - 2x_3), \frac{1}{6}(-x_1 - 2x_2 + x_3)\right). \end{array}$

$\rightarrow$ Soit $B = \mathcal{M}(g, \mathcal{B}) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & -1 & -4 \\ -1 & 8 & -4 \\ -4 & -4 & -7 \end{pmatrix}$ où g est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

De la même manière, on obtient :

$$\begin{array}{cccc} g & : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & & (x_1, x_2, x_3) & \longmapsto & \left(\frac{1}{9}(8x_1 - x_2 - 4x_3), \frac{1}{9}(-x_1 + 8x_2 - 4x_3), \frac{1}{9}(-4x_1 - 4x_2 - 7x_3)\right). \end{array}$$

Exercice 11 (Facultatif)
Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficients réels. Considérons l'application :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_{n-1}[X] \\ \qquad P \longmapsto Q \end{cases} \qquad \text{telle que } Q(X) = P(X+1) - P(X).$$

1) Montrer que φ est linéaire.
2) Déterminer la matrice de φ relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
3) En déduire $\operatorname{Ker}\varphi$ et $\operatorname{Im}\varphi$.

Chapitre 5

Diagonalisation des endomorphismes et des matrices

Exercice 1
Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de A.
2) Diagonaliser A, si c'est possible.
3) Calculer A^n.

Solution.
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) $\rightarrow$ Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme caractéristique $P_A(X)$ de A.

$$\begin{aligned} P_A(X) = \det(A - XI_3) &= \begin{vmatrix} -X & 2 & -1 \\ 3 & -2-X & 0 \\ -2 & 2 & 1-X \end{vmatrix} \\ &= \Big[X(2+X)(1-X) - 6\Big] - \Big[2(-2-X) + 6(1-X)\Big] \\ &= (1-X)\Big[X(2+X) - 6\Big] - 6 + 2(2+X) \\ &= (1-X)\Big[X(2+X) - 6\Big] - 2(1-X) \end{aligned}$$

$$= (1-X)\Big[X(2+X)-6-2\Big]$$
$$= (1-X)(X^2+2X-8)$$
$$= (1-X)(X-2)(X+4).$$

A admet trois valeurs propres distinctes dans $\mathbb{R}$: 1, 2 et -4. A est donc diagonalisable.
$\rightarrow$ Cherchons les sous-espaces propres E_1, E_2 et E_{-4}.
• $E_1 = \text{Ker}(f - id_{\mathbb{R}^3})$ où f est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est A.

$$E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ (f - id_{\mathbb{R}^3})(x,y,z) = (0,0,0)\}$$
$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ (A - I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

On a :

$$(A - I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -x+2y-z=0 \\ 3x-3y \ \ = 0 \\ -2x+2y \ \ = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} -x+2y-z=0 \\ x=y \\ x=y \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x=z \\ \\ x=y \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} z=x \\ \\ y=x. \end{cases}$$

Donc $(x,y,z) = (x,x,x) = x(1,1,1)$. Par suite $E_1 =< (1,1,1) >$. Le vecteur $u = (1,1,1)$ est non nul, donc il est libre. Dès lors, $\mathcal{B}_1 = \{u = (1,1,1)\}$ est une base de E_1. D'où $\dim E_1 = 1$.

Remarque : On savait, sans faire de calcul, que $\dim E_1 = 1$ car $1 \leq \dim E_1 \leq$ l'ordre de multiplicité de 1 qui est égal à 1. Mais on a besoin de trouver une base de E_1 afin de diagonaliser A.
• $E_2 = \text{Ker}(f - 2id_{\mathbb{R}^3})$

$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ (f - 2id_{\mathbb{R}^3})(x,y,z) = (0,0,0)\}$$
$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ (A - 2I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

On a :

$$(A - 2I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -2x+2y-z=0 \\ 3x-4y \ \ = 0 \\ -2x+2y-z=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} -2x+2y-z=0 \\ \\ x=\frac{4}{3}y \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} z=-\frac{2}{3}y \\ \\ x=\frac{4}{3}y. \end{cases}$$

Donc $(x,y,z) = \left(\frac{4}{3}y, y, -\frac{2}{3}y\right) = y\left(\frac{4}{3}, 1, -\frac{2}{3}\right)$. Par suite $E_2 =< \left(\frac{4}{3}, 1, -\frac{2}{3}\right)) >=$ $< (4,3,-2) >$.

Soit $v = (4,3,-2)$ (Notons que $< v >=< \lambda v >, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^*$).
Pour les mêmes raisons que celles de E_1, $\mathcal{B}_2 = \{v = (4,3,-2)\}$ est une base de E_2. D'où $\dim E_2 = 1$.

- $E_{-4} = \mathrm{Ker}(f + 4id_{\mathbb{R}^3})$

$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ (f + 4id_{\mathbb{R}^3})(x,y,z) = (0,0,0)\}$$
$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ (A + 4I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

On a :

$$(A + 4I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{cases} 4x + 2y - z = 0 \\ 3x + 2y \ \ = 0 \\ -2x + 2y + 5z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{2}{3}y \\ \\ z = -\frac{2}{3}y. \end{cases}$$

Donc $(x,y,z) = \left(-\frac{2}{3}y, y, -\frac{2}{3}y\right) = y\left(-\frac{2}{3}, 1, -\frac{2}{3}\right)$. Par suite $E_{-4} =< \left(-\frac{2}{3}, 1, -\frac{2}{3}\right) >=$ $< (-2,3,-2) >$.
Pour les mêmes raisons qu'auparavant, $\mathcal{B}_{-4} = \{w = (-2,3,-2)\}$ est une base de E_{-4}. D'où $\dim E_{-4} = 1$.

2) $\rightarrow$ Soit $\mathcal{B}' = (u,v,w)$ une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres.

$$\rightarrow D = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}') = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(u) & f(v) & f(w) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow u \\ \leftarrow v \\ \leftarrow w \end{array}$$

En effet :

- $u \in E_1 \iff u$ est un vecteur propre associé à 1
  $\iff f(u) = 1.u$.
- $v \in E_2 \iff v$ est un vecteur propre associé à 2
  $\iff f(v) = 2.v$.
- $w \in E_{-4} \iff w$ est un vecteur propre associé à -4
  $\iff f(w) = -4.w$.

$$\rightarrow P = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u & v & w \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow (1,0,0) \\ \leftarrow (0,1,0) \\ \leftarrow (0,0,1) \end{array}$$

$\rightarrow P^{-1} = \dfrac{1}{\det P}\, {}^t Com\, P.$

- $\det P = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{matrix} \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - L_1 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & -6 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} = 30.$
- $Com\, P = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -5 \\ 12 & 0 & 6 \\ 18 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$
- ${}^t Com\, P = \begin{pmatrix} 0 & 12 & 18 \\ 5 & 0 & -5 \\ -5 & 6 & -1 \end{pmatrix}.$
- $P^{-1} = \dfrac{1}{30} \begin{pmatrix} 0 & 12 & 18 \\ 5 & 0 & -5 \\ -5 & 6 & -1 \end{pmatrix}.$
- $D = P^{-1}.A.P \Longrightarrow A = P.D.P^{-1}.$

$$\begin{tikzcd} f : \underset{\mathcal{B}}{E} \arrow[r, "A = \mathcal{M}(f,\mathcal{B})"] & \underset{\mathcal{B}}{E} \arrow[d, "P^{-1}"] \\ \underset{\mathcal{B}'}{E} \arrow[u, "P"] \arrow[r, "D = \mathcal{M}(f,\mathcal{B}')"] & \underset{\mathcal{B}'}{E} \end{tikzcd}$$

3) On a $A = PDP^{-1}$. Donc,

$$\begin{aligned} A^n &= A \cdots A \qquad (n \text{ fois}) \\ &= PD \underbrace{P^{-1}P}_{\substack{\shortparallel \\ I_3}} D \underbrace{P^{-1}P}_{\substack{\shortparallel \\ I_3}} \cdots \underbrace{P^{-1}P}_{\substack{\shortparallel \\ I_3}} DP^{-1} \qquad (n \text{ fois}) \\ &= PD \cdots DP^{-1} \qquad (n \text{ fois}) \\ &= PD^nP^{-1}. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} A^n &= \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-4)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 12 & 18 \\ 5 & 0 & -5 \\ -5 & 6 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 1 & 2^{n+2} & (-2).(-4)^n \\ 1 & 3.2^n & 3.(-4)^n \\ 1 & -2^{n+1} & (-2).(-4)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 12 & 18 \\ 5 & 0 & -5 \\ -5 & 6 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 5.2^{n+2} + 10.(-4)^n & 12 - 12.(-4)^n & 18 - 5.2^{n+2} + 2.(-4)^n \\ 15.2^n - 15.(-4)^n & 12 + 18.(-4)^n & 18 - 15.2^n - 3.(-4)^n \\ -5.2^{n+1} + 10.(-4)^n & 12 - 12.(-4)^n & 18 + 5.2^{n+1} + 2.(-4)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Application : Pour $n = 2018$.

$$A^{2018} = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 5.2^{2020} + 10.4^{2018} & 12 - 12.4^{2018} & 18 - 5.2^{2020} + 2.4^{2018} \\ 15.2^{2018} - 15.4^{2018} & 12 + 18.4^{2018} & 18 - 15.2^{2018} - 3.4^{2018} \\ -5.2^{2019} + 10.4^{2018} & 12 - 12.4^{2018} & 18 + 5.2^{2019} + 2.4^{2018} \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer A^n. (On procédera de la même manière que l'exercice 1)

Solution.

1) $\to$ Le polynôme caractéristique $P_A(X)$ de A est :

$$P_A(X) = \det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} -X & 3 & 2 \\ -2 & 5-X & 2 \\ 2 & -3 & -X \end{vmatrix}$$

$$= L_2 + L_3 \begin{vmatrix} -X & 3 & 2 \\ 0 & 2-X & 2-X \\ 2 & -3 & -X \end{vmatrix} = \begin{array}{c} C_2 - C_3 \\ \begin{vmatrix} -X & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2-X \\ 2 & X-3 & -X \end{vmatrix} \end{array}$$

$$= -(2-X)\begin{vmatrix} -X & 1 \\ 2 & X-3 \end{vmatrix}$$
$$= -(2-X)(-X^2 + 3X - 2) = (2-X)(X^2 - 3X + 2)$$
$$= (2-X)(X-1)(X-2)$$
$$= -(X-2)^2(X-1).$$

A admet deux valeurs propres : 1 qui est simple et 2 qui est double.

$\to \bullet$ $E_1 = \mathrm{Ker}(f - id_{\mathbb{R}^3})$
$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ (f - id_{\mathbb{R}^3})(x, y, z) = (0, 0, 0)\}$
$$= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ (A - I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

On a :

$$(A-I_3)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Longleftrightarrow\begin{pmatrix}-1&3&2\\-2&4&2\\2&-3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases}-x+3y+2z=0\\-2x+4y+2z=0\\2x-3y-z=0\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}-x+3y+2z=0\\-2x+4y+2z=0\\y+z=0\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases}x=-z\\ \\y=-z.\end{cases}$$

Donc $(x,y,z)=(-z,-z,z)=z(-1,-1,1)$.
Il est simple de voir que $E_1=<(-1,-1,1)>$ et que $\dim E_1=1$ puisque $\mathcal{B}_1=\{(u=(-1,-1,1)\}$ est une base de E_1.

$\rightarrow\bullet$ $E_2=\mathrm{Ker}(f-2id_{\mathbb{R}^3})$

$$=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ /\ (f-2id_{\mathbb{R}^3})(x,y,z)=(0,0,0)\}$$

$$=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ /\ (A-2I_3)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}.$$

On a :

$$(A-2I_3)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Longleftrightarrow\begin{pmatrix}-2&3&2\\-2&3&2\\2&-3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases}-2x+3y+2z=0\\-2x+3y+2z=0\\2x-3y-2z=0\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow 2x-3y-2z=0$$

$$\Longleftrightarrow x=\frac{3}{2}y+z.$$

Donc $(x,y,z)=\left(\frac{3}{2}y+z,y,z\right)=\left(\frac{3}{2}y,y,0\right)+(z,0,z)=y\left(\frac{3}{2},1,0\right)+z(1,0,1)$.

Par suite $E_2=<\left(\frac{3}{2},1,0\right),(1,0,1)>=<\underset{\overset{\shortparallel}{v}}{(3,2,0)},\underset{\overset{\shortparallel}{w}}{(1,0,1)}>$.

On vérifie que le système (v,w) est libre. En effet,
$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$,

$$\alpha v+\beta w=0_{\mathbb{R}^3}\Longleftrightarrow\alpha(3,2,0)+\beta(1,0,1)=(0,0,0)$$

$$\Longleftrightarrow\alpha=\beta=0.$$

$\left(\text{ou tout simplement, } \mathrm{rg}(v,w)=2 \text{ puisque } \begin{vmatrix}3&1\\2&0\end{vmatrix}\neq 0\right)$. Par suite $\mathcal{B}_2=(v,w)$ est une base de E_2. D'où $\dim E_2=2$.

2) $\rightarrow \bullet$ Les valeurs propres 1 et $2 \in \mathbb{R}$.

$\bullet \begin{cases} \dim E_1 = 1 = \text{ l'ordre de multiplicité de 1} \\ \text{et } \dim E_2 = 2 = \text{ l'ordre de multiplicité de 2.} \end{cases}$

Donc A est diagonalisable.

$\rightarrow \mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f.

$$\rightarrow D = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}') = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(u) & f(v) & f(w) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow u \\ \leftarrow v \\ \leftarrow w \end{array}$$

$$\rightarrow P = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u & v & w \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow (1,0,0) \\ \leftarrow (0,1,0) \\ \leftarrow (0,0,1) \end{array}$$

$$\rightarrow P^{-1} = \frac{1}{\det P} \, {}^t Com\, P.$$

$$\bullet \det P = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{matrix} = -2 - (2 - 3) = -1.$$

$$\bullet \; Com\, P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$\bullet \; {}^t Com\, P = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$\bullet \; P^{-1} = -\begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

$\bullet \; D = P^{-1}.A.P \Longrightarrow A = P.D.P^{-1}$.

3) On a $A = PDP^{-1}$. Donc,

$$\begin{aligned} A^n &= PD^nP^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 3.2^n & 2^n \\ -1 & 2^{n+1} & 0 \\ 1 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2-2^n & -3+3.2^n & -2+2^{n+1} \\ 2-2^{n+1} & -3+2^{n+2} & -2-2^{n+1} \\ -2+2^{n+1} & 3-3.2^n & 2+5.2^n \end{pmatrix}.$$

Exercice 3
Soit m un nombre réel et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}.$$

1) Quelles sont les valeurs propres de f ?
2) Pour quelles valeurs de m, l'endomorphisme f est diagonalisable ?
3) On suppose que $m = 2$. Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Solution.

1) Calculons le polynôme caractéristique de A :

$$P_A(X) = \det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 1 \\ -1 & 2-X & 1 \\ 2-m & m-2 & m-X \end{vmatrix} \begin{matrix} 1-X & 0 \\ -1 & 2-X \\ 2-m & m-2 \end{matrix}$$
$$= (1-X)(2-X)(m-X) - (m-2) - \Big[(2-m)(2-X) + (m-2)(1-X)\Big]$$
$$= (1-X)(2-X)(m-X) - (m-2)\Big[1 - (2-X) + (1-X)\Big]$$
$$= (1-X)(2-X)(m-X).$$

Les valeurs propres de A sont $1,\ 2$ et $m \in \mathbb{R}$.

2) $\to$ <u>Si $m \in \mathbb{R} \setminus \{1,2\}$</u>, alors A admettra trois valeurs propres distinctes et réelles. Donc <u>A sera diagonalisable</u>.

$\to$ <u>Si $m = 1$</u>, alors $P_A(X) = (1-X)^2(2-X)$. Donc A sera diagonalisable si et seulement si $\dim E_1 = 2$ ($\dim E_2 = 1$ car $1 \leq \dim E_2 \leq 1 =$ l'ordre de multiplicité de 2).
En effet :

$$E_1 = \operatorname{Ker}(f - id_{\mathbb{R}^3}) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ (f - id_{\mathbb{R}^3})(x,y,z) = (0,0,0)\}$$
$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ (A - I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

On a :

$$(A-I_3)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Longleftrightarrow\begin{pmatrix}0&0&1\\-1&1&1\\1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\quad\left(\text{si } m=1,\ \text{alors } A=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&2&1\\1&-1&1\end{pmatrix}\right)$$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases}z=0\\-x+y+z=0\\x-y=0\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}z=0\\ \\x=y.\end{cases}$$

Donc $(x,y,z)=(x,x,0)=x(1,1,0)$. Par suite $E_1=<(1,1,0)>$. On en déduit que $\dim E_1\neq 2$. D'où A est non diagonalisable.

$\rightarrow$ <u>Si $m=2$</u>, alors $P_A(X)=(1-X)(2-X)^2$. Donc A sera diagonalisable si et seulement si $\dim E_2=2$.
En effet :

$$\begin{aligned}E_2=\operatorname{Ker}(f-2id_{\mathbb{R}^3})&=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ /\ (f-2id_{\mathbb{R}^3})(x,y,z)=(0,0,0)\}\\&=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ /\ (A-2I_3)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}.\end{aligned}$$

On a :

$$(A-2I_3)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Longleftrightarrow\begin{pmatrix}-1&0&1\\-1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\quad\left(\text{si } m=2,\ \text{alors } A=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}\right)$$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases}-x+z=0\\-x+z=0\\ \quad\ 0=0\end{cases}\Longleftrightarrow x=z.$$

Donc $(x,y,z)=(x,y,x)=(x,0,x)+(0,y,0)=x(1,0,1)+y(0,1,0)$. Par suite $E_2=<(1,0,1),(0,1,0)>$.
On vérifie que le système $\big(u=(1,0,1),v=(0,1,0)\big)$ est libre.
En effet : $\operatorname{rg}(u,v)=2$ puisque $\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}\neq 0$.

Par suite $\mathcal{B}_2=(u,v)$ est une base de E_2. D'où $\dim E_2=2$. D'où A est diagonalisable.

3) On suppose que $m=2$. Dans ce cas $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$ et $P_A(X)=(1-X)(2-X)^2$.

Calculons A^k pour $k\in\mathbb{N}$. Pour cela, on a besoin de chercher une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\mathcal{M}(f,\mathcal{B}')$ est diagonale (i.e. on va diagonaliser A).

On a déjà trouvé $\mathcal{B}_2=(u,v)$ une base de E_2. Reste à trouver une base $\mathcal{B}_1$ de E_1.
(On peut remarquer que tout vecteur non nul de E_1 est une base de E_1 puisque $\dim E_1=1$. Sinon, on procède d'une manière générale).

$\rightarrow \bullet$ $E_1 = \mathrm{Ker}(f - id_{\mathbb{R}^3})$
$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ (f - id_{\mathbb{R}^3})(x,y,z) = (0,0,0)\}$
$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ (A - I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$

On a :

$$(A - I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ -x + y - z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ \\ x = y. \end{cases}$$

Donc $(x,y,z) = (x,x,0) = x(1,1,0)$. Par suite $E_1 =< (1,1,0) >$, et $\mathcal{B}_1 = \{w = (1,1,0)\}$ est une base de E_1 (puisque $(1,1,0) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$).

$\rightarrow$ Soit alors $\mathcal{B}' = \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_1 = (u,v,w)$.

$\rightarrow$ On obtient donc $D = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}') = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(u) & f(v) & f(w) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow u \\ \leftarrow v \\ \leftarrow w \end{array}$

et $P = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u & v & w \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow (1,0,0) \\ \leftarrow (0,1,0) \\ \leftarrow (0,0,1) \end{array}$

$\rightarrow P^{-1} = \dfrac{1}{\det P} \, {}^t Com\, P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

$\rightarrow D = P^{-1}AP \Longrightarrow A = PDP^{-1} \Longrightarrow A^k = PD^kP^{-1}.$

D'où,

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^k & 0 & 1 \\ 0 & 2^k & 1 \\ 2^k & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^k - 1 \\ 1 - 2^k & 2^k & 2^k - 1 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}.$$

Exercice 4

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

1) Diagonaliser A.
2) Calculer A^n en fonction de n.
3) On considère les suites (U_n), (V_n) et (W_n) définies par leurs premiers termes U_0, V_0 et W_0 et on considère les relations suivantes :

$$\begin{cases} U_{n+1} = -4U_n - 6V_n \\ V_{n+1} = 3U_n + 5V_n \\ W_{n+1} = 3U_n + 6V_n + 5W_n \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

On pose :

$$X_n = \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \\ W_n \end{pmatrix}.$$

a) Exprimer X_{n+1} en fonction de A et X_n.

b) En déduire U_n, V_n et W_n en fonction de n.

Solution.

1) $\to$ $P_A(X) = \det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} -4 - X & -6 & 0 \\ 3 & 5 - X & 0 \\ 3 & 6 & 5 - X \end{vmatrix}$

$$= (5 - X) \begin{vmatrix} -4 - X & -6 \\ 3 & 5 - X \end{vmatrix}$$
$$= (5 - X)(X^2 - X - 2)$$
$$= (5 - X)(X - 2)(X + 1).$$

A admet trois valeurs propres réelles distinctes $5,\ 2$ et -1. On en déduit que A est diagonalisable.

$\to$ Cherchons les sous-espaces propres $E_5,\ E_2$ et E_{-1}.

• Cherchons E_5 :

$$E_5 = \operatorname{Ker}(f - 5id_{\mathbb{R}^3}) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ (f - 5id_{\mathbb{R}^3})(x,y,z) = (0,0,0)\}$$
$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ (A - 5I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

On a :

$$(A - 5I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -9 & -6 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{cases} -9x - 6y = 0 \\ 3x = 0 \\ 3x + 6y = 0 \end{cases} \iff x = y = 0.$$

Donc $(x,y,z) = (0,0,z) = z(0,0,1)$. Par suite $E_5 =< (0,0,1) >$. Soit donc $\mathcal{B}_1 = \{u = (1,0,0)\}$ une base de E_5.

• De la même manière, on montre que $\mathcal{B}_2 = \{v = (-1,1,-1)\}$ et $\mathcal{B}_{-1} = \{w = (-2,1,0)\}$ sont deux bases de E_2 et E_{-1}, respectivement.

$\rightarrow \mathcal{B}' = \mathcal{B}_5 \cup \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_{-1} = (u,v,w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f.

$\rightarrow D = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $P = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

2) On a $D = PAP^{-1} \Longrightarrow A = PDP^{-1} \Longrightarrow A^n = PD^nP^{-1}$.

$$A^n = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & -2^n & (-1)^{n+1}.2 \\ 0 & 2^n & (-1)^n \\ 5^n & -2^n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -2^n + (-1)^n.2 & -2^{n+1} + (-1)^n.2 & 0 \\ 2^n + (-1)^{n+1} & 2^{n+1} + (-1)^{n+1} & 0 \\ 5^n - 2^n & 2.5^n - 2^{n+1} & 5^n \end{pmatrix}.$$

3) Soient les suites (U_n), (V_n) et (W_n) définies par leurs premiers termes U_0, V_0 et W_0

telles que :

$$\begin{cases} U_{n+1} = -4U_n - 6V_n \\ V_{n+1} = 3U_n + 5V_n \\ W_{n+1} = 3U_n + 6V_n + 5W_n \end{cases} \iff \begin{pmatrix} U_{n+1} \\ V_{n+1} \\ W_{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \\ W_n \end{pmatrix}.$$

a) En posant $X_n = \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \\ W_n \end{pmatrix}$, on obtient $X_{n+1} = AX_n$.

b) On a :

$$\begin{aligned} X_n &= AX_{n-1} \\ &= A.AX_{n-2} = A^2X_{n-2} \\ &= A^2.AX_{n-3} = A^3X_{n-3} \\ &\vdots \\ &= A^nX_{n-n} = A^nX_0. \end{aligned}$$

ce qui est équivaut à :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \\ W_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2^n + (-1)^{n+2}.2 & -2^{n+1} + (-1)^{n+2}.2 & 0 \\ 2^n + (-1)^{n+1} & 2^{n+1} + (-1)^{n+1} & 0 \\ 5^n - 2^n & 2.5^n - 2^{n+1} & 5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \\ W_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \big(-2^n + (-1)^n.2\big)U_0 + \big(-2^{n+1} + (-1)^n.2\big)V_0 \\ \big(2^n + (-1)^{n+1}\big)U_0 + \big(2^{n+1} + (-1)^{n+1}\big)V_0 \\ \big(5^n - 2^n\big)U_0 + \big(2.5^n - 2^{n+1}\big)V_0 + \big(5^n\big)W_0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{cases} U_n = \big(-2^n + (-1)^n.2\big)U_0 + \big(-2^{n+1} + (-1)^n.2\big)V_0 \\ V_n = \big(2^n + (-1)^{n+1}\big)U_0 + \big(2^{n+1} + (-1)^{n+1}\big)V_0 \\ W_n = \big(5^n - 2^n\big)U_0 + \big(2.5^n - 2^{n+1}\big)V_0 + \big(5^n\big)W_0. \end{cases}$$

Exercice 5

Soit

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 7 & 8 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

1) Déterminer les valeurs propres de B.

2) B est-elle diagonalisable ? justifier votre réponse.

Solution.

1) $P_B(X) = \det(B - XI_4) = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1-X & 0 & 0 \\ 9 & 0 & \sqrt{2}-X & 0 \\ 7 & 8 & 6 & 2-X \end{vmatrix}.$

   Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des éléments diagonaux. Donc $P_B(X) = (1-X)(-1-X)(\sqrt{2}-X)(2-X)$. Par conséquent, $1,\ -1,\ \sqrt{2}$ et 2 sont les valeurs propres de B.

2) Puisque $B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et B admet quatre valeurs propres réelles distinctes, alors B est diagonalisable.

Chapitre 6

Les systèmes linéaires

Exercice 1

Résoudre, par la méthode de pivot de Gauss, les systèmes linéaires suivants :

1) $(S_1) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & + & 5y & & & = & 3 \\ 2x & + & y & - & z & = & 1 \end{array} \right.$

2) $(S_2) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & 3z & + & 2t & = & -2 \\ 2x & + & 3y & + & 4z & + & t & = & -1 \\ 3x & + & 7y & + & z & - & 6t & = & 6 \end{array} \right.$

3) $(S_3) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & y & + & 2z & = & 2 \\ x & - & 4y & + & 7z & = & 3 \end{array} \right.$

4) $(S_4) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & + & 5y & - & 2z & = & 3 \\ 2x & - & 2y & - & z & = & 1 \end{array} \right.$

5) $(S_5) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & - & 2z & = & -1 \\ 2x & + & y & - & 4z & = & 3 \\ x & + & 4y & - & 2z & = & 4 \\ 5x & + & 6y & - & 10z & = & 10 \end{array} \right.$

Solution.

1) $$(S_1) \curvearrowright \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \curvearrowright \begin{array}{r} \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - 2L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \curvearrowright \begin{array}{r} \\ -L_3 \\ L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\curvearrowright \begin{array}{r} \\ \\ L_3 - 4L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 7 \end{array}\right) \curvearrowright \begin{array}{r} \\ \\ \frac{1}{5}L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{7}{5} \end{array}\right).$$

On peut remarquer que toutes les inconnues sont principales, on aura donc une solution unique.

Le système devient :

$$(S_1) \curvearrowright \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 0 \\ & & y & - & z & = & -1 \\ & & & & z & = & \frac{7}{5} \end{array}\right. \Longrightarrow \begin{cases} x = z - y = \frac{7}{5} - \frac{2}{5} = 1 \\ y = -1 + z = -1 + \frac{7}{5} = \frac{2}{5} \\ z = \frac{7}{5}. \end{cases}$$

Donc $S = \left\{\left(1, \frac{2}{5}, \frac{7}{5}\right)\right\}$.

2) $$(S_2) \curvearrowright \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & -1 \\ 3 & 7 & 1 & -6 & 6 \end{array}\right) \curvearrowright \begin{array}{c} \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 3L_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 4 & -8 & -12 & 12 \end{array}\right).$$

On peut remarquer que $L_3 = 4L_2$, on peut donc supprimer L_2 ou L_3 (puisqu'il s'agit de la même équation), sinon, L_3 va s'annuler par calcul ($L_3 \Leftrightarrow 0 = 0$).
On obtient dans ce cas :

$$(S_2) \curvearrowright \begin{array}{c} \\ \\ L_3 - 4L_2 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$(S_2) : \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & 3z & + & 2t & = & -2 \\ & & y & - & 2z & - & 3t & = & 3 \end{array}\right. \Longrightarrow \begin{cases} x = -5 - 5z - 5t \\ y = 3 + 2z + 3t. \end{cases}$$

On obtient alors $S = \{(-5 - 5z - 5t, 3 + 2z + 3t, z, t) \ / \ z \ et \ t \in \mathbb{R}\}$.

3) $$(S_3) \curvearrowright \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -4 & 7 & 3 \end{array}\right) \curvearrowright \begin{array}{c} \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & -6 & 8 & 2 \end{array}\right)$$

$$\curvearrowright \begin{array}{c} \\ -\frac{1}{3}L_2 \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & -6 & 8 & 2 \end{array}\right) \curvearrowright \begin{array}{c} \\ \\ L_3 + 6L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} \end{array}\right).$$

On a un pivot 2 au second membre. Donc $S = \emptyset$. En effet, le système (S_3) devient

$$(S_3) : \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ y - \frac{4}{3}z = 0 \\ 0 = 2. \end{cases}$$

4) $(S_4) \curvearrowright \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \curvearrowright \begin{array}{c} \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - 2L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & -4 & 1 & 1 \end{array}\right)$

$$\curvearrowright \ \tfrac{1}{4}L_2 \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & -4 & 1 & 1 \end{array}\right) \curvearrowright \begin{array}{c} \\ \\ L_3 + 4L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{4} \end{array}\right).$$

On a un pivot 4 au second membre. Donc $S = \emptyset$.

5) $(S_5) \curvearrowright \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 1 & 4 & -2 & 4 \\ 5 & 6 & -10 & 10 \end{array}\right) \curvearrowright \begin{array}{c} \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - L_1 \\ L_4 - 5L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 7 & 0 & 5 \\ 0 & 7 & 0 & 5 \\ 0 & 21 & 0 & 15 \end{array}\right).$

On peut remarquer que $L_2 = L_3 = \frac{1}{3}L_4$, alors on peut supprimer deux lignes d'entre elles (puisque les trois lignes signifient la même équation).

$$(S_5) \curvearrowright \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 7 & 0 & 5 \end{array}\right) \curvearrowright \begin{array}{c} \\ \frac{1}{7}L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{7} \end{array}\right).$$

Et le système (S_5) devient alors :

$$\begin{cases} x - 3y - 2z = -1 \\ \qquad\quad y \quad = \frac{5}{7} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -1 + 3y + 2z = 2z + \frac{8}{7} \\ y = \frac{5}{7}. \end{cases}$$

Par suite $S = \left\{ \left(2z + \frac{8}{7}, \frac{5}{7}, z\right) \ / \ z \in \mathbb{R} \right\}$.

Exercice 2

Résoudre, par la méthode de Cramer, les systèmes linéaires suivants :

1) $(S_1) : \begin{cases} 2x & - & 5y & + & 4z & = & -3 \\ x & - & 2y & + & z & = & 5 \\ x & - & 4y & + & 6z & = & 10. \end{cases}$

2) $(S_2) : \begin{cases} 2x & - & 5y & + & 4z & + & t & = & -3 \\ x & - & 2y & + & z & - & t & = & 5 \\ x & - & 4y & + & 6z & + & 2t & = & 10. \end{cases}$

Solution.

1) Résolvons le système (S_1) par la méthode de Cramer,

$$(S_1):\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & - & 5y & + & 4z & = & -3 \\ x & - & 2y & + & z & = & 5 \\ x & - & 4y & + & 6z & = & 10 \end{array}\right. \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}}_{\overset{\shortparallel}{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\overset{\shortparallel}{X}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}}_{\overset{\shortparallel}{B}}.$$

$\rightarrow$ $\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 6 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$

(A est une matrice carrée inversible, donc (S_1) est un système de Cramer, par suite (S_1) admet une solution unique).

$\rightarrow$ $\Delta_x = \begin{vmatrix} -3 & -5 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 10 & -4 & 6 \end{vmatrix} = 124.$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 10 & 6 \end{vmatrix} = 75.$

$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -5 & -3 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1 & -4 & 10 \end{vmatrix} = 31.$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{124}{1} \\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{75}{1} \\ z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{31}{1} \end{array}\right. \Longrightarrow S = \{(124, 75, 31)\}.$$

2) Résolvons le système (S_2) par la méthode de Cramer

$$(S_2):\left\{\begin{array}{ccccccccc} 2x & - & 5y & + & 4z & + & t & = & -3 \\ x & - & 2y & + & z & - & t & = & 5 \\ x & - & 4y & + & 6z & + & 2t & = & 10 \end{array}\right. \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 6 & 2 \end{pmatrix}}_{\overset{\shortparallel}{A}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

$\rightarrow$ A est non carrée $\Rightarrow (S_2)$ non de Cramer.

$\rightarrow$ Cherchons donc le plus grand système de Cramer $(S) \subset (S_2)$; ce qui revient à chercher le plus grand déterminant non nul inclus dans A. (On peut avoir plus d'un choix).

$\rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 6 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Donc le système $\left\{ \begin{array}{ccccccccc} 2x & - & 5y & + & 4z & = & -3 & - & t \\ x & - & 2y & + & z & = & 5 & + & t \\ x & - & 4y & + & 6z & = & 10 & - & 2t \end{array} \right.$ est de Cramer.

(Attention ! le dernier système obtenu a pour inconnues, x, y et z. Le t n'est pas une inconnue. Par contre, (S_2) a pour inconnues x, y, z et t).

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = \dfrac{\Delta_x}{1} = \begin{vmatrix} -3-t & -5 & 4 \\ 5+t & -2 & 1 \\ 10-2t & -4 & 6 \end{vmatrix} = 16t + 124 \\ \\ y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = \dfrac{\Delta_y}{1} = \begin{vmatrix} 2 & -3-t & 4 \\ 1 & 5+t & 1 \\ 1 & 10-2t & 6 \end{vmatrix} = 9t + 75 \\ \\ z = \dfrac{\Delta_z}{\Delta} = \dfrac{\Delta_z}{1} = \begin{vmatrix} 2 & -5 & -3-t \\ 1 & -2 & 5+t \\ 1 & -4 & 10-2t \end{vmatrix} = 3t + 31. \end{array} \right.$$

Donc $S = \{(16t + 124, 9t + 75, 3t + 31, t) \ / \ t \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 3
Résoudre, par la méthode de Gauss, puis par celle de Cramer, le système linéaire suivant :

$$(S) : \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & 2z & + & 2t & = & -2 \\ 2x & + & 3y & - & z & + & t & = & 1 \\ x & + & 2y & - & 3z & + & t & = & 0 \end{array} \right.$$

Solution.

<u>**Méthode de Gauss :**</u>

$$(S) \curvearrowright \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \curvearrowright \begin{array}{c} \\ L_3 \\ L_2 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \curvearrowright \begin{array}{c} \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - 2L_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & -5 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & -3 & 5 \end{array}\right)$$

$$\curvearrowright \begin{array}{c} \\ \\ L_3 - L_2 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & -5 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 3 \end{array}\right) \curvearrowright \begin{array}{c} \\ \\ -\frac{1}{2}L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & -5 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -\frac{3}{2} \end{array}\right)$$

(S) devient :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & 2z & + & 2t & = & -2 \\ & & y & - & 5z & - & t & = & 2 \\ & & & & & & t & = & -\frac{3}{2} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \begin{cases} x = -7z + \frac{1}{2} \\ y = 5z + \frac{1}{2} \\ t = -\frac{3}{2}. \end{cases}$$

$S = \left\{\left(-7z + \frac{1}{2}, 5z + \frac{1}{2}, z, -\frac{3}{2}\right) \ / \ z \in \mathbb{R}\right\}$, il y a une infinité de solutions.

<u>Méthode de Cramer :</u> (s'applique aux systèmes dont la matrice associée est carrée et inversible). On a : $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2$. Considérons donc le système de Cramer à trois variables x, y et t.

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & 2t & = & -2 & - & 2z \\ 2x & + & 3y & + & t & = & 1 & + & z \\ x & + & 2y & + & t & = & 3z. & & \end{array}\right.$$

$\to \Delta_x = \begin{vmatrix} -2-2z & 1 & 2 \\ 1+z & 3 & 1 \\ 3z & 2 & 1 \end{vmatrix} = 14z + 1.$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & -2-2z & 2 \\ 2 & 1+z & 1 \\ 1 & 3z & 1 \end{vmatrix} = 10z + 1.$

$\Delta_t = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2-2z \\ 2 & 3 & 1+z \\ 1 & 2 & 3z \end{vmatrix} = -3.$

Donc $\begin{cases} x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = \dfrac{-14z+1}{2} = -7z + \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = \dfrac{10z+1}{2} = 5z + \dfrac{1}{2} \\ t = \dfrac{\Delta_t}{\Delta} = -\dfrac{3}{2}. \end{cases}$

On obtient alors $S = \left\{\left(-7z + \frac{1}{2}, 5z + \frac{1}{2}, z, -\frac{3}{2}\right) \ / \ z \in \mathbb{R}\right\}$.

Remarque : On peut choisir un autre det : $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -10$. Et la solution sera en fonction de y.

(S) devient :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2z & + & 2t & = & -2 & - & y \\ 2x & - & z & + & t & = & 1 & - & 3y \\ x & - & 3z & + & t & = & -2y. & & \end{array}\right.$$

$\begin{cases} \Delta_x = 14y - 12 \\ \Delta_z = -2y + 1 \\ \Delta_t = 15. \end{cases}$ On obtient alors $S = \left\{\left(-\frac{7}{5}y + \frac{6}{5}, y, \frac{1}{5}y - \frac{1}{10}, -\frac{3}{2}\right) \ / \ z \in \mathbb{R}\right\}$.

Exercice 4

Discuter les valeurs du paramètre réel m pour résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$1)\ (S_1) : \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & 2y & - & z & + & t & = & 1 \\ 2x & - & y & - & 2z & - & t & = & 0 \\ x & - & 3y & & & + & 2t & = & -1 \\ x & - & 4y & - & 2z & + & 3t & = & m \end{array}\right.$$

$$2)\ (S_2) : \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & y & + & 2z & = & 2 \\ x & - & 4y & + & 7z & = & m \end{array}\right.$$

$$3)\ (S_3) : \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & mz & = & 0 \\ x & + & my & + & z & = & 1 \\ mx & + & y & + & z & = & 1 \end{array}\right.$$

$$4)\ (S_4) : \left\{\begin{array}{rcccccr} x & + & 2y & + & 3mz & = & 1 \\ x & + & (m+1)y & + & (3m+1)z & = & 2 \\ x & + & 2y & + & 2mz & = & 0 \end{array}\right.$$

Solution.

$$1)\ (S_1) \curvearrowright \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & -2 & 3 & m \end{array}\right) \curvearrowright \begin{array}{c} \\ L_2-2L_1 \\ L_3-L_1 \\ L_4-L_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & m-1 \end{array}\right)$$

$$\curvearrowright \begin{array}{c} \\ -L_3 \\ L_2 \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & m-1 \end{array}\right) \curvearrowright \begin{array}{c} \\ \\ L_3-3L_2 \\ L_4+2L_2 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & m+3 \end{array}\right).$$

On peut faire $L_3 + L_4$, sinon on poursuit la méthode de Gauss :

$$\curvearrowright \begin{array}{c} \\ \\ \frac{1}{3}L_3 \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -\frac{8}{3} \\ 0 & 0 & -3 & 0 & m+3 \end{array}\right) \curvearrowright \begin{array}{c} \\ \\ \\ L_4+3L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -\frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m-5 \end{array}\right).$$

Si $m \neq 5$ $(m-5 \neq 0)$, alors $S = \emptyset$.

Si $m=5$ $(m-5=0)$, alors le système devient :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & 2y & - & z & + & t & = & 1 \\ & & y & - & z & - & t & = & 2 \\ & & & & z & & & = & -\frac{8}{3} \\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \begin{cases} x = 1+2y+z-t = t-3 \\ y = 2+z+t = 2-\frac{8}{3}+t = t-\frac{2}{3} \\ z = -\frac{8}{3}. \end{cases}$$

Par suite $S=\left\{\left(t-3, t-\frac{2}{3}, -\frac{8}{3}, t\right) \ / \ t\in\mathbb{R}\right\}$, il y a une infinité de solutions pour le système (S_1) si $m=5$.

Remarque : On pourrait remarquer que x, y et z sont des inconnues principales pendant que t est une variable secondaire. Par suite x, y et z seront exprimées en fonction de t.

2) (S_2) peut être représenté matriciellement comme suit :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -4 & 7 & m \end{array}\right) \curvearrowright \begin{array}{c} \\ L_2-2L_1 \\ L_3-L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & -6 & 8 & m-1 \end{array}\right) \curvearrowright -\frac{1}{3}L_2 \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & -6 & 8 & m-1 \end{array}\right)$$

$$\curvearrowright \begin{array}{c} \\ \\ L_3+6L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m-1 \end{array}\right).$$

Le système devient :

$$(S_2) : \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ & & y & - & \frac{4}{3}z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & m-1. \end{array}\right.$$

Si $m\neq 1$ $(m-1\neq 0)$, alors $S=\emptyset$.

Si $m=1$ $(m-1=0)$, alors le système (S_2) devient :

$$(S_2) \curvearrowright \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ & & y & - & \frac{4}{3}z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ & & y & - & \frac{4}{3}z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = 1-2y+z = 1-\frac{5}{3}z \\ y = \frac{4}{3}z. \end{cases}$$

Donc $S=\left\{\left(1-\frac{5}{3}z, \frac{4}{3}z, z\right) \ / \ z\in\mathbb{R}\right\}$.

3) $(S_3) \curvearrowright \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & m & 0 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \curvearrowright \begin{array}{c} \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - mL_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & m & 0 \\ 0 & m-1 & 1-m & 1 \\ 0 & 1-m & 1-m^2 & 1 \end{array}\right)$

$$\underset{(*)}{\uparrow}$$

<u>Si $m - 1 \neq 0$</u> $(m \neq 1)$

$$(S_3) \curvearrowright \frac{1}{m-1}L_2 \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & m & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & \frac{1}{m-1} \\ 0 & 1-m & 1-m^2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\curvearrowright \begin{array}{c} \\ \\ L_3 - (1-m)L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & m & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & \frac{1}{m-1} \\ 0 & 0 & (1-m)(2+m) & 2 \end{array}\right)$$

$$\underset{(**)}{\uparrow}$$

<u>Si $2 + m \neq 0$</u> $(m \neq -2)$

$$(S) \curvearrowright \frac{1}{(1-m)(2+m)}L_3 \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & m & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & \frac{1}{m-1} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{2}{(1-m)(2+m)} \end{array}\right)$$

Donc $(S) : \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & mz & = & 0 \\ & & y & - & z & = & \frac{1}{m-1} \\ & & & & z & = & \frac{2}{(1-m)(2+m)} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -\frac{m}{(1-m)(2+m)} \\ y = -\frac{m}{(1-m)(2+m)} \\ z = \frac{2}{(1-m)(2+m)} \end{array}\right. .$

Et $S = \left\{\left(-\frac{m}{(1-m)(2+m)}\ ,\ -\frac{m}{(1-m)(2+m)}\ ,\ \frac{2}{(1-m)(2+m)}\right)\right\}$.

<u>Si $m + 2 = 0$</u> $(m = -2)$

Vaut mieux remplacer $m = -2$ dans la dernière matrice $(**)$ obtenue juste avant de discuter le cas $m + 2 \neq 0$.

On obtient :

$$(S) \curvearrowright \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & m & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & \frac{1}{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} \end{array}\right) \Longrightarrow S = \emptyset,\ \textit{car} :$$

$$(S):\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & mz & = & 0 \\ & & y & - & z & = & \frac{1}{m-1} \\ & & & & 0 & = & 2 \end{array}\right. \quad (\textit{impossible}).$$

(Ceci puisqu'on a un pivot $\boxed{2}$ au second membre).

Si $m-1=0$ $(m=1)$

On remplace $m=1$ dans la dernière matrice obtenue $(*)$ juste avant de discuter le cas $m-1\neq 0$. On obtient :

$$(S_3) \curvearrowright \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$(S_3):\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 1 \\ & & & & 0 & = & 1 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 1 \end{array}\right. \quad (\textit{impossible}).$$

Donc $S=\emptyset$.

Conclusion

- Si $m\in\{-2,1\}$, alors $S=\emptyset$.
- Si $m\in\mathbb{R}\setminus\{-2,1\}$, alors la solution est unique.

4) (S_4) est représenté sous la forme matricielle comme suit :

$$(S_4) \curvearrowright \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3m \\ 1 & (m+1) & (3m+1) \\ 1 & 2 & 2m \end{pmatrix}}_{\overset{\shortparallel}{A_m}} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\overset{\shortparallel}{X}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\overset{\shortparallel}{B}}.$$

$$\to \det(A_m)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3m \\ 1 & (m+1) & (3m+1) \\ 1 & 2 & 2m \end{vmatrix} = \begin{array}{r} \\ L_2-L_1 \\ L_3-L_1 \end{array}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3m \\ 0 & (m-1) & 1 \\ 0 & 0 & -m \end{vmatrix}$$

$$=-m(m-1)=m(1-m).$$

(S_4) est un système de Cramer $\Longleftrightarrow m(m-1)\neq 0 \Longleftrightarrow m\neq 0$ et $m\neq 1$. Dans ce cas :

$$\to \Delta_x=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3m \\ 2 & (m+1) & (3m+1) \\ 0 & 2 & 2m \end{vmatrix} = L_2-2L_1\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3m \\ 0 & (m-3) & (1-3m) \\ 0 & 2 & 2m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (m-3) & (1-3m) \\ 2 & 2m \end{vmatrix}$$

$$=2m(m-3)-2(1-3m)=2m^2-6m-2+6m=2m^2-2=2(m^2-1).$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3m \\ 1 & 2 & (3m+1) \\ 1 & 0 & 2m \end{vmatrix} \underset{= L_2 - L_3}{\overset{L_1 - L_3}{}} \begin{vmatrix} 0 & 1 & m \\ 0 & 2 & (m+1) \\ 1 & 0 & 2m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & m \\ 2 & (m+1) \end{vmatrix} = 1 - m.$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & (m+1) & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \overset{L_1 - L_3}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & (m+1) & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & (m+1) \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 - m.$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\Delta_x}{\det(A_m)} = \dfrac{2(m-1)(m+1)}{m(1-m)} = -\dfrac{2(m+1)}{m} \\ y = \dfrac{\Delta_y}{\det(A_m)} = \dfrac{1-m}{m(1-m)} = \dfrac{1}{m} \\ z = \dfrac{\Delta_z}{\det(A_m)} = \dfrac{1-m}{m(1-m)} = \dfrac{1}{m} \, . \end{cases}$$

Donc $\left\{\left(-\dfrac{2(m+1)}{m}, \dfrac{1}{m}, \dfrac{1}{m}\right)\right\}$ est la seule solution du système (S_4) lorsque $m \notin \{0,1\}$.

Si $\underline{m \in \{0,1\}}$:

- Si $\underline{m = 0}$, alors :

$$(S_4) \curvearrowright \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\shortparallel \\ A_0}} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\substack{\shortparallel \\ X}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\shortparallel \\ B}}.$$

On a $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. Considérons donc le système à deux variables x et y.

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x + y = 2 - z \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 2(z-1) = 3 - 2z \\ y = z - 1. \end{cases}$$

Donc $S = \{3 - 2z, z - 1, z) \ / \ z \in \mathbb{R}\}$, il y a une infinité de solutions.

- Si $\underline{m = 1}$, alors :

$$(S_4) \curvearrowright \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}}_{\substack{\shortparallel \\ A_1}} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\substack{\shortparallel \\ X}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\shortparallel \\ B}}.$$

On a $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. Considérons donc le système à deux variables x et z.

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x & + & 3z & = & 1-2y \\ x & + & 4z & = & 2-2y \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & -2(y+1) \\ z & = & 1. \end{array} \right.$$

Donc $S = \{-2(y+1), y, 1) \ / \ y \in \mathbb{R}\}$, il y a une infinité de solutions.